Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Insituto de Matemáticas

Convergencia débil de medidas aleatorias

Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas

Presentada por:
LUIS GUILLERMO HERNÁNDEZ BARAJAS

Profesor Guía: Dr. Raúl Fierro Pradenas

VALPARAÍSO
MES AÑO

Agradecimientos

A la Universidad de Valparaíso por darme la oportunidad de continuar mis estudios en matemáticas. A mis profesores y compañeros de magister por siempre darme apoyo y complementar mi formación. Al pueblo de Chile por abrirme sus puertas y brindarme cada día nuevas experiencias.

Resumen

Los orígenes de la teoría moderna de las medidas aleatorias y procesos puntuales no son fáciles de trazar, ni es nuestro objetivo dar aquí un relato con pretensiones de ser definitivo. En consecuencia, la contribución de este trabajo radica en recopilar los resultados fundamentales de algunos textos clásicos tales como [9] y [10] donde se estudian las medidas aleatorias sobre un espacio topológico E, el cual es Hausdorff, localmente compacto y 2° numerable. Además, se completan y revisan varios argumentos en las demostraciones de los resultados más importantes de esta teoría. Es pertinente aclarar que no se pretende ninguna originalidad más allá de presentar en forma integrada los resultados fundamentales de esta útil teoría, y la forma en que la teoría de medidas aleatorias sirve de contexto para estudiar la convergencia a medidas aleatorias de Poisson. Sin embargo, se espera usar el desarrollo de esta tesis en una futura investigación.

Palabras claves: convergencia débil, medidas aleatorias, procesos de Poisson.

Índice general

Introducción

Durante las últimas décadas, el modelamiento de variados fenómenos y procesos se ha vuelto esencial, tanto en ingeniería como en ciencia básica. Es aquí donde la matemática ha actuado con un rol fundamental al proporcionar un lenguaje con el cual describir y formalizar versiones simplificadas de la realidad, esto, con el fin de utilizar las herramientas inherentes a esta para establecer propiedades y así obtener una mejor comprensión de los fenómenos observados. Dentro de este contexto es natural el rápido interés surgido por describir fenómenos naturales a partir de la matemática. Particularmente, en el área de la física estadística existía la motivación por describir modelos estocásticos que representaran la evolución temporal de sistemas, para así comprender de mejor forma los estados de equilibrio junto con las transiciones de fase. Es así como a finales de los años sesenta surgen las medidas aleatorias como un área dentro de las probabilidades y, desde ese entonces, este tema se ha desarrollado rápidamente, estableciendo conexiones con disciplinas tales como la biología y las finanzas, además de la física. Específicamente, y desde un punto de vista matemático, las medidas aleatorias representan una extensión natural de la teoría de procesos puntuales, en el sentido que estos últimos pueden considerarse como una medida aleatoria $\mathbb{Z}_+$-valuada. Como resultado, tendremos que bajo ciertas condiciones, si consideramos un arreglo triangular infinitesimal de procesos puntuales independientes, estos convergen en distribución a un proceso puntual de Poisson.

En nuestros días la teoría de las medidas aleatorias es aplicada en muchos campos. Algunos de estos, donde esta teoría ha sido frecuentemente utilizada, son los sistemas de partículas. Al respecto, mencionamos el trabajo realizado por Moyal [12] quien introduce dichos sistemas en el contexto de los campos aleatorios de nidos en un espacio de estados arbitrario. En esta misma línea mencionamos los trabajos publicados por Dawson e Ivanoff [3], donde investigan sistemas en $\mathbb{R}^d$ con un número infinito de partículas, además de presentar algunas propiedades que poseen este tipo de sistemas.

Finalmente mencionamos el trabajo de Dawson [4], consistente en la construcción y estudio de los procesos de Markov con estados en espacios de medidas y las diferentes direcciones en las que se ha desarrollado la teoría de tales procesos.

La contribución de la presente tesis radica en la recopilación de los resultados fundamentales presentados en algunos textos clásicos, tales como el de Kallenberg [10], donde se estudian las medidas aleatorias sobre un espacio que no requiere de un orden particular o una estructura métrica. Otro texto, pionero en el tema es el de Jagers [9], donde se estudian las medidas aleatorias sobre un espacio localmente compacto con base numerable. Además de la recopilación mencionada, en este estudio se completan y revisan algunos argumentos en las demostraciones de los resultados escritos por estos autores.

La tesis está dividida en tres capítulos y un apéndice. Aunque esta tesis no es de autocontenido, pues asume conocidos los conceptos impartidos en el programa de magister, al final se incluyen, omitiendo la mayoría de las demostraciones, algunos teoremas propios de los cursos de Probabilidades y de Análisis Funcional.

En el capítulo 1, se presenta el espacio $\mathbb{M}(E)$ de las medidas Radon sobre un espacio topológico E, el cual es por sí mismo objeto de interés, ya que posee ciertas propiedades importantes como por ejemplo su topología, la cual resulta ser metrizable cuando E es un espacio Hausdorff, localmente compacto y con base numerable. Demostraremos que esta topología, la cual es separable, es inducida por una métrica completa. Por consiguiente, $\mathbb{M}(E)$ es un espacio polaco. Además, se caracteriza la σ-álgebra de Borel de este espacio y se demuestra un teorema que establece condiciones necesarias y suficientes para la convergencia vaga en el espacio de las medidas de Radon.

En el capítulo 2 se introduce el concepto de medida aleatoria y se demuestra un teorema que caracteriza la distribución de este tipo de medidas. Además, se estudian propiedades de tensión en el espacio de las medidas de Radon, y se analiza la convergencia débil de medidas aleatorias. Otro concepto importante, estudiado en este capítulo, es el de proceso puntual, que como veremos, no es más que una medida aleatoria con estados en los enteros no negativos.

Finalmente, el capítulo 3 está dedicado al estudio de la medida aleatoria de Poisson. Se desarrolla aquí un resultado que garantiza la existencia de estas medida aleatoria para una medida intensidad dada. Finalmente, se estudia la convergencia de una superposición de procesos puntuales hacia una medida aleatoria de Poisson con medida intensidad difusa.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos

En esta sección definiremos algunos espacios básicos y notaciones. En primer lugar, E denotará un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y 2° numerable. Esto implica que E es σ-compacto, vale decir, existe una sucesión creciente (por inclusión) $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos compactos tales que $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y además $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. En lo que sigue, mantenderemos la notación $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para esta sucesión. Es un hecho conocido que E es un espacio Polaco, es decir, existe una métrica compatible con la topología de E, de modo que, con esta métrica, E es separable y completo.

Observación 1. Como E es un espacio topológico normal, por lema de Urysohn, dados dos conjuntos cerrados disjuntos no vacíos F_1 y F_2, existe una función continua $f : E \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F_1$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in F_2$. Esta función puede definirse de manera explícita como

$$f(x) = \frac{\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)},$$

donde ρ es la métrica completa que define la topología de E. En particular, si K y G son subconjuntos compactos y abiertos de E, respectivamente, entonces podemos escoger una tal función f de modo que $f(x) = 1$, para todo $x \in K$ y $f(x) = 0$, para todo $x \notin G$. Anotaremos en este caso, $K \prec f \prec G$.

Otra familia de subconjuntos de E, que consideramos relevante, es aquella formada por los subconjuntos relativamente compactos de E. Esta familia la denotaremos por $\mathscr{R}$.

La clase de todas las funciones medibles de E en $\mathbb{R}$ la denotaremos por $\mathscr{E}(E)$. Para cada $f \in \mathscr{E}(E)$, definimos el soporte de f como el conjunto $\operatorname{sop}(f) = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$ y denotaremos por $\mathscr{C}_K(E)$ la subclase de $\mathscr{E}(E)$ constituida por las funciones continuas de E en $\mathbb{R}$ con soporte compacto. Es sencillo verificar que este espacio es de Banach, con la norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in \mathscr{C}_K(E).$$

Lema 2. *Dado un conjunto compacto $B \subset E$, existe una sucesión decreciente $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos compactos y una sucesión decreciente $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{C}_K(E)$, de modo que las tres condiciones siguientes se satisfacen:*

(2.1) $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$,

(2.2) $\mathbf{1}_B \leq f_n \leq \mathbf{1}_{B_n}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y*

(2.3) $\{\mathbf{1}_{B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente a* $\mathbf{1}_B$.

Demostración. Sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente en $\mathscr{R}$ de abiertos tales que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Como B es compacto, existe $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset G_{n^*}$. Para cada $\epsilon > 0$ sea $B^\epsilon = \{x \in E : \rho(x, B) \leq \epsilon\}$. Se verifica fácilmente que $B = \bigcap_{\epsilon>0} B^\epsilon \subset G_{n^*}$, y entonces $B = \bigcup_{\epsilon>0}(B \setminus (B^\epsilon \cap G^{\mathrm{c}}_{n^*}))$. Pero B es compacto y luego existe $\epsilon^* > 0$ tal que $B = B \setminus (B^{\epsilon^*} \cap G^{\mathrm{c}}_{n^*})$, lo cual implica que $B \subset B^{\epsilon^*} \subset G_{n^*}$. Como G_{n^*} es relativamente compacto, B^{ϵ^*} es compacto. Sean $n_0 > 1/\epsilon^*$ y $B_n = B^{1/(n+n_0)}$. Luego, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos que satisface (2.1). Además, definiendo $f_n : E \to [0,1]$ como

$$f_n(x) = \frac{\rho(x, B_n^c)}{\rho(x, B_n^c) + \rho(x, B)}, \tag{1.1}$$

se obtienen de manera evidente las condiciones (2.2) y (2.3). Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{sop}(f_n) \subset \overline{B}_n$, con lo cual cada f_n tiene soporte compacto. Esto completa la demostración. ■

Diremos que una medida μ sobre $(E, \mathscr{B}(E))$ es localmente finita (o de *Radon*) si $\mu(B) < \infty$ para todo B subconjunto compacto de E.

Notación 3. Una medida μ de Radon es

(3.1) una medida puntual (o de conteo), si $\mu(K) \in \mathbb{N}$ para todo $K \subset E$ compacto.

(3.2) difusa, si $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in E$.

Denotaremos por $\mathbb{M}(E)$ el conjunto de todas las medidas de Radon sobre $(E, \mathscr{B}(E))$ y por $\mathbb{M}_0(E)$ el conjunto de las medidas puntuales. Además, diremos que un punto $x \in E$ es un átomo si $\mu(\{x\}) > 0$.

La topología vaga sobre $\mathbb{M}(E)$ se define como la topología generada por las funciones $T_f : \mathbb{M}(E) \to \mathbb{R}$ tales que $T_f(\mu) = \mu(f) := \int f \, \mathrm{d}\mu$, donde $f \in \mathscr{C}_K(E)$. Vale decir, la topología vaga sobre $\mathbb{M}(E)$ es la topología más pequeña según la cual las funciones T_f, con $f \in \mathscr{C}_K(E)$, son continuas. Por supuesto, consideramos $\mathbb{M}_0(E)$ con la topología que $\mathbb{M}(E)$ le induce.

Proposición 4. *Sea* $\mathscr{S} = \{S_{f,\epsilon}[\nu]; \nu \in \mathbb{M}(E), f \in \mathscr{C}_K(E), \epsilon > 0\}$, *donde*

$$S_{f,\epsilon}[\nu] = \left\{\mu \in \mathbb{M}(E) : |T_f(\mu) - T_f(\nu)| < \epsilon\right\}.$$

Entonces, $\mathscr{S}$ *es una sub base para la topología de* $\mathbb{M}(E)$.

Demostración. Sean τ y $\tau[\mathscr{S}]$, la topología de $\mathbb{M}(E)$ y aquella generada por la sub base $\mathscr{S}$, respectivamente. Notamos que para todos $\nu \in \mathbb{M}(E)$, $f \in \mathscr{C}_K(E)$ y $\epsilon > 0$, se tiene que $S_{f,\epsilon}[\nu] = T_{f,\epsilon}^{-1}(a,b)$, con $a = T_f(\nu) - \epsilon$ y $b = T_f(\nu) + \epsilon$. Luego, $\tau[\mathscr{S}] \subset \tau$. Recíprocamente, sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f \in \mathscr{C}_K(E)$. Demostremos que $G = \left\{\mu \in \mathbb{M}(E) : a < T_f(\mu) < b\right\} \in \tau[\mathscr{S}]$. Esto es evidente si $G = \emptyset$. Supongamos entonces que $G \neq \emptyset$. Sean $\mu_0 \in G$ y $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $a < T_f(\mu_0) - \delta_1 < T_f(\mu_0) < T_f(\mu_0) + \delta_2 < b$. Luego, $\mu_0 \in S_{f,\delta}[\mu_0] \subset G$, donde $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Por lo tanto, $G \in \tau[\mathscr{S}]$, completándose la demostración. ■

Observación 5. Se sigue de la Proposición 4, que una base para $\mathbb{M}(E)$, con la topología vaga, viene dada por

$$\mathscr{B} = \{V_{f_1,\ldots,f_n;\varepsilon}[\nu]; \nu \in \mathbb{M}(E), f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{C}_K(E), \varepsilon > 0, 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

donde,

$$V_{f_1,\ldots,f_n;\varepsilon}[\nu] = \{\mu \in \mathbb{M}(E); |T_{f_j}(\mu) - T_{f_j}(\nu)| < \varepsilon\}.$$

Por otra parte, introducimos la σ-álgebra $\mathscr{M}(E)$, la cual es aquella generada por las funciones $T_A : \mathbb{M}(E) \to [0, \infty]$, definidas por $T_A(\mu) = \mu(A)$, donde $A \in \mathscr{B}(E)$.

Se demuestra en Proposición 6 que $\mathbb{M}_0(E) \cap \mathscr{M}(E)$, la σ-álgebra traza sobre $\mathbb{M}_0(E)$, coincide con su σ-álgebra de Borel, la cual a su vez coincide con la σ-álgebra $\mathscr{M}_0(E)$ generada por las restricciones a $\mathbb{M}_0(E)$ de la funciones T_A ya definidas.

Proposición 6. *Las dos igualdades siguientes se satisfacen:*

(6.1) $\mathscr{M}(E) = \mathscr{B}(\mathbb{M}(E))$.

(6.2) $\mathbb{M}_0(E) \cap \mathscr{M}(E) = \mathscr{B}(\mathbb{M}_0(E)) = \mathscr{M}_0(E)$.

Demostración. Sea $A \in \mathscr{B}(E)$ abierto. Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definimos $A_n = \{x \in E : \rho(x, A) < 1/n\}$ y tomemos una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como en el Lema 2.

Luego, $\mathbf{1}_A \le f_n \le \mathbf{1}_{A_n}$ y entonces, por Teorema de Convergencia Dominada, $\{T_{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge puntualmente a T_A. Como para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, T_{f_n} es $\mathscr{B}(\mathbb{M}(E))$-medible, se tiene que T_A es $\mathscr{B}(\mathbb{M}(E))$-medible. Esto demuestra que $\mathscr{M}(E) \subset \mathscr{B}(\mathbb{M}(E))$.

Recíprocamente, sea $f \in \mathscr{C}_K(E)$ con $f \ge 0$. Luego, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples que converge puntualmente hacia f. Claramente, T_{f_n} es $\mathscr{M}(E)$-medible y entonces f también lo es. El caso general, se deduce descomponiendo f como $f = f^+ - f^-$. Esto demuestra (6.1).

Dado cualquier espacio topológico X y $A \subset X$, se tiene que $A \cap \mathscr{B}(X) = \mathscr{B}(A)$. Se sigue de (6.1) entonces que

$$\mathbb{M}_0(E) \cap \mathscr{M}(E) = \mathbb{M}_0(E) \cap \mathscr{B}(\mathbb{M}(E)) = \mathscr{B}(\mathbb{M}_0(E)).$$

Sea $i_0 : \mathbb{M}_0(E) \hookrightarrow \mathbb{M}(E)$ la inmersión natural. Luego, $\mathscr{M}_0(E)$ es la σ-álgebra generada por $T_A \circ i_0$, vale decir, $\mathscr{M}_0(E) = \mathbb{M}_0(E) \cap \mathscr{M}(E)$, con lo cual se completa la demostración. ■

Dada una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de E, denotaremos por $\mathscr{S}_{\mathscr{A}}$ la σ-álgebra sobre $\mathbb{M}(E)$ generada por T_A con $A \in \mathscr{A}$. En particular, $\mathscr{S}_{\mathscr{B}(E)} = \mathscr{M}(E)$.

Proposición 7. *Si $\mathscr{A}$ es una álgebra sobre E, que contiene una base numerable de la topología, entonces $\mathscr{S}_{\mathscr{A}} = \mathscr{B}(\mathbb{M}(E))$.*

Demostración. Obviamente $\mathscr{S}_{\mathscr{A}} \subset \mathscr{S}_{\sigma(\mathscr{A})} = \mathscr{S}_{\mathscr{B}(E)} = \mathscr{B}(\mathbb{M}(E))$. Por (6.1) en Proposición 6, basta demostrar que, para todo $A \in \mathscr{B}(E)$, T_A es $\mathscr{S}_{\mathscr{A}}$-medible. Sea $\mathscr{H} = \{A \in \mathscr{B}(E) : T_A \text{ es } \mathscr{S}_{\mathscr{A}}\text{-medible}\}$. Como $\mathscr{A}$ es álgebra y $\mathscr{A} \subset \mathscr{H}$, basta demostrar que $\mathscr{H}$ es clase monótona. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en $\mathscr{H}$. Luego, el Teorema de Convergencia Dominada (TCD) nos permite concluir que, $\{T_{A_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente hacia T_A, donde $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Luego T_A es $\mathscr{S}_{\mathscr{A}}$-medible y por consiguiente $\mathscr{H}$ es estable bajo límites decrecientes. Análogamente, y sin necesidad del TCD, se demuestra que $\mathscr{H}$ es estable bajo límites crecientes. Esto completa la demostración. ■

El siguiente Teorema caracteriza a los conjunto relativamente compactos de $\mathbb{M}(E)$ con respecto a la topología vaga.

Teorema 8. *Sea $M \subseteq \mathbb{M}(E)$. Entonces, M es relativamente compacto, si y solo si,*

$$\sup_{\mu\in M} |\mu(f)| < \infty,$$

para todo $f \in \mathscr{C}_K(E)$.

Demostración. Si M es relativamente compacto, la continuidad de T_f, para cada $f \in \mathscr{C}_K(E)$, implica que $\{\mu(f) : \mu \in M\}$ es relativamente compacto y por consiguiente acotado. Es decir, $\sup_{\mu\in M} |\mu(f)| < \infty$. Recíprocamente, supongamos que $\sup_{\mu\in M} |\mu(f)| < \infty$, para cada $f \in \mathscr{C}_K(E)$. Puesto que $(\mathscr{C}_K(E), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $\sup_{\mu\in M} |\mu(f)| < \infty$, para todo $f \in \mathscr{C}_K(E)$, el Teorema 49 (ver Apéndice) implica que existe $c > 0$ tal que $|\mu(f)| \leq 1$, si $\|f\| \leq c$ y $\mu \in M$. Sea $V = \{f \in \mathscr{C}_K(E) : \|f\| < c\}$. Luego,

$$M \subseteq \{\mu \in \mathbb{M} : |\mu(f)| \leq 1, \text{ para todo } f \in V\}$$

y entonces, por Teorema 50 (ver Apéndice), M es relativamente compacto. Esto completa la demostración. ■

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathscr{C}(K_n)$ el subespacio de todas las funciones continuas de E en $\mathbb{R}$ con soporte contenido en K_n. Puesto que $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, entonces $\mathscr{C}_K(E) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{C}(K_n)$. Dado que $\mathscr{C}(K_n)$ es separable, existe $\mathscr{D}_n \subseteq \mathscr{C}(K_n)$ denso y contable. Sea $\mathscr{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_n$. Luego, $\mathscr{D}$ es contable y por consiguiente, $\mathscr{C}_K(E)$ es separable. Sea $\mathscr{D} = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $\mu, \nu \in \mathbb{M}(E)$, definimos

$$\rho(\mu,\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(\mu-\nu)(h_n)|}{2^n(1+|(\mu-\nu)(h_n)|)}. \tag{1.2}$$

Teorema 9. *La función ρ definida en* (1.2) *es una métrica sobre* $\mathbb{M}(E)$, *compatible con su topología. Además,* $(\mathbb{M}(E), \rho)$ *es un espacio polaco.*

Demostración. Es fácil verificar que ρ satisface la desigualdad triangular. Sean $\mu, \nu \in \mathbb{M}(E)$ tal que $\rho(\mu,\nu) = 0$. Luego, para todo $h \in \mathscr{D}$, $\mu(h) = \nu(h)$ y por consiguiente, $\mathscr{D} \subseteq$

$\{h \in \mathscr{C}_K(E) : \mu(h) = \nu(h)\}$. Como $\mathscr{D}$ es denso, se tiene que para todo $h \in \mathscr{C}_K(E)$, $\mu(h) = \nu(h)$. Luego, $\mathscr{C} = \{A \in \mathscr{B}(E) : \mu(A) = \nu(A)\}$ contiene el π-sistema $\mathscr{K}(E)$ formado por los conjuntos compactos en E. Se verifica fácilmente que $\mathscr{C}$ es un d-sistema y que $\mathscr{B}(E)$ es generado por $\mathscr{K}(E)$. Por Teorema 47, $\mathscr{C} = \mathscr{B}(E)$, lo cual demuestra que ρ es una métrica.

Denotemos por τ la topología sobre $\mathbb{M}(E)$. Es decir, aquella generada por las funciones T_f, con $f \in \mathscr{C}_K(E)$. Denotemos además por τ_ρ la topología generada por ρ, la cual, de manera evidente, coincide con la topología $\tau_{\mathscr{D}}$ generada por las funciones T_h con $h \in \mathscr{D}$. En efecto, sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = |x|/(1+|x|)$ y sea $p_n : \mathbb{M}(E) \to \mathbb{R}$ definida por $p_n = \varphi \circ T_{h_n}/2^n$. Luego, p_n es $\tau_{\mathscr{D}}$-continua y como la serie $p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$ converge uniformemente, p es $\tau_{\mathscr{D}}$-continua. Denotando por $B_\rho(\mu_0, r)$ la ρ-bola con centro en $\mu_0 \in \mathbb{M}(E)$ y radio $r > 0$, se tiene que $B_\rho(\mu_0, r) = \{\mu \in \mathbb{M}(E) : p(\mu - \mu_0) < r\} \in \tau_{\mathscr{D}}$. Luego, $\tau_\rho \subseteq \tau_{\mathscr{D}}$.Recíprocamente, para cada $k \in \mathbb{N}$, T_{h_k} es ρ-continua, pues $|T_{h_k}(\mu) - T_{h_k}(\nu)| \leq 2^k \rho(\mu, \nu)$, para todo $\mu, \nu \in \mathbb{M}(E)$. Ahora bien, $\tau_{\mathscr{D}}$ es la topología más pequeña según la cual las funciones T_{h_k} son continuas y, por consiguiente, $\tau_{\mathscr{D}} \subseteq \tau_\rho$.

Demostremos ahora que $\tau \subseteq \tau_\rho$. Sea $A = \{\mu \in \mathbb{M}(E) : |\mu(f)| < a\}$ un abierto sub basal de $\mathbb{M}(E)$, donde $a > 0$ y $f \in \mathscr{C}_K(E)$. Sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{sop}(f) \subseteq K_n$ y $g \in \mathscr{C}_K(E) \cap \mathscr{D}_{n+1}$ tal que $g(x) > 1/2$, para todo $x \in K_n$. Para demostrar que A es abierto, respecto de ρ, fijamos $\mu_0 \in A$. Sean $b < a$ tal que tal que $|\mu_0(f)| < b$, $W(\mu_0) = \{\mu \in \mathbb{M}(E) : |(\mu - \mu_0)(g)| < 1\}$ y $c = 2(1 + |\mu_0(g)|)$. Luego, $W(\mu_0) \in \tau_{\mathscr{D}}$ y para toda $\mu \in W(\mu_0)$,

$$\mu(K_n) \leq 2\mu(g) \leq 2(1 + |\mu_0(g)|) = c.$$

Esto implica que para toda $h \in \mathscr{C}_K(K_n)$ y toda $\mu \in W(\mu_0)$, $|\mu(h)| \leq c\|h\|$. Sean $h \in \mathscr{D}_n$ tal que $\|f - h\| < (a-b)/4c$. Puesto que $\mu(K_n) \leq c$ y $\mu_0(K_n) \leq c$, entonces,

$$|(\mu - \mu_0)(f - h)| \leq \|\|f - h(\mu(K_n) + \mu_0(K_n)) < \frac{a-b}{2}.$$

Luego, $V(\mu_0) \in \tau_{\mathscr{D}}$. Demostremos que $V(\mu_0) \subseteq A$. Sea $\mu \in V(\mu_0)$. Luego, $f - h \in \mathscr{C}_K(K_n)$ y entonces

$$|\mu(f)| \leq |(\mu - \mu_0)(f - h)| + |(\mu - \mu_0)(h)| + |\mu_0(f)|$$

Así, $\mu_0 \in V(\mu_0) \subseteq A$ y como $V(\mu_0) \in \tau_{\mathscr{D}} = \tau_\rho$, entonces $A \in \tau_\rho$ y, lo cual demuestra que $\tau_\rho = \tau$.

Solo falta demostrar que ρ es una métrica completa. Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y $M = \overline{\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Para cada $f \in \mathscr{C}_K(E)$, $\{\mu_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por consiguiente, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n(f)| < \infty$ y por el teorema precedente, M es compacto. Luego, existe $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión convergente y como $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Esto completa la demostración. ■

1.2. Descomposición de medidas de Radon

Notación 10. Para cada $\mu \in \mathbb{M}(E)$ y $a > 0$, denotaremos mediante $\widehat{\mu}_a$ la medida definida por

$$\widehat{\mu}_a(A) = \sum_{x\in A} \mathrm{I}_{[a,\infty)}(\mu(\{x\})), \quad A \in \mathscr{B}(E).$$

Observación 11. Sean $\mu \in \mathbb{M}(E)$ y $a > 0$.

(11.1) La medida $\widehat{\mu}_a(A)$ está bien definida, pues μ posee una cantidad contable de átomos. En efecto, como μ es σ-finita, basta verficar que un conjunto medible de medida finita, posee una cantidad de átomos a lo sumo numerable. Sean $A \in \mathscr{B}(E)$ tal que $\mu(A) < \infty$ y $\mathbb{A} = \{x \in A : \mu(x) > 0\}$. Luego, $\mathbb{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n$, con $\mathbb{A}_n = \{x \in A : \mu(x) > 1/n\}$. Es fácil ver que la cardinalidad de $\mathbb{A}_n$ es menor que $n\mu(A) < \infty$ y por lo tanto, $\mathbb{A}$ es contable.

(11.2) Para cada $A \in \mathscr{B}(E)$, $\widehat{\mu}_a(A)$ denota la cantidad de átomos de A con tamaño mayor o igual que a.

Teorema 12. *Sea $\mu \in \mathbb{M}(E)$. Luego, μ se descompone de manera única como $\mu = \mu_\alpha + \mu_\beta$, donde μ_α es difusa y μ_β es atómica. Además, si $\mu \in \mathbb{M}_0(E)$, entonces $\mu_\alpha = 0$.*

Demostración. Definimos μ_β como

$$\mu_\beta(A) = \sum_{x\in A} \mathrm{I}_{(0,\infty)}(\mu(x)), \quad A \in \mathscr{B}(E)$$

y $\mu_\alpha = \mu - \mu_\beta$. Luego, μ_α es difusa y μ_β es atómica. Si $\mu = \mu_{\alpha'} + \mu_{\beta'}$ fuera otra descomposición con $\mu_{\alpha'}$ difusa y $\mu_{\beta'}$ atómica, entonces $\mu_{\alpha'} - \mu_\alpha = \mu_\beta - \mu_{\beta'}$. Esto implica que μ_α y $\mu_{\alpha'}$

tienen los mismos átomos y por consiguiente son iguales. Adicionalmente, se obtiene de este hecho que $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$, lo cual demuestra la unicidad de la descomposición.

Supongamos ahora $\mu \in \mathbb{M}_0(E)$. Sean $x \in E$ y $B(x,\delta)$ la bola de centro en x y radio δ ($\delta > 0$). Como $\lim_{n\to\infty} \mu_\alpha(B(x,1/n)) = \mu_\alpha(x) = 0$, existe $\delta_x > 0$, tal que $\mu_\alpha(B(x,\delta_x)) = 0$. Luego, si $A \in \mathscr{R}$, entonces $\mu_\alpha(A) = 0$, lo cual demuestra que $\mu_\beta = 0$ y completa la demostración. ∎

Definición 13. Sea $\mu \in \mathbb{M}_0(E)$. Se dice que μ es simple, si $\widehat{\mu}_2$ es la medida nula.

Notamos que $\mu \in \mathbb{M}_0(E)$ es simple, si y solo si, sus átomos tienen medida exactamente igual a 1. En este caso, como $\mu_\alpha = 0$, para todo $x \in A$, $\mu(A) = \sum_{x\in A} \mathrm{I}_{\{1\}}(\mu(x)) = \widehat{\mu}_1(A)$.

En lo que sigue, anotaremos $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}_1$. Luego, $\mu \in \mathbb{M}_0(E)$ es simple, si y solo si, $\mu = \widehat{\mu}$.

Teorema 14. *Sean $a > 0$ y $\widehat{S}_a : \mathbb{M}(E) \to \mathbb{M}(E)$ tal que $\widehat{S}_a(\mu) = \widehat{\mu}_a$. Entonces, $\widehat{S}_a$ es medible.*

Demostración. Sea $A \in \mathscr{B}(E)$. Basta demostrar que la aplicación $\mu \mapsto \widehat{\mu}_a(A)$ es medible. El número de átomos, de μ en A, de tamaño menor o igual que a, es contable. Denotemos por $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de estos átomos. Luego, $\widehat{\mu}_a(A) = \sum_{k=0}^{r} T_{\{x_k\}}(\mu)$ y por lo tanto, $\mu \mapsto \widehat{\mu}_a(A)$ es medible, lo cual concluye la demostración. ∎

1.3. Convergencia vaga de medidas de Radon

Definición 15. Sean μ una medida en $\mathbb{M}(E)$ y $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{M}(E)$. Diremos que la sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vagamente a μ, lo cual denotaremos por $\mu \xrightarrow{v} \mu$, si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f\,d\mu_n = \int_E f\,d\mu,$$

para toda $f \in \mathscr{C}_K(E)$.

Observación 16. La convergencia vaga de medidas de Radon no es otra cosa que la convergencia de estas medidas respecto de la topología vaga de $\mathbb{M}(E)$. Es decir, la convergencia en $\mathbb{M}(E)$ respecto de la medida ρ definida en (1.2).

Seguiremos las ideas propuestas en [11] para caracterizar la convergencia vaga de medidas de Radon. Dada una medida $\mu \in \mathbb{M}(E)$, definimos la clase de conjuntos μ-continuos como

$$\mathscr{R}_\mu = \{B \in \mathscr{R}; \mu(\partial B) = 0\}.$$

Teorema 17. *Sean $\mu \in \mathbb{M}(E)$, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{M}(E)$. Entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

(17.1) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

(17.2) $\lim_{n\to\infty}\sup \mu_n F \leqslant \mu F$ *para todo conjunto cerrado* $F \in \mathscr{R}$ *y* $\lim_{n\to\infty}\inf \mu_n G \geqslant \mu G$ *para todo conjunto abierto* $G \in \mathscr{R}$.

(17.3) $\mu_n B \to \mu B$ *para todo* $B \in \mathscr{R}_\mu$.

Demostración. Supongamos (17.1) y sea $F \in \mathscr{R}$ un conjunto cerrado. Luego, F es compacto y por el Lema 2, existe $\{F_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión de conjuntos compactos y una sucesión decreciente $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}_K(E)$, de modo que $\mathbf{1}_F \leq f_m \leq \mathbf{1}_{F_m}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, y $\{\mathbf{1}_{F_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\mathbf{1}_F$. Luego, dados $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene $\mu_n(F) \leq T_{f_m}(\mu_n)$ y $T_{f_m}(\mu) \leq \mu(F_0)$. Por consiguiente, $\lim\sup \mu_n(F) \leq T_{f_m}(\mu) \leq \mu(F_0)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Por teorema de convergencia dominada, se tiene que $\lim_{m\to\infty} T_{f_m}(\mu) = \mu(F)$ y entonces $\lim\sup \mu_n(F) \leq \mu(F)$.

Ahora bien, sea $G \in \mathscr{R}$ un conjunto abierto. Como E es metrizable, existe $\{F_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente de conjuntos cerrados tal que $G = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m$. Sea $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones continuas tales que $F_m \prec g_m \prec G$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Luego, $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathscr{C}_K(E)$, $T_{g_m}(\mu_n) \leq \mu_n(G)$, y $\mu(F_m) \leq T_{g_m}(\mu) \leq \mu(G)$, para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $\mu(F_m) \leq T_{g_m}(\mu) \leq \lim\inf \mu_n(G)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Tomando límite en m se obtiene que $\mu(G) \leq \lim\inf \mu_n(G)$. Obteniendo que (17.1) implica (17.2).

Ahora, veamos que (17.2) implica (17.3). Tomando $B \in \mathscr{R}_\mu$, se obtiene

$$\lim\inf \mu_n(B^\circ) \geqslant \mu(B^\circ) \geqslant \mu(B) - \mu(\partial B) = \mu(B).$$

y

$$\lim\sup \mu_n(\overline{B}) \leqslant \mu(\overline{B}) \leqslant \mu(B) + \mu(\partial B) = \mu(B).$$

De modo que $\lim\sup \mu_n(B) \leqslant \mu(B) \leqslant \lim\inf \mu_n(B)$, lo cual demuestra que (17.2) implica (17.3).

Demostremos finalmente que (17.3) implica (17.1). Sea $f \in \mathscr{C}_K(E)$ y denotemos por F a su soporte. Luego, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $Rec(f) \subset]a, b[$. Para cada $t \in [a, b]$ sean $A_t = \{x \in F : f(x) = t\}$ y $B = \{t \in [a, b] : \mu(A_t) > 0\}$. Nótese que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

con $B_n = \{t \in [a,b] : \mu(A_t) > 1/n\}$ y que la cardinalidad de B_n es menor o igual a n, pues los conjuntos A_t son disjuntos.

Sea $\varepsilon > 0$. Como B es a lo sumo numerable, existen $t_0, t_1, \dots t_m \in [a,b]$ tales que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ y para todo $i \in \{1,\dots,m\}$, $\mu(A_{t_i}) = 0$ y $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$.

Para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, sea $C_i = \{x \in F : t_{i-1} < f(x) < t_i\}$. Notamos que estos conjuntos son disjuntos y relativamente compactos, pues, son subconjuntos de un conjunto com-pacto. Además, $F = \bigcup_{i=1}^m C_i$. Notemos además que $\partial C_i \subseteq A_{t_{i-1}} \cup A_{t_i}$. En efecto,

$$f^{-1}(]t_{i-1}, t_i[) \subset C_i^\circ \subset C_i \subset \overline{C}_i \subset f^{-1}([t_{i-1}, t_i]).$$

Luego $\partial C_i \subset f^{-1}([t_{i-1}, t_i]) \setminus f^{-1}(]t_{i-1}, t_i[) = A_{t_{i-1}} \cup A_{t_i}$. De modo que para cada $i \in \{1,\dots,m\}$, $C_i \in \mathscr{R}_\mu$, y por consiguiente $\lim_{n\to\infty} \mu_n(C_i) = \mu(C_i)$. Sea $f^* = \sum_{i=1}^m t_{i-1} \mathbf{1}_{C_i}$. Luego, $|f^* - f| < \varepsilon$ y entonces,

$$\begin{aligned}\left|\int f^* d\mu_n - \int f d\mu\right| &\leqslant \int |f - f^*| d\mu_n + \left|\int f^* d\mu_n - \int f^* d\mu\right| + \int |f - f^*| d\mu \\ &\leqslant 2\varepsilon + \sum_{i=1}^m |\mu_n(C_i) - \mu(C_i)||t_{i_1}|.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$, lo cual demuestra (17.1), completándose la demostración de este teorema. ∎

Se demuestra a continuación que $\mathbb{M}_0(E)$ es cerrado en $\mathbb{M}(E)$.

Proposición 18. *Sean $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{M}_0(E)$ y $\mu \in \mathbb{M}(E)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Entonces, $\mu \in \mathbb{M}_0(E)$.*

Demostración. Se debe demostrar que para todo $A \in \mathscr{B}(E)$, $\mu(A) \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Sean $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos compactos tales que $E = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$, $\mathscr{H}_\mu = \{A \in \mathscr{B}(E) : \mu(\partial A) = 0\}$ y $\mathscr{C}_m = \{A \in \mathscr{B}(E) : \mu(A \cap K_m) \in \mathbb{N}\}$. Se verifica fácilmente que $\mathscr{C}_m$ es clase monótona, para cada $m \in \mathbb{N}$ y, debido a que $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$, $\mathscr{H}_\mu$ es un álgebra de conjuntos. Además, por Teorema 17, $\mathscr{H}_\mu \subseteq \mathscr{C}_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$, y entonces, por teorema de las clases monótonas, $\sigma(\mathscr{H}\mu) \subseteq \mathscr{C}_m$. En consecuencia, para todo $A \in \sigma(\mathscr{H}\mu)$ y todo $m \in \mathbb{N}$, $\mu(A \cap K_m) \in \overline{\mathbb{N}}$. Pero $\overline{\mathbb{N}}$ es cerrado en $[-\infty, \infty]$ y, por lo tanto, $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap K_m) \in \overline{\mathbb{N}}$. Solo resta entonces demostrar que $\mathscr{B}(E) \subseteq \sigma(\mathscr{H}_\mu)$.

Sean K compacto en E y para cada $\epsilon > 0$, $K^\epsilon = \{x \in E : \rho(x, K) \leq \epsilon\}$. Sea G un abierto relativamente compacto tal que $K \subseteq G$.

Tenemos que $K = \bigcap_{\epsilon>0} K^{\epsilon} \subseteq G$ y, al igual que en la demostración del Lema 2, se tiene que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $K \subseteq K^{\epsilon_0} \subseteq G$ y entonces K^{ϵ_0} es compacto.

Sea $C_\mu = \{\epsilon \in (0,\epsilon_0] : \mu(\partial K^{\epsilon}) > 0\}$. Puesto que $\partial K^{\epsilon} = \{x \in E : \rho(x,K) = \epsilon\}$, $\{\partial K^{\epsilon}\}_{0<\epsilon\leq\epsilon_0}$ es una familia de conjuntos disjuntos y por consiguiente, C_μ es contable. En efecto, $C_\mu = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_\mu^n$, con $C_\mu^n = \{\epsilon \in (0,\epsilon_0] : \mu(\partial K^{\epsilon}) > 1/n\}$. Se tiene que C_μ^n es finito, pues si $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m \in C_\mu^n$, entonces $\mu(K^{\epsilon_0}) \geq \mu(\partial K^{\epsilon_1} \cup \cdots \cup \partial K^{\epsilon_m}) = m/n$. Así, $m \leq n\mu(K^{\epsilon_0}) < \infty$.

Como $(0,\epsilon_0]$ es 2° contable, entonces $(0,\epsilon_0] \setminus C_\mu$ es 2° contable [5, Teorema 6.2] y luego $(0,\epsilon_0] \setminus C_\mu$ es separable [5, Teorema 7.3]. Luego, existe D contable tal que $(0,\epsilon_0] \setminus C_\mu \subseteq \overline{D}$. Demostremos que $(0,\epsilon_0] \subseteq \overline{D}$, para lo cual es suficiente verificar que $C_\mu \subseteq \overline{D}$. Sea $y \in C_\mu$ y V_y vecindad de y. Nótese que $V_y \cap ((0,\epsilon_0] \setminus C_\mu) \neq \emptyset$, pues en caso contrario se tendría $V_y \cap (0,\epsilon_0] \subseteq C_\mu$, lo cual contradice el hecho que C_μ es contable. Sea $z \in V_y \cap ((0,\epsilon_0] \setminus C_\mu)$. Luego, V_y es una vecindad de $z \in (0,\epsilon_0] \setminus C_\mu$ y por consiguiente $V_y \cap D \neq \emptyset$. Es prueba que $y \in \overline{D}$ y por consiguiente, D es denso y contable en $(0,\epsilon_0]$. Se tiene entonces que $K = \bigcap_{\epsilon\in D} K^{\epsilon}$ y por lo tanto, $K \in \sigma(\mathscr{H}_\mu)$. Esto demuestra que $\mathscr{B}(E) \subseteq \sigma(\mathscr{H}_\mu)$ y completa la demostración. ■

Capítulo 2

Convergencia débil de medidas aleatorias

El concepto de elemento aleatorio, que toma valores en un espacio de medidas, es una extensión natural de la noción de un proceso puntual, ya que el último puede considerarse como una medida aleatoria con valores enteros (ver [2]). Esta teoría tuvo sus orígenes en aplicaciones tales como líneas de espera, poblaciones aleatorias, procesos de riesgo, etc., y los primeros resultados importantes sobre esta teoría fueron descubiertos entre los años de 1956 y 1967. Inicialmente, para el caso $E = \mathbb{R}$, citamos [6]. Luego, estos conceptos fueron extendidos a espacios localmente compactos, como se puede observar en [9] y [10].

En 2.1 presentaremos el concepto de medida aleatoria y algunos conceptos de interés como la distribución y esperanza de una medida aleatoria. Siguiendo las ideas de [11], se establecen criterios de equivalencias para la igualdad en distribución de medidas aleatorias.

Luego, en 2.2, abordaremos el problema de la convergencia débil de medidas aleatorias, para lo cual nos basaremos de las ideas presentadas en [9] y [10]. En todo lo que sigue, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ y $\mathbb{E}$ denotarán un espacio de probabilidad y su funcional esperanza, respectivamente. Como ha sido habitual en esta tesis, E continuará denotando un espacio localmente compacto 2° contable y $\mathscr{B}(E)$ su σ-álgebra de Borel.

2.1. Medidas aleatorias

Definición 19. Una medida aleatoria es una función $\xi : \Omega \to \mathbb{M}(E)$ medible respecto de las σ-álgebras $\mathscr{F}$ y $\mathscr{M}(E)$.

Observación 20. Dada una medida aleatoria $\xi : \Omega \to \mathbb{M}(E)$, para cada $\omega \in \Omega$, $\xi(\omega)$ es una medida de Radon sobre $(E, \mathscr{B}(E))$, la cual denotaremos por $\xi(\omega, \cdot)$ y su valor en $A \in \mathscr{B}(E)$, por $\xi(\omega, A)$. Si no se presta a confusión, se utilizará la notación $\xi(\cdot)$ y $\xi(A)$, respectivamente. Además, para cada $A \in \mathscr{B}(E)$ fijo, $\xi(A)$ es una variable aleatoria, pues, $\xi(\cdot, A) = T_A \circ \xi$ es una composición de funciones medibles.

La distribución o ley de una medida aleatoria ξ, se denotará por $\mathbb{P}_\xi$, lo cual significa que $\mathbb{P}_\xi(M) = \mathbb{P}(\xi \in M)$, para todo $M \in \mathscr{M}(E)$. Además, diremos que dos medidas aleatorias ξ, η se distribuyen idénticamente, si para todo $M \in \mathscr{M}(E)$, se satisface que $\mathbb{P}_\xi(M) = \mathbb{P}_\eta(M)$. Denotaremos esto mediante $\xi \overset{d}{=} \eta$.

Notación 21. Sea ξ una medida aleatoria sobre $(E, \mathscr{B}(E))$. Para toda $f \in \mathscr{E}(E)^+$, anotaremos por $\xi f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ la variable aleatoria definida por

$$\xi f(\omega) = T_f \circ \xi(\omega) = \int_E f(x)\xi(\omega, dx), \; \omega \in \Omega.$$

La distribución de ξf se denotará por $\mathbb{P}_{\xi f}$, lo cual significa que $\mathbb{P}_{\xi f}(A) = \mathbb{P}(T_f(\xi) \in A)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

Ahora, presentaremos el concepto de valor esperado de una medida aleatoria, el cual llamaremos *medida de intensidad*.

Definición 22. Sea ξ una medida aleatoria sobre $(E, \mathscr{B}(E))$, entonces, $\mathbb{E}\xi$, la medida intensidad de ξ, se define mediante

$$\mathbb{E}\xi(A) = \mathbb{E}[\xi(A)] = \int_\Omega \xi(\omega, A)\mathbb{P}(d\omega), \text{ para todo } A \in \mathscr{B}(E).$$

Observación 23. Ya que $\xi(A) \geqslant 0$, para todo $A \in \mathscr{B}(E)$ y $\xi(\emptyset) = 0$, se sigue que $\mathbb{E}\xi(A) \geqslant 0$ y $\mathbb{E}\xi(\emptyset) = 0$. Por otro lado, si tomamos una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{B}(E)$ y usamos el hecho que las medidas de Radon son σ-aditivas, se tiene que $\xi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) =$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \xi(A_n)$. Luego,

$$\mathbb{E}\xi\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \xi(A_n)\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\xi(A_n),$$

lo que demuestra que $\mathbb{E}\xi$ es una medida. Sin embargo, esta medida no necesariamente pertenece a $\mathbb{M}(E)$. Este valor puede interpretarse como el volumen promedio de medidas asignadas a un conjunto.

Ejemplo 24. Sea $(E, \mathscr{B}(E))$ un espacio medible. Entonces, para todo $A \in \mathscr{B}(E)$ y $x \in E$, se difine la medida de Dirac sobre E, como

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

De la definición anterior se sigue que para todo $x \in E$, $\delta_x \in \mathbb{M}_0(E)$, es decir, δ_x es una medida aleatoria $\mathbb{Z}^+$-valuada.

Consideremos la función $\Delta : (E, \mathscr{B}(E)) \to (\mathbb{M}_0(E), \mathscr{M}_0(E))$, dada por

$$\Delta(x) = \delta_x.$$

Para verificar que Δ es medible, basta notar que $\Delta M : E \to \mathbb{R}$, definida por $\Delta M(x) = \delta_x(M)$, es medible, si M es un generador de $\mathscr{B}(\mathbb{M}(E))$. Sea $M = \{\mu \in \mathbb{M}(E); T_A(\mu) \in B\}$ con $A \in \mathscr{B}(E)$ y $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Luego, $\Delta M = \mathbf{1}_A$ y por consiguiente, Δ es medible.

De lo anterior, si $X : \Omega \to E$ es un elemento aleatorio entonces $\delta_X = \Delta \circ X$ es una medida aleatoria. Denotando por μ_X la distribución de X, la medida intensidad de δ_X

viene dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\delta_X(A) &= \mathbb{E}[\Delta \circ X(A)]\\ &= \int_\Omega \delta_{X(\omega)}(A)\mathbb{P}(d\omega)\\ &= \int_\Omega \mathbf{1}_A(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega)\\ &= \int_E \mathbf{1}_A(x)\mathbb{P}\circ X^{-1}(dx)\\ &= \int_E \mathbf{1}_A(x)\mu_X(dx)\\ &= \mu_X(A), \quad \text{para todo } A \in \mathscr{B}(E).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}\delta_X = \mu_X$.

En lo que sigue, desarrollaremos un teorema propuesto por Kallenberg en [11], el cual nos proporciona condiciones necesarias y suficientes para que dos medidas aleatorias sean iguales en distribución.

Teorema 25. *Sean ξ y η medidas aleatorias sobre $(E,\mathscr{B}(E))$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(25.1) $\xi \stackrel{d}{=} \eta$.

(25.2) $(\xi f_1,\dots,\xi f_r) \stackrel{d}{=} (\eta f_1,\dots,\eta f_r)$, *para todos* $f_1,\dots,f_r \in \mathscr{C}_K^+(E)$.

(25.3) $(\xi(\overline{A}_1),\dots,\xi(\overline{A}_r)) \stackrel{d}{=} (\eta(\overline{A}_1),\dots,\eta(\overline{A}_r))$, *para todos* $A_1,\dots,A_r \in \mathscr{R}$.

Demostración. Dadas $f_1,\dots,f_r \in \mathscr{C}_K^+(E)$, definimos $T_{f_1,\dots,f_r} : \mathbb{M} \to \mathbb{R}_+^r$ como $T_{f_1,\dots,f_r}(\xi) = (\xi f_1,\dots,\xi f_r)$.

Supongamos (25.1) y veamos que (25.2) se satisface. Sean $f_1,\dots,f_r \in \mathscr{C}_K^+(E)$ y $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes r}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\xi f_1,\dots,\xi f_r)}(A) &= \mathbb{P}((\xi f_1,\dots,\xi f_r)\in A)\\ &= \mathbb{P}\left(\xi \in T^{-1}_{f_1,\dots,f_r}(A)\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\eta \in T^{-1}_{f_1,\dots,f_r}(A)\right)\\ &= \mathbb{P}\left((\eta f_1,\dots,\xi f_r)\in A\right)\\ &= \mathbb{P}_{(\eta f_1,\dots,\eta f_r)}(A).\end{aligned}$$

Luego, $(\xi f_1, \dots, \xi f_r) \stackrel{d}{=} (\xi f_1, \dots, \xi f_r)$. Supongamos ahora que se satisface (25.2) y demostremos (25.3). Sean $A_1, \dots, A_r \in \mathscr{R}$. Por Lema de Urysohn, se tiene que existen $f_1, \dots, f_r \in \mathscr{C}_K^+(E)$, tales que $\overline{A}_i \prec f_i \prec A_i^\varepsilon$, para cada $i \in 1, \dots, r$, donde $A^\varepsilon = \{x \in E; d(x, A) < \epsilon\}$, para cada $A \subseteq E$. Sean $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\eta(A_1^\varepsilon) \leqslant t_1, \dots, \eta(A_r^\varepsilon) \leqslant t_n) &\leqslant \mathbb{P}(\eta f_1 \leqslant t_1, \dots, \eta f_r \leqslant t_n) \\ &= \mathbb{P}(\xi f_1 \leqslant t_1, \dots, \xi f_r \leqslant t_n) \\ &\leqslant \mathbb{P}(\xi(\overline{A}_1) \leqslant t_1, \dots, \xi(\overline{A}_r) \leqslant t_r).\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \downarrow 0$, se tiene

$$\mathbb{P}(\eta(\overline{A}_1) \leqslant t_1, \dots, \eta(\overline{A}_r) \leqslant t_k) \leqslant \mathbb{P}(\xi(\overline{A}_1) \leqslant t_1, \dots, \xi(\overline{A}_r) \leqslant t_k)$$

e intercambiando el rol de ξ y η en el desarrollo anterior, se concluye que

$$\mathbb{P}(\xi(\overline{A}_1) \leqslant t_1, \dots, \xi(\overline{A}_r) \leqslant t_r) = \mathbb{P}(\eta(\overline{A}_1) \leq t_1, \dots, \eta(\overline{A}_r) \leq t_r),$$

es decir, se satisface la condición (25.3).

Por último, supongamos (25.3) y veamos que se cumple (25.1). Sean

$$\mathscr{D} = \left\{M \in \mathscr{B}(\mathbb{M}(E)); \mathbb{P}\{\xi \in M\} = \mathbb{P}\{\eta \in M\}\right\} \quad \text{y} \quad \mathscr{C} = \left\{C_{A_1,\dots,A_r}^{t_1,\dots,t_r}; A_1, \dots, A_k \in \mathscr{R}, t_1 \dots, t_k \in \mathbb{R}_+\right\},$$

donde

$$C_{A_1,\dots,A_r}^{t_1,\dots,t_r} = \{\mu \in \mathbb{M}(E); \mu(\overline{A}_1) \leqslant t_1, \dots \mu(\overline{A}_r) \leqslant t_r\}.$$

Es fácil ver que $\mathscr{D}$ es un d-sistema y que $\mathscr{C}$ es un π-sistema. Por condición (25.3), se tiene $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ y por Teorema 47 (ver Apéndice), $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$. Así, solo basta verificar que $\mathscr{B}(\mathbb{M}(E)) \subseteq \sigma(\mathscr{C})$, Sea $C = \{\mu \in \mathbb{M}(E) : T_A(\mu) \in B\}$ un generador de $\mathscr{B}(\mathbb{M}(E))$, con A compacto en E, $B = (-\infty, t]$ y $t \in \mathbb{R}_+$. Luego, $C = C_A^t \in \mathscr{C}$ y en consecuencia, $\mathscr{B}(\mathbb{M}(E)) \subseteq \sigma(\mathscr{C})$. Esto prueba que $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ y completa la demostración del teorema. ■

2.2. Criterios para la convergencia en ley de medidas aleatorias

La convergencia en ley de medidas aleatorias será denotada por $\xrightarrow{\mathscr{L}}$ y significará la convergencia débil de sus distribuciones correspondientes definidas sobre $\mathscr{M}(E)$.

Definición 26. Sean $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas aleatorias sobre $(E,\mathscr{B}(E))$ y ξ una medida aleatoria sobre $(E,\mathscr{B}(E))$. Entonces, $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$, si y solo si, para toda $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{M}(E))$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\xi_n)] = \mathbb{E}[f(\xi_n)].$$

En lo que sigue, diremos que una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas aleatorias es tensa si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $M \subset \mathbb{M}(E)$ tal que $\mathbb{P}(\xi_n \in M) > 1-\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sobre este contexto, nos surge la necesidad de presentar una serie de resultados que nos permita caracterizar los conceptos de tensión.

Lema 27. *Sea $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas aleatorias sobre $(E,\mathscr{B}(E))$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(27.1) $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es tensa*

(27.2) $\{\xi_n f\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es tensa en* $\mathbb{R}_+$ *para todo* $f \in \mathscr{C}_K^+$.

(27.3) $\{\xi_n(B)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es tensa en* $\mathbb{R}_+$ *para todo* $B \in \mathscr{R}$.

Demostración. Supongamos que (27.1) se satisface. Para cada $f \in \mathscr{C}_K^+(E)$ y $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n f = T_f(\xi_n)$. Como T_f es continua, entonces $\{T_f(\xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa, lo cual demuestra (27.2).

Ahora, demostraremos que (27.2) implica (27.3). Sea $B \in \mathscr{R}$. Puesto que E es localmente compacto y separable, existe una sucesión $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de abiertos relativamente compactos tal que $\overline{B} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ y ya que $\overline{B}$ es compacto, existen $n_1,\dots,n_m \in \mathbb{N}$, tales que $\overline{B} \subseteq \bigcup_{j=1}^m G_{n_j}$. Por Lema de Urysohn, existe $f \in \mathscr{C}_K(E)$ tal que $\overline{B} \prec f \prec \bigcup_{j=1}^m G_{n_j}$ y entonces $0 \leqslant \xi_n(B) \leqslant \xi_n(\overline{B}) \leqslant \xi_n f$. Sean $\epsilon > 0$ y K_ϵ un compacto en $\mathbb{R}$ tal que $\sup \mathbb{P}(\xi_n f \in K_\epsilon^c) < \epsilon$. Luego, $\sup \mathbb{P}(\xi_n(B) \in K_\epsilon^c) < \epsilon$, lo cual demuestra que $\{\xi_n(B)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa.

Por último, demostremos que (27.3) implica (27.1). Sean $G_k \in \mathscr{R}$, $i \in \mathbb{N}$, conjuntos abiertos, tales que $E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$ Por hipótesis, para cada $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, existen constantes positivas r_k, tal que $\mathbb{P}(\xi_n(G_k) \leqslant r_k) > 1-\varepsilon/2^{k+1}$. Sean $M = \bigcap_{n=1}^\infty \{\mu \in \mathbb{M}(E) : \mu(G_n) \leqslant r_n\}$ y

$f \in \mathscr{C}_K(E)$. Ya que $\text{sop}(f)$ es compacto, existen $k_0, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, tal que $\text{sop}(f) \subseteq \bigcup_{i=0}^m G_{k_i}$. Luego,

$$\sup_{\mu \in M} |\mu f| \leqslant \sup_{\mu \in M} \int |f| d\mu \leqslant \sup_{\mu \in M} \sum_{i=0}^m \int_{G_{k_i}} |f| d\mu \leqslant \|f\| \sup_{\mu \in M} \sum_{i=0}^m \mu(G_{k_i}) \leqslant \|f\| \sum_{i=0}^m r_{k_i} < \infty.$$

Del Teorema 9 se sigue que M es relativamente compacto y así, $\overline{M}$ es compacto. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n \in \overline{M}) &\geqslant \mathbb{P}(\xi_n \in M) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\xi_n \in M^c) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{\xi_n(G_k) > r_k\} \right) \\
&\geqslant 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(G_k) > r_k\right) \\
&> 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon / 2^{k+1} \\
&= 1 - \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo que demuestra que $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es tensa y concluye la demostración. ∎

Pareciera natural pensar que si una sucesión de medidas aleatorias $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre $(E, \mathscr{B}(E))$ converge en distribución a una medida aleatoria ξ sobre $(E, \mathscr{B}(E))$, entonces

$$(\xi_n(A_1), \ldots, \xi_n(A_k)) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\xi(A_1), \ldots, \xi(A_k)) \tag{2.2}$$

para todos $A_1, \ldots, A_k \in \mathscr{B}(E)$, $k \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esto no es así. Como un contraejemplo, consideremos la sucesión (determinística) $(\tau_n; n \in \mathbb{N})$, donde $\tau_n = 1 + 1/n$, $(n \geq 1)$, y sean $\xi_n = \delta_{\tau_n}$ y $\xi = \delta_1$. Luego, para toda $f \in \mathscr{C}_K(\mathbb{R})$, $\xi f = f(1)$, $\xi_n f = f(1 + 1/n)$ y por consiguiente $\xi_n \xrightarrow{v} \xi$, lo cual, debido a que $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ es determinística, es equivalente a $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$. No obstante, la condición (2.2) no se satisface para la sucesión $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$. En efecto, si $A = (1, 2]$ entonces $\xi_n(A) = 1$ y $\xi(A) = 0$, con lo cual se tiene que $\{\xi_n(A)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ no converge en ley a $\xi(A)$.

Para dar un ejemplo auténticamente aleatorio, consideremos el siguiente.

Ejemplo 28. Sean $p \in (0, 1)$ y $(X_n; n \in \mathbb{N})$ una sucesión de variables aleatorias, definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ y tales que, para todo $n\in\mathbb{N}$, X_n tiene distribución binomial de parámetros n y p. Sean $\tau_n = X_n/n$ $(n\geq 1)$ y $\xi_n=\delta_{\tau_n}$. Para cada $f\in\mathscr{C}_K(\mathbb{R})$, $\{\xi_n f\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge en probabilidad a ξf, con $\xi=\delta_p$. Vale decir, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge en probabilidad a ξ sobre $\mathbb{M}(E)$ y por consiguiente $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi$. Sin embargo, para $A=(p,1]$, se tiene $\xi_n(A)=\mathrm{I}_{\{\tau_n>p\}}$ y entonces, para todo $a>0$,

$$\limsup \mathbb{P}(\xi_n(A)\geq a)=\limsup \mathbb{P}(\tau_n>p)=\limsup \mathbb{P}(\sqrt{n}(\tau_n-p)>0)=1/2$$

y $\mathbb{P}(\xi(A)\geq a)=0$. Luego, $\limsup \mathbb{P}(\delta_{\tau_n}(A)\geq a)\nleq \mathbb{P}(\delta_\tau(A)\geq a)$ y por consiguiente, $\{\xi_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ no converge en distribución a $\xi(A)$.

Lo anterior, nos indica que la convergencia en el sentido (2.2) depende de la clase de subconjuntos $A_1,\ldots,A_k$ que se considere. Nuestro siguiente objetivo es presentar un teorema que caracterice la convergencia de medidas aleatorias. Previo a este teorema, demostraremos algunos resultados que nos servirán para poder caracterizar la convergencia de medidas aleatorias.

Para establecer el mencionado criterio, necesitamos saber bajo que condiciones, sobre f, $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi$ implica $\xi_n f\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi f$. Antes que nada, fijemos ciertas notaciones.

Notación 29. Dada una función $f\in\mathscr{E}^+(E)$, definimos una medida $f\cdot\mu$ del siguiente modo:

$$(f\cdot\mu)A=\int_A f(x)\mu(dx),\qquad A\in\mathscr{B}(E).$$

Lema 30. *Sean $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas aleatorias sobre $(E,\mathscr{B}(E))$ y ξ una medida aleatoria definida sobre este mismo espacio medible y tal que $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi$. Entonces,*

(30.1) $\xi_n f\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi f$*, para toda función* $f\in\mathscr{E}^+(E)$*, con soporte compacto tal que* $\xi(D_f)=0$ *c.s.*

(30.2) $(\xi_n(A_1),\ldots,\xi_n(A_r))\xrightarrow{\mathscr{L}}(\xi(A_1),\ldots,\xi(A_r))$*, para todos* $A_1,\ldots,A_r\in\mathscr{R}_\xi$.

Demostración. En primer lugar, demostremos la condición (30.1). Ya que el soporte de f es compacto, se sigue que $\mathrm{sop}(f)\in\mathscr{R}$. Además, tomemos un abierto $G\in\mathscr{R}$, tal que $\mathrm{sop}(f)\subset G$. Por lema de Urysohn, existe una función continua $g:E\to[0,1]$ tal que $g(x)=1$, para todo $x\in\mathrm{sop}(f)$ y $g(x)=0$, para todo $x\notin G$. Por otra parte, consideremos una sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{M}(E)$ y una medida μ en $\mathbb{M}(E)$ tal que $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$. Ya que $gh\in\mathscr{C}_K(E)$ para toda $h\in\mathscr{C}_b(E)$, se sigue que

$$(g\cdot\mu_n)h=\mu_n(gh)\to\mu(gh)=(g\cdot\mu)h,$$

es decir, $\{g\cdot\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $g\cdot\mu$. Si además suponemos que $\mu(D_f)=0$, se sigue del Teorema 52 (Ver Apéndice), que

$$\begin{aligned}T_f(\mu_n)&=\int_E f(x)\mu_n(dx)=\int_E f(x)g(x)\mu_n(dx)\\&=(g\cdot\mu_n)f\to(g\cdot\mu)f=\int_E g(x)f(x)\mu(dx)\\&=\int_E f(x)\mu(dx)=T_f(\mu).\end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$\{\mu\in\mathbb{M}(E);\mu\in D_{T_f}\}\subset\{\mu\in\mathbb{M}(E);\mu(D_f)>0\}. \tag{2.3}$$

Usando el hecho de que $\xi(D_f)=0$ *c.s.*, se sigue que $\mathbb{P}(\xi\in D_{T_f})=0$. Luego, del Teorema 51 (ver Apéndice), se obtiene que $\mathbb{P}_{\xi_n}\circ T_f^{-1}\xrightarrow{v}\mathbb{P}_\xi\circ T_f^{-1}$, lo que implica que $\xi_n f\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi f$, es decir, se satisface la condición (30.1).

Para demostrar la condición (30.2), tomemos $A_1,\dots A_r\in\mathscr{R}$ y definamos $T_{A_1,\dots,A_r}:\mathbb{M}(E)\to\mathbb{R}_+^r$ como $T_{A_1,\dots,A_r}(\mu)=(\mu(A_1)\dots,\mu(A_r))$. Por otra parte, sean $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{M}(E)$ y $\mu\in\mathbb{M}(E)$ tal que $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$. Si $\mu(\partial A_i)=0$ para cada $1\leqslant i\leqslant r$, se sigue del Teorema 17 que $\mu_n(A_i)\to\mu(A)$ y así

$$T_{A_1,\dots,A_r}(\mu_n)\to T_{A_1,\dots,A_r}(\mu).$$

Del hecho anterior, se sigue que

$$\{\mu\in\mathbb{M}(E);\mu\in D_{T_{A_1,\dots,A_r}}\}\subset\bigcup_{i=1}^r\{\mu\in\mathbb{M}(E);\mu(A_i)>0\}.$$

Ya que $\xi(\partial A_i)=0$ *c.s.*, se sigue que $\mathbb{P}(\xi\in D_{T_{A_1,\dots,A_r}})=0$ y del Teorema 51 (ver Apéndice), se tiene que $\mathbb{P}_{\xi_n}\circ T^{-1}_{A_1,\dots,A_r}\xrightarrow{v}\mathbb{P}_\xi\circ T^{-1}_{A_1,\dots,A_r}$, lo que implica que $(\xi_nA_1,\dots,\xi_nA_r)\xrightarrow{\mathscr{L}}(\xi A_1,\dots,\xi A_r)$, completando la demostración. ■

Una vez establecidos los resultados anteriores, seguiremos las ideas de [11] y [9], para establecer un teorema que nos permita obtener algunas equivalencias con la convergencia débil de distribuciones de medidas aleatorias.

Proposición 31. *Sean* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de medidas aleatorias sobre* $(E,\mathscr{B}(E))$, ξ *una medida aleatoria sobre* $(E,\mathscr{B}(E))$. *Además, supongamos que* $\mathbb{P}(\xi_n(A)=0)\to\mathbb{P}(\xi(A)=0)$ *para todo* $A\in\mathscr{R}_\xi$ *y que* $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{L}}\eta$. *Entonces para todo conjunto compacto* $K\subset E$, *se tiene que* $\mathbb{P}(\eta(K)=0)\geqslant\mathbb{P}(\xi(K)=0)$.

Demostración. Dado $\varepsilon>0$ existe un cubrimiento abierto $G\in\mathscr{R}_\xi$ de K tal que

$$\mathbb{P}(\xi(G\setminus K)>0)<\varepsilon.$$

De la Observación 1, se sigue que podemos escoger f satisfaciendo $K\prec f\prec G$. Ya que $\{\mu\in\mathbb{M}(E):\mu f=0\}=\{\mu\in\mathbb{M}(E):\mu f\leqslant 0\}$ es cerrado, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\eta(K)=0)&\geqslant\mathbb{P}(\eta f=0)\\&\geqslant\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_n f=0)\\&\geqslant\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_n(G)=0)\\&=\mathbb{P}(\xi(G)=0)\\&\geqslant\mathbb{P}(\xi(K)=0)-\varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon>0$ es arbitrario, se concluye la demostración. ■

Teorema 32. *Sean* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de medidas aleatorias y* ξ *una medida aleatoria. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(32.1) $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{L}}\xi$.

(32.2) $(\xi_n f_1,\cdots,\xi_n f_r)\xrightarrow{\mathscr{L}}(\xi f_1,\ldots,\xi f_r)$ *para todos* $f_1,\ldots,f_r\in\mathscr{C}_K^+(E)$.

(32.3) $(\xi_n(A_1),\ldots,\xi_n(A_r))\xrightarrow{\mathscr{L}}(\xi(A_1),\ldots,\xi(A_r))$, $A_1,\ldots,A_r\in\mathscr{R}_\xi$, $r\in\mathbb{N}$.

Demostración. Ya que para todos $f_1,\ldots,f_r\in\mathscr{C}_K(E)$ las funciones $T_{f_1,\ldots,f_n}$ son continuas, se sigue que (32.1) implica que (32.2).

Ahora, supongamos (32.2) y veamos que se satisface (32.3). Sean $A_1,\ldots,A_r\in\mathscr{R}_\xi$ y, para cada $i\in\{1,\ldots,r\}$, $\{G_{i,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de conjuntos abiertos en E tal que $\overline{A}_i=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}G_{i,k}$ y $\{F_{i,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos cerrados en E tal que $A_i^\circ = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_{i,k}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1,\dots,r\}$, sean $f_{i,k}, g_{i,k} \in \mathscr{C}_K(E)$ tales que

$$F_{i,k} \prec f_{i,k} \prec A_i^\circ \subset A \subset \overline{A}_i \prec g_{i,k} \prec G_{i,k}.$$

Sea $(t_1,\dots,t_r)$ un punto de continuidad de la función de distribución de $(\xi(A_1),\dots,\xi(A_r))$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}(\xi(A_1^\circ) \leqslant t_1,\dots,\xi(A_r^\circ) \leqslant t_r) < \mathbb{P}(\xi(F_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(F_{r,k}) \leqslant t_r) + \varepsilon$$

y

$$\mathbb{P}(\xi(G_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(G_{r,k}) \leqslant t_r) < \mathbb{P}(\xi(\overline{A}_1) \leqslant t_1,\dots,\xi(\overline{A}_r) \leqslant t_r) + \varepsilon.$$

De modo que

$$\mathbb{P}(\xi(F_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(F_{r,k}) - \mathbb{P}(\xi(G_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(G_{r,k}) \leqslant t_r) < 2\varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\limsup \mathbb{P}(\xi_n(A_1) \leqslant t_1,\dots,\xi_n(A_r) \leqslant t_r) &\leqslant \lim \mathbb{P}(\xi_n(f_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi_n(f_{r,k}) \leqslant t_r) \\
&= \mathbb{P}(\xi(f_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(f_{r,k}) \leqslant t_r) \\
&\leqslant \mathbb{P}(\xi(F_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(F_{r,k}) \leqslant t_r) \\
&\leqslant \mathbb{P}(\xi(G_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(G_{r,k}) \leqslant t_r) + 2\varepsilon \\
&\leqslant \mathbb{P}(\xi(g_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(g_{r,k}) \leqslant t_r) + 2\varepsilon \\
&\leqslant \lim \mathbb{P}(\xi_n(g_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi_n(g_{r,k}) \leqslant t_r) + 2\varepsilon \\
&\leqslant \mathbb{P}(\xi(\overline{A}_1) \leqslant t_1,\dots,\xi(\overline{A}_r) \leqslant t_r) + 2\varepsilon \\
&= \mathbb{P}(\xi(A_1) \leqslant t_1,\dots,\xi(A_r) \leqslant t_r) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\liminf \mathbb{P}(\xi_n(A_1) \leqslant t_1,\dots,\xi_n(A_r) \leqslant t_r) &\geqslant \lim \mathbb{P}(\xi_n(g_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi_n(g_{r,k}) \leqslant t_r) \\
&= \mathbb{P}(\xi(g_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(g_{r,k}) \leqslant t_r) \\
&\geqslant \mathbb{P}(\xi(G_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(G_{r,k}) \leqslant t_r) \\
&\geqslant \mathbb{P}(\xi(F_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(F_{r,k}) \leqslant t_r) - 2\varepsilon \\
&\geqslant \mathbb{P}(\xi(f_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi(f_{r,k}) \leqslant t_r) - 2\varepsilon \\
&\geqslant \lim \mathbb{P}(\xi_n(f_{1,k}) \leqslant t_1,\dots,\xi_n(f_{r,k}) \leqslant t_r) - 2\varepsilon \\
&\geqslant \mathbb{P}(\xi(A_1^\circ) \leqslant t_1,\dots,\xi(A_r^\circ) \leqslant t_r) - 2\varepsilon \\
&= \mathbb{P}(\xi(A_1) \leqslant t_1,\dots,\xi(A_r) \leqslant t_r) - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi(A_1)\leqslant t_1,\ldots,\xi(A_r)\leqslant t_r)-2\eta &\leqslant \liminf \mathbb{P}(\xi_n(A_1)\leqslant t_1,\ldots,\xi_n(A_r)\leqslant t_r)\\ &\leqslant \limsup \mathbb{P}(\xi_n(A_1)\leqslant t_1,\ldots,\xi_n(A_r)\leqslant t_r)\\ &\leqslant \mathbb{P}(\xi(A_1)\leqslant t_1,\ldots,\xi(A_r)\leqslant t_r)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon>0$ es arbitrario, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\xi_n(A_1)\leqslant t_1,\ldots,\xi_n(A_r)\leqslant t_r)=\mathbb{P}(\xi(A_1)\leqslant t_1,\ldots,\xi(A_r)\leqslant t_r)$, lo cual completa la demostración.

Por último, supongamos (32.3) y veamos que se cumple (32.1). Por hipótesis, se sigue que para todo $A_i\in\mathscr{R}_\xi$, $1\leqslant i\leqslant r$, las sucesiones de variables aleatorias $\{\xi_n(A_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son relativamente compacta en distribución y del Teorema 48 (ver Apéndice), son tensas. Del Lema 27, se sigue que la sucesión de medidas aleatorias $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa y de nuevo por Teorema 48 (ver Apéndice), es relativamente compacta en distribución. Ahora, supongamos que $\xi_n \overset{\mathscr{L}}{\nrightarrow} \xi$, entonces existen $\varepsilon>0$, una función $h\in\mathscr{C}_b(\mathbb{M}(E))$ y una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$, tal que

$$|\mathbb{E}h(\xi_{n_k})-\mathbb{E}h(\xi)|>\varepsilon,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Ya que la sucesión $\{\xi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta en distribución, existe una subsucesión $\left\{\xi_{n_{k_j}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{\xi_{n_k}\}$ y una medida aleatoria η sobre E, tal que

$$\xi_{n_{k_j}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \eta, \tag{2.5}$$

Sean $A_1,\ldots,A_k\in\mathscr{R}_\xi$. La condición (32.3) nos garantiza que

$$(\xi_{n_{k_j}}(A_1),\ldots,\xi_{n_{k_j}}(A_r)) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\xi(A_1),\ldots,\xi(A_r)).$$

Ya que ∂A es compacto si A es relativamente compacto, de la Proposición 31, se obtiene que $\mathbb{P}(\eta(\partial A)=0)=1$ para todo $A\in\mathscr{R}_\xi$. Luego, del Lema 30 se sigue que

$$(\xi_{n_{k_j}}(A_1),\ldots,\xi_{n_{k_j}}(A_r)) \xrightarrow{\mathscr{L}} (\eta(A_1),\ldots,\eta(A_r)).$$

Luego, para todos $A_1,\ldots,A_k\in\mathscr{R}_\xi$, se tiene que

$$(\xi(A_1),\ldots,\xi(A_k)) \overset{d}{=} (\eta(A_1),\ldots,\eta(A_k)).$$

Puesto que la relación anterior es equivalente la condición (25.3) del Teorema 25, se sigue que $\xi \stackrel{d}{=} \eta$. Esto implica que $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$, pero esto contradice (2.4). Por lo tanto, $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$, lo cual completa la demostración de este teorema. ■

2.3. Procesos puntuales

En esta sección, nos enfocaremos en el estudio de medidas aleatorias sobre el espacio $\mathbb{M}_0(E)$, las cuales llamaremos procesos puntuales. Por Teorema 18, $\mathbb{M}_0(E)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{M}(E)$, respecto a la topología vaga. Por lo tanto, los resultados de unicidad y convergencia presentados en la sección anterior también son válidos para procesos puntuales. La siguiente proposición, demuestra que los límites en distribución de procesos puntuales son procesos puntuales, casi seguramente.

Proposición 33. *Sean $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de procesos puntuales y ξ una medida aleatoria tal que $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$. Entonces, ξ es un proceso puntual, $\mathbb{P}$-c.s.*

Demostración. Queremos ver que $\mathbb{P}(\xi \in \mathbb{M}_0(E)) = 1$. Como $\mathbb{M}_0(E)$ es cerrado y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\mathbb{P}(\xi_n \in \mathbb{M}_0(E)) = 1$, entonces $1 = \limsup \mathbb{P}(\xi_n \in \mathbb{M}_0(E)) \leq \mathbb{P}(\xi \in \mathbb{M}_0(E))$, lo cual completa la demostración. ■

A continuación, presentaremos algunas definiciones, con el propósito de clasificar los procesos puntuales.

Definición 34. Sea ξ un proceso puntual sobre $(E, \mathscr{B}(E))$. Se dice que ξ tiene un punto o átomo en $x \in E$ si

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega, \{x\}) > 0\}\right) = \mathbb{P}(\xi(\{x\}) > 0) > 0.$$

Se dirá que $x \in E$ es un punto múltiple si

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega, \{x\}) \geqslant 2\}\right) = \mathbb{P}\left(\xi(\{x\}) \geqslant 2\right) > 0.$$

Un proceso puntual ξ es simple o bien no tiene puntos múltiples, si

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \exists\, x \in E,\ \xi(\omega, \{x\}) \geqslant 2\}\right) = \mathbb{P}(\xi(\{x\}) \geqslant 2) = 0.$$

Observación 35. Observamos que el concepto de átomo para una medida de Radon es diferente del concepto de átomo para un proceso puntual. En efecto, consideremos el proceso puntual $\xi = \delta_X$, donde X es una variable aleatoria con distribución difusa Q, por ejemplo, $Q(\mathrm{d}x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, la distribución exponencial de parámetro 1. Se tiene que para todo $\omega \in \Omega$, $\xi(\omega)$ tiene un átomo en $X(\omega)$. Sin embargo, para todo $x \in E$, se tiene

$$\mathbb{P}(\xi(\{x\}) > 0) = \mathbb{P}(\delta_X(\{x\}) = 1) = \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Por lo tanto, ξ es un proceso puntual sin átomos. En particular, ξ es simple.

Recordemos que $\widehat{S}_1 : \mathbb{M}(E) \to \mathbb{M}(E)$ está definida, para cada $A \in \mathscr{B}(E)$, como

$$\widehat{S}_1\mu(A) = \sum_{x\in A} \mathrm{I}_{\{1\}}(\mu(x)).$$

Si ξ es un proceso puntual, anotaremos por $\widehat{\xi} : \Omega \to \mathbb{M}_0(E)$ el proceso puntual definido por $\widehat{\xi}(\omega) = \widehat{S}_1\xi(\omega)$.

Proposición 36. *Sean ξ un proceso puntual. Entonces, las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

(36.1) ξ es simple, y

(36.2) $\xi = \widehat{\xi}$, $\mathbb{P}$-c.s.

Demostración. Para cada $\omega \in \Omega$ y $A \in \mathscr{B}(E)$,

$$\widehat{\xi}(\omega, A) = \sum_{x\in A} \mathrm{I}_{\{1\}}(\xi(\omega, \{x\})) \quad \text{y} \quad \xi(\omega, A) = \sum_{x\in A} \xi(\omega, \{x\}).$$

Por consiguiente,

$$\{\xi \neq \widehat{\xi}\} = \bigcup_{x\in E} \{\mathrm{I}_{\{1\}}(\xi(\{x\})) \neq \xi(\{x\})\} = \bigcup_{x\in E} \{\xi(\{x\}) \geq 2\} = \{\exists x \in E, \xi(\{x\}) \geq 2\}$$

y entonces $\mathbb{P}(\xi = \widehat{\xi}) = 0$, si y solo si, $\mathbb{P}(\exists x \in E, \xi(\{x\}) \geq 2) = 0$. Esto completa la demostración. ■

Proposición 37. *Sean ξ y η procesos puntuales sobre $(E, \mathscr{B}(E))$, donde ξ es simple. Entonces, $\xi \overset{d}{=} \widehat{\eta}$ si y solo si*

$$\mathbb{P}(\xi(A) = 0) = \mathbb{P}(\eta(A) = 0), \; A \in \mathscr{R}.$$

Demostración. La necesidad es evidente. Demostremos la suficiencia. Sea

$$\mathscr{D} = \{M \in \mathscr{B}(E) : \mathbb{P}(\xi \in M) = \mathbb{P}(\eta \in M\}).$$

Se verifica fácilmente que $\mathscr{D}$ es clase monótona y por hipótesis, $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$, donde

$$\mathscr{C} = \{\{\mu \in \mathbb{M}_0(E) : \mu(A) = 0\}; A \in \mathscr{R}\} = \{\{T_A = 0\}; A \in \mathscr{R}\}.$$

Como $\mathscr{C}$ es un π-sistema, por Teorema 47, $\mathscr{D} = \sigma(\mathscr{C})$. Sea $M \in \mathscr{D}$. Luego,

$$\mathbb{P}(\widehat{\xi} \in M) = \mathbb{P}(\xi \in \widehat{S}_1^{-1}(M)) = \mathbb{P}(\eta \in \widehat{S}_1^{-1}(M)) = \mathbb{P}(\widehat{\eta} \in M).$$

Esto implica que $\widehat{\xi} \stackrel{d}{=} \widehat{\eta}$, pero como ξ es simple, entonces $\xi \stackrel{d}{=} \widehat{\eta}$, lo cual completa la demostración. ■

En lo que sigue presentaremos algunos resultados que caracterizan los procesos puntuales simples.

Proposición 38. *Sea ξ un proceso puntual sobre $(E, \mathscr{B}(E))$ y supongamos que existe una medida $\lambda \in \mathbb{M}(E)$ difusa tal que*

$$\mathbb{P}(\xi(A) \geqslant 2) = o(\lambda(A)),$$

cuando $\lambda(A) \downarrow 0$ y $A \in \mathscr{R}$. Entonces, ξ es un proceso puntual simple.

Demostración. Sea $K \subset E$ un conjunto compacto y $\varepsilon > 0$. Puesto que λ es difusa, para todo $x \in K$ y $\delta > 0$, existe un entorno $V_x \in \mathscr{R}$ tal que $\lambda(V_x) < \delta$. Luego, por hipótesis, se tiene que para todo $x \in K$

$$\mathbb{P}(\xi(V_x) \geqslant 2) < \varepsilon\lambda(V_x).$$

Dado que K es compacto, una cantidad finita de tales conjuntos, digamos n, cubre a K y a partir de este cubrimiento es posible construir una partición disjunta de K constituida por conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{R}$, tales que

$$\mathbb{P}(\xi(A_i) \geqslant 2) < \varepsilon\lambda(A_i).$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(\{\exists\, x \in K : \xi(\{x\}) \geqslant 2\}) \leqslant \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\xi(A_i \cap K) \geqslant 2) < \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda(A_i \cap K) = \varepsilon\lambda(K).$$

Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión creciente de conjuntos compactos tales que $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y además $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. Luego, $\mathbb{P}(\{\exists\, x \in K_n : \xi(\{x\}) \geqslant 2\}) < \varepsilon\lambda(K_n)$ y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\mathbb{P}(K_n \cap \{\exists\, x \in E : \xi(\{x\}) \geqslant 2\}) = 0$. Por consiguiente $\mathbb{P}(\{\exists\, x \in E : \xi(\{x\}) \geqslant 2\}) = 0$ y entonces ξ no posee múltiples puntos sobre $(E, \mathscr{B}(E))$ completando la demostración. ■

A continuación se proporciona un resultado que caracteriza la convergencia de procesos puntuales hacia un proceso puntual simple.

Teorema 39. *Sean $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de procesos puntuales sobre $(E, \mathscr{B}(E))$, ξ un proceso puntual simple definido sobre el mismo espacio. Entonces, $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$, si y solo si*

(39.1) $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es tensa,*

(39.2) $\mathbb{P}(\xi_n(A) = 0) \to \mathbb{P}(\xi(A) = 0)$, *para todo* $A \in \mathscr{R}_\xi$.

(39.3) $\mathbb{P}(\xi_n(A) \geqslant 2) \to \mathbb{P}(\xi(A) \geqslant 2)$, *para todo* $A \in \mathscr{R}_\xi$.

Demostración. Supongamos que $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$, entonces, Teorema 48 en el Apéndice implica la condición (39.1). Por Teorema 32, se tiene

$$
\begin{aligned}
\operatorname{lím\,sup} \mathbb{P}(\xi_n(A) = 0) &\leq \mathbb{P}(\xi(A) = 0) \\
&= \mathbb{P}(\xi(A) \in (-1/2, 1/2)) \\
&\leq \operatorname{lím\,inf} \mathbb{P}(\xi_n(A) \in (-1/2, 1/2)) \\
&= \operatorname{lím\,inf} \mathbb{P}(\xi_n(A) = 0).
\end{aligned}
$$

Esto demuestra (39.2) y análogamente se obtiene (39.3) .

Para la suficiencia, sigue de (39.1) y del Teorema 48 en el Apéndice que $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta en distribución, es decir, toda subsucesión $\{\xi_{n_k}\}$ posee una subsucesión $\{\xi_{n_{k'}}\}$ tal que $\xi_{n_{k'}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \eta$, para alguna medida aleatoria η, la cual, por Proposición 33, podemos suponer que η es un proceso puntual. Sea $A \in \mathscr{R}_\xi$. Ya que $\partial A \subseteq \overline{A}$, se tiene $\partial A \in \mathscr{R}_\xi$ y entonces, por Proposición 31, se obtiene que $\mathbb{P}(\eta(\partial A) \geq \mathbb{P}(\xi(\partial A) = 0) = 1$. Luego,

$$\mathbb{P}(\eta(A) = 0) = \lim_{k' \to \infty} \mathbb{P}(\xi_{n_{k'}}(A) = 0) = \mathbb{P}(\xi(A) = 0), \text{ y} \tag{2.6}$$

$$\mathbb{P}(\eta(A) \geqslant 2) = \lim_{k' \to \infty} \mathbb{P}(\xi_{n_{k'}}(A) \geqslant 2) = \mathbb{P}(\xi(A) \geqslant 2), \tag{2.7}$$

para todo $A \in \mathscr{R}_\xi$. Por Proposición 37, la relación (2.6) implica que $\widehat{\eta} \overset{d}{=} \xi$. Por otra parte, de la relación 2.7, se sigue que la probabilidad de que la medida η tenga múltiples puntos sobre los elementos de la clase $\mathscr{R}_\xi$, viene dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\eta(A) > \widehat{\eta}(A)) &= \mathbb{P}(\eta(A) \geqslant 2, \eta(A) > \widehat{\eta}(A)) \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{P}(\eta(A) = j, \widehat{\eta}(A) < j) \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} \left[\mathbb{P}(\eta(A) = j) - \mathbb{P}(\widehat{\eta}(A) = j)\right] \\
&= \mathbb{P}(\eta(A) \geqslant 2) - \mathbb{P}(\widehat{\eta}(A) \geqslant 2) \\
&= \mathbb{P}(\eta(A) \geqslant 2) - \mathbb{P}(\xi(A) \geqslant 2) = 0.
\end{aligned}$$

Puesto que la clase $\mathscr{R}_\xi$ posee una base de la topología de E, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{R}_\xi$, tal que $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{\exists\, x \in E : \eta\{x\} \geqslant 2\}\right) &= \mathbb{P}\left(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\exists\, x \in A_n : \eta\{x\} \geqslant 2\}\right) \\
&\leq \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\eta(A_n) > \widehat{\eta}(A_n)\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de donde $\eta \overset{d}{=} \xi$. Por lo tanto, $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$, lo cual completa la demostración. ∎

Capítulo 3

El proceso puntual de Poisson

En probabilidades, estadísticas y campos relacionados, un proceso puntual de Poisson es un tipo de objeto aleatorio que consiste en la localización de puntos en posiciones aleatorias sobre un espacio abstracto. Este proceso tiene propiedades matemáticas las cuales son esenciales para modelar procesos aleatorios en disciplinas como astronomía, biología, ecología, geología, física, telecomunicaciones y entre otros. El proceso puntual de Poisson comúnmente se define sobre la recta real, teniendo un rol importan-te en el área de la teoría de colas, donde es utilizado para modelar eventos aleatorios que ocurren en el tiempo tales como la llegada de clientes a una tienda, conexión a un servidor, llamadas telefónicas, entre otras. En el plano, los procesos puntuales también conocidos como procesos de Poisson espaciales, representan objetos dispersos tales como usuarios de una red, partículas colisionando, árboles en un bosque, entre otros.

Cabe destacar que en este trabajo de tesis no desarrollaremos aplicaciones sino que nos enfocaremos en la existencia de este tipo de procesos sobre un espacio medible abstracto.

Definición 40. Sea N un proceso puntual sobre $(E, \mathscr{B}(E))$. Diremos que N es un proceso puntual de Poisson si las dos condiciones siguientes se satisfacen:

(40.1) Para cada $A \in \mathscr{B}(E)$, $N(A)$ es una variable aleatoria de Poisson con medida de intensidad $\lambda(A) = \mathbb{E}[N(A)]$, es decir,

$$\mathbb{P}(N(A) = n) = \frac{\lambda(A)^n e^{-\lambda(A)}}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(40.2) Si $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{B}(E)$ son disjuntos, entonces $N(A_1),\dots,N(A_n)$ son independientes.

Siguiendo las ideas de [8], dada $\lambda \in \mathbb{M}(E)$ garantizaremos la existencia de un proceso puntual de Poisson N con medida de intensidad $\mathbb{E}[N](\cdot) = \lambda(\cdot)$.

Teorema 41. *Sea $\lambda \in \mathbb{M}(E)$. Entonces, existe un proceso puntual de Poisson N sobre $(E,\mathscr{B}(E))$, tal que $\mathbb{E}(N(A)) = \lambda(A)$ para todo $A \in \mathscr{B}(E)$.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{M}(E)$ finita y definamos una medida aleatoria N sobre $(E,\mathscr{B}(E))$, de la siguiente manera:

$$N(A) = N(\omega, A) = \sum_{i=1}^{\tau(\omega)} \mathbf{1}_A(X_i(\omega)),\ A \in \mathscr{B}(E), \tag{3.1}$$

donde

(41.1) para cada $i = 1,2,\dots$, se tienen $X_i : \Omega \to E$ elementos aleatorios con distribución $Q(dx) = \lambda(dx)/\lambda(E)$,

(41.2) τ es una variable aleatoria de Poisson de media $\lambda(E)$ y,

(41.3) la sucesión $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y τ son independientes.

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathscr{B}(E)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(A) = n) &= \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(N(A) = n|\tau = m)\mathbb{P}(\tau = m) \\
&= \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_A(X_i) = n\right)\mathbb{P}(\tau = m) \\
&= \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} Q(A)^n(1-Q(A))^{m-n}\frac{\lambda(E)^m}{m!}e^{-\lambda(E)} \\
&= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\lambda(E)(1-Q(A)))^{m-n}}{(m-n)!}\frac{e^{-\lambda(E)}(\lambda(E)Q(A))^n}{n!} \\
&= e^{\lambda(E)(1-Q(A))}\frac{e^{-\lambda(E)}(\lambda(E)Q(A))^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda(A)}\frac{\lambda(A)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

La tercera igualdad es consecuencia de que $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_A(X_i)$ es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros m y $Q(A)$. Por consiguiente, N satisface la condición (40.1).

Verifiquemos que la condición (40.2) se satisface. Sean $A_1, \ldots, A_r \in \mathscr{B}(E)$ conjuntos disjuntos. Sean $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$, $n^* = n_1 + \cdots + n_r$, $A = (\bigcup_{i=1}^{r} A_i)^c$ y notemos que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\{N(A_1) = n_1, \ldots, N(A_r) = n_r, N(A) = m\} \cap \{\tau = n\} = \left\{N(A_1) = n_1, \ldots, N(A_r) = n_r, N(A) = n - n^*\right\}$$

es diferente del vacío, si y solo si, $n = n^* + m$. Notemos también que el vector aleatorio

$$\left(\sum_{i=1}^{n^*+m} \mathbf{1}_{A_1}(X_i) = n_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n^*+m} \mathbf{1}_{A_r}(X_i) = n_r, \sum_{i=1}^{n^*+m} \mathbf{1}_{A}(X_i) = m\right)$$

tiene distribución multinomial con parámetros $n_1, \ldots, n_r, m$ y $Q(A_1), \ldots, Q(A_r), Q(A)$ Luego, considerando la independencia entre las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ y τ, se tiene

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(N(A_1) = n_1, \ldots, N(A_r) = n_r, N(A) = m\right) \\
&= \mathbb{P}(N(A_1) = n_1, \ldots, N(A_r) = n_r, N(A) = m | \tau = n^* + m)\mathbb{P}(\tau = n^* + m) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n^*+m} \mathbf{1}_{A_1}(X_i) = n_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n^*+m} \mathbf{1}_{A_r}(X_i) = n_r, \sum_{i=1}^{n^*+m} \mathbf{1}_{A}(X_i) = m\right)\mathbb{P}(\tau = n^* + m) \\
&= \frac{(n^* + m)! Q(A_1)^{n_1} \cdots Q(A_r)^{n_r} Q(A)^m}{n_1! \cdots n_r! m!} \frac{\lambda(E)^{n^*+m} e^{-\lambda(E)}}{(n^* + m)!} \\
&= \frac{\lambda(A)^m}{m!} e^{-\lambda(A)} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda(A_i)^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda(A_i)}\right) \\
&= \mathbb{P}(N(A) = m) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N(A_i) = n_i).
\end{aligned}$$

Esto prueba que $N(A_1), \ldots, N(A_r), N(A)$ son independientes. En particular, las primeras r de estas variables aleatorias son independientes, lo que completa la demostración.

Supongamos que λ no es finita. Como $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ y $\lambda(K_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, sobre el espacio de probabilidad considerado anteriormente, definamos los siguientes elementos aleatorios.

(41.1) Para cada $n = 1,2,\dots$ y $i = 1,2,\dots$, sean $X_i^{(n)} : \Omega \to K_n$ elementos aleatorios con distribución $Q_n(dx) = \frac{\lambda(dx)}{\lambda(K_n)}$.

(41.2) Para cada $n = 1,2,\dots$, sean τ_n, variables aleatorias de Poisson de media $a_n = \lambda(K_n)$.

(41.3) Para cada $n = 1,2,\dots$ y $i = 1,2,\dots$ se tiene que $X_i^{(n)}$ y τ_n, son independientes.

Entonces, podemos definir un proceso puntual N sobre $(E,\mathscr{B}(E))$, del siguiente modo:

$$N(A) = N(\omega, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\tau_n(\omega)} \mathbf{1}_{A\cap K_n}(X_i^{(n)}(\omega)) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n(\omega)\geqslant 1\}} \tag{3.2}$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, $N_n(A) = \sum_{i=1}^{\tau_n(\omega)} \mathbf{1}_{A\cap K_n}(X_i^{(n)}(\omega)) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n(\omega)\geqslant 1\}}$ define un proceso puntual de Poisson con medida de intensidad finita $\lambda_n(\cdot) = \lambda(\cdot \cap K_n)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_n(A) = k) &= \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(N_n(A) = k|\tau_n = m)\,\mathbb{P}(\tau_n = m) \\
&= \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{A\cap K_n}(X_i^{(n)}) = k\right)\mathbb{P}(\tau_n = m)) \\
&= \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{k} Q_n(A\cap K_n)^k (1 - Q_n(A\cap K_n))^{m-k} \frac{\lambda(K_n)^m}{m!} e^{-\lambda(K_n)} \\
&= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\lambda(K_n)(1 - Q_n(A\cap K_n)))^{m-k}}{(m-k)!} \frac{e^{-\lambda(K_n)}(\lambda(K_n)Q_n(A\cap K_n))^k}{k!} \\
&= e^{\lambda(K_n)(1-Q_n(A\cap K_n))} \frac{e^{-\lambda(E)}(\lambda(K_n)Q(A\cap K_n))^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda(A\cap K_n)} \frac{\lambda(A\cap K_n)^n}{k!}.
\end{aligned}$$

Es decir, N_n satisface la condición (40.1) de la definición del proceso puntual de Poisson. Usando un razonamiento análogo al caso de la construcción de un proceso puntual de Poisson con medidia de intensidad $\lambda \in \mathbb{M}(E)$ finita se verifica la independencia.

Luego,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(A)=k) &= \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_n(A)}}{k!}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_n(A)\right)^k \\
&= \frac{e^{-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(A\cap K_n)}}{k!}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(A\cap K_n)\right)^k \\
&= \frac{e^{-\lambda(A\cap(\cup_{i=1}^{\infty}K_n))}}{k!}\left[\lambda\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}K_n\right)\right]^k \\
&= \frac{e^{-\lambda(A\cap E)}}{k!}(\lambda(A\cap E))^k \\
&= \frac{e^{-\lambda(A)}}{k!}(\lambda(A))^k,
\end{aligned}
$$

lo que completa la demostración. ■

Observación 42. Sea ν una medida σ-finita sobre $(E,\mathscr{B}(E))$ y λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}_+$. Luego, $\lambda\otimes\nu$ es una medida σ-finita sobre $(\mathbb{R}_+\times E,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{B}(E))$. Sean μ una medida de Poisson con intensidad $\lambda\otimes\nu$ y, para cada $t\in\mathbb{R}_+$ y $A\in\mathscr{B}(E))$, $\mu_t(A)=\mu([0,t]\times A)$. Luego, $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ es un proceso de Poisson espacio temporal estacionario (homogéneo).

Observación 43. Es preciso aclarar que también es posible demostrar la existencia de procesos puntuales de Poisson vía límites proyectivos y aplicando el Teorema de consistencia de Kolmogorv, para ello recomendamos leer [9, Capítulo 4].

En [9], se presentan una serie de resultados que caracteriza a las medidas aleatorias de Poisson cuando poseen medida de intensidad $\lambda\in\mathbb{M}(E)$ difusa. Una particularidad de los procesos puntuales de Poisson con medida de intensidad difusa es que son simples, hecho que nos proporciona ventajas para desorrollar resultados sobre la convergencia. A continuación presentaremos un resultado que justifica esta condición.

Proposición 44. *Sea N un proceso puntual de Poisson sobre $(E,\mathscr{B}(E))$ con medida de intesidad $\lambda\in\mathbb{M}(E)$ difusa. Entonces, N no tiene átomos y es simple.*

Demostración. En primer lugar, verificaremos que N, no posee átomos. Ya que λ es difusa, se sigue que

$$\mathbb{P}(N(\{x\})=0)=e^{-\lambda\{x\}}=1.$$

Lo que verifica la primera condición.

Queda por demostrar que N es simple. Usando el hecho de que para todo $A \in \mathscr{B}(E)$ $N(A)$ es un proceso puntual de Poisson, se sigue que,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(A) \geqslant 2) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(A)}(\lambda(A))^n}{n!} \\ &= o(\lambda(A)).\end{aligned}$$

De la Proposición 38, se sigue que N es simple.

■

El siguiente resultado es debido a Renyi en [13]. Este resultado permite caracterizar las medidas aleatorias de Poisson con medida de intensidad difusa.

Proposición 45. *Sean ξ un proceso puntual sobre $(E, \mathscr{B}(E))$, $\lambda \in \mathbb{M}(E)$ una medida difusa. Además supongamos que se satisfacen las siguientes propiedades*

$$\mathbb{P}(\xi(A) = 0) = e^{-\lambda(A)}, \ \textit{para todo}\ A \in \mathscr{R}. \tag{3.3}$$

$$\mathbb{P}(\xi(A) \geqslant 2) = o(\lambda(A)), \ \lambda(A) \to 0. \tag{3.4}$$

Entonces ξ es un proceso puntual de Poisson con medida de intensidad λ.

Demostración. Sea η un proceso puntual de Poisson con medida intensidad λ. La condición (3.3) implica que

$$\mathbb{P}(\xi(A) = 0) = e^{-\lambda(A)} = \mathbb{P}(\eta(A) = 0). \tag{3.5}$$

Proposición 38 y condición (3.4) implican que ξ es simple y Proposición 37 junto con condición (3.5) implican que $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, lo cual completa la demostración.

■

3.1. Superposición de procesos puntuales

La siguiente sección tiene como propósito proporcionar un criterio que garantice la convergencia en distribución de la superposición de procesos puntuales hacia a un proceso de Poisson. La demostración que desarrollaremos sigue las ideas planteadas por Grigelionis en [7], donde considera un arreglo triangular $(\xi_{nj}; 1 \le j \le r_n, n \in \mathbb{N})$ de procesos puntuales independientes sobre $(E, \mathscr{B}(E))$, los cuales están definidos sobre el mismo espacio de probabilidad. Por otra parte, diremos que un arreglo triangular es infinitesimal si para todo conjunto compacto $K \subset E$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(K) \geqslant 1) = 0.$$

Teorema 46. *Sean* $(\xi_{nj}; 1 \le j \le r_n, n \in \mathbb{N})$ *un arreglo triangular infinitesimal de procesos puntuales independientes y* ξ *un proceso puntual de Poisson con medida de intensidad* $\lambda \in \mathbb{M}(E)$ *difusa, tal que* $\lambda(\partial A) = 0$*, para todo* $A \in \mathscr{R}$*. Entonces,*

$$\xi_n = \sum_{j=1}^{r_n} \xi_{nj} \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi, \tag{3.6}$$

si y solo si, se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(46.1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 1) = \lambda(A)$*, para todo* $A \in \mathscr{R}$*.*

(46.2) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(K) \geqslant 2) = 0$*, para todo conjunto compacto* $K \subseteq E$*.*

Demostración. Supongamos que $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \xi$, donde ξ es un proceso Poisson con medida de intensidad difusa λ y sea $A \in \mathscr{R}$, tal que $\lambda(\partial A) = 0$. Queremos demostrar que se satisfacen (46.1) y (46.2) y para ello haremos uso de las funciones generadoras de momentos de las variables aleatorias $\xi_{jn}(A)$ y $\xi_n(A)$, las cuales, para $0 \leqslant s \leqslant 1$, denotamos por $\varphi_{jn}(s) = \mathbb{E}[s^{\xi_{nj}(A)}]$ y $\varphi_n(s) = \mathbb{E}[s^{\xi_n(A)}]$, respectivamente. Entonces, por la independencia de las variables aleatorias $\xi_{n1}(A), \dots, \xi_{nr_n}(A)$, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{r_n} \log(\varphi_{nj}(s)) = \log(\mathbb{E}(s^{\xi_n(A)})), \quad \text{para todo } s \in (0,1].$$

y entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{r_n} \log(\varphi_{nj}(s)) = (s-1)\lambda(A), \quad \text{para todo } s \in (0,1]. \tag{3.7}$$

Por el desarrollo de Taylor de la función log centrado en 1, se tiene que, para todo

$s \in (0,1]$,

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{r_n} \log \varphi_{nj}(s) &= \sum_{j=1}^{r_n} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\varphi_{nj}(s))^k / k \\ &= \sum_{j=1}^{r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) + \alpha_n(s), \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde

$$\alpha_n(s) = (1-\varphi_{nj}(s)) \sum_{j=1}^{r_n} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\varphi_{nj}(s))^k / (k+1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \alpha_n(s) &\leq (1-\varphi_{nj}(s)) \sum_{j=1}^{r_n} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\varphi_{nj}(s))^k / k \\ &\leq \text{máx}_{1 \leqslant j \leqslant r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) \sum_{j=1}^{r_n} \sum_{k=1}^{\infty} (1-\varphi_{nj}(s))^k / k \\ &= -\text{máx}_{1 \leqslant j \leqslant r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) \sum_{j=1}^{r_n} \log \varphi_{nj}(s) \\ &= -\text{máx}_{1 \leqslant j \leqslant r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) \log \varphi_n(s) \\ &= -\text{máx}_{1 \leqslant j \leqslant r_n} \mathbb{E}((1-s^{\xi_{nj}(A)}) \mathbf{1}_{\{\xi_{nj}(A) \geq 1\}}) \\ &\leq -\text{máx}_{1 \leqslant j \leqslant r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geq 1). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \alpha_n(s) \leq -\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqslant j \leqslant r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geq 1) = 0,$$

pues el arreglo triangular es infinitesimal. Tenemos así que $\text{lím}_{n\to\infty} \alpha_n(s) = 0$ y de (3.7) y (3.8) que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) = (1-s)\lambda(A), \quad \text{para todo } s \in (0,1]. \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geq 1) &= \sum_{j=1}^{r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_n} s^k \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = k) \\ &\leq \sum_{j=1}^{r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) + s \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geq 1). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{j=1}^{r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) \leq \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geq 1) \leq \frac{1}{1-s} \sum_{j=1}^{r_n} (1-\varphi_{nj}(s)),$$

de modo que, por (3.9), se tiene

$$(1-s)\lambda(A) \le \liminf \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \ge 1) \le \limsup \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \ge 1) \le \lambda(A)$$

y tomando límite cuando $s \downarrow 0$, se obtiene ((46.1)).

Demostremos ((46.2)), para ello usaremos el hecho que

$$\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj} A \geqslant 2) = \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj} A \geqslant 1) - \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj} A = 1).$$

Por ((46.1)), basta con demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1) = \lambda(A)$. En efecto, como $\mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1) \le \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 1)$, entonces por ((46.1)) se tiene

$$\limsup \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1) \leqslant \lambda(A). \tag{3.10}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 1) &= \sum_{j=1}^{r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) + s\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1) + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_n} s^k \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = k) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} (1-\varphi_{nj}(s)) + s\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1) + s^2 \sum_{j=1}^{r_n} s^k \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 1)\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\left(\tfrac{1-s^2}{s}\right)\textstyle\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 1) - \tfrac{1}{s}\sum_{j=1}^{r_n}(1-\varphi_{nj}(s)) \quad \leq \quad \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1) + \tfrac{s^3}{1-s}\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 1).$$

Tomando límite inferior y aplicando ((46.1)), se tiene

$$\left(\frac{1-s^2}{s} - \frac{1-s}{s}\right)\lambda(A) \le \liminf \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1) + \frac{s^3}{1-s}\lambda(A).$$

Es decir,

$$(1-s)\lambda(A) \le \liminf \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1) + \frac{s^3}{1-s}\lambda(A)$$

y tomando límite cuando $s \downarrow 0$, se tiene

$$\lambda(A) \leq \liminf \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1).$$

Este hecho y (3.10), implican que $\liminf \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) = 1) = \lambda(A)$, con lo cual se obtiene ((46.2)).

Para la suficiencia, ocuparemos el hecho que los procesos puntuales de Poisson con medida de intensidad difusa son simples, propiedad que fue verificada en la Proposición 44. Por lo tanto, demostrar que se cumple la condición (3.6) es equivalente a demostrar que se satisfacen las condiciones (39.1), (39.2),(39.3) del Teorema 39.

Iniciaremos demostrando la propiedad (39.1). Como todo $A \in \mathscr{R}$ es union finita de conjuntos cuya medida respecto de λ es menor que 1, podemos suponer que $\lambda(A) < 1$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n(A) > k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{r_n} \xi_{nj}(A) > k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{\sum_{j=1}^{r_n} \xi_{nj}(A) > k\} \cap \bigcup_{j=1}^{r_n} \{\xi_{nj}(A) \geqslant 2\}\right) + \mathbb{P}\left(\{\sum_{j=1}^{r_n} \xi_{nj}(A) > k\} \cap \bigcap_{j=1}^{r_n} \{\xi_{nj}(A) \leqslant 1\}\right) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \mathbb{P}(\{\exists\ j_1, \ldots, j_r \leqslant r_n,\ \xi_{nj_{r_n}}(A) = 1\} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \mathbb{P}(\exists\ j_1, \ldots, j_r \leqslant r_n,\ \xi_{nj}(A) = 1, \ldots, \xi_{nj_{r_n}}(A) = 1) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{j_1 < \cdots < j_r} \{\xi_{nj_1}(A) = 1\} \cap \cdots \cap \{\xi_{nj_r}(A) = 1\}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \sum_{j_1 < \cdots < j_r} \mathbb{P}(\xi_{nj_1}(A) = 1, \ldots, \xi_{nj_r}(A) = 1).
\end{aligned}$$

Usando el hecho que las variables aleatorias $\{\xi_{nj_1}, \ldots, \xi_{nj_r}\}$ son independientes e idénticamente distribuidas, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n(A) > k) &= \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \sum_{j_1<\cdots<j_r} \big(\mathbb{P}(\xi_{nj_1}(A) = 1)\big)^r, \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}\{\xi_{nj}(A) \geqslant 2\} + \big(\mathbb{P}\{\xi_{nj_1}(A) = 1\}\big)^r \cdot |\{(j_1,\ldots,j_r) : j_1 < \ldots < j_r\}|,
\end{aligned}$$

donde, $|\cdot|$ representa el cardinal de un conjunto. Ya que a lo más pueden haber r_n elementos en $(j_1,\ldots,j_r)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n(A) > k) &\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \big(\mathbb{P}(\xi_{nj_1}(A) = 1)\big)^r \cdot (r_n)^r \\
&= \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \big(\mathbb{P}(\xi_{nj_1}(A) = 1) r_n\big)^r
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n(A) > k) &= \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj} A \geqslant 2) + \left(\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj_1} A = 1)\right)^r \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \left(\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj_1}(A) \geqslant 1)\right)^r.
\end{aligned}$$

Al hacer tender r_n a infinito y ocupando las relaciones (46.1) y (46.2), concluimos que

$$\mathbb{P}(\xi_n(A) > k) = \lim_{r_n\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \left(\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj_1}(A) \geqslant 1)\right)^r\right] = \lambda(A)^r.$$

Ya que $\lambda(A) < 1$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_A \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{P}(\xi_n(A) > k) < \varepsilon$, para todo $k \geqslant k_A$ y $n \in \mathbb{N}$. Así, hemos demostrado que la sucesión $\{\xi_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa y del Lema 27, se obtiene la tensión de las $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora vamos a verificar las condiciones (39.2) y (39.3). Del Teorema 48 en el Apéndice se sigue que $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta en distribución, es decir, dada una subsucesión $\{\xi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, existe otra subsucesión $\{\xi_{n_{k'}}\}_{k'\in\mathbb{N}}$ tal que $\xi_{n_{k'}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \eta$, para algún proceso puntual η. La demostración estará completa, si demostramos que η es un proceso de Poisson. Sea $A \in \mathscr{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_{n_{k'}}(A)=0) = \mathbb{P}(\sum_{j=1}^{r_{n_{k'}}} \xi_{n_{k'}j}(A)=0) \\ =& \mathbb{P}(\xi_{n_{k'}1}(A)=0,\dots,\xi_{r_{n_{k'}}n_{k'}}(A)=0) \\ =& \prod_{j=1}^{r_{n_{k'}}} \mathbb{P}(\xi_{n_{k'}j}(A)=0).\end{aligned}$$

Así, aplicando logaritmo natural y exponencial, se tiene que

$$\mathbb{P}(\xi_{n_{k'}}(A)=0) = \exp\{\sum_{j=1}^{r_{n_{k'}}} \log(\mathbb{P}(\xi_{n_{k'}j}(A)=0))\}.$$

Podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}(\xi_{n_{k'}}(A)=0) = \exp\{-\sum_{j=1}^{r_{n_{k'}}} \mathbb{P}(\xi_{n_{k'}j}(A)\geqslant 1)\}\cdot\exp\{\sum_{j=1}^{r_{n_{k'}}} \mathbb{P}(\xi_{n_{k'}j}(A)\geqslant 1)+\sum_{j=1}^{r_{n_{k'}}} \log(\mathbb{P}(\xi_{nj}(A)=0))\}.$$

De la relación (46.1), se tiene, por una parte que

$$\mathbb{P}(\xi_{n_{k'}}(A)=0) = \exp\{-\sum_{j=1}^{r_{n_{k'}}} \mathbb{P}(\xi_{n_{k'}j}(A)\geqslant 1)\} \to e^{-\lambda(A)}.$$

y por otra que $\mathbb{P}(\xi_{n_{k'}}(A)=0)\to\mathbb{P}(\eta(A)=0)$. En consecuencia,

$$\mathbb{P}(\eta(A)=0) = e^{-\lambda(A)} \tag{3.11}$$

Por Proposición (45), solo resta demostrar que $\mathbb{P}(\eta(A)\geqslant 2) = o(\lambda(A))$.

Se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_n(A) \geqslant 2) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{r_n} \xi_{nj}(A) \geqslant 2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{\bigcup_{j=1}^{r_n} \{\xi_{nj}(A) \geqslant 2\} \cup \bigcup_{1 \leqslant j \neq k \leqslant r_n} \{\xi_{nj}(A) = 1\}\{\xi_{nk}(A) = 1\}\right) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \sum_{j \neq k}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 1)\mathbb{P}(\xi_{nk}(A) \geqslant 1) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 2) + \left(\sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{P}(\xi_{nj}(A) \geqslant 1)\right)^2 \to (\lambda(A))^2.
\end{aligned}$$

y entonces $\mathbb{P}(\xi_n(A) \geqslant 2) = o(\lambda(A))$. Por consiguiente,

$$\mathbb{P}(\eta(A) \geqslant 2) = o(\lambda(A)). \tag{3.12}$$

De las relaciones (3.11) y (3.12) y de la Proposición 45, se sigue que η es un proceso puntual de Poisson con medida de intensidad λ, lo que completa la demostración. ■

*

Apéndice A

En este apéndice reunimos algunos resultados que son de utilidad en el texto principal para una fácil referencia. Omitimos la mayoría de las demostraciones y se adjuntan las referencias en la literatura según sea el caso.

Dado un espacio E, definimos un π-sistema en E como una clase no vacía de subconjuntos cerrados bajo intersecciones finitas, mientras que un d-sistema se define como una clase de subconjuntos que contiene a E y es cerrada bajo diferencias propias y límites crecientes.

Teorema 47. *(Dynkin.) Sea $\mathscr{S}$ una clase de subconjuntos de E tal que es un π-sistema, entonces $d(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{S})$.*

Demostración. Ver [11, Teorema 1.1] ■

Teorema 48. *(Prohorov.) Sea $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos aleatorios sobre un espacio Polaco E. Entonces, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa si y solo si $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es relativamente compacta en distribución.*

Demostración. Ver [11, Teorema 16.3] ■

Teorema 49. *(Banach-Steinhaus.) Sean E y F espacios vectoriales topolóogicos, Γ una familia de aplicaciones lineales de E en F y para cada $x \in E$, $\Gamma(x) = \{Tx : T \in \Gamma\}$. Supongamos además que $B = \{x \in E : \Gamma(x)$ es acotado$\}$ es de segunda categoría. Entonces, $B = E$ y Γ es equicontinua.*

Demostración. Ver [14, Teorema 2.5]) ■

Teorema 50. *(Banach-Alaoglu.) Sean E un espacio vectorial topológico y V una vecindad de 0 en la topología original. Entonces,*

$$K = \{\varphi \in E^* : \forall\ x \in V, |\varphi x| \leqslant 1\}$$

es compacto respecto de la topología débil.*

Demostración. Ver [14, Teorema 3.15]) ■

Teorema 51. *Sean E un espacio topológico localmente compacto, 2° numerable y Hausdorff, $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre $(E, \mathscr{B}(E))$, $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre $(E, \mathscr{B}(E))$ y $h : E \to \mathbb{R}$ una función medible. Si $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ y $\mathbb{P}(D_h) = 0$, entonces $\mathbb{P}_n \circ h^{-1} \xrightarrow{w} \mathbb{P} \circ h^{-1}$*

Demostración. Ver [1, Teorema 5.1] ■

Teorema 52. *Sean E un espacio topológico localmente compacto, 2° numerable y Hausdorff, $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre $(E, \mathscr{B}(E))$, $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad sobre $(E, \mathscr{B}(E))$ y $h : E \to \mathbb{R}$ una función medible, acotada y tal que $\mathbb{P}(D_h) = 0$. Si $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ y $\mathbb{P}(D_h) = 0$, entonces*

$$\int_E h(x)\mathbb{P}_n(dx) \to \int_E h(x)\mathbb{P}(dx)$$

Demostración. Ver [1, Teorema 5.2] ■

Bibliografía

[1] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measure*. Wiley, 1968.

[2] D.J. Daley and D. Vere-jones. *An introduction to the theory of Point Processes*. Springer, 2003.

[3] D. Dawson and G. Ivanoff. Branching Diffusions and Random Measures. *Advances in Probability and Related Topics*, 5:61–102, 1978.

[4] D Dawson, B. Maisonneuve, and J Spencer. *Ecole d ´Eté de Probabilités de Saint-Flour XXI-1991*. Springer-Verlarg, 1993.

[5] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon Inc, 1978.

[6] J. Grandell. Point Process and Random Measure. *Advances in Applied Probability.*, 9:502–526, 1977.

[7] B. Grigelionis. On the convergence of sums of random step process to a Poisson process. *Th. Probab. Appl.*, 8:172–182, 1963.

[8] N. Ikeda and S. Watanabe. *Sthochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North Holland-Kodansha, 1989.

[9] P. Jagers. Aspects of Random Measures and Point Processes. *Advances in Probability and Related Topics*, 3:179–239, 1974.

[10] O Kallenberg. *Random Measures*. Akademie-Verlarg, 1983.

[11] O. Kallenberg. *Foundation of modern probability*. Springer-Verlarg, 1989.

[12] J.E. Moyal. Multiplicative Population Processes. *Journal Applied Probability*, 1:267–283, 1964.

[13] A. Renyi. Remarks on the poisson process. *Studia Sci. Math. Hungarica*, 1:153–157, 1967.

[14] W. Rudin. *Functional Analysis.* Tata McGraw-Hill, Publishing Company Ltd, 1974.