



UNIVERSIDAD DE VALPARAISO

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemática

Método de Kantorovich sobre grupos de Lie

Tesis presentada por **Silfrido José Gómez Polanco**.
Para optar al grado de Magíster en Matemática

Profesor Guía **Dr. Rodrigo Alberto Castro Marín**.

Valparaiso, 2018

Agradecimientos

A Dios todo poderoso, a la energía del universo que siempre fluye en armonía con nosotros, a mis padres (Ana y Silfrido), a mi hermana (Annkarys); inspiración y motivo en gran parte de mis metas. Agradezco a todas aquellas personas que ya no están en éste plano, pero que están presentes en mis pensamientos siempre y que cuidan e impulsan la creencia en mi reafirmandome que si se puede.

Agradezco a Rodrigo Castro, mi tutor y amigo, por la paciencia, el apoyo constante para culminar éste trabajo y los conocimientos transmitidos.

Agradezco a todos los profesores que me acompañaron y me formaron en éste camino (Marcelo, Daniel, Gerardo, Lisandro, Amalia, Miguel, Silvio y Jesús).

Agradezco a mis amigos y compañeros por brindarme esa ayuda cuando más la necesité.

A (Isaura) por siempre estar allí motivandome a seguir, llenandome de amor y acompañandome con sus buenos consejos.

Y por último, pero no menos importante a la Universidad de Valparaiso y al claustro de profesores de ésta casa de estudios por brindarme la oportunidad de formar parte de sus egresados.

Índice general

1. Conceptos Básico de Geometría Diferencial	4
1.1. Variedades Riemannianas	4
1.1.1. Conexiones Afines	17
1.1.2. Transporte Paralelo	19
1.1.3. Función Exponencial	22
1.1.4. Métrica Riemanniana	23
2. Métodos sobre Variedades Riemannianas	28
2.1. Principales métodos	29
3. Métodos numéricos sobre Grupos de Lie	31
3.1. Preliminares sobre Grupos de Lie	31
4. Método de Kantorovich sobre grupos de Lie	41
5. Conclusión	59

Introducción

Recientemente, se ha observado un gran incremento en el interés por estudiar algoritmos para encontrar singularidades (ceros) de campos vectoriales sobre variedades Riemannianas. Evidencia de esto se puede encontrar en [1, 2, 3, 8, 10, 12, 15, 23, 28, 33, 35, 36, 37, 38].

Los métodos iterativos que permiten encontrar los ceros de una función vectorial se han estudiado ampliamente por más de un siglo. Quizas los más importantes son: el método de Newton, Shamanskii, Halley, Super-Halley, Chevyshev, Chevyshev-Halley y el método de los dos-pasos. Estos métodos han sido extendido a espacios de Banach, partiendo con la obra de Kantorovich escrita en la década de 1960, ver [24]. Existen varias pruebas para la convergencia y la unicidad de las sucesiones que generan estos métodos, bajo las distintas hipótesis en las funciones vectoriales y los puntos de inicio considerados, ver por ejemplo [8, 19, 22, 23, 27, 34, 33]. Entre los metodos numericos utilizados para encontrar los ceros de campos vectoriales o funciones, el método de Chebyshev-Halley es probablemente el más conocido y tiene orden de convergencia cúbico, de la misma manera como fué generalizado el método de Kantorovich a Espacios Banach, [19], el metodo de Chevyshev-Halley lo fué, ver [10].

En ésta tesis estudiaremos el método de Kantorovich sobre grupos de Lie, recordemos que los grupos de Lie son grupos topologicos que a la vez tienen una estructura diferencial, lo que los convierte en variedades Riemannianas [46, 7].

El estudio de los métodos iterativos sobre variedades Riemannianas comenzó con los trabajos hechos por O. Ferreira y B. Svaiter [48] en el 2002, donde se extendió el método de Kantorovich (Newton) a éste contexto. Posteriormente en el 2003 y 2006, J.P.Dedieu, P.priouret, G. Malajovich, Li,C., y Wang, J. [41, 42], utilizando los trabajos de O. Ferreira y B. Svaiter se generalizó las α -teoría y γ -teoría de Smales de las interacciones intrinsecas tipo Newton sobre variedades geodesicamente completas. Mas tarde, Ioannis K. Argyros en [18] debilitó las hipótesis para la convergencia del método de Newton sobre variedades Riemannianas; en éste mismo sentido podemos revisar los trabajos presentados por [17, 24]. En 2009 Ionnis K. Argyros y posteriormente en 2013, Jinsu He, Jinhua Wang y Jen-Chih Yao, estudiaron el método de Newton en Grupos de Lie [21]. En 2011 en su tesis doctoral [33], R. Castro extendió al contexto de las variedades riemannianas varios métodos, incluyendo entre ellos, el método simplificado de Kan-

torovich [29], en el que la derivada covariante es la misma en cada paso. Castro, extendió entre otros un método de tercer orden libre de operadores bilineales en el cual fué necesario definir el concepto de diferencias divididas en el contexto de las variedades Riemannianas [44] y también extendió algunos métodos de convergencia de tercer orden para ese mismo contexto [26, 34]. Es relevante mencionar que el método de Newton en variedades Riemannianas ya ha sido utilizado por Roy L. Adler y otros, con el fin de estudiar el modelo geométrico de la columna vertebral humana, ver [3]. Por último en el 2017, R.A. Castro y colaboradores [32] extendieron el método de Chebyshev- Halley, Euler- Chebyshev al contexto de variedades Riemannianas, además dieron algoritmos explícitos para hallar singularidades sobre campos vectoriales definidos sobre S^2 .

Ahora bien, para una buena orientación sobre la construcción y enfoque de nuestro método iniciamos con una primera sección donde recordamos algunos conceptos básicos de geometría diferencial, variedades Riemannianas. Además de algunas herramientas necesarias para la construcción del método sobre variedades como por ejemplo: conexión afín, métrica Riemanniana y transporte paralelo. Continuaremos con un recuento de los principales métodos numéricos sobre las variedades Riemannianas, es decir, algoritmos numéricos para encontrar puntos singulares de campos vectoriales sobre variedades Riemannianas, ver [2, 4, 7, 17, 43, 32, 24, 42, 48], seguidamente con la descripción más detallada de las propiedades y características que apareceren al plantear el método de Kantorovich simplificado, luego como una tercera sección se destina al estudio de los Grupos Lie y como cuarta sección se estudia la convergencia y unicidad del método de Kantorovich sobre Grupos de Lie. Finalmente dejamos un ejemplo que permite apreciar la aplicación del mismo en un grupo de Lie particular.

Capítulo 1

Conceptos Básico de Geometría Diferencial

En éste capítulo haremos un preámbulo sobre Variedades Riemannianas, iniciando con los conceptos básicos de la Geometría Diferencial en los cuales asumiremos ciertos resultados básicos de análisis matemático y de Topología.

1.1. Variedades Riemannianas

Definición 1 Sea M un espacio métrico y $p \in M$. **Una carta coordenada** alrededor de p de dimensión n es la dupla (U, φ) , donde U es un entorno de p y $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua uno a uno tal que $\hat{U} = \varphi(U)$ es un abierto en \mathbb{R}^n . Diremos que la dupla (U, φ) es una **carta coordenada propia** si $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U \subset M$ es continua.

Un ejemplo práctico para entender ésta definición se hace sobre la esfera n -dimensional de radio unitario, como se muestra a continuación:

Ejemplo 2 Consideremos la esfera n -dimensional $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

y sea $p = (0, 0, \dots, 1) \in S^n$. Una carta coordenada en torno a p de dimensión n está dada por el par $U = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} > 0\}$ y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) =$

(x_1, \dots, x_n) , además $\hat{U} = \varphi(U) = B(0, 1)$ es la bola abierta de centro cero y radio 1. Note que podemos asegurar $\varphi(U) = B(0, 1)$ es abierto ya que φ es un homeomorfismo, es más su inversa está dada por:

$$\varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n) = \left(u_1, \dots, u_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n (u_i)^2} \right), \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ver [14], lo que implica que (U, φ) es una carta coordenada, además como φ^{-1} es claramente continua tenemos que (U, φ) es una carta coordenada propia.

Definición 3 Sea M un espacio métrico. Se dice que M es una **variedad n -dimensional C^∞** si existe una colección Λ de cartas coordenadas (U, φ) , llamada **atlas de M** , tales que:

1. para cada $p \in M$ existe una carta coordenada propia $(U, \varphi) \in \Lambda$ de dimension n con $p \in U$;
2. si $(U, \varphi), (V, \Psi) \in \Lambda$ con $U \cap V \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas $\Psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \Psi(U \cap V)$ es un difeomorfismo C^∞ (de conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n);
3. Λ es maximal con respecto a las condiciones 1. y 2., es decir, Λ contiene todas las posibles cartas con estas propiedades antes mencionadas.

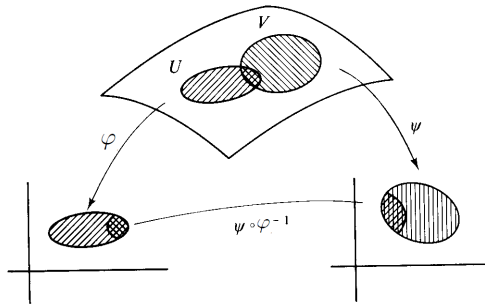


Fig. 1

Diremos que los atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}, \{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$ son compatibles si $\Psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \Psi(U \cap V)$ es un difeomorfismo C^∞ .

Como se muestra en (Fig. 1), la condición 2. es la que da sentido al concepto de variedad n -dimensional, pues no sólo se pide que el cambio de coordenadas (una función) sea biunívoco

y bicontinuo sino que sea C^∞ . Note que no pueden haber dos cartas coordenadas de dimensión distinta ya que la función cambio de coordenadas $\Psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo.

En la práctica se da una colección de cartas coordenadas propias $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ sobre M las cuales cubren a M , es decir, $M = \bigcup_{i \in I} U_i$. También es posible tener dos atlas diferentes para un mismo espacio métrico M , haciendo a M tenga dos estructuras diferenciales diferentes, en el caso de que haya compatibilidad entre las cartas de un atlas y las cartas de otro, se genera la misma estructura diferenciable. Por ejemplo $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ es una variedad que puede ser cubierto por un atlas de seis cartas en coordenadas rectangulares o por un atlas de dos cartas en coordenadas estereográficas, en efecto, consideramos el atlas $\Lambda_1 = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i=1,2,3}$ construido de la siguiente forma:

Consideremos los subconjuntos de S^2 y \mathbb{R}^2

$$U_i^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_i < 0, i = 1, 2, 3\}, U_i^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_i > 0, i = 1, 2, 3\},$$

y

$$D^2(0, 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

y además los homeomorfismos, $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow D^2(0, 1)$, $i = 1, 2, 3$

$$\varphi_1^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3),$$

$$\varphi_2^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3),$$

$$\varphi_3^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

es fácil verificar, haciendo la composición, que sus inversas son $(\varphi_i^\pm)^{-1} : D^2(0, 1) \longrightarrow U_i^\pm$, $i = 1, 2, 3$

$$(\varphi_1^\pm)^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}),$$

$$(\varphi_2^\pm)^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_3),$$

$$(\varphi_3^\pm)^{-1}(x_1, x_2) = (\pm\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3),$$

claramente las anteriores funciones como sus inversas son continuas, y sus cambios de coordenadas son diferenciables, por ejemplo:

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1} : \varphi_1(U_1^+ \cap U_2^+) \longrightarrow \varphi_2(U_1^+ \cap U_2^+)$$

está dado por

$$\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1}(x_1, x_2) = (\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_2),$$

la cual es de clase C^∞ , pues

$$1 - x_1^2 - x_2^2 > 0.$$

Así, $\Lambda_1 = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i=1,2,3}$ convierte a S^2 en una variedad 2-dimensional cubierta por seis cartas.

Por otra parte si consideramos a Λ_2 como otro atlas dado por:

$$V^1 = S^2 - \{(0, 0, 1)\} \text{ y } V^2 = S^2 - \{(0, 0, -1)\}$$

y las funciones,

$\psi_i : V^i \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$ definidas por :

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1, x_2)$$

$$\psi_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 + x_3}(x_1, x_2)$$

y sus funciones inversas, las que son facilmente verificables, son

$\psi_i^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow V^i \subset S^2$, $i = 1, 2$ dada por:

$$\psi_1^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{2x_2}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \right),$$

$$\psi_2^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{2x_2}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \right)$$

es fácil probar que los cambios de coordenadas son diferenciables, así $\Lambda_2 = \{(V^i, \Phi_i)\}_{i=1,2}$ es otro atlas que convierte a S^2 en una variedad 2-dimensional, por lo que de ésta manera se

tienen dos atlas diferentes que hacen a S^2 una variedad 2-dimensional.

Los atlas $\Lambda_1 = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i=1,2,3}$ y $\Lambda_2 = \{(V^i, \psi_i)\}_{i=1,2}$ son compatibles y por tanto dan origen a la misma variedad diferencial.

En efecto, tomemos por ejemplo $\varphi_1^+ : U_1^+ \rightarrow D^2(0,1)$, tenemos $U_1^+ \cap V^1 = U_1^+$ y

$$\begin{aligned} \psi_1 \circ (\varphi_1^+)^{-1}(x_1, x_2) &= \psi_1 \left(\left(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_1, x_2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{(1 - x_2)} \left(\left(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, x_1, x_2 \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^+ \circ \psi_1^{-1}(x_1, x_2) &= \varphi_1^+ \left(\frac{2x_1}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{2x_2}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \right) \\ &= \left(\frac{2x_2}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{1 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \right). \end{aligned}$$

Es claro que ambas son C^∞ . En forma análoga se prueba que los restantes cambios de coordenadas son C^∞ . Por lo tanto $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ es un atlas 2-dimensional de clase C^∞ en S^2 .

Otro ejemplo importante y motivacional en ésta tesis es cuando consideramos el grupo de todas las matrices invertibles de orden $n \times n$, es decir, $G = GL(n, \mathbb{R})$.

G es una variedad n^2 -dimensional, en efecto, G es un espacio métrico con función distancia

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j}^n (a_{ij} - b_{ij})^2}, \quad \text{donde } A = (a_{ij})_n \text{ y } B = (b_{ij})_n.$$

Si $A = (a_{ij}) \in G$, definamos $\phi(A) = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, ahora mostraremos que $\phi(G)$ es abierto en \mathbb{R}^{n^2} y para eso definiremos la función $\Delta : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\Delta(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{sig}\sigma} x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \dots x_{n,\sigma(n)},$$

donde S_n es el grupo de las permutaciones de n elementos, Δ es continua y $\Delta \circ \phi(A) = \det(A)$, por lo que $\phi(G) = \Delta^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ es abierto ya que $\mathbb{R} - \{0\}$ es abierto de \mathbb{R} . Esto nos dice que (G, ϕ) es una carta coordenada propia.

Por otra parte y continuando con la idea de identificar algunas de las variedades importantes, surge el siguiente teorema el cuál nos permite determinar un gran número de variedades n -dimensionales inmersas en \mathbb{R}^{n+1} , él es probado en [46].

Teorema 4 Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de C^∞ y

$$M_f = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / f(x) = 0\}.$$

Si

$$\text{grad } f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}}(p) \right) \neq 0$$

para todo $p \in M_f$, entonces M_f es una variedad n -dimensional C^∞ . Élla es llamada la hiper-superficie definida por f .

Ejemplo 5 Consideremos $Sl(n)$, el conjunto de todas las matrices con determinante igual a 1. Podemos ver a $Sl(n)$ como un subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} . $Sl(n)$ es una variedad $(n^2 - 1)$ dimensional, en efecto, como la función $f : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(A) = 1 - \det(A)$$

es C^∞ , y como

$$Sl(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} / f(A) = 0\} = f^{-1}(0),$$

luego, para probar que $Sl(n)$ es una variedad $(n^2 - 1)$ -dimensional, basta verificar que $(\text{grad } f)(A) \neq 0$ para todo $A \in Sl(n)$, en efecto,

$$(\text{grad } f)(A) = \left(-\frac{\partial(\det(A))}{\partial x_{ij}} \right)_{ij} = ((-1)^{i+j} \det(A_{ij}))_{ij},$$

donde A_{ij} es la matriz que se obtiene de A al suprimirle la i -ésima fila y j -ésima columna y

$$((-1)^{i+j} \det(A_{ij}))_{ij} \neq 0,$$

pues alguno de los menores A_{ij} tiene determinante distinto de cero ya que $\det(A) = 1$.

Definición 6 Dado un $p \in M$ y consideremos $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es diferenciable de

clase C^l ($l \leq \infty$) en p , si existe una carta (U, φ) sobre p tal que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^l en $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 7 Sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^3 + 2xy + z^2$. Veamos que f es diferenciable en $p = (0, 0, 1)$, para ello usaremos la carta (U, φ) en el cual U es un abierto sobre el hemisferio superior de la esfera y

$$\varphi(x, y, z) = (x, y) \quad \text{y} \quad \varphi^{-1}(u_1, u_2) = \left(u_1, u_2, \sqrt{1 - (u_1)^2 - (u_2)^2} \right),$$

entonces

$$f \circ \varphi^{-1}(u_1, u_2) = (u_1)^3 + 2u_1u_2 + 1 - (u_1)^2 - (u_2)^2,$$

que es de clase C^∞ en $\varphi(0, 0, 1) = (0, 0)$.

Por otra parte la siguiente definición juega un papel importante al momento de poder trasladarnos entre variedades de clase C^∞ .

Definición 8 Si $f : M \rightarrow N$ es una función entre variedades C^∞ , diremos que f es diferenciable de clase C^k (con $k \leq \infty$) en el punto p si existen cartas (U, φ) alrededor de $p \in M$ y (V, ψ) alrededor de $f(p) \in N$ tal que $f(U) \subseteq V$ y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ es de clase C^k en $\varphi(p)$, y diremos que f es diferenciable, si lo es para todo $p \in M$.

Es fácil ver que la anterior definición no depende de la elección de las parametrizaciones, para ello ver [46]

Definición 9 $\mathfrak{S}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es de clase } C^\infty\}$.

Un buen ejemplo para éste tipo de funciones es el siguiente:

Ejemplo 10 sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + z$. Veamos que f es diferenciable en $p = (0, 0, 1)$ usando la carta (U, φ) en el cual U es un abierto sobre el hemisferio superior de la esfera y $\varphi(x, y, z) = (x, y)$. Donde

$$\varphi^{-1}(u_1, u_2) = \left(u_1, u_2, \sqrt{1 - (u_1)^2 - (u_2)^2} \right),$$

tenemos entonces que

$$f \circ \varphi^{-1}(u_1, u_2) = (u_1)^2 + \sqrt{1 - (u_1)^2 - (u_2)^2},$$

la cual es de clase C^∞ en $\varphi(0, 0, 1) = (0, 0)$.

Uno de los principales elementos asociados a una variedad diferenciable es su espacio tangente en cada uno de sus puntos, la siguiente definición nos permite construirlo además construir sus elementos.

Definición 11 Un vector tangente a M en p es una función $X_p : \mathfrak{S}(M) \rightarrow \mathbb{R}$; cuyo valor en f es denotado por $X_p f$ ó $X_p(f)$ es tal que para todo $f, g \in \mathfrak{S}(M)$ y $r \in \mathbb{R}$;

1. $X_p(f + g) = X_p(f) + X_p(g)$
2. $X_p(rf) = rX_p(f)$
3. $X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$; donde fg es el producto ordinario de funciones f y g , y $f(p)X_p(g)$ es el producto de los números reales $f(p)$ y $X_p(g)$.

Ejemplo 12 Sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una curva diferenciable en M con $\alpha(0) = p$; definimos $X_p^\gamma : \mathfrak{S}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por $X_p^\gamma(f) = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}$, donde la derivada del lado derecho es la derivada usual de función real valuada de una variable real, $f \circ \gamma$, entonces X_p^γ es un vector tangente en p .

Definimos ahora algunos vectores tangentes importantes en p , a saber, $(\partial/\partial x_i)_p$, los cuales servirán como base del espacio tangente de M en p .

Definición 13 Sea (U, φ) una carta alrededor de $p \in M$ y u_1, \dots, u_n coordenadas de \mathbb{R}^n , definimos las funciones

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(p)} : \mathfrak{S}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(p)}(f) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)).$$

Ejemplo 14 Consideremos la $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^3 + 2xy + z^2$, Si (U, φ) es la carta alrededor de $p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in S^2$ donde U es el hemisferio superior de S^2 y La función φ esta definida por $\varphi(x, y, z) = (x, y)$, entonces por un cálculo directo

$$f \circ \varphi^{-1}(u_1, u_2) = (u_1)^3 + 2u_1u_2 + 1 - (u_1)^2 - (u_2)^2,$$

luego en $\varphi(p) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{(p)}(f) &= \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_1}\right|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)} \\ &= \left.\left(3(u_1)^2 + 2u_2 - \frac{2u_1}{\sqrt{1 - (u_1)^2 - (u_2)^2}}\right)\right|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)} \\ &= \frac{3}{2} + \sqrt{1 - \sqrt{2}}(\sqrt{2} + 2). \end{aligned}$$

mediante un procedimiento análogo se puede calcular

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_{(p)}(f) = \left.\left(2u_1 - \frac{2u_2}{\sqrt{1 - (u_1)^2 - (u_2)^2}}\right)\right|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Note que la función f aquí empleada es la misma función del ejemplo 7, éste conjunto de funciones $\mathfrak{S}(M)$ permiten definir una base del espacio tangente sobre cada punto de la variedad.

Definición 15 La i -ésima función coordenada local sobre M con respecto a la carta (U, φ) es la función $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $x^i(m) = u_i(\varphi(m))$. Note que tiene sentido calcular $X_p(x^i)$ en particular

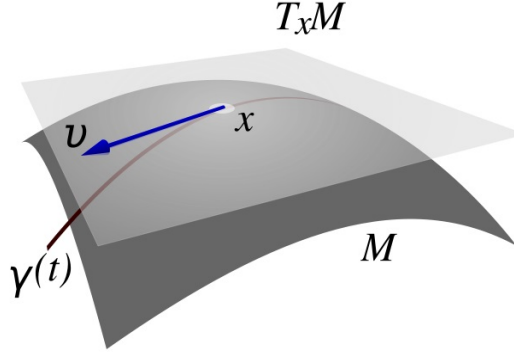
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(p)}(x^j) = \delta_i^j, \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq n.$$

Como en una superficie dada una parametrización $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ podemos definir curvas paramétricas $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow M$ dejando todas las coordenadas de la inversa de la parametrización constante exceptuando la i -ésima coordenada, más concretamente $\gamma_i(t) = \varphi^{-1}(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n)$ donde $p = \varphi^{-1}(a)$ con $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Igual que en superficies dada la curva γ_i podemos definir vectores tangentes a la superficie en el punto p , $X_p^{\gamma_i}$, mediante la formula

$$X_p^{\gamma_i} f = \frac{d(f \circ \gamma_i)}{dt} (0) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} (a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(p)} (f)$$

para todo $f \in \mathfrak{S}(M)$.

Definición 16 *El espacio tangente a M en x , $T_x M$, es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en x .*



Proposition 17 $T_p M$ es un espacio vectorial.

La demostración de la anterior proposición es laboriosa y su prueba puede ser estudiada en [46], es más se prueba que

$$B = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(p)} : i = 1, \dots, n \right\}$$

es una base para éste espacio vectorial y si $X_p \in T_p M$, entonces su representación local en la anterior base es:

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{(p)}.$$

Ejemplo 18 Consideremos $M = \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^n$. donde $\{(\mathbb{R}^n, id)\}$ es un atlas de \mathbb{R}^n ; tenemos que

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p)} : 1 \leq i \leq n \right\}$$

es una base de $T_p M$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$ (note que es independiente de la carta; pues existe una sola). Si $X_p \in T_p M$ entonces, $X_p = \sum a_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p)}$ para $a_i \in \mathbb{R}$. Por lo tanto podemos asociar a X_p la $2n$ -tupla; $(p; a_1, \dots, a_n)$, bajo ésta justificación el efecto de X_p sobre una función $f \in \mathfrak{S}(M)$ es $\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \right)_{(p)}$, que es la idea de la derivada direccional f en dirección del vector $v = (a_1, \dots, a_n)$ en el punto p .

Si M_f es la hipersuperficie definida por f , Se puede visualizar $T_p M_f$ como un subespacio de $T_p \mathbb{R}^{n+1}$ para cada $p \in M_f$, el cual es el complemento ortogonal del espacio generado por el vector normal a la superficie en el punto p .

Definición 19 *Un campo de vectores X es una asignación de un vector tangente $X_p \in T_p M$ para cada $p \in M$. Si X es un campo de vectores y $f \in \mathfrak{S}(M)$, entonces podemos definir una función real valuada Xf sobre M por $(Xf)(p) = X_p f$. Si $Xf \in \mathfrak{S}(M)$ para cada $f \in \mathfrak{S}(M)$, entonces X es llamado campo vectorial.*

Recordemos que si X es un campo de vectorial (U, φ) es una carta, entonces X_p para todo $p \in M$ puede ser escrito como

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(p)} \quad \text{para todo } p \in U$$

Por lo general se escribe $X = \sum X^i (\partial/\partial x_i)$ donde $X^i = X_p(x^i)$ es definido mediante $X^i(p) = X_p(x^i)$, ésta expresión toma sentido si sólo queremos que X sea definido en un conjunto abierto U de M , en cuyo caso tendríamos un campo vectorial sobre U . Denotaremos el conjunto de todos los campos vectoriales sobre M como $\chi(M)$.

Definición 20 *Si $X, Y \in \chi(M)$, entonces el corchete de Lie de X en Y , $[X, Y]$, es el campo de vectores $[X, Y]$ definido por:*

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf),$$

para $f \in \mathfrak{S}(M)$ y $p \in M$.

Es importante notar al lector que cuando escribimos fX nos referimos a un campo vectorial mientras que al escribir Xf es una función. Ahora como resultado de ésta definición surge el siguiente lema.

Lema 21 *$[X, Y]$ es un campo vectorial sobre M .*

La demostración de éste lema puede ser estudiada en [46]

Ejemplo 22 Sea $M = \mathbb{R}^2$, $X = (x_1x_2)^2 (\partial/\partial x_1)$ y $Y = x_2 (\partial/\partial x_2)$ y $f \in \mathfrak{S}(M)$, luego

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= (x_1x_2)^2 (\partial/\partial x_1) (x_2 (\partial f/\partial x_2)) - x_2 (\partial/\partial x_2) ((x_1x_2)^2 (\partial f/\partial x_1)) \\ &= x_1^2 x_2^3 (\partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2) - 2(x_2x_1)^2 (\partial f/\partial x_1) - x_1^2 x_2^3 (\partial^2 f/\partial x_2 \partial x_1) \\ &= -2x_2x_1^2 (\partial f/\partial x_1). \end{aligned}$$

Así,

$$[X, Y] = -2(x_2x_1)^2 (\partial/\partial x_1)$$

Lema 23 Si $X, Y, Z \in \chi(M)$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

- i. $[X, Y] = -[Y, X]$ y $[rX, Y] = r[X, Y]$
- ii. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$, $[Z, X + Y] = [Z, X] + [Z, Y]$
- iii. (Identidad de Jacobi) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

Note que en particular la "multiplicación" de corchetes de Lie de campos de vectoriales no es asociativa, pero satisface la identidad (iii) del lema. Las condiciones (i.), (ii.) y (iii.) nos recuerdan el producto cruz de vectores en \mathbb{R}^3 . Para ésta prueba ver [46].

Ejemplo 24 Sea (U, φ) una carta con $\left\{ (\partial/\partial x_i)_{(p)} : i = 1, \dots, n \right\}$ una base para T_pM con $p \in U$, entonces:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0,$$

en efecto, si $f \in \mathfrak{S}(M)$ al evaluar y computar obtenemos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues f es C^∞ .

Además si $X = \sum X^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ y $Y = \sum Y^j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ usando (ii.) del lema anterior se tiene que:

$$[X, Y] = \sum \left(X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \right) - Y^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Consideremos también $f, g \in \mathfrak{S}(M)$ y $X, Y \in \chi(M)$, es fácil verificar que:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Ahora introduciremos el concepto de la diferencial de una función entre variedades y luego aplicaremos este concepto a la idea de subvariedades. Esta idea proporcionará muchos ejemplos de conceptos geométricos. En particular, vamos concretar la visualización del espacio tangente de una hipersuperficie definida por una función f . Sean M y N variedades $\Phi : M \rightarrow N$ es diferenciable. Definimos para cada $X_p \in T_pM$ un elemento $(\Phi_*)_p(X_p)$ de $T_{\Phi(p)}N$ de tal manera que la asignación $X_p \rightarrow (\Phi_*)_p(X_p)$ sea una transformación lineal para cada $p \in M$. Una forma de hacer esto sería definir $(\Phi_*)_p$ mediante los elementos de una base de T_pM , y así podemos ver a $(\Phi_*)_p$ como una matriz. Hay un candidato natural para la definición de la matriz $(\Phi_*)_p$ el cual es el Jacobiano de $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ (Evaluado en $\varphi(p)$) donde (U, φ) es una carta alrededor de p y (V, ψ) es una carta alrededor de $\Phi(p)$. El problema con esta definición es que no es una definición invariante; es decir, la definición misma depende de la elección de las cartas coordenadas.

Definición 25 Si $\Phi : M \rightarrow N$ es diferenciable, el diferencial de Φ en p es la función $(\Phi_*)_p : T_pM \rightarrow T_{\Phi(p)}N$ definido por

$$(\Phi_*)_p(X_p)(f) = X_p(f \circ \Phi),$$

donde $X_p \in T_pM$ y $f \in \mathfrak{S}(N)$.

Cabe destacar que ésta definición es un poco abstracta respecto a las que se pueden encontrar en otra bibliografías donde la función $(\Phi_*)_p$ es denotada por $(d\Phi)_p$ o $df(p)$.

Lema 26 $(\Phi_*)_p$ esta bien definido; es decir, si $\Phi : M \rightarrow N$ y $X_p \in T_pM$, entonces $(\Phi_*)_p(X_p) \in T_{\Phi(p)}N$.

Proposition 27 Sea $\Phi : M \rightarrow N$ y $p \in M$. Entonces $(\Phi_*)_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ es una transformación lineal.

Proposition 28 (Regla de la cadena) Si $\Phi : M \rightarrow N$ y $\Psi : N \rightarrow P$ son funciones diferenciable de las variedades $M, N, y P$, si $p \in M$ y $q = \Phi(p)$, entonces

$$((\Psi \circ \Phi)_*)_p = (\Psi_*)_q \circ (\Phi_*)_p.$$

Más aún, si esto ocurre para todo $p \in M$, entonces $(\Psi \circ \Phi)_* = \Psi_* \circ \Phi_*$.

Proposition 29 Sea $\Phi : M \rightarrow N$ y $p \in M$. Si (U, φ) es una carta alrededor de p y (V, ψ) es una carta alrededor de $q = \Phi(p)$ tal que $\Phi(U) \subset V$. Si $\{(\partial/\partial x_i)_p / i = 1, \dots, m\}$ es la base de $T_p M$ asociado a la carta (U, φ) y $\{(\partial/\partial y_i)_q : i = 1, \dots, n\}$ es la base de $T_q N$ asociado a la carta (V, ψ) , entonces la matriz de $(\Phi_*)_p$ con respecto a estas bases es el Jacobiano de $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ evaluado en $\varphi(p)$; más concretamente.

$$(\Phi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_j \frac{\partial (y_j \circ \Phi \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} (s) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q,$$

donde $s = \Phi(p)$.

Definición 30 Sean M y N variedades. M es una subvariedad de N si hay una función diferenciable $\Phi : M \rightarrow N$ tal que Φ es uno a uno y $(\Phi_*)_p$ es uno a uno para cada $p \in M$. Tal función es llamada incrustación de M en N .

Proposition 31 Si $M = M_f$ es una hipersuperficie tal que $M_f = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / f(x) = 0\}$, entonces $T_p M$ es isomorfo, (como espacio vectorial), a

$$(\Phi_*)_p T_p M = \{X_p \in T_p M / \langle (\text{grad}(f))_p, X_p \rangle = 0\},$$

donde Φ es la inclusión de M en \mathbb{R}^{n+1} . Para su prueba ver [7].

1.1.1. Conexiones Afines

Definición 32 Una conexión lineal en M es una función $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ (que escribimos como $\nabla_X Y$) tal que para $X, Y, Z \in \chi(M)$, $r \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathfrak{S}(M)$:

- i. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ y $\nabla_X (rY) = r\nabla_X Y$
- ii. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ y $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$;
- iii. $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

Observe que la condición (iii.) tiene sentido tanto a nivel técnico y filosófico. Técnicamente, $Xf \in \mathfrak{S}(M)$, de modo que $(Xf)Y$ está bien definido y el lado derecho de (iii.) es un campo vectorial. Filosóficamente, (iii.) es sólo una regla de la "derivada de un producto". ∇ se denomina conexión lineal, pero $\nabla_X Y$ debe ser leído como la derivada covariante de Y con respecto a (o en la dirección de X); Cualquier variedad admite muchas conexiones lineales ver [9].

Si tenemos en una carta (U, φ) de manera que $\{(\partial/\partial x_i)_p : i = 1, \dots, m\}$ es una base para $T_p M$ para todo $p \in U$, entonces cualquier campo vectorial X puede expresarse de forma local como $\sum X_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, donde $X_i \in \mathfrak{S}(U)$. Debido a las diversas propiedades lineales de ∇ y de la regla de la derivada del producto, el comportamiento de ∇ se determina por completo por los valores de $\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. Estos valores deben poder expresarse como combinaciones lineales de los $(\partial/\partial x_k)$ con los coeficientes en $\mathfrak{S}(U)$.

Definición 33 Sean ∇ una conexión en M y (U, φ) una carta coordenada los símbolos de Christoffel con respecto a (U, φ) son funciones $\Gamma_{i,j}^k \in \mathfrak{S}(U)$ definidas mediante la ecuación

$$\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ejemplo 34 (El espacio Euclideo) Sea $M = \mathbb{R}^n$ si $Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$ digamos $Y = \sum f_i e_i$ para $f_i \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$. Definimos una conexión sobre \mathbb{R}^n por $\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n (Xf_i)(e_i)$. Supongamos que $Y = (f_1, \dots, f_n)$, $X = (a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n a_j e_j$, recordando nuestra notación $e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ entonces $X = \sum_{j=1}^n a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, así $(X(f_i))$ puede ser entendido como

$$(X(f_i)) = \left[\sum_{j=1}^n a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \right] f_i = \sum_{j=1}^n a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) f_i,$$

así,

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right) e_i.$$

Definición 35 Si Z asigna a cada $t \in I$ un elemento $Z_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}M$ tal que $t \rightarrow Z_{\alpha(t)}(f)$ es una función diferenciable para cada $f \in \mathfrak{S}(M)$, diremos Z es un campo vectorial a lo largo de la curva $\alpha : I \rightarrow M$.

Definición 36 Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva, el campo vectorial tangente a α , T_α está definido por $(T_\alpha)_{\alpha(t)} = (\alpha_*)_t \left(\frac{d}{dt} \right)_t$, donde t es la coordenada natural de I .

Definición 37 Si $t_0 \in I$, $\alpha : I \rightarrow M$ y $Y \in \chi(M)$ y X es un campo vectorial sobre M tal que $X_{\alpha(t_0)} = T_{\alpha(t_0)}$ entonces la derivada covariante de Y con respecto a α , denotada por $\nabla_T Y$, es el campo vectorial a lo largo de α dado por

$$(\nabla_T Y)_{\alpha(t_0)} = (\nabla_X Y)_{\alpha(t_0)}.$$

Una vez conocidas estas definiciones surge la siguiente proposición:

Proposition 38 Sea $M = M_f$ la hipersuperficie definida por f , sea $\bar{\nabla}$ la conexión del plano Euclideo de dimensión $n + 1$, y escribamos

$$N = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}.$$

Si $X, Y \in \chi(M)$, entonces

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N$$

define una conexión lineal en M .

Note que para probar esta proposición basta verificar las tres condiciones de conexión lineal presentadas al inicio de esta sección. Ver [46].

1.1.2. Transporte Paralelo

En esta sección definiremos las nociones de campo vectorial paralelo, transporte paralelo, además veremos que el transporte paralelo es usado para dar una fórmula explícita de la derivada

covariante de un campo vectorial a lo largo de una curva y finalmente definiremos las geodésica sobre una variedad que posee conexión afín y mostraremos que existe una única geodésica que pasa por un punto dado y un vector tangente en dicho punto.

Definición 39 Sea Y un campo vectorial a lo largo de α , diremos que Y es paralelo a lo largo de α si:

$$\nabla_{T_\alpha} Y = 0.$$

Observe que si suponemos que $M = M_f$ y $\nabla_X Y$ la conexión definida en la proposición 41, si Y es paralelo a lo largo de α y $N = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$ entonces

$$\nabla_{T_\alpha} Y = \bar{\nabla}_{T_\alpha} Y - \langle \bar{\nabla}_{T_\alpha} Y, N \rangle N$$

luego

$$\bar{\nabla}_{T_\alpha} Y = \langle \bar{\nabla}_{T_\alpha} Y, N \rangle N,$$

es decir, la derivada de Y a lo largo de α es un vector normal a la superficie, en otras palabras es perpendicular al plano tangente en los puntos de $\alpha(t)$.

Teorema 40 (*Levi-Civita, 1917*) Sea $\alpha : [c, d] \rightarrow M$, $p = \alpha(c)$ y $\widetilde{Y}_p \in T_p M$, entonces existe un único campo vectorial Y paralelo a lo largo de α tal que $Y_{\alpha(c)} = \widetilde{Y}_p$.

la demostración de éste teorema hace uso del Teorema de Picard, pues él garantiza la existencia y unicidad de las soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dY_k}{dt} + Y \sum_{i,j=1}^n \frac{d\alpha_j}{dt} \Gamma_{i,j}^k = 0 ; & k = 1, 2, \dots, n \\ Y_k(c) = \widetilde{Y}_k. \end{cases}$$

Note que

$$\widetilde{Y}_p = \sum_{k=1}^n \widetilde{Y}_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p.$$

Definición 41 Dada la curva suave a trozos γ y $a, b \in \mathbb{R}$, definimos el transporte paralelo a lo

largo de la curva γ , el cual es denotado por P_γ como

$$\begin{aligned} P_{\gamma,b,a} : T_{\gamma(a)}M &\longrightarrow T_{\gamma(b)}M \\ v &\longmapsto V(\gamma(b)) \end{aligned}$$

donde V es el único campo vectorial a lo largo de γ tal que $\nabla_{\gamma'(t)}V = 0$ y $V(\gamma(a)) = v$.

Es fácil probar que el transporte paralelo $P_{\gamma,b,a}$ es una isometría entre $T_{\gamma(a)}M$ y $T_{\gamma(b)}M$, además el transporte paralelo tiene las importantes propiedades

$$\begin{aligned} P_{\gamma,d,a} \circ P_{\gamma,b,d} &= P_{\gamma,b,a} \\ P_{\gamma,b,a}^{-1} &= P_{\gamma,a,b}. \end{aligned}$$

Proposition 42 Sea $P_{\alpha,0,1} : T_{\alpha(0)}M \rightarrow T_{\alpha(t)}M$ el transporte paralelo a lo largo de la curva α , con respecto a la conexión lineal ∇ . Entonces

$$(\nabla_{T_\alpha} Y)_{\alpha(0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(P_{\alpha,0,1})^{-1}(Y_{\alpha(t)}) - Y_{\alpha(0)}}{t}.$$

Demostración ver [26].

Definición 43 Una curva α sobre la variedad M es una geodésica con respecto a ∇ , si

$$\nabla_{T_\alpha} T_\alpha = 0.$$

Aplicando la definición anterior se puede obtener fácilmente que el sistema de ecuaciones diferenciales que determinan las geodésicas sobre la variedad es:

$$\frac{d^2\alpha_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{d\alpha_j}{dt} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Una aplicación del Teorema de Picard para la existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales permite demostrar el siguiente teorema

Teorema 44 Sea M una variedad con una conexión afín. Si $p \in M$ y $X_p \in T_pM$. Entonces

existe una única geodésica

$$\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ con } \alpha(0) = p$$

y

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)(0) = X_p.$$

Para su demostración ver [46].

1.1.3. Función Exponencial

Introducimos la función exponencial de un conjunto abierto en T_pM en M , que es una forma de recopilar toda la "geodésica" de M en una función diferenciable única. Esta notación es extremadamente útil y nos permite, por ejemplo, aplicar el teorema de la función inversa para que cualquier punto de M posea un vecindad W tal que cualquier dos puntos de W puedan unirse por geodésica única que minimice la longitud del arco.

Con la afirmación que la geodésica existe en un intervalo y es única. Es posible incrementar la velocidad de una geodésica disminuyendo su intervalo de definición, o viceversa. Podemos hacer que la velocidad de una geodésica sea uniformemente grande en una vecindad de p . De aquí nace la siguiente proposición.

Teorema 45 Dado $p \in M$, existe una vecindad V sobre p en M , un número $\varepsilon > 0$ y una aplicación $C^\infty \gamma : (-2, 2) \times U \rightarrow M$, donde

$$U = \{(q, w) : q \in V, w \in T_qM, |w| < \varepsilon\} \tag{1.1}$$

tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, es la única geodésica de M , que en el instante $t = 0$, pasa a través de q con velocidad w , para cada $q \in V$ y para cada $w \in T_qM$, con $|w| < \varepsilon$.

Por un argumento análogo, podemos hacer que la velocidad de una geodésica, sea uniformemente grande en una vecindad de p .

Definición 46 Sea U definido en (1.1). La función $\exp : U \rightarrow M$ definida por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), (q, v) \in U,$$

es llamada la función exponencial sobre U .

Corolario 47 Sea M una variedad con una conexión afin ∇ . Sea $p \in M$ y $X_p \in T_p M$ entonces existe una única geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\frac{d\alpha}{dt}(0) = X_p$.

La función \exp es diferenciable, ver ([26]). Dado $q \in M$ fijo, podemos definir la función diferenciable

$$\exp_q : B(0) \subset T_q M \rightarrow M$$

mediante la igualdad $\exp_q(v) = \exp(q, v)$.

1.1.4. Métrica Riemanniana

A continuación definiremos el concepto de métrica Riemanniana. Mostraremos que cada variedad Riemanniana tiene una conexión lineal natural asociada a ella, la cual llamaremos conexión de Riemann, de manera que la noción de geodésica tome sentido sobre variedades Riemannianas. Es decir, colóquemos ésta conexión natural sobre una variedad Riemanniana y discutimos sobre la distancia entre dos puntos de M y las propiedades de las geodésicas sobre dicha variedad.

Definición 48 Un campo de métricas g sobre una variedad M es una asignación que a cada p le hace corresponder $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $X_p, Y_p, Z_p \in T_p M$

- i. $g_p(X_p + Y_p, Z_p) = g_p(X_p, Z_p) + g_p(Y_p, Z_p)$ y $g_p(rX_p, Y_p) = r g_p(X_p, Y_p)$, $r \in \mathbb{R}$
- ii. $g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$
- iii. $g_p(X_p, X_p) \geq 0$ y $g_p(X_p, X_p) = 0$ si y sólo si $X_p = 0$.

Note que (i.) y (ii.) implican que g_p es bilineal, además podemos considerar a $g(X, Y)$ como una función

$$g(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p).$$

Definición 49 Una métrica Riemanniana sobre una variedad M es un campo de métricas g tal que $g(X, Y) \in \mathfrak{F}(M)$, para todo $X, Y \in \chi(M)$, una variedad Riemanniana es una variedad M dotado con una métrica Riemanniana.

Se puede demostrar que toda variedad puede ser dotada de una métrica Riemanniana ver [9].

Obsérvese que en geometría el término métrica no se refiere a una distancia sino a un producto interior, es más, se puede mostrar que una métrica Riemanniana da origen a una distancia natural.

Definición 50 Las n^2 funciones g_{ij} real valuadas sobre cartas coordenadas (U, φ) definidas por:

$$g_{ij} = g_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right),$$

se llaman coeficientes métricos.

Ejemplo 51 Sea $N = \mathbb{R}^n$ y $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual

$$g_p(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

donde

$$X_p = (p; a_1, \dots, a_n) \text{ y } Y_p = (p; b_1, \dots, b_n).$$

Claramente

$$g_{ij} = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

Definición 52 Supongamos que $A : T_p M \rightarrow T_q M$ es una transformación lineal. A es una isometría si

$$g_p(X_p, Y_p) = g_q(AX_p, AY_p).$$

Definición 53 Sea ∇ una conexión afín sobre una variedad Riemanniana M se dice que ∇ es

compatible con la métrica si para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Note que $g(Y, Z) \in \mathfrak{S}(M)$ por lo que $Xg(Y, Z)$ tiene sentido y es una función.

Definición 54 Una conexión lineal ∇ es libre de torsión o simétrica si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \chi(M).$$

Esta condición no es tan intuitiva como la propiedad de ser métrica. En particular, no tiene nada que ver con la torsión de una curva. La razón de la terminología "simétrica" es el siguiente lema:

Lema 55 ∇ es libre de torsión o simétrica si y sólo si en cualquier carta coordenada $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$, $1 \leq i, j \leq n$.

Un importante teorema debido a Hopf-Rinow ver [7] es el siguiente.

Teorema 56 (Fundamental de la geometría Riemanniana) Si M es una variedad Riemanniana con métrica g , entonces existe una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica.

Un cálculo directo, aunque no corto, usando la definición de compatibilidad con la métrica, prueba que de existir ∇ , ella debe verificar que para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} [Xg(Y, Z) - Zg(X, Y) + Yg(Z, X) - g(X, [Y, Z]) + g(Z, [X, Y]) - g(Y, [Z, X])]$$

lo que es equivalente a:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{lk} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} \right), \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n,$$

donde g^{ij} son los coeficientes de la matriz $(g_{ij})^{-1}$. Note que la matriz g_{ij} es invertible ya que es la matriz asociada a una forma bilineal simétrica definida positiva.

Definición 57 La conexión garantizada por el teorema anterior es llamada la conexión Riemanniana de la variedad Riemanniana.

Definición 58 Si $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ entonces la longitud de α esta definida por:

$$\|\alpha\| = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)} \left((T\alpha)_{\alpha(t)}, (T\alpha)_{\alpha(t)} \right)} dt,$$

y si $p, q \in M$, definimos la distancia de p a q como,

$$d(p, q) = \inf \{ \|\alpha\| : \alpha \text{ une } p \text{ con } q \},$$

lo que nos permite enunciar la siguiente proposición.

Proposition 59 Toda variedad Riemanniana con la distancia definida anteriormente es un espacio métrico.

Teorema 60 Supongamos $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ es una curva parametrizada por longitud de arco, es decir

$$g_{\alpha(t)} \left((T\alpha)_{\alpha(t)}, (T\alpha)_{\alpha(t)} \right) = 1,$$

si $\|\alpha\| < \|\beta\|$ para toda curva $\beta \in C^\infty$ tal que $\beta(a) = \alpha(a)$ y $\beta(b) = \alpha(b)$. Entonces α es una geodésica. ver [46]

Teorema 61 Para cada punto p en una variedad Riemanniana M existe una vecindad U tal que:

- i. Cualquier par de puntos $q, r \in U$ pueden ser unidos mediante una geodésica α cuya imagen está contenida en U .
- ii. La geodésica α es la única geodésica que junta q y r , que además tiene longitud $d(q, r)$.
- iii. Existe una carta coordenada (U, φ) tal que las geodésicas a través de p son de la forma

$$\alpha(t) = \varphi^{-1}(a_1 t, \dots, a_n t)$$

para algunas constantes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Cabe destacar que estas también son llamadas coordenadas normales.

Antes de continuar con los siguientes dos teoremas debemos recordar que dos puntos no necesariamente pueden ser unidos mediante una geodésica y como ejemplo inmediato se puede pensar en el plano Euclideo 2-dimensional al cual le quitamos el origen y tratamos de unir dos puntos que sean opuestos respecto al origen y las geodésicas en éste caso serían la rectas que pasan por el origen.

Teorema 62 *Si una variedad Riemanniana es completa como espacio métrico con la métrica inducida por g , entonces cualquier par de puntos pueden ser unidos por la geodésica que minimiza la distancia entre ellos.*

Teorema 63 *(Hopf-Rinow,1931) Si el dominio de cada geodésica sobre M puede ser extendida a todo \mathbb{R} , entonces cualquier par de puntos de M pueden ser unidos por una geodésica que minimiza la distancia y M es completo con la métrica g .*

A pesar de que el siguiente lema no es un resultado de geometría Riemanniana es importante para nuestro avance enunciarlo en vista de que será utilizado en varias oportunidades dentro del desarrollo del presente trabajo.

Lema 64 *(lema de Banach) Sea A un operador lineal invertible sobre un espacio de Banach E y B un operador lineal en E si*

$$\|A^{-1}B - I\| < 1.$$

Entonces B^{-1} existe y

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}B - I\|} \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B - A\|}, \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \|B^{-1}A\| &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}B - I\|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|B - A\|}. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Métodos sobre Variedades Riemannianas

La extensión de los métodos numéricos como por ejemplo Newton, Newton simplificado y Chebyshev-Halley a variedades Riemannianas trae consigo (o crea) nuevas dificultades. Por ejemplo, los campos vectoriales sobre espacios de Banach son vistos como funciones que van de éstos espacios en si mismos, mientras que en el caso de variedades, los campos vectoriales son funciones que van de la variedad (las cuales no necesariamente son un espacio vectorial) a su espacio tangente en el punto en consideración. Por otra parte, si B es un espacio de Banach y $F : B \rightarrow B$ es una función, sumas triviales tales como $x + v$, donde $x \in B$ y $v \in F(B)$ serán dentro de éste nuevo contexto las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, las cuales originan un nuevo punto el cual es $\exp_p(v)$ definido previamente. En lugar de la derivada de Fréchet usada en espacios de Banach, la cual generaliza la derivada direccional de \mathbb{R}^n , usaremos la derivada covariante que también generaliza la derivada direccional de \mathbb{R}^n .

Es importante resaltar que en los métodos numéricos sobre variedades, el problema de encontrar el radio de convergencia y probar la unicidad de las soluciones en la bola abierta definida por tal radio presentan un especial reto; desafortunadamente esto puede ser muy difícil de calcular, ver por ejemplo [14]. Escencialmente esto se debe al hecho de que, en contraste para el caso de los espacios de Banach donde las geodesicas son líneas rectas, en variedades Riemannianas las bolas no son necesariamente geodesicamente convexas.

2.1. Principales métodos

A continuación, a modo de información, exhibiremos las iteraciones de los principales métodos sobre variedades Riemannianas que se han estudiado en la última década, partiendo con el método de Kantorovich ver ([8]) como una motivación y respaldo teórico al capítulo posterior donde estudiamos la convergencia y unicidad del método de Kantorovich sobre grupos de Lie.

En los siguientes métodos DX denotará la derivada covariante del campo vectorial $X \in \chi(M)$

- *Kantorovich sobre Variedades Riemannianas*

$$\begin{aligned} v_n &= DX(p_n)^{-1}X(p_n) \\ p_{n+1} &= \exp_{p_n}(v_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- *Kantorovich simplificado sobre variedades Riemannianas.*

$$\begin{aligned} v_n &= -P_{\alpha_n,0,1}DX(p_0)^{-1}P_{\alpha_n,1,0}X(p_n) \\ p_{n+1} &= \exp_{p_n}(v_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde $\sigma_n : [0, 1] \longrightarrow M$ es la familia de geodésicas que minimizan la distancias entre p_0 y p_n .

- *Chebyshev-Halley sobre variedades Riemannianas*

$$\begin{aligned} u_n &= -DX(p_n)^{-1}X(p_n), \\ q_n &= \exp_{p_n}(u_n), \\ \sigma(t) &= \exp_{p_n}(tu_n), \\ G_n &= DX(p_n)^{-1}B(p_n)(u_n, \cdot), \\ H_n &= \left[I_{T_{p_n}M} + \frac{\lambda}{2}G_n \right], \\ v_n &= -\frac{1}{2}P_{\sigma,0,1}DX(p_n)^{-1}H_n^{-1}B(p_n)(u_n, u_n), \\ p_{n+1} &= \exp_{q_n}(v_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

- *Euler-Chebyshev sobre variedades Riemannianas*

$$\begin{aligned}
 u_n &= -\mathcal{D}X(p_n)^{-1} X(p_n), \\
 \sigma(t) &= \exp_{p_n}(tu_n), \\
 q_n &= \sigma(1), \\
 v_n &= -\frac{1}{2}P_{\sigma,0,1}\mathcal{D}X(p_n)^{-1}\mathcal{D}^2X(p_n)(u_n, u_n) \\
 p_{n+1} &= \exp_{q_n}(v_n), \quad n \geq 0.
 \end{aligned}$$

Igual que las generalizaciones hechas de métodos numéricos a variedades Riemannianas, en esta tesis vamos a estudiar detalladamente las generalizaciones a grupos de Lie, ver [21], más concretamente las iteraciones tipo Newton o Kantorovich en grupos de Lie para hallar ceros de funciones $f : G \rightarrow \mathfrak{g}$ que van del grupo G en su álgebra \mathfrak{g} , df y \exp son el diferencial y la función exponencial definidas sobre grupos de Lie como lo veremos en el siguiente capítulo.

Nuestro interés es analizar las estructuras de las iteraciones del método de Kantorovich sobre grupos de Lie.

Por otra parte y continuando con el andamiaje teórico, en éste punto del trabajo es necesario iniciar una sección donde revisemos algunas definiciones, ejemplos y proposiciones relacionados con Grupos de Lie.

Capítulo 3

Métodos numéricos sobre Grupos de Lie

En éste capítulo introduciremos nociones y definiciones básicas sobre el significado de grupos de Lie, nos enfocaremos en sus propiedades, es decir, invarianza de los elementos del espacio tangente ante traslación izquierda o derecha y conexión entre el grupo de Lie y su álgebra, la cual es el espacio tangente en la identidad. Una vez explicitado éstos elementos daremos paso a la incorporación de un método iterativo definido sobre la variedad (grupo de Lie). El cual nos permitirá construir una sucesión de puntos que convergen a una singularidad de un campo vectorial $f : G \longrightarrow \mathfrak{g}$ sobre un grupo de Lie previamente dada.

3.1. Preliminares sobre Grupos de Lie

Definición 65 *Un grupo de Lie es una variedad M que tiene estructura de grupo consistente con la estructura de la multiplicación y la inversión de grupo, en el sentido que las funciones dadas por:*

$$\begin{aligned} \mu : M \times M &\longrightarrow M & y & \quad I : M \longrightarrow M \\ (g, h) &\longmapsto gh & & \quad g \longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son C^∞ .

Antes de mostrar algunos ejemplos importantes sobre grupos de Lie es necesario presentar las siguientes definiciones, ya que las mismas nos permitirán comprender dichos ejemplos.

Definición 66 Sea M un grupo Lie. Las funciones

$$\begin{aligned} L_g : M &\longrightarrow M & y & & R_h : M &\longrightarrow M \\ h &\longmapsto gh & & & g &\longmapsto gh \end{aligned}$$

son llamadas *traslación izquierda* y *traslación derecha* respectivamente.

Note que

$$L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2} \quad y \quad R_{h_1} \circ R_{h_2} = R_{h_2 h_1}.$$

En efecto, dado $h \in M$ entonces

$$\begin{aligned} L_{g_1} \circ L_{g_2}(h) &= L_{g_1}(g_2 h) \\ &= g_1 g_2 h \\ &= L_{g_1 g_2}(h), \end{aligned}$$

de manera análoga $R_{h_1} \circ R_{h_2} = R_{h_2 h_1}$.

Por otra parte si $e \in M$, es el elemento identidad, entonces

$$L_e = Id_M = R_e,$$

y además es fácil probar que L_g y R_h son invertibles

$$L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1} \quad y \quad R_{h^{-1}} = (R_h)^{-1},$$

y se puede probar que ellas son difeomorfismos para cada g y h ver [31]. Por regla de la cadena se tiene que

$$((L_{g^{-1}})_*)_{gh} \circ ((L_g)_*)_h = ((L_{g^{-1}} \circ L_g)_*)_h = Id_{T_h M},$$

donde $((L_{g^{-1}})_*)_{gh}$ y $((L_g)_*)_h$ son las funciones tangentes en los puntos gh y h respectivamente y por tanto $((L_g)_*)_h$ es invertible.

A continuación algunos ejemplos de grupos de Lie donde podremos apreciar parte de las definiciones mencionadas hasta éste punto.

Ejemplo 67 Sea V un espacio de Banach. V a su vez en un grupo de Lie Abeliano con operaciones de grupo definidas por:

$$\mu : V \times V \longrightarrow V, \quad \mu(x, y) = x + y$$

y

$$I : V \longrightarrow V, \quad I(x) = -x,$$

donde la identidad es el vector cero.

Ejemplo 68 El grupo de transformaciones lineales invertibles de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n , con la composición de funciones, es un grupo de Lie de Dimensión n^2 , denominado grupo lineal general, denotado por $GL(n, \mathbb{R})$.

Éste grupo es un subconjunto abierto del espacio vectorial $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, espacio de todas las transformaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n ya que $GL(n, \mathbb{R})$ es la imagen inversa de $\mathbb{R}/\{0\}$ bajo la función continua,

$$T \longrightarrow \det(T),$$

de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a \mathbb{R} , por lo que es una variedad $n^2 - 1$ dimensional, ver (4)

Para $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$, la operación interna del grupo es la composición,

$$\begin{aligned} \mu : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ (A, B) &\longmapsto A \circ B \end{aligned}$$

y la inversión es:

$$\begin{aligned} I : GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A^{-1}, \end{aligned}$$

donde A^{-1} es la función inversa. Note que la operación interna del grupo es la restricción de las funciones bilineales continuas, es decir,

$$(A, B) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow A \circ B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

μ es C^∞ ver [31], por lo tanto $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

El elemento identidad de $GL(n, \mathbb{R})$ es la función identidad en \mathbb{R}^n . Si elegimos una base de \mathbb{R}^n , podemos representar cada $A \in GL(n, \mathbb{R})$ por una matriz invertible de orden n , la denotaremos, sin pérdida de generalidad, por la letra A , así la operación de grupo en éste nuevo contexto es la multiplicación matricial,

$$\mu(A, B) = AB,$$

y la inversión es:

$$I(A) = A^{-1},$$

donde A^{-1} es la la matriz inversa de A , de ésta forma el elemento identidad $GL(n, \mathbb{R})$ será la matriz identidad I_n .

Ejemplo 69 En éste ejemplo mostraremos que el subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ de las matrices ortogonales, $O(n)$, es una variedad de dimensión $\frac{1}{2}n(n-1)$ y hallaremos su álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Sea $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow S(n)$ dada por $f(X) = XX^T$ donde $S(n)$ es el grupo de las matrices simétricas, calculemos $Df(X)$

$$\begin{aligned} Df(X)(H) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X+tH) - f(X)}{t} & (3.1) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(X+tH)(X+tH)^T - XX^T}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tXH^T + tHX^T + t^2HH^T}{t} \\ &= XH^T + HX^T, \end{aligned}$$

es decir,

$$Df(X)(H) = XH^T + HX^T.$$

A continuación veamos que para todo $X \in O(n)$, $Df(X) : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow S(n)$ es sobreyectiva.

En efecto, sea $X \in O(n)$ y $S \in S(n)$, tomemos la matriz

$$V = \frac{SX}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} Df(X)(V) &= X \left(\frac{SX}{2} \right)^T + \left(\frac{SX}{2} \right) X^T \\ &= (XX^T) \frac{S}{2} + \frac{S}{2} (XX^T) \\ &= S, \end{aligned}$$

así $f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow S(n)$ es una submersión, por lo que

$$\begin{aligned} f^{-1}(I) &= \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : f(X) = I_n\} \\ &= \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : f(X) = I_n\} \\ &= O(n) \end{aligned}$$

es variedad, ya que es la imagen inversa de un valor regular ver ([26]) y su dimensión es

$$\begin{aligned} \dim O(n) &= \dim M_{n \times n}(\mathbb{R}) - \dim S(n) \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}n(n-1). \end{aligned}$$

Ahora calculemos $\mathfrak{g} = T_I O(n)$. Dado que $T_I O(n) = \ker Df(I)$. Usando 3.1 se tiene que

$$Df(X)(V) = XV^T + VX^T$$

de donde

$$Df(I)(V) = V^T + V$$

así,

$$\mathfrak{g} = \ker(Df(I)) = \{V \in M(n \times n, \mathbb{R}) : V^T = -V\}$$

que es el subespacio de vectorial de $M(n \times n, \mathbb{R})$ las matrices antisimétricas.

Es importante resaltar en éste punto que los grupos de Lie sobre los que trabajaremos son aquellos de dimensión finita. Ahora veamos como podemos construir un atlas para un grupo de

Lie teniendo una carta alrededor del elemento identidad.

Sea (U, φ) una carta alrededor de $e \in M$, donde $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definiremos una nueva carta (U_g, φ_g) alrededor $g \in M$ por

$$U_g := L_g(U) = \{L_g(h) / h \in U\}$$

y

$$\varphi_g := \varphi \circ L_{g^{-1}} : U_g \longrightarrow \varphi(U).$$

Note que

$$\varphi_g(h) = \varphi(g^{-1}h).$$

Así el conjunto $\{(U_g, \varphi_g)\}$ forma un atlas para M , ya que, en éste caso los cambios de coordenadas

$$\varphi_g \circ \varphi_h^{-1} = \varphi \circ L_{(g)^{-1}h} \circ \varphi^{-1} : \varphi_h(U_g \cap U_h) \longrightarrow \varphi_g(U_g \cap U_h)$$

son difeomorfismos, ver [31].

Un campo vectorial X sobre M es llamado invariante por la izquierda si para cada $g \in M$ tenemos que

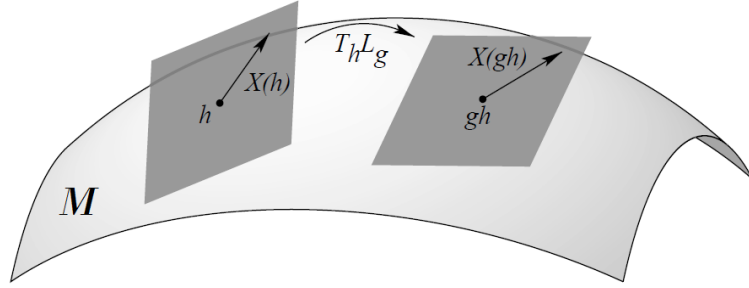
$$((L_g)_*)_h X(h) = X(gh)$$

para cada $h \in M$. En algunos textos ésta función $((L_g)_*)_h$ es llamada función tangente y es denotada por $T_h L_g$, así podemos escribir la igualdad anterior como:

$$(T_h L_g)X(h) = X(gh)$$

para cada $h \in M$. Más concretamente, dada la variedad M y un punto $h \in M$. La función $T_h L_g$ traslada isometricamente veral vector X_h de $T_h M$ en el vector X_{gh} de $T_{gh} M$ [31], tal como se

muestra en la siguiente figura:



Al conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre M lo denotaremos por $\chi_L(M)$. Se puede probar que si dado $g \in M$ y $X, Y \in \chi_L(M)$, entonces

$$T(L_g)[X, Y] = [T(L_g)X, T(L_g)Y] = [X, Y],$$

ver [31], por lo que $[X, Y] \in \chi_L(M)$.

Para cada $\xi \in T_e M$, definimos un campo vectorial X_ξ en M , por:

$$X_\xi(g) = T_e L_g(\xi),$$

entonces

$$\begin{aligned} X_\xi(gh) &= T_e L_{gh}(\xi) = T_e(L_g \circ L_h)(\xi) \\ &= T_h L_g(T_e L_h(\xi)) = T_h L_g(X_\xi(h)), \end{aligned}$$

lo que muestra que X_ξ es invariante por la izquierda.

Las funciones lineales

$$\begin{aligned} \zeta_1 : \chi_L(M) &\longrightarrow T_e M \\ X &\longmapsto X(e) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \zeta_2 : T_e M &\longrightarrow \chi_L(M) \\ \xi &\longmapsto X_\xi \end{aligned}$$

satisfacen $\zeta_1 \circ \zeta_2 = id_{T_e M}$ y $\zeta_2 \circ \zeta_1 = id_{\chi_L(M)}$, Por lo tanto $\chi_L(M)$ y $T_e M$ son isomorfos vistos como espacios vectoriales.

Por otra parte, definiremos la dimensión de un grupo de Lie G como la dimensión de G visto como variedad diferenciable y asumiremos que es de dimensión finita .

Se dice que una métrica Riemanniana sobre G es invariante por la izquierda si:

$$\langle u, v \rangle_y = \langle T_y L_x(u), T_y L_x(v) \rangle_{L_x(y)}, \quad \forall x, y \in G ; u, v \in T_y G,$$

ésto implica, entre otras cosas, que dado un producto interno \langle, \rangle_e en el álgebra de lie \mathfrak{g} , el cual se puede definir de manera natural ya que \mathfrak{g} es un espacio vectorial finito dimensional, podemos definir un producto interno \langle, \rangle_p en cualquier punto p de nuestro grupo de Lie G mediante la siguiente formula:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle T_p L_{p^{-1}}(u), T_p L_{p^{-1}}(v) \rangle_e, \quad p \in G ; u, v \in T_p G,$$

esto significa que para todo p hemos definido un producto interno , le cual, varía continuamente en G lo que le da una estructura de variedad Riemanniana.

Analogamente se puede definir la métrica Riemanniana invariante por la derecha. Una métrica Riemanniana sobre G es bi-invariante, si es invariante por la izquierda y por la derecha.

Definición 70 *El álgebra de Lie del grupo G , se define como el espacio tangente $T_e G$ de G en e , y lo denotaremos por \mathfrak{g} , dicha álgebra es equipada con el clásico corchete de Lie:*

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

ver [7]

Note que $\chi_L(M)$ es una subálgebra de Lie de $\chi(M)$, el álgebra de todos los campos vectoriales sobre M . Sabemos que para cada $y \in G$ fijo, la diferencial multiplicación izquierda $T_e(L_y)$ determina un isomorfismo de \mathfrak{g} en el espacio tangente $T_y G$, ésto implica que todos los espacios tangentes del grupo de Lie son isomorfos a su álgebra \mathfrak{g} .

La función exponencial $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ es ciertamente la más importante construcción asociada con G y \mathfrak{g} , definida como sigue: Dado $u \in \mathfrak{g}$, existe una única geodésica $\sigma_u : \mathbb{R} \longrightarrow G$

que satisface:

$$\begin{aligned}\sigma_u(0) &= e \quad \text{y} \\ \sigma'_u(t) &= X_u(\sigma_u(t)) = T_e L_{\sigma_u(t)}(u) \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

[7].

El valor de la función exponencial en u es, entonces, definido por:

$$\exp(u) = \sigma_u(1). \tag{3.2}$$

Efectivamente ésta función está bien definida, además por el teorema de homogeneidad de la geodésica se tiene

$$\exp(tu) = \sigma_{tu}(1) = \sigma_u(t) \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R} \text{ y } u \in \mathfrak{g},$$

para más detalle ver [7] y

$$\exp(t+s)u = \exp(tu) \cdot \exp(su)$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathfrak{g}$.

En general la función exponencial no es sobreyectiva. Sin embargo, la función exponencial es un difeomorfismo sobre un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$. Sea $N(0) := B(0, \rho)$ la bola abierta más grande que contiene al cero tal que la \exp es un difeomorfismo sobre $N(0)$, al conjunto

$$N(e) = \exp(N(0))$$

se le llama vecindad normal alrededor del punto e , así, para cada $y \in N(e)$, existe un único $v \in N(0)$ tal que $y = \exp(v)$. Cuando G es Abelian, \exp es también un homomorfismo de \mathfrak{g} en G , es decir:

$$\exp(u+v) = \exp(u) \cdot \exp(v) \quad \text{para todo } u, v \in \mathfrak{g}. \tag{3.3}$$

En caso de que G no sea Abelian, la \exp no es un homomorfismo, sin embargo, si w es definido por:

$$w := u + v + \frac{1}{2} [u, v] + \frac{1}{12} ([u, [u, v]] + [v, [v, u]]) + \dots$$

entonces 3.3 puede ser reemplazada por la formula de Baker-Campbel-Hausdorff:

$$\exp(w) = \exp(u) \cdot \exp(v)$$

para todo u, v en un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$.

Sea G un grupo de Lie, cuya álgebra asociada es \mathfrak{g} , ($\mathfrak{g} = T_e G$) con e elemento neutro en G , sea h un punto de la variedad G , recordemos que las traslación izquierda L_g se define como:

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longrightarrow gh, \end{aligned}$$

se puede probar que la función transporte paralelo

$$P_{\alpha,0,1} : T_a G \rightarrow T_b G,$$

donde $\alpha(0) = b$ y $\alpha(1) = a$ es la difrencial de la función $L_{ab^{-1}}$ en el vector $\alpha'(0)$, en otras palabras, la función transporte paralelo es:

$$\begin{aligned} T_b L_{ab^{-1}} : \mathfrak{g} \cong T_b G &\longrightarrow \mathfrak{g} \cong T_a G, \\ X(b) &\longmapsto T_b L_{ab^{-1}}(X(b)) \end{aligned}$$

con $a, b \in G$. ver [26]

Capítulo 4

Método de Kantorovich sobre grupos de Lie

En ésta sección vamos a describir el método de Newton, el cual nos permite encontrar singularidades de campos vectoriales sobre grupos de Lie de dimensión finita.

Antes de empezar nuestra construcción es necesario esclarecer lo que entendemos por convergencia de una sucesión sobre grupos de Lie, para ello nos apoyaremos en el hecho de que la función exponencial es un difeomorfismo local en una vecindad del cero $N(e) = \exp(N(0))$, para dicho fin aprovecharemos el hecho de que \mathfrak{g} es un espacio vectorial normado.

Definición 71 Si $\{x_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión en G y $x \in G$. Entonces se dice que la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ es:

1. *Convergente a x si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número natural K tal que $x^{-1}.x_n \in N(e)$ y*

$$\|\exp^{-1}(x^{-1}.x_n)\| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq K;$$

2. *Cuadráticamente convergente a x si $\{\|\exp^{-1}(x^{-1}.x_n)\|\}$ es cuadráticamente convergente a cero (0); esto es, si $\{x_n\}_{n \geq 0}$ es convergente a x y existe una constante q y un número natural K tal que*

$$\|\exp^{-1}(x^{-1}.x_{n+1})\| \leq q \|\exp^{-1}(x^{-1}.x_n)\|^2 \quad \text{para todo } n \geq K;$$

Note que la convergencia de la sucesión $x_n \rightarrow x$ con $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset G$ en el sentido de la definición anterior es equivalente a escribir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0.$$

donde la distancia $d(x_n, x) := \exp^{-1}(x^{-1} \cdot x_n)$.

Definición 72 Si $f : G \rightarrow \mathfrak{g} = T_e G$ es una función y si $x \in G$. Decimos que f es diferenciable en el punto $x \in G$ si

$$\left(\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) \right)_{t=0}$$

existe, donde $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ es la curva en G que pasa por el punto $c(0) = x$ y tiene vector tangente en dicho punto $c'(0) = v_x$, es decir,

$$c(t) = x \cdot \exp(t(dL_{x^{-1}})_x v_x).$$

En éste caso la transformación lineal $f'_x : T_x G \rightarrow \mathfrak{g}$ definida por

$$f'_x(v_x) = \left(\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) \right)_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} f(x \cdot \exp(t(dL_{x^{-1}})_x(v_x))) \right)_{t=0}, \quad v_x \in T_x G \quad (4.1)$$

es llamada la diferencial de f en x .

Así, podemos definir la aplicación lineal $df_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por

$$df_x = f'_x \circ (dL_x)_e \quad . \quad (4.2)$$

por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} (dL_e)_e &= d(L_{x^{-1}} \circ L_x)_e \\ &= (dL_{x^{-1}})_{L_x(e)} \circ (dL_x)_e \\ &= (dL_{x^{-1}})_x \circ (dL_x)_e \end{aligned}$$

Así

$$(dL_{x^{-1}})_x \circ (dL_x)_e (u) = ((dL_e)_e (u)) = u \quad (4.3)$$

luego, de 4.1, 4.2 y 4.3 obtenemos

$$df_x(u) = f'_x \circ (dL_x)_e (u) \quad (4.4)$$

$$= f'_x [(dL_x)_e (u)] \quad (4.5)$$

$$= \left. \frac{d}{dt} f [x \cdot \exp(t (dL_{x^{-1}})_x (dL_x)_e (u))] \right|_{t=0}$$

$$= \left. \frac{d}{dt} f (x \cdot \exp(tu)) \right|_{t=0}, \quad u \in \mathfrak{g}.$$

Por lo tanto

$$df_x(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \cdot \exp(tu)) - f(x)}{t}. \quad (4.6)$$

El siguiente lema nos será útil en la demostración de la convergencia del método de Newton.

Lema 73 *Sea $x \in G$, $u \in \mathfrak{g}$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces*

1.

$$\frac{d}{dt} f(x \cdot \exp(-tu)) = (-df_{x \cdot \exp(-tu)} u).$$

2.

$$f(x \cdot \exp(tu)) - f(x) = \int_0^t df_{x \cdot \exp(su)} u ds.$$

Dem.

1. *Teniendo en cuenta 4.6*

$$\begin{aligned} df_{x \cdot \exp(-tu)}(u) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x \cdot \exp(-tu) \cdot \exp(hu)) - f(x \cdot \exp(-tu))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x \cdot \exp(h-t)u) - f(x \cdot \exp(-tu))}{h} \\ &= (-df_{x \cdot \exp(-tu)} u). \end{aligned}$$

2. Definamos la función $h(s) = f(x \cdot \exp(su))$, luego su derivada es :

$$\begin{aligned} \int_0^t h'(s) ds &= \int_0^t \left(\lim_{w \rightarrow 0} \frac{h(s+w) - h(s)}{w} \right) ds \\ &= \int_0^t \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} (f(x \cdot \exp(s+w)u) - f(x \cdot \exp(su))) \\ &= f(x \cdot \exp(su)) \Big|_0^t, \\ &= f(x \cdot \exp(tu)) - f(x), \end{aligned}$$

por otra parte usando 4.6

$$\begin{aligned} h'(s) &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} (f(x \cdot \exp(s+w)u) - f(x \cdot \exp(su))) \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} (f(x \cdot \exp(su) \exp(wu)) - f(x \cdot \exp(su))) \\ &= df_{x \cdot \exp(su)}(u). \end{aligned}$$

Así,

$$\int_0^t df_{x \cdot \exp(su)}(u) ds = f(x \cdot \exp(tu)) - f(x).$$

■

Haremos ahora la definición de bolas en el grupo de Lie G , como la idea es sólo usar las propiedades métricas del plano tangente $T_e G = \mathfrak{g}$ es natural definir una bola abierta de centro e y radio r en G como la imagen de la bola abierta $N(e, r) \subset T_e G$ de centro e y radio r con r lo suficientemente pequeño para que dicha imagen esté contenida en la vecindad normal. Y de manera natural la bola abierta $B(y, r) \subset G$ como la imagen de la traslación via el difeomorfismo \exp de la bola abierta $N(e, r)$ al punto y , más concretamente

$$B(y, r) = L_y(\exp N(e, r)).$$

Así, si $z \in B(y, r)$ entonces $z = y \cdot \exp(u)$ donde $\exp(u) \in N(e)$ y $\|u\| < r$, es decir,

$$B(y, r) = \{z \in G : z = y \cdot \exp(u) \text{ donde } \exp(u) \in N(e) \text{ y } \|u\| < r\}.$$

Ahora estamos en condiciones de definir la condición de Lipschitz.

Definición 74 Sea L, r constantes positivas. Supongamos que $f : G \rightarrow \mathfrak{g}$ es diferenciable en $x_0 \in G$ tal que $df_{x_0}^{-1}$ existe, entonces:

1. $df_{x_0}^{-1} \circ df$ es Lipschitz centrada en x_0 con constante L en la bola abierta $B(x_0, r)$ si

$$\|df_{x_0}^{-1} \circ (df_x - df_{x_0})\| \leq Ld(x_0, x)$$

para cada $x \in B(x_0, r)$.

2. $df_{x_0}^{-1} \circ df$ es Lipschitz con constante L positiva en $B(x_0, r)$ si

$$\|df_{x_0}^{-1} \circ (df_x - df_y)\| \leq Ld(x_0, x) \tag{4.7}$$

para cada $x, y \in B(x_0, r)$ tales que $d(x_0, x) + d(x, y) \leq r$.

Lema 75 Sea $L > 0$ una constante y $0 < r < \frac{1}{L}$. Supongamos que $df_{x_0}^{-1} \circ df$ satisface la condición Lipschitz centrada en x_0 con constante $L \in B(x_0, r)$. Sea $x \in B(x_0, r)$. Entonces df_x^{-1} existe y

$$\|(df_x^{-1} \circ df_{x_0})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - Ld(x_0, x)}.$$

Dem. Como $0 < r < \frac{1}{L}$ y $df_{x_0}^{-1} \circ df$ satisface la condición Lipschitz entonces

$$\|df_{x_0}^{-1} \circ (df_x - df_{x_0})\| \leq Ld(x_0, x) < Lr < 1,$$

luego por el lema de Banach df_x^{-1} existe y cumple,

$$\|df_x^{-1}\| \leq \frac{\|df_{x_0}^{-1}\|}{1 - \|df_{x_0}^{-1} \circ df_x - I_{x_0}\|}$$

así,

$$\|df_x^{-1} \circ df_{x_0}\| \leq \frac{1}{1 - Ld(x_0, x)}.$$

■

Ahora vamos a probar el teorema del método de Newton o Kantorovich sobre grupos de Lie.

Teorema 76 Sea G un grupo de Lie geodesicamente completo, $\Omega \subseteq G$ un conjunto convexo abierto, $f : G \rightarrow \mathfrak{g}$ es un campo vectorial de clase C^1 que va del grupo G en su álgebra \mathfrak{g} , $df_{x_0}^{-1} \circ df \in Lip_L(\Omega)$. Supongamos para algún $x_0 \in \Omega$, df_{x_0} es invertible y que para algún $b > 0$:

$$\begin{aligned} \|df_{x_0}^{-1}(f(x_0))\| &\leq b; \\ c = bL &\leq \frac{1}{2}; \\ B(x_0, t_*) &\subseteq \Omega, \quad \text{donde } t_* = \frac{1}{L}(1 - \sqrt{1 - 2c}). \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} v_k &= -df_{x_k}^{-1}(f(x_k)), \\ x_{k+1} &= x_k \cdot \exp(v_k). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Entonces $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B(x_0, t_*)$ y $x_k \rightarrow x_*$ el cual es la única singularidad de G en $B[x_0, t_*]$. Además, si $c < \frac{1}{2}$ y $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ con

$$t_* < r \leq t_{**} = \frac{1}{L}(1 + \sqrt{1 - 2c}),$$

entonces x_* es también la única singularidad de G en $B(x_0, r)$. La cota del error está dada por:

$$d(x_k, x_0) \leq \frac{b}{c}(2c)^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dem. La prueba de éste método será dividida en dos partes. Primero probaremos que el método de Kantorovich simplificado sobre grupos de Lie está bien definido, es decir que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B(x_0, t_*)$; también probaremos la convergencia del método. En segunda parte se probará la unicidad del método.

Consideremos la función auxiliar $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \frac{L}{2}t^2 - t + b,$$

donde su discriminante viene dado por

$$\Delta = (1 - 2c),$$

el cual es positivo, porque $bL \leq \frac{1}{2}$. Por lo tanto h tiene al menos un cero (única cuando $c = \frac{1}{2}$).

Por lo que según [33], el método de Newton puede ser aplicado a h , en otra palabras:

Si $t_0 \in [0, t_*)$, para $k = 1, 2, 3, \dots$ se define

$$t_{k+1} = t_k - \frac{h(t_k)}{h'(t_k)}. \quad (4.9)$$

Entonces $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ está bien definida, es estrictamente creciente, es decir, $t_k < t_*$ y converge a t_* además

$$t_* - t_k \leq \frac{b}{c} (2c)^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde tomamos $t_0 = 0$.

Como

$$x_{k+1} = x_k \cdot \exp(v_k),$$

entonces

$$d(x_{k+1}, x_k) = \|v_k\|.$$

Probemos usando inducción matemática que

$$\|v_k\| \leq t_{k+1} - t_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Para $k = 0$ definamos la curva $c_0 : [0, 1] \rightarrow G$ dada por

$$c_0(t) = x_0 \cdot \exp(tv_0).$$

Note que $c_0(0) = x_0$ y $c_0(1) = x_0 \exp(tv_0) = x_1$, es decir c_0 es una curva suave que une x_0 con x_1 , por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|v_0\| &= \left\| -df_{x_0}^{-1}(f(x_0)) \right\| \\ &= b.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}t_1 - t_0 &= \frac{h(t_0)}{h'(t_0)} \\ &= \frac{h(0)}{h'(0)} \\ &= b,\end{aligned}$$

así,

$$\|v_0\| = t_1 - t_0 < r.$$

Ahora supongamos que 4.10 es cierta para $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Por desigualdad triángular

$$\begin{aligned}d(x_n, x_0) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} d(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \|v_i\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \\ &= t_n - t_0 \\ &= t_n < r,\end{aligned}$$

es decir, $x_k \in B(x_0, t_*)$. Usando el lema 75 obtenemos que $df_{x_n}^{-1}$ existe y la

$$\begin{aligned}\|df_{x_n}^{-1} \circ df_{x_n}\| &\leq \frac{1}{1 - Ld(x_0, x_n)} \\ &\leq \frac{1}{1 - Lt_n}\end{aligned}$$

y como

$$\frac{-1}{[h'(t_n)]} = \frac{-1}{Lt_n - 1},$$

entonces

$$\|df_{x_n}^{-1} \circ df(x_n)\| \leq \frac{-1}{[h'(t_n)]}. \quad (4.11)$$

Como $v_{k-1} = -df_{x_{n-1}}^{-1}(f(x_{n-1}))$ y $df_{x_{n-1}} : \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}$ entonces $f(x_{n-1}) = -df_{x_{n-1}}(v_{n-1})$ y usando lema 73

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_n) - f(x_{n-1}) - df_{f(x_{n-1})}v_{n-1} \\ &= \int_0^1 df_{x_{n-1} \exp(tv_{n-1})}(v_{n-1}) dt - df_{x_{n-1}}v_{n-1} \\ &= \int_0^1 [df_{x_{n-1} \exp(tv_{n-1})} - df_{x_{n-1}}]v_{n-1} dt, \end{aligned}$$

además aplicando 4.7 y teniendo en cuenta que $df_{x_0}^{-1}$ es lineal, entonces

$$\begin{aligned} &\|df_{x_0}^{-1} \circ f(x_n)\| \\ &= \left\| \int_0^1 df_{x_0}^{-1} [df_{x_{n-1} \exp(tv_{n-1})} - df_{x_{n-1}}]v_{n-1} dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|df_{x_0}^{-1} [df_{x_{n-1} \exp(tv_{n-1})} - df_{x_{n-1}}]\| \|v_{n-1}\| dt \\ &\leq \int_0^1 Ld(x_{n-1}, x_{n-1} \exp(tv_{n-1})) \|v_{n-1}\| dt \\ &\leq \int_0^1 L \|tv_{n-1}\| \|v_{n-1}\| dt \\ &= \frac{L}{2} \|v_{n-1}\|^2, \end{aligned}$$

por la hipótesis de inducción $\|v_{n-1}\| \leq t_n - t_{n-1}$, por lo tanto

$$\|df_{x_0}^{-1} \circ f(x_n)\| \leq \frac{L}{2} (t_n - t_{n-1})^2$$

y de 4.9 tenemos que

$$(t_n - t_{n-1}) h'(t_{n-1}) + h(t_{n-1}) = 0$$

es cierto, de otro lado, por la formula de Taylor para funciones reales

$$h(t_n) = h(t_{n-1}) + h'(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) + \frac{1}{2}h''(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})^2,$$

por lo tanto

$$h(t_n) = 0 + \frac{1}{2}h''(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})^2,$$

es decir,

$$h(t_n) = \frac{1}{2}L(t_n - t_{n-1})^2$$

ya que $h''(t_{n-1}) = L$.

Así,

$$\|df_{x_0}^{-1} \circ f(x_n)\| \leq h(t_n), \quad (4.12)$$

por 4.11 y 4.12

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \|-df_{x_n}^{-1} \circ f(x_n)\| \\ &\leq \|df_{x_n}^{-1} \circ df_{x_0}\| \|df_{x_0}^{-1} \circ f(x_n)\| \\ &\leq -[h'(t_n)]^{-1} h(t_n) \\ &= t_{n+1} - t_n. \end{aligned}$$

En virtud del principio de inducción matemática, tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \|v_k\| = t_{k+1} - t_k.$$

Se sigue fácilmente que para $k \geq s$, $s \in \mathbb{N}$

$$d(x_s, x_k) \leq t_s - t_k, \quad (4.13)$$

luego $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en G , pues $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ lo es en \mathbb{R} y como G es geodesicamente completo la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge en G , es decir, existe $x_* \in G$ tal que $x_k \rightarrow x_*$.

Probemos ahora que $f(x_*) = 0$.

Tomando en cuenta 4.12 se tiene que

$$\begin{aligned}\|f(x_k)\| &= \|df_{x_0} \circ df_{x_0}^{-1}(f(x_k))\| \\ &\leq \|df_{x_0}\| \|df_{x_0}^{-1}(f(x_k))\| \\ &\leq \|df_{x_0}\| h(t_k),\end{aligned}$$

tomando el limite cuando $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\|f(x_*)\| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|df_{x_0}\| h(t_k) \\ &= \|df_{x_0}\| h(t_*) \\ &= 0,\end{aligned}$$

entonces

$$f(x_*) = 0.$$

Note que si $s \rightarrow \infty$ en 4.12 obtenemos

$$d(x_*, x_k) \leq t_* - t_k.$$

Ahora probemos la unicidad de la raíz.

Notemos que tomando el limite en 4.11 obtenemos que

$$\begin{aligned}\|df_{x_*} \circ df_{x_0}\| &\leq \frac{1}{1 - Lt_*} \\ &= \frac{1}{1 - L \left(\frac{1}{L} (1 - \sqrt{1 - 2c}) \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2c}},\end{aligned}$$

ahora, supongamos que $y_* \in B(x_0, t_*)$ es otra raíz. Sea $u \in \mathfrak{g}$ tal que $c(t) = x_* \exp(tu)$ una x_* con y_* , es decir, $c(0) = x_*$ y $c(1) = y_*$, así $\|u\| = d(x_*, y_*)$, pues $c(t)$ es geodésica. Veamos primero que el operador

$$\int_0^1 df_{x_* \exp(tu)}(\cdot) dt$$

es invertible.

Dado que

$$\begin{aligned}
& \|df_{x_*}^{-1}\| \int_0^1 \|df_{x_* \exp(tu)} dt - df_{x_*}\| \\
&= \left\| df_{x_*}^{-1} \circ df_{x_0} \circ df_{x_0}^{-1} \int_0^1 df_{x_* \exp(tu)}(\cdot) dt - df_{x_*} \right\| \\
&\leq \|df_{x_*}^{-1} \circ df_{x_0}\| \int_0^1 \|df_{x_0}(df_{x_* \exp(tu)}(\cdot) - df_{x_*}) dt\| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{1-2c}} \int_0^1 Ld(x_* \exp(tu), x_*) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2c}} \int_0^1 Lt \|u\| dt \\
&= \frac{L \|u\|}{2\sqrt{1-2c}} \\
&= \frac{Ld(x_*, y_*)}{2\sqrt{1-2c}} \\
&\leq \frac{Ld(x_*, x_0) + d(x_0, y_*)}{2\sqrt{1-2c}} \\
&\leq \frac{L(t_* + t_*)}{2\sqrt{1-2c}} \\
&= \frac{Lt_*}{\sqrt{1-2c}} \\
&= \frac{L\left(\frac{1}{L}(1 - \sqrt{1-2c})\right)}{\sqrt{1-2c}} \\
&= \frac{1 - \sqrt{1-2c}}{\sqrt{1-2c}} < 1,
\end{aligned}$$

entonces el operador

$$\int_0^1 df_{x_* \exp(tu)}(\cdot) dt$$

es invertible. Por el lema 73

$$f(x_* \cdot \exp(u)) - f(x_*) = \int_0^1 df_{x_* \exp(tu)}(tu) dt,$$

es decir,

$$f(c(1)) - f(x_*) = \int_0^1 df_{x_* \exp(tu)}(tu) dt,$$

luego

$$0 = \int_0^1 df_{x_* \exp(tu)}(u) dt,$$

como el operador

$$\int_0^1 df_{x_* \exp(tu)}(\cdot) dt$$

es invertible, entonces $u = 0$, o sea

$$d(x_*, y_*) = 0$$

y entonces

$$x_* = y_*.$$

Finalmente probaremos que si $c = bL < \frac{1}{2}$ y $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ con

$$t_* < r \leq t_{**} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 2c}),$$

entonces el limite x_* de sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es el único cero de f en $B(x_0, r)$.

Sea $y_* \in B(x_0, r)$ otra raíz de f en $B(x_0, r)$ y considere la curva $c(t) = x_0 \cdot \exp(tu)$ que une x_0 con y_* , donde $\|u\| = d(x_0, y_*)$. Definamos $R(t)$ por :

$$\begin{aligned} R(t) &= f(x_0 \exp(tu)) - f(x_0) - df_{x_0}(u) \\ &= \int_0^t df_{x_0 \exp(su)}(u) ds - df_{x_0}, \end{aligned}$$

ésto último por lema 73, luego como $df_{x_0}^{-1} \circ df$ es Lipschitz entonces

$$\begin{aligned} \|R(t)\| &= \left\| df_{x_0} \int_0^t df_{x_0}^{-1} (df_{x_0 \exp(su)}(u) - df_{x_0}(u)) ds \right\| \\ &\leq \|df_{x_0}\| \int_0^t \|df_{x_0}^{-1} (df_{x_0 \exp(su)} - df_{x_0})(u)\| ds \\ &\leq \|df_{x_0}\| \int_0^t L \|u\| s \|u\| ds \\ &\leq \|df_{x_0}\| L \frac{t^2}{2} \|u\|^2, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}\|R(1)\| &\leq \|df_{x_0}\| \frac{L}{2} \|u\|^2 \\ &= \|df_{x_0}\| \frac{L}{2} d(x_0, y_*)^2.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}R(1) &= f(x_0 \exp(u)) - f(x_0) - df_{x_0}(u) \\ &= f(y_*) - f(x_0) - df_{x_0}(u) \\ &= -f(x_0) - df_{x_0}(u),\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\|R(1)\| &= \|f(x_0) - df_{x_0}(u)\| \\ &\geq \frac{1}{\|df_{x_0}^{-1}\|} \|df_{x_0}^{-1} \circ df(x_0) + u\| \\ &\geq \frac{1}{\|df_{x_0}^{-1}\|} (\|u\| - \|df_{x_0} \circ f(x_0)\|) \\ &\geq \frac{1}{\|df_{x_0}^{-1}\|} (d(x_0, y_*) - b).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|df_{x_0}\| \frac{L}{2} d(x_0, y_*)^2 &\geq \|R(1)\| \\ &\geq \frac{1}{\|df_{x_0}^{-1}\|} (d(x_0, y_*) - b),\end{aligned}$$

seguidamente

$$\frac{L}{2} d(x_0, y_*)^2 \geq d(x_0, y_*) - b,$$

así,

$$\frac{L}{2} d(x_0, y_*)^2 - d(x_0, y_*) - b \geq 0,$$

o sea

$$h(d(x_0, y_*)) \geq 0.$$

Dado que

$$d(x_0, y_*) \leq r \leq t_{**},$$

entonces

$$d(x_0, y_*) \leq t_*,$$

o sea y_* es una singularidad que está en $B(x_0, t_*)$ y como ya probamos que élla es única en $B(x_0, t_*)$, entonces

$$x_* = y_*.$$

■

Ejemplo 77 Sea n un entero positivo y G el grupo especial ortogonal bajo el producto de matrices, es decir.,

$$G = SO(n, \mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T X = I_n, \det X = 1\},$$

como probamos en 69 G es una variedad diferenciable y su álgebra de Lie, la cual es el espacio tangente en la identidad, es el conjunto de las matrices antisimétricas de orden $n \times n$

$$\mathfrak{g} = \{V \in M_n(\mathbb{R}) \mid V^T + V = 0\},$$

donde a \mathfrak{g} lo dotamos con el producto interno estándar,

$$\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V) \quad \text{para cada } U, V \in \mathfrak{g}.$$

Así, podemos definir la llamada norma de Frobenius en \mathfrak{g} por:

$$\|U\|_F = \sqrt{\text{tr}(U^T U)} \quad \text{para cada } U \in \mathfrak{g}.$$

Sea $A \in \mathfrak{g}$ tal que $\|A\|_F \leq 1$ y definimos $f : G \rightarrow \mathfrak{g}$ por

$$f(X) = X - X^T + A \quad \text{para cada } X \in G.$$

Vamos a probar que ésta función cumple las condiciones del teorema de Newton sobre grupos Lie en una vecindad de la matriz identidad I_n .

En efecto, si $X \in G$, entonces

$$\begin{aligned} f[X \exp(tU)] &= X \exp(tU) - (X \exp(tU))^T + A \\ f[X \exp(tU)] &= X \sum_{n \geq 0} \frac{(tU)^n}{n!} - \left(X \sum_{n \geq 0} \frac{(tU)^n}{n!} \right)^T + A \\ f[X \exp(tU)] &= X \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} U^n - \left(X \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} U^n \right)^T + A \end{aligned}$$

para cada $U \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} df_X(U) &= \left. \frac{d}{dt} f[X \exp(tU)] \right|_{t=0} & (4.14) \\ &= \left. \left(\frac{d}{dt} X \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} U^n - \left(X \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} U^n \right)^T + A \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \left(X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} U^n - \left(X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} U^n \right)^T + A \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \left(X \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} U^{n+1} - \left(X \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} U^{n+1} \right)^T + A \right) \right|_{t=0} \\ &= XU - (XU)^T \end{aligned}$$

para cada $U \in \mathfrak{g}$.

Tomando $x_0 = I_n$ se observa que $df_{x_0} = 2I_{n \times n}$ luego $df_{x_0}^{-1} = 2I_{n \times n}/2$.

Afirmamos que $df_{x_0}^{-1} \circ df$ satisface la condición de Lipschitz con constante $L = 1$ en G , es decir,

$$\|df_{x_0}^{-1} \circ (df_{x'} - df_x)\|_F \leq d(x', x) \quad \text{para cada } x', x \in G. \quad (4.15)$$

En efecto, para algún $x', x \in G$, como G es un grupo de Lie compacto y simplemente conexo ver

[49, 51], existe $V \in \mathfrak{g}$ tal que

$$x' = x \cdot \exp(V) \quad y \quad d(x', x) = \|V\|_F. \quad (4.16)$$

Note que si $df_{x_0}^{-1} = I_{n \times n}/2$, se tiene que, para cada $U \in \mathfrak{g}$,

$$\|df_{x_0}^{-1}(df_{x'} - df_x)\|_F \leq \frac{1}{2} \|(df_{x_0 \exp(V)} - df_x)(U)\|_F, \quad (4.17)$$

si fijamos $U \in \mathfrak{g}$ y definimos la función $g : G \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por:

$$g(X) = XU - (XU)^T \quad \text{para cada } x \in G.$$

Entonces para cada $s \in [0, 1]$,

$$dg_{X \exp(sV)}(V) = X \exp(sV) VU - [X \exp(sV) VU]^T,$$

donde

$$X \exp(sV) VU [X \exp(sV) VU]^T = I_n,$$

de ésto sigue que

$$\|X \exp(sV) VU\|_F \leq \|VU\|_F,$$

y

$$\|[X \exp(sV) VU]^T\|_F \leq \|VU\|_F.$$

Por tanto

$$\|dg_{X \exp(sV)}(V)\|_F \leq 2 \|VU\|_F \leq 2 \|V\|_F \|U\|_F,$$

además por lema 73

$$\begin{aligned} & \|g(x \exp(V)) - g(X)\|_F \\ & \leq \int_0^1 \|dg_{x \exp(sV)}(V)\|_F ds \\ & \leq 2 \|V\|_F \|U\|_F \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta 4.14 y 4.17 se tiene que

$$\begin{aligned} & \|df_{x_0}^{-1}(df_x - df_x)\|_F \\ &= \frac{1}{2} \|g(X \exp(V)) - g(X)\|_F \leq \|V\|_F \|U\|_F. \end{aligned}$$

Como $U \in \mathfrak{g}$ es arbitrario, y en virtud de 4.15 se asegura 4.16.

Por otra parte, como $f(x_0) = A$, se tiene que

$$Lb = \|df_{x_0}^{-1}f(x_0)\|_F = \frac{1}{2} \|A\|_F \leq \frac{1}{2},$$

así, las condiciones del teorema 76 son satisfechas, por lo que la sucesión generada por 4.8 con punto inicial $x_0 = I_n$ converge a un cero x_* de f y además es la única singularidad de f en $B[x_0, t_*]$, donde

$$t_* = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \|A\|_F},$$

y

$$A = x_*^t - x_*.$$

Capítulo 5

Conclusión

Existe un gran interés, entre otras cosas, gracias a los avances en la ciencia computacional, en el estudio de los llamados métodos numéricos de orden superior. En los últimos años, varios matemáticos han estado interesados en mostrar la validez de estos métodos en espacios más generales que euclidianos, como los espacios de Banach. Ver [19-27,41,44,45]. En este orden de ideas, no es de extrañar que haya interés en mostrar la validez de esos métodos en conjuntos incluso más generales que los espacios Banach como variedades Riemannianas, ver [1-14]. La principal contribución de esta tesis fué presentar el método de Kantorovich simplificado en grupos de Lie, para resolver el problema de encontrar puntos singulares sobre campos vectoriales en éstos grupos, que son casos particulares de variedades Riemannianas. En este contexto, demostramos la convergencia de las sucesiones generadas por el método introducido para hallar un punto crítico. El desarrollo de estos métodos en variedades crea nuevas dificultades, que no existían en los espacios de Banach. Algunas de estas dificultades son de naturaleza técnica; por ejemplo, es difícil definir el método en este nuevo contexto. Específicamente, en Los espacios de Banach no distinguen entre el espacio E y su espacio tangente T_pE en un punto p , ya que son isomorfos. Por lo tanto, es "legítimo" sumar puntos y vectores. En variedades esto no sucede, así que debemos ser muy cuidadosos. Para esto, se usa la función exponencial, es decir, a un punto y un vector de un espacio tangente se le asigna un nuevo punto de la variedad. Otra dificultad fué la definición de la derivada; se podría pensar que la derivada ordinaria es suficiente para definir el método en el caso donde la variedad está incrustada en un espacio euclidiano, pero esto no es cierto ya que la derivada ordinaria no es necesariamente tangente a la variedad en el

punto considerado. Por lo tanto, es necesario considerar la derivada covariante, que en este caso particular es la proyección de la derivada ordinaria en el plano tangente. Ver [32] Teorema 4.2. Otras dificultades encontradas fueron generales, ya que dependen de la variedad. Particularmente, a diferencia de los espacios de Banach, donde las geodésicas son líneas rectas, las bolas abiertas en las variedades no son necesariamente convexas desde el punto de vista geodésico, es decir, dados dos puntos en una bola abierta, la geodésica que une dichos puntos, no está necesariamente contenida en la bola. Esta diferencia con los espacios de Banach crea una gran dificultad para demostrar en el nuevo contexto de los teoremas de singularidad de los métodos clásicos, como puede ser visto en la prueba de la singularidad del método simplificado de Kantorovich discutido por los autores en [14]. Sin embargo, en los grupos de Lie no se manifiesta dicha dificultad debido a que al tomar un par puntos sobre una variedad de éste tipo y construir sus espacios tangentes o lo que es igual a sus respectivas álgebras de Lie en tales puntos, se puede garantizar que la geodésica que conecta a los dos puntos ésta contenida en la variedad o grupo de Lie. Las técnicas clásicas, en espacios de Banach, para probar la singularidad se pueden llevar al contexto de variedades y mostrar la existencia de singularidades, pero con suposiciones más restrictivas sobre las constantes, que dan lugar a un radio de convergencia menor que en los espacios de Banach. Por otra parte y como punto final se debe destacar que pareciera que nuestra demostración es un corolario del método de Kantorovich simplificado, pero en medio del desarrollo nos percatamos que éste caso particular de variedades no es necesario definir un operador con derivada covariante como se hace en el método simplificado de Kantorovich y que va del espacio tangente en el espacio tangente para un punto asignado por el contrario se uso una función que se mueve del álgebra de la variedad en el álgebra de la variedad o grupo de Lie. Esto muestra que realmente no es un derivada sobre el espacio tangente sino más más bien función traslación, la cual funciona tanto por la izquierda como por la derecha y se caracterizan por ser iguales y que en nuestro caso particular se uso la traslación izquierda. Finalmente ésta acotación marca la diferencia al momento de realizar la demostración de dicho teorema y por lo que se concluye que no es un corolario simplemente de un gran resultado sobre variedades.

Bibliografía

- [1] R.L. Adler, J.-P. Dedieu, J.Y. Margulies, M. Martens, M. Shub, Newton's method on Riemannian manifolds and a geometric model for the human spine. *IMA J. Numer. Anal.* 22 (3), 359-390 (2002).
- [2] T. Bittencourt, O. P. Ferreira, Kantorovich's theorem on Newton's method under majorant condition in Riemannian manifolds, *Journal of Global Optimization*, p. 1-25, (2016).
- [3] C. Li, J. Wang, Newton's method for sections on Riemannian manifolds: Generalized covariant α -theory, *Journal of Complexity*, 24, (2008), 423–451.
- [4] C. T. Kelley, A Shamanskii-like acceleration scheme for nonlinear equations at singular roots, *Math. Comp.*, 47, (1986), 609–623.
- [5] D. Chen, I. K. Argyros, and Q. S. Qian, A note on the Halley method in Banach spaces, *Applied Mathematics and Computation*, 58, (2), (3), (1993), 215-224.
- [6] D. Chen, Ostrowski-Kantorovich theorem and S-order of convergence of Halley method in Banach spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 34, (1993), 153–163.
- [7] Do Carmo M., *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [8] F. Alvarez, J. Bolte, Munier, A unifying local convergence result for Newton's method in Riemannian manifolds, *Foundations of Computational Mathematics*, 8, (2), (2008), 197–226.
- [9] Hicks. N, *Notes on Differential Geometry*. Princeton: van Nostrand, 1965.

- [10] I.K. Argyros, An improved unifying convergence analysis of Newton's method in Riemannian manifolds. *J. Appl. Math. Comput.* 25 (1-2), 345-351 (2007).
- [11] I.K. Argyros, Chebyshev-Halley like methods in Banach spaces, *Korean Journ. Comp. Appl. Math.*, 4, (1), (1997), 83–107.
- [12] I.K. Argyros, S. Hilout, Newton's method for approximating zeros of vector fields on Riemannian manifolds. *J. Appl. Math. Comput.* 29 (1-2), 417-427 (2009)
- [13] I.K. Argyros and D. Chen, Results on the Chebyshev method in Banach spaces, *Proyecciones*, 12, (1993), 119–128.
- [14] James R. Munkres, *Topology*, 2nd Edition, Prentice Hall, 2000.
- [15] J. Dedieu, D. Nowicki, Symplectic methods for the approximation of the exponential map and the Newton iteration on Riemannian submanifolds, *Journal of Complexity*, 21, (2005), 487–501.
- [16] J.A. Ezquerro, A modification of the Chebyshev method, *IMA J. Numer. Anal.*, 17, (4), (1997), 511–525.
- [17] J.A. Ezquerro, J.M. Gutiérrez, M.A. Hernández, M.A. Salanova, Chebyshev-like methods and quadratic equations, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, 28, (1), (2000), 23–35.
- [18] J.A. Ezquerro, M.A. Hernández, New Kantorovich-type conditions for Halley's method, *Appl. Numer. Anal. Comput. Math.*, 2, (1), (2005), 70–77.
- [19] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, NY, USA, 1970.
- [20] J. M. Gutiérrez and M. A. Hernández, A family of Chebyshev–Halley type methods in Banach spaces, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 55, (1), (1997), 113–130.
- [21] J. Kou, Y. Li and X. Wang, A modification of Newton method with third-order convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 181, (2007), 1106–1111.
- [22] J.P. Dedieu, P. Priouret, G. Malajovich, Newton's method on Riemannian manifolds: covariant alpha theory, *IMA J Numer Anal.*, 23, (2003) 395–419.

- [23] Li, C., Wang, J.: Newton's method on Riemannian manifolds: Smale's point estimate theory under the γ -condition. *IMA J. Numer. Anal.* 26 (2), 228-251 (2006).
- [24] L.V. Kantorovich. and G. P. Akilov, *Functional Analysis in Normed Spaces*, Pergamon, Oxford, 1964.
- [25] M.A. Hernández, Second-derivative-free variant of the Chebyshev method for nonlinear equations, *J. Optim. Theory Appl.*, 104, (3), (2000), 501–515.
- [26] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I, II*, third ed., Publish or Perish Inc., Houston, texas, 2005.
- [27] N. Romero, *Familias paramétricas de procesos iterativos de alto orden de convergencia*, Ph.D. Dissertation, Logroño, Spain, 2006.
- [28] O. Ferreira ., B. Svaiter, Kantorovich's Theorem on Newton's Method in Riemannian manifolds, *Journal of Complexity*, 18, (2002), 304–329.
- [29] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, NY, USA, 1970.
- [30] Q. B. Wu and Y. Q. Zhao, Third-order convergence theorem by using majorizing function for a modified Newton method in Banach space, *AppLied Mathematics and Computation*, 175, (2), (2006), 1515–1524.
- [31] R. Abraham, J.E. Marsden y T. Ratiu. "Manifolds. Tensor Analysis and Applications". Springer-Verlag. 1988.
- [32] R. A. Castro, J. C. Rodríguez, W.W. Sierrac, L. Di Giorgi, S. J.Gómez. Chebyshev–Halley's method on Riemannian manifolds. *Journal of Computational and AppLied Mathematics*. Volume 336, Pages 30-53, 2018
- [33] R. Castro, *Higher order iterative methods on Riemannian manifolds*, Ph.D. Dissertation, Universidad de Santiago de Chile, Chile 2011.
- [34] R. Kress. *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1998.

- [35] S. Amat, Ioannis K. Argyros, S. Busquier, R. Castro, Saïd Hilout, Sergio Plaza, On a bilinear operator free third order method on Riemannian manifolds, *AppLied Mathematics and Computation*, 219, (14), (2013), 7429–7444.
- [36] S. Amat, I. K. Argyros, S. Busquier, R. Castro, S. Hilout, S. Plaza, Traub-type high order iterative procedures on Riemannian manifolds, *SeMA Journal*, 63, (1), 27–52.
- [37] S. Amat, S. Busquier, R. Castro And S.Plaza, Third-order methods on Riemannian Manifolds under Kantorovich condition, *Journal of Computational and AppLied Mathematics*, 255, (2014), 106–121.
- [38] S. Amat, I. K. Argyros, S. Busquier, R. Castro, S. Hilout and S. Plaza, Newton-type Methods on Riemannian Manifolds under kantorovich-type conditions, *AppLied Mathematics and Computation*, 227, (C), (2014), 762–787.
- [39] S. Amat, S. Busquier, A two-step Steffensen’s method under modified convergence conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, 324, (2006), 1084–1092.
- [40] S. Amat, S. Busquier, J. M. Gutiérrez: Third-order iterative methods with applications to Hammerstein equations: A unified approach, *J. Computational AppLied Mathematics*, 235, (9), (2011), 2936–2943.
- [41] S. Amat, C. Bermúdez, S. Busquier, M. J. Legaz S. Plaza, On a family of high order iterative methods under Kantorovich conditions and some aplcations, *AMS*, 2011.
- [42] S. Amat, C. Bermúdez, S. Busquier, S. Plaza, On a third-order Newton-type method free of bilinear operators, *Numer, Linear Algebra Appl*, 17, (4), (2010), 639–653.
- [43] S. Amat and S. Busquier. Third-order iterative methods under Kantorovich conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336, (1), (2007), 243–261.
- [44] S. Lang, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Springer 2002.
- [45] S. Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*, GTM No. 160. Springer-Verlag, third edition, 1995.

- [46] S. Richard, D. George Parker. Elements of differential geometry, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, c1977
- [47] V. E. Shamanskii, A modification of Newton's method, Ukrain. Mat. Zh., 19, (1967), 133–138.
- [48] V. I. Averbuh and O. G. Smoljanov (1967), Differentiation theory in linear topological spaces, Uspehi Mat. Nauk 6, 201–260, Russian Math. Surveys, 6, 201–258.
- [49] V.S. Varadarajan, Lie Groups Lie Algebras and their Representations, in: GTM, 102, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [50] V. Guillemin, A. Pollack. Differential Topology, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, 2014.
- [51] F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, in: GTM, 94, Springer-Verlag, New York, 1983.