Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

HACIA UNA BASE CELULAR PARA LA FRAMIZACIÓN DEL ÁLGEBRA DE HECKE DE TIPO B

Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas

Presentada por:
GERARDO CORREDOR RINCON

Profesor Guía: Dr. Marcelo Flores Henríquez

VALPARAÍSO
MARZO 2020

"¿ESTA CHILOSO?"
Dionicio Rincón Lizcano (1934-2019)

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios y a mi madre, Luz Marina Rincón que gracias a sus esfuerzos y sacrificios me han permitido ser quien soy.

A mis abuelos, Rosa Amelía Pimiento y Dionicio Rincón Lizcano que me formaron como persona, estando siempre a mi lado y siendo el motor de mi vida para seguir adelante.

Al profesor Marcelo Flores que, como director de esta tesis, me ha orientado, apoyado, corregido y motivado a continuar con mis estudios.

Al profesor Rodrigo Castro, que me brindó su amistad y ayuda a lo largo de mi carrera.

A todo aquel que durante los últimos dos años me brindó su amistad. En especial agradezco a mi compañera de ingreso Juliana Gonzáles por su apoyo moral y por todas las alegrías que pasamos, y a Cristina Verdugo por darme fuerzas en momentos difíciles.

A cada profesor que contribuyó en mi formación como matemático.

Al proyecto Fondecyt/iniciación 11170305 por financiar parcialmente mi trabajo.

Resumen

El primer paso es analizar y explicar detalladamente el concepto de bases celulares para un álgebra. Luego, comprender en detalle la base de Murphy del algebra de Hecke de tipo A, lo cual es fundamental para entender la construcción de la base celular del álgebra de Yokonuma-Hecke de tipo A. Así, se podrá conjeturar una base celular para la framizacion del álgebra de Hecke de tipo B, adaptando lo realizado en las álgebras de tipo A.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La teoría de representaciones nació en 1896 en la obra [9] del matemático alemán F.G. Frobenius. Ideas de Dedekind de 1885 fueron la base de dicho trabajo. De hecho, Frobenius introdujo las representaciones de grupos en este trabajo sin hacerlas explícitas, donde los caracteres aparecían como soluciones de ciertas ecuaciones. Al año siguiente en [10] Frobenius define la noción de representación de un grupo finito y demuestra que las trazas de las matrices de la representación correspondientes son los caracteres del grupo. La presentación actual de la teoría de representaciones se debe a Schur, alumno doctoral de Frobenius en Berlin, ver [21].

El problemas central en la teoría de representaciones de grupos finitos es determinar una familia completa de representaciones irreducibles (módulos simples) para un grupo dado. Esto debido a que cada representación es suma directa de representaciones irreducibles, lo cual esta garantizado por el teorema de Maschke, ver [7]. Cuando nos trasladamos a la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita no existe un teorema que garantice esta descomposición. Para algunas álgebras, cada módulo es una suma directa de módulos simples, y en este caso, el álgebra se llama semisimple. Sin embargo, cualquier módulo de dimensión finita es una suma directa de módulos indescomponibles, es decir, no se puede escribir como suma directa de dos submódulos no triviales. Más aún, tal descomposición de suma directa es única, lo cual se conoce como el teorema de Krull-Schmidt, ver [5]. Con lo cual es suficiente entender los módulos indescomponibles de un álgebra. Como observación, todo módulo simple es indescomponible.

En 1996 Graham y Lehrer introducen el concepto de álgebra celular en [16]. Estas álgebras poseen una base, la cual tiene una lista de propiedades que permiten obtener una familia completa de representaciones irreducibles para dicha álgebra. Dicha base es llamada base celular, y actualmente es una herramienta muy utilizada en teoría de representaciones. Posteriormente, König y Xi en 1998 comenzaron a analizar la clase de álgebras celulares y dieron una definición equivalente desde el punto de vista de la teoría de anillos (ver [15]), que a menudo es más conveniente. Para nuestro caso trabajaremos con la definición de Graham y Lehrer.

El álgebra de Iwahori-Hecke asociada al grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$, denotada por $\mathscr{H}_n(q)$, aparece de manera natural como el álgebra conmutante de la representación natural de $GL_n(F_q)$ respecto al subgrupo de Borel. Esta, también puede ser definida como una q-deformación del álgebra de grupo de $\mathfrak{S}_n$. Más generalmente, dado un grupo de Coxeter W, se puede definir de manera general el álgebra de Hecke asociada a W, denotada por $\mathscr{H}(W)$, y la cual es una deformación del álgebra de grupo de W. Además, se sabe que las álgebras de Hecke son álgebras celulares, ver [17].

El álgebra de Yokonuma-Hecke, denotada por $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$, es introducida en [23] en el contexto de los grupos de Chevalley, como una generalización de las álgebras de Iwahori-Hecke. Lo cual resulta ser una q-deformación del álgebra de grupo de $\mathbb{Z}_r^n \rtimes \mathfrak{S}_n$. Está álgebra puede ser vista como una framización del álgebra de Hecke $\mathscr{H}_n(q)$. El concepto de framización fue introducido por Juyumaya y Lambropolou en el contexto de álgebras de nudos en [14]. Al igual que el álgebra de Hecke, él álgebra $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$ posee una base celular (ver [6]).

En los últimos años, se ha demostrado que una gran variedad de álgebras que aparecen tanto en matemáticas como en física tienen una estructura celular. Por ejemplo, las álgebras de Q-Schur de tipo A, álgebras de Brauer, álgebras de Temperley-Lieb, álgebras de Birman-Wenzl, álgebra de "braids and ties", y muchas otras álgebras (ver [6],[17],[22]). Es notable que el método del álgebra celular también se puede usar para estudiar álgebras de dimensión infinita.

Recientemente M. Flores, J. Juyumaya, y S. Lambropoulou definieron en [8] una framizacion del álgebra de Hecke de tipo B, denotada por $\mathscr{Y}_{r,n}^B$, con el fin de explorar su utilidad en la construcción de invariantes de nudos. El objetivo de esta tesis es conjeturar una base celular para dicha álgebra. Para esto, estudiaremos en detalle las construcciones hechas para el álgebra de Hecke de tipo A y el álgebra de Yokonuma-Hecke de tipo A en [17] y [6], respectivamente.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos y resultados elementales concernientes a módulos sobre anillos arbitrarios, producto tensorial, álgebras y representaciones de álgebras. Se destacan especialmente los teoremas de Jordan-Holder, Krull-Schmidt y el Lema de Schur's, entre otros. Los detalles pueden ser encontrados en [1],[5], [7] y [12].

2.1. Módulos

Un módulo sobre un anillo es una generalización de la noción de espacio vectorial sobre un cuerpo, donde los escalares son ahora los elementos de un anillo.

Definición 2.1. *Sea R un anillo con unidad. Un R-**módulo izquierdo** es un grupo abeliano $(M,+)$ dotado con una función $\cdot : R\times M \to M$ donde $(a,m)\mapsto a\cdot m$, tal que para todo $a,b\in R$ y $m,n\in M$ se satisface lo siguiente:*

(i) $(a+b)\cdot m = a\cdot m + b\cdot m$

(ii) $a\cdot(m+n) = a\cdot m + a\cdot n$

(iii) $(ab)\cdot m = a\cdot(b\cdot m)$

(iv) $1\cdot m = m$

De manera similar se define un R-**módulo derecho**, en el cual la acción por escalar es a la derecha de M. Si R es conmutativo, a partir de un R-módulos izquierdo se puede construir un R-módulos derecho, luego son llamados simplemente R-módulos.

Ejemplo 2.2. *Cada anillo R tiene estructura natural de R-módulo izquierdo y derecho.*

Ejemplo 2.3. *Todo grupo abeliano $(G,+)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo, bajo la acción dada por*

$$n \cdot g = \underbrace{g + g + \cdots + g}_{n-veces} \text{ , para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ y } g \in G.$$

Ejemplo 2.4. *Cada grupo abeliano $(G,+)$ es un $End(G)$-módulo izquierdo respecto a la operación $f \cdot g = f(g)$ para todo $f \in Eng(G)$ y $g \in G$.*

Definición 2.5. *Dados dos anillos R_1 y R_2. Decimos que M es un (R_1,R_2)**-bimódulo**, si M es R_1-módulo izquierdo, R_2-módulo derecho y además*

$$(a \cdot m) \cdot a' = a \cdot (m \cdot a') \text{ para todo } a \in R_1 \text{ , } a' \in A_2 \text{ y } m \in M.$$

Ejemplo 2.6. *Todo grupo abeliano $(G,+)$ es un $(End(G),\mathbb{Z})$-bimódulo.*

Ejemplo 2.7. *Cada R-módulo derecho es un $(\mathbb{Z},R)$-bimódulo.*

Definición 2.8. *Sea M un R-módulo y $X \subseteq M$, decimos que*

1. *X **genera** a M, si para todo $x \in M$ existen $a_1,\cdots,a_n \in R$ y $m_1,\cdots,m_n \in X$ tal que $x = a_1 \cdot m_1 + \cdots + a_n \cdot m_n$. Si X es es finito decimos que M es finitamente generado.*
2. *X es **linealmente independiente**, si cualquier conjunto finito $\{m_1,\cdots,m_k\} \subseteq X$ cumple que si $a_1 \cdot m_1 + \cdots + a_k \cdot m_k = 0$ entonces $a_1 = \cdots = a_n = 0$.*
3. *X es **base** de M, si X es linealmente independiente y además genera a M.*

Decimos que M es un R**-módulo libre** si tiene base. Además, El **rango** de M se define como $|X|$, donde X es base de M. Mas aún, el rango esta bien definido si y sólo si R es un anillo conmutativo con unidad (ver [12]).

Definición 2.9. *Sea M un R-módulo y $N \subseteq M$. Decimos que N es un R**-submódulo** de M y lo denotamos por $N \leq M$ si $(N,+)$ es un grupo abeliano y $a \cdot m \in N$ para todo $a \in R$ y $m \in N$. Además, Decimos que N es **maximal** de M, si para todo $D \leq M$ tal que $N \leq D$ se cumple que $D = N$ ó $D = M$.*

Definición 2.10. *Sea M un R-módulo, decimos que*

1. *M es **simple** si sus únicos submódulos son M y $\{0\}$ (módulos triviales).*

2. *M es **semisimple** si es suma directa de módulos simples.*

3. *M es **indescomponible** si no se puede escribir como una suma directa de dos submódulos no triviales.*

Note que cada módulo simple es indescomponible.

Teorema 2.11 (**Krull-Schmidt** [7])**.** *Sea M un R-módulo, y sea,*

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k = M = N_1 \oplus \ N_2 \oplus \cdots \oplus N_L$$

dos descomposiciones de M en sumas directas de indescomponibles. Entonces $k = l$ y existe un etiquetado de los N_i tal que $M_1 \cong N_1$, $M_2 \cong N_2$,$\cdots$, $M_k \cong N_k$.

Definición 2.12. *Sean M, N R-módulos. Una función $f : M \to N$ es un **homomorfismo de módulos** si para todo $m, m' \in M$ y $a \in R$*

(i) $f(m + m') = f(m) + f(m')$

(ii) $f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$

En general, los morfismos de R-módulos se definen como morfismos de grupos abelianos que además son R-lineales. Entonces, los **teoremas del isomorfismo** son análogos a los ya conocidos en la teoría de grupos, lo cual nos permite obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.13. *Si X es base de un R-módulo M, entonces la base cumple la siguiente **propiedad universal**. Dado D un R-módulo y $f : X \to D$, existe un único homomorfismo de R-módulos $\phi : M \to D$ tal que $f = \phi \circ i$, donde i es la inclusión. Es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\ & D \end{tikzcd}$$

En efecto, ϕ se define de manera natural. Si $m = \sum a_i \cdot m_i$ donde $m_i \in X$, entonces $\phi(m) = \sum a_i \cdot f(m_i)$.

Teorema 2.14. *Sea M un R-módulo las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) M es libre (con base X).

(ii) *M cumple la propiedad universal (con N).*

(iii) $M \cong \bigoplus_{i \in X} R := \left\{ (a_i)_{i\in N} \;\middle|\; a_i \in R \text{ y un número finito de } a_i \text{ no son ceros} \right\}.$

Definición 2.15. *Sea M un R-módulo. Una **filtración** de M es una secuencia*

$$0 = M_0 < M_1 < \cdots < M_k = M \quad \text{de } R\text{-submódulos de } M.$$

Definición 2.16. *Sea M un R-módulo. Una **serie de composición** de M es una filtración tal que $M_i \big/ M_{i-1}$ es un R-módulo simple para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$.*

$M_i \big/ M_{i-1}$ es llamado **factor de composición** de R.

Proposición 2.17. *Sea R un anillo*

1. *Si M es un R-módulo y N es un R-submódulo de M. Entonces, N es maximal de M si y sólo si M/N es simple.*
2. *R/I es un R-módulo simple si y sólo si I es un ideal maximal de R.*

Es decir, todo módulo simple es un factor de composición de alguna filtración.

Definición 2.18. *Sea M un R-módulo. Definimos el **radical de Jacobson** de M, denotado $J(M)$, como la intersección de todos los submódulos maximales de M. Es decir,*

$$J(M) := \bigcap \{ N \leq M \mid N \text{ es maximal de } M \}.$$

Lema 2.19. *Si M es un R-módulo entonces M tiene una serie de composición.*

Teorema 2.20 (**Jordan-Holder** [7])**.** *Dado M un R-módulo y series de composición*

$$0 < M_1 < \cdots < M_k = M \quad y \quad 0 < N_1 < \cdots < N_n = M.$$

Si $C_i := M_i \big/ M_{i-1}$ y $D_i := N_i \big/ N_{i-1}$ entonces $k = n$ y existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tal que $C_i \cong D_{\sigma(i)}$.

2.2. Producto Tensorial

En esta sección definimos el producto tensorial sobre módulos, dicha noción nos permite construir un nuevo módulo, el cual es esencial para el desarrollo del siguiente capítulo.

Definición 2.21. *Sea M un R-módulo derecho y N un R-módulo izquierdo, consideramos el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por $M \times N$ el cual denotamos $\mathbb{Z}(M \times N)$. Si W es el submódulo de $\mathbb{Z}(M \times N)$ generado por los elementos de la forma*

- $(m\ ,\ n_1 + n_2) - (m\ ,\ n_1) - (m\ ,\ n_2)$
- $(m_1 + m_2\ ,\ n) - (m_1\ ,\ n) - (m_2\ ,\ n)$
- $(m \cdot a,\ n) - (m\ ,\ a \cdot n)$

para todo $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ y $a \in R$. Definimos el ***producto tensorial*** *entre M y N respecto a R como sigue:*

$$M \otimes_R N := \mathbb{Z}(M \times N)\,/\,W\ .$$

Note que $M \otimes_R N$ es un R-módulo respecto a la operación

$$\begin{aligned} \cdot\ :\ R \times (M \otimes_R N) &\longrightarrow M \otimes_R N \\ (a, m \otimes_R n) &\longmapsto m \cdot a \otimes_R a \cdot n \end{aligned}$$

En ocasiones se sobreentiende el anillo sobre el cual se trabaja, por lo cual escribimos simplemente $M \otimes N$. Además, si M y N son R-módulos se cumple que:

1. $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$
2. $R \otimes_R M \cong M$

Definición 2.22. *Sea M un R-módulo derecho, N un R-módulo izquierdo, D un grupo abeliano y $f : M \times N \to D$ una función, decimos que f es* ***balanceada*** *si para todo $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ y $a \in R$*

(i) $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$

(ii) $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$

(iii) $f(m \cdot a, n) = f(m, a \cdot n)$

Teorema 2.23. *Sea M un R-módulo derecho y N un R-módulo izquierdo, entonces $M \times N$ cumple la siguiente* ***propiedad universal****. Dado D un grupo abeliano y $f : M \times N \to D$ una función balanceada, existe un único homomorfismo de grupos abelianos $\phi : M \otimes_R N \to D$ tal que $f = \phi \circ i$, donde i es la inclusión.*

Definición 2.24. *Si M, N, D son R-módulos y $f : M \times N \to D$ una función , decimos que f es una operación **bilineal** entre módulos si para todo $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ y $a_1, a_2 \in R$*

1. $f(a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2, n) = a_1 \cdot f(m_1, n) + a_2 \cdot f(m_2, n)$

2. $f(m, a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2) = a_1 \cdot f(m, n_1) + a_2 \cdot f(m, n_2)$

Entonces por el teorema anterior, si $f : M \times N \to D$ es bilineal, existe $\phi : M \otimes N \to D$ un homomorfismo de R-módulos tal que $f = \phi \circ i$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & M \otimes N \arrow[d, "\phi"] \\ & D \end{tikzcd}$$

2.3. Álgebras

Un álgebra sobre un anillo R es un R-módulo con una segunda operación distributiva con los elementos del cuerpo. En lo que sigue R denota un anillo conmutativo con unidad y K un cuerpo.

Definición 2.25. *A es una R-**álgebra** si tiene estructura de R-módulo y está dotado de una operación bilineal $A \times A \to A$ tal que*

$$(ab) \cdot r = a(b \cdot r) = (a \cdot r)b \text{ para todo } a, b \in A \text{ y } r \in R.$$

Si $(ab)c = a(bc)$, para todo $a, b, c \in A$, decimos que A es una R-álgebra asociativa.

Ejemplo 2.26. *$M_n(R)$ y $R[x]$ son R-álgebras y R es una $\mathbb{Z}$-álgebra (ver ejemplo 2.3).*

Ejemplo 2.27. *Sea G un grupo, definimos*

$$R(G) := \left\{ \sum_{g \in G} r_g \cdot g \mid r_g \in R \right\}.$$

Es claro que $R(G)$ es un R-módulo, y dado

$$\left(\sum_{g \in G} r_g \cdot g\right)\left(\sum_{g \in G} r'_g \cdot g\right) := \sum_{g \in G} \left(\sum_{g_1 + g_2 = g} r_{g_1} r'_{g_2}\right) \cdot g$$

$R(G)$ es una R-álgebra.

Observación 2.28. *$R(G)$ se puede definir como el R-módulo*

$$\left\{ F : G \to R \,\middle|\, F \text{ es función} \right\}$$

con el producto convolución

$$(F * T)(g) = \sum_{h \in G} F(h)T(g-h).$$

Definición 2.29. *Si A, B son R-álgebras, decimos que $f : A \to B$ es un **homomorfismo de álgebras** si f es un homomorfismo de módulos que tambien es multiplicativo, es decir, $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in A$.*

Definición 2.30. *Para un conjunto $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ podemos definir un **álgebra libre** $A(X)$ como el conjunto que cumple la siguiente propiedad universal. Dado B una R-álgebra y $f : X \to B$ función , existe un único homomorfismo de álgebras $\phi : A(X) \to B$ tal que $f = \phi \circ i$, donde i es la inclusión. Es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & A(X) \arrow[d, "\phi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Note que $A(X)$ son todas las combinaciones lineales de palabras en X. Se define el álgebra con generadores X y relaciones $L \subseteq A(X)$ por $\langle X \mid L \rangle = A(X)/\langle L \rangle$ donde $\langle L \rangle$ es el ideal bilátero generado por L.

2.4. Representaciones de Álgebras

En esta sección presentamos el concepto de representación de un álgebra. Además, enunciamos algunos de los principales teoremas de la teoría de representaciones.

Definición 2.31. *Sea A una K-álgebra y V un K-espacio vectorial.*

$$\rho : A \longrightarrow End_K(V)$$

*es una **representación** de A si ρ es un homomorfismo de K-álgebras. Luego, escribimos que (V, ρ) es una representación de A, o simplemente V o ρ.*

Ejemplo 2.32. *Sea K un cuerpo .*

1. *A un K-espacio vectorial. Entonces $\rho : A \to End_K(A)$ definida por $\rho_a(b) := ab$ (producto usual en A) es una representación de A.*

2. *$M_n(K)$ una K-álgebra y $V = K^n$. Entonces $\rho : M_n(K) \to End_K(V)$ definida por $\rho_M(v) := Mv$ (producto usual de matrices) es una representación de $M_n(K)$.*

Definición 2.33. *Sea (V, ρ) una representación de A y W un subespacio de V, decimos que W es $A-$**estable** (o simplemente estable)(o invariante) sobre ρ si*

$$\rho_a(w) \in W \ \text{ para todo } \ a \in A \ \text{ y } \ w \in W$$

*Además, decimos que $(W, \rho\,|_W)$ es una **subpresentación** de V.*

Definición 2.34. *Sea (V, ρ) una representación, decimos que V (o bien ρ) es una representación*

1. ***Irreducible** si los únicos subespacios estables son V y $\{0\}$ (espacios triviales).*

2. ***Completamente reducible** si existen $V_1, \cdots, V_n$ representaciones irreducibles tal que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$.*

3. ***Indescomponible** si no existen V_1, V_2 subespacios estables (no triviales) tal que $V = V_1 \oplus V_2$.*

Note que cada representación irreducible es indescomponible.

Definición 2.35. *Sean (V, ρ) y (W, ψ) representaciones de A. Definimos el espacio*

$$Hom_A(V, W) := \left\{ T \in Hom_K(V, W) \;\middle|\; T \circ \rho_a = \psi_a \circ T \ \text{ para todo } \ a \in A \right\}.$$

Es decir, $Hom_A(V, W)$ es el conjunto de homomorfismos de espacios vectoriales tal que para todo $a \in A$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_a"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\rho_a"'] & W \end{tikzcd}$$

*Los elementos de $Hom_A(V, W)$ son llamados **entrelazamientos** entre ρ y ψ.*

Definición 2.36. *Dos representaciones* (V,ρ) *y* (W,ψ) *de una* K*-álgebra son* ***equivalentes*** *si existe un isomorfismo* $T \in Hom_A(V,W)$.

Lema 2.37 (**Schur's** [5])**.** *Sea* V_1, V_2 *representaciones del álgebra A sobre un cuerpo (No necesariamente álgebraicamente cerrado) y* $\phi \in Hom_A(V_1,V_2)\setminus\{0\}$ *se cumple lo siguiente*

1. *Si* V_1 *es irreducible entonces* ϕ *es inyectiva.*
2. *Si* V_2 *es irreducible entonces* ϕ *es sobreyectiva.*

Luego, si V_1, V_2 son irreducibles entonces ϕ es un isomorfismo. Además, si K es álgebraicamente cerrado se tiene que $\phi(x) = \alpha.Id(x)$ donde $\alpha \in K\setminus\{0\}$. Es decir, cualquier homomorfimo distinto del nulo entre representaciones irreducibles de un álgebra definida sobre un cuerpo es un isomorfismo.

Observación 2.38. *Sea A una* K*-álgebra.*

- *Si* $\rho : A \to End_K(V)$ *es una representación de A, se puede definir una estructura de A-módulo sobre* V *bajo la acción*

$$\begin{array}{rcl} \cdot\ :\ A\times V & \longrightarrow & V \\ (a,v) & \longmapsto & a\cdot v := \rho_a(v). \end{array}$$

En efecto, dado que ρ *es un homomorfismo de* K*-álgebras y* $\rho_a \in End_K(V)$.

- *Análogamente, si* V *es un* A*-módulo bajo la acción* $\cdot : A\times V \to V$, *se puede definir la representación* $\rho : A \to End_K(V)$ *dada por*

$$\begin{array}{rcl} \rho_a\ :\ V & \longrightarrow & V \\ v & \longmapsto & \rho_a(v) := a\cdot v. \end{array}$$

Es decir, tenemos la siguiente biyección entre conjuntos

$$\{\ V \mid V \text{ es un } A\text{-módulo}\ \} \longleftrightarrow \left\{\ V \;\middle|\; V \text{ es una representación de } A\ \right\}.$$

Donde, por definición tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} W \leq V &\longleftrightarrow W \text{ es estable} \\ V \text{ es simple} &\longleftrightarrow V \text{ es irreducible} \\ V \text{ es semisimple} &\longleftrightarrow V \text{ es completamente reducible} \end{aligned}$$

Lo cual nos permite trabajar las representaciones de álgebras desde el punto de vista de los módulos. Luego, en lo que sigue no se hace diferencia al hablar de un módulo simple o representación irreducible, al igual que con las demás definiciones equivalentes.

2.5. Sistemas de Coxeter

En esta sección se enuncia la propiedad combinatoria fundamental de los grupos de Coxeter, conocida como la Propiedad del Intercambio fuerte. La cual es de gran ayuda para el desarrollo de algunas demostraciones en el capítulo 4.

Definición 2.39. *Sea S un conjunto finito y $m : S \times S \to \mathbb{N}$ tal que $m(s,t) = m(t,s)$ para todo $s,t \in S$. Además, $m(s,t) = 1$ si y sólo si $s = t$. Se define*

$$W := \left\langle\, S \;\middle|\; (st)^{m(s,t)} = e \,\right\rangle.$$

*W es llamado **Grupo de Coxeter**, y el par (W,S) **Sistema de Coxeter**.*

Ejemplo 2.40. *Considere $S = \{s_1, \cdots, s_{n-1}\}$ y $m : S \times S \to \mathbb{N}$ tal que*

$$m(s_i, s_j) = \begin{cases} 1 & si \;\; i = j \\ 2 & si \;\; |i-j| > 1 \\ 3 & si \;\; |i-j| = 1\,. \end{cases}$$

Sabemos que el grupo simétrico tiene la presentación de Coxeter

$$\mathfrak{S}_n = \left\langle\, s_1, \cdots, s_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{cc} s_i^2 = 1 & si \;\; n \geq 1 \\ s_1 s_j = s_j s_i & si \;\; |i-j| > 1 \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & si \;\; |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

donde s_i es la transposición básica $(i, i+1)$. Es decir, $\mathfrak{S}_n$ es un grupo de Coxeter.

Se define $\ell(w)$ como el número mínimo de elementos en S para escribir a $w \in W$. Si $\ell(w) = k$, entonces $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ es la **expresión reducida** de w. Podemos notar que si $s \in S$

$$\ell(sw) = \begin{cases} \ell(w) + 1 & \text{si } \ell(sw) > \ell(w) \\ \ell(w) - 1 & \text{si } \ell(sw) < \ell(w) \end{cases}$$

En particular, sobre el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$

$$\ell(s_i w) = \begin{cases} \ell(w) + 1 & \text{si } iw < (i+1)w \\ \ell(w) - 1 & \text{si } iw > (i+1)w \end{cases} \tag{2.40.1}$$

Definición 2.41. *Sea (W, S) un sistema de Coxeter. Se define el conjunto de* ***reflexiones***

$$T = \left\{ wsw^{-1} \mid w \in W \ y \ s \in S \right\}.$$

Teorema 2.42 (**Propiedad de Intercambio Fuerte**)**.** *Sea $t \in T$ y $s_1 s_2 \cdots s_k$ una expresión reducida de $w \in W$. Si $\ell(tw) < \ell(w)$ entonces $tw = s_1 s_2 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_k$ para algún i.*

Note que $t = v s_i v^{-1}$ donde $v = s_1 s_2 \cdots s_{i-1}$.

Corolario 2.43. *Sea $w \in W$ y $s, t \in S$. Si $\ell(swt) = \ell(w)$ y $\ell(sw) = \ell(wt)$ entonces $w = swt$*

Demostración. Sea $w = s_1 s_2 \cdots s_k$ una expresión reducida. Luego, tenemos dos casos.

- si $\ell(sw) > \ell(w)$, entonces $\ell(sw) > \ell(swt)$. Luego, por la propiedad de intercambio $swt = ss_1 s_2 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_k$. Si definimos $w' = swt$, tenemos que $sw = w't$ ó $w = w'$. Si ocurre lo primero, tenemos que

  $$w = s(sw) = s(w't) = s_1 s_2 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_k t$$

  y por lo tanto $wt = s_1 s_2 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_k$. Es decir, $\ell(wt) < \ell(w)$ y así $\ell(st) < \ell(w)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto solo puede ocurrir que $w = w'$. es decir $w = swt$.

- Si $\ell(w) > \ell(sw)$, note que la hipótesis del corolario se satisface al usar sw en lugar de w, por lo tanto podemos aplicar el resultado del primer caso sobre sw, Luego, en conclusión $s(sw) = (sw)t$. Es decir $w = swt$.

$\square$

Capítulo 3

Álgebras Celulares

La estructura de este capítulo se basa en [17]. En la cual se presentan las definiciones y teoremas necesarios que nos permiten obtener una lista completa de módulos simples (ó irreducibles) de un álgebra celular, los cuales se definen a partir de las propiedades que satisface una de sus bases celulares.

3.1. Bases Celulares

Las bases celulares son presentadas por primera vez en [16] por Graham y Lehrer's. Estas tienen una lista de propiedades que presentamos en esta sección, y que son de gran ayuda para estudiar la teoría de representaciones de un álgebra dada.

Definición 3.1. *Sea R anillo conmutativo con unidad y A una R-álgebra asociativa unitaria que es libre como R-módulo. Suponga que $(\Lambda, \geq)$ es un Poset tal que cada $\lambda \in \Lambda$ indexa un conjunto finito $\mathscr{T}(\lambda)$, y*

$$\mathscr{C} = \left\{ c^{\lambda}_{\mathfrak{st}} \in A \;\middle|\; \lambda \in \Lambda \;\; y \;\; \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathscr{T}(\lambda) \right\}$$

es una base de A. Luego, decimos que el par $(\mathscr{C}, \Lambda)$ es una ***base celular*** *de A si*

(i) La función R-lineal

$$\begin{array}{cccc} *: & A & \longrightarrow & A \\ & c^{\lambda}_{\mathfrak{st}} & \longmapsto & c^{\lambda}_{\mathfrak{ts}} \end{array}$$

es un anti-automorfismo de álgebras, es decir, $*(ab) = *(b) * (a)$.

(ii) *Para cada* $\lambda \in \Lambda$, $\mathfrak{t} \in \mathscr{T}(\lambda)$ *y* $a \in A$ *existen* $r_{\mathfrak{b}} \in R$ *tal que para todo* $\mathfrak{s} \in \mathscr{T}(\lambda)$

$$c^{\lambda}_{\mathfrak{st}} a \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in \mathscr{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{b}} c^{\lambda}_{\mathfrak{sb}} \mod \check{A}^{\lambda}$$

donde $\check{A}^{\lambda}$ *es el* R*-submódulo de* A *con base* $\left\{ c^{\mu}_{\mathfrak{ub}} \;\middle|\; \mu \in \Lambda\,,\ \mu > \lambda \ \text{ y } \ \mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \mathscr{T}(\mu) \right\}$.

Si A *tiene base celular, decimos que* $(A, \Lambda, \mathscr{T}, \mathscr{C}, *)$ *es un* ***álgebra celular***.

Ejemplo 3.2. *Sea* $A = M_n(R)$ *y* $\Lambda = \{n\}$ *se define* $\mathscr{T}(n) = \{1, \cdots, n\}$ *y* $c^{n}_{ij} = E_{ij}$ *(Matriz elemental) donde* $\mathscr{C} = \left\{ E_{ij} \;\middle|\; 1 \le i, j \le n \right\}$ *es una base de* A*. Así,* $*(E_{ij}) = E_{ji}$*. Veamos que* $*(E_{ij}E_{kl}) = *(E_{kl}) * (E_{ij})$*. Recordemos que* $E_{ij} = (e_{rs})$ *donde* $e_{ij} = 1$ *y los demás* e_{ij}*'s son ceros. Luego,*

$$*\left(E_{ij}E_{kl}\right) = *\left(\delta^{j}_{k} E_{il}\right) = \delta^{j}_{k} * (E_{il}) = \delta^{j}_{k} E_{li} = E_{lk}E_{ji} = *(E_{kl}) * \left(E_{ij}\right).$$

Además, dado $n \in \Lambda$, $i, j \in \mathscr{T}(n)$ *y* $B = (b_{rs}) \in M_n(R)$ *tenemos que* $E_{ij}B = (c_{rs})$ *donde* $c_{i1} = b_{j1}, \cdots, c_{in} = b_{jn}$ *y los demás son ceros. Así,*

$$E_{ij}B \equiv \sum_{k \in \mathscr{T}(n)} b_{jk} E_{ik} \mod \check{A}^{n}$$

donde $\check{A}^{n} = \varnothing$.

A continuación, en todo momento, suponemos que A es una R-álgebra asociativa con configuración celular $(\Lambda, \mathscr{T}, \mathscr{C}, *)$.

Definición 3.3. *Sea* $\lambda \in \Lambda$*, definimos* A^{λ} *como el* R*-submódulo de* A *con base*

$$\left\{ c^{\mu}_{\mathfrak{ub}} \;\middle|\; \mu \in \Lambda\,,\ \mu \ge \lambda \ \text{ y } \ \mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \mathscr{T}(\mu) \right\}.$$

Es claro que $\check{A}^{\lambda} \subseteq A^{\lambda}$ y por lo tanto $A^{\lambda} / \check{A}^{\lambda}$ tiene como base $\left\{ c^{\lambda}_{\mathfrak{st}} + \check{A}^{\lambda} \mid \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathscr{T}(\lambda) \right\}$.

Lema 3.4. *Sea* $\lambda \in \Lambda$.

(i) *Si* $\mathfrak{s} \in \mathscr{T}(\lambda)$ *y* $a \in A$ *entonces para todo* $\mathfrak{t} \in \mathscr{T}(\lambda)$

$$*(a) c^{\lambda}_{\mathfrak{st}} \equiv \sum_{\mathfrak{u} \in \mathscr{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{u}} c^{\lambda}_{\mathfrak{ut}} \mod \check{A}^{\lambda}$$

tal que $r_{\mathfrak{u}} \in R$ *para cada* $\mathfrak{u} \in \mathscr{T}(\lambda)$.

(ii) Los R-módulos A^λ y $\check{A}^\lambda$ son ideales bilaterales de A.

(iii) Si $\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$ entonces existe $r_{\mathfrak{st}}\in R$ tal que para todo $\mathfrak{u},\mathfrak{b}\in\mathcal{T}(\lambda)$

$$c^\lambda_{\mathfrak{us}}c^\lambda_{\mathfrak{tb}}\equiv r_{\mathfrak{st}}c^\lambda_{\mathfrak{ub}} \mod \check{A}^\lambda.$$

Demostración. Dado $\lambda\in\Lambda$.

(i) Si $\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\lambda)$ y $a\in A$, entonces por la definición (3.1)(ii) se tiene que para todo $\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$

$$c^\lambda_{\mathfrak{ts}}a\equiv\sum_{\mathfrak{u}\in\mathcal{T}(\lambda)}r_{\mathfrak{u}}c^\lambda_{\mathfrak{tu}} \mod \check{A}^\lambda.$$

Luego, aplicando el anti-automorfismo de la definición (3.1)(i) se obtiene:

$$*(a)c^\lambda_{\mathfrak{st}}\equiv\sum_{\mathfrak{u}\in\mathcal{T}(\lambda)}r_{\mathfrak{u}}c^\lambda_{\mathfrak{ut}} \mod \check{A}^\lambda.$$

(ii) Veamos que A^λ es un ideal bilátero de A. Dado $a\in A$, basta probar que $ac^\mu_{\mathfrak{st}}\in A^\lambda$ y $c^\mu_{\mathfrak{ts}}a\in A^\lambda$ para todo $\mu\geq\lambda$ y $\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$. Por (3.1)$(ii)$

$$c^\mu_{\mathfrak{ts}}a\equiv\sum_{\mathfrak{u}\in\mathcal{T}(\mu)}r_{\mathfrak{u}}c^\mu_{\mathfrak{tu}} \mod \check{A}^\mu.$$

Donde $\check{A}^\mu\subseteq\check{A}^\lambda\subseteq A^\lambda$, es decir, $c^\mu_{\mathfrak{ts}}a\in A^\lambda$. Análogamente por (3.4)$(i)$

$$ac^\mu_{\mathfrak{st}}\equiv\sum_{\mathfrak{u}\in\mathcal{T}(\mu)}r_{\mathfrak{u}}c^\mu_{\mathfrak{ut}} \mod \check{A}^\mu.$$

Entonces $ac^\mu_{\mathfrak{st}}\in A^\lambda$. Por otro lado, como $\check{A}^\lambda=\sum_{\mu>\lambda}A^\mu$, entonces se tiene que $\check{A}^\lambda$ es un ideal bilátero.

(iii) Dado $\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(\lambda)$ fijamos $c^\lambda_{\mathfrak{tb}}\in A$ para algún $\mathfrak{b}\in\mathcal{T}(\lambda)$. Por (3.1)$(ii)$ para todo $\mathfrak{u}\in\mathcal{T}(\lambda)$ se tiene

$$c^\lambda_{\mathfrak{us}}c^\lambda_{\mathfrak{tb}}\equiv\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{T}(\lambda)}r_{\mathfrak{p}}c^\lambda_{\mathfrak{up}} \mod \check{A}^\lambda.$$

Ahora si fijamos $c^\lambda_{\mathfrak{su}}\in A$ para algún $\mathfrak{u}\in\mathcal{T}(\lambda)$. Por (3.4)$(i)$ para todo $\mathfrak{b}\in\mathcal{T}(\lambda)$ tenemos

$$c^\lambda_{\mathfrak{us}}c^\lambda_{\mathfrak{tb}}\equiv\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{T}(\lambda)}r'_{\mathfrak{p}}c^\lambda_{\mathfrak{pb}} \mod \check{A}^\lambda.$$

Entonces

$$0 \equiv \sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{p}} c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{p}} - \sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{T}(\lambda)} r'_{\mathfrak{p}} c^{\lambda}_{\mathfrak{p}\mathfrak{b}} \mod \check{A}^{\lambda}.$$

Luego

$$0 \equiv \left(\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{T}(\lambda)}^{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{b}} r_{\mathfrak{p}} c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{p}} \right) - \left(\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{T}(\lambda)}^{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{u}} r'_{\mathfrak{p}} c^{\lambda}_{\mathfrak{p}\mathfrak{b}} \right) + \left(r_{\mathfrak{b}} - r'_{\mathfrak{u}}\right) c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \mod \check{A}^{\lambda}.$$

Como $\mathscr{C}$ es base, se tiene que $r_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{b}$, $r'_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{u}$, y $(r_{\mathfrak{b}} - r'_{\mathfrak{u}}) = 0$. Es decir, $r_{\mathfrak{b}} = r'_{\mathfrak{u}}$. Luego si denotamos $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} := r_{\mathfrak{b}}$ tenemos que

$$c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}} c^{\lambda}_{\mathfrak{t}\mathfrak{b}} \equiv r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \mod \check{A}^{\lambda}.$$

□

Si fijamos $\lambda \in \Lambda$ y $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$ definimos $C^{\lambda}_{\mathfrak{s}}$ como el R-submódulo de $A^{\lambda}/\check{A}^{\lambda}$ con base $\{ c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} + \check{A}^{\lambda} \mid \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda) \}$, el cual es un A-módulo derecho por (3.1)(ii). Además, la acción de A sobre $C^{\lambda}_{\mathfrak{s}}$ no depende de $\mathfrak{s}$, es decir $C^{\lambda}_{\mathfrak{s}} \cong C^{\lambda}_{\mathfrak{t}}$ para todo $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$. Lo cual motiva las siguientes dos definiciones.

Definición 3.5. *Sea $\lambda \in \Lambda$.*

1. *Definimos el **módulo celular** C^{λ} como el A-módulo derecho con base $\{ c^{\lambda}_{\mathfrak{t}} \mid \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda) \}$ donde para cada $a \in A$*

$$c^{\lambda}_{\mathfrak{t}} a = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{b}} c^{\lambda}_{\mathfrak{b}}$$

   donde $r_{\mathfrak{b}} \in R$ esta determinado por (3.1)(ii).

2. *Análogamente, definimos el **módulo celular** $C^{*\lambda}$ como el A-módulo izquierdo que es libre como R-módulo con base $\{c^{\lambda}_{\mathfrak{t}} \mid \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)\}$ donde para cada $a \in A$*

$$*(a) c^{\lambda}_{\mathfrak{t}} = \sum_{\mathfrak{b}\in\mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{b}} c^{\lambda}_{\mathfrak{b}}$$

   donde $r_{\mathfrak{b}} \in R$ esta determinado por (3.4)(i).

Observación 3.6. *Note que $C^{\lambda} \cong C^{\lambda}_{\mathfrak{s}}$ para todo $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$ con la aplicación canónica $c^{\lambda}_{\mathfrak{t}} \mapsto c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} + \check{A}^{\lambda}$. Además, $C^{*\lambda} \cong Hom_R\left(C^{\lambda}, R\right)$ con la aplicación canónica $c^{\lambda}_{\mathfrak{s}} \mapsto f_{\mathfrak{s}}$, donde $f_{\mathfrak{s}}\left(c^{\lambda}_{\mathfrak{t}}\right) = \delta^{\mathfrak{t}}_{\mathfrak{s}}$ es el delta de Kronecker. Por otro lado, $A^{\lambda}/\check{A}^{\lambda} \cong C^{*\lambda} \otimes_R C^{\lambda}$ como (A, A)-bimódulos con la aplicación canónica $c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} + \check{A}^{\lambda} \mapsto c^{\lambda}_{\mathfrak{s}} \otimes_R c^{\lambda}_{\mathfrak{t}}$. Además, como A-módulos* *derechos*

$$A^{\lambda} \Big/ \check{A}^{\lambda} \cong C^{*\lambda} \otimes_R C^{\lambda} \cong \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)} C_{\mathfrak{s}}^{\lambda} \tag{3.6.1}$$

con la aplicación canónica $c_{\mathfrak{s}}^{\lambda} \otimes_R c_{\mathfrak{t}}^{\lambda} \mapsto c_{\mathfrak{s}}^{\lambda} \in C_{\mathfrak{t}}^{\lambda}$. *Es decir,* $A^{\lambda} / \check{A}^{\lambda}$ *es isomorfo a la suma directa de* $|\mathcal{T}(\lambda)|$ *copias de* C^{λ}.

Lema 3.7. *Si* $a \in C^{\lambda}$ *e* $y \in A^{\mu}$ *entonces* $ay = 0$ *a no ser que* $\lambda \geq \mu$.

Demostración. Dado $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$, si identificamos C^{λ} como $C_{\mathfrak{s}}^{\lambda}$, tenemos que $ay = 0$ para todo $a \in C_{\mathfrak{s}}^{\lambda}$ si y sólo si $c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda} y \in \check{A}^{\lambda}$ para todo $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ Por (3.4)(ii) tenemos que $c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda} y \in A^{\lambda} \cap A^{\mu}$, sin embargo, si $\lambda \ngeq \mu$, $A^{\lambda} \cap A^{\mu} \subseteq \check{A}^{\lambda}$. Por lo tanto $ay = 0$.

□

Definición 3.8. *Se define la operación bilineal*

$$\begin{array}{rcl} \langle\ ,\ \rangle : C^{\lambda} \times C^{\lambda} & \longrightarrow & R \\ \left(c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}\ ,\ c_{\mathfrak{t}}^{\lambda}\right) & \longmapsto & r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \end{array}$$

donde $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in R$ *esta definido por el lema (3.4)*(iii). *Es decir, para todo* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)$ *se tiene*

$$\left\langle c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}, c_{\mathfrak{t}}^{\lambda} \right\rangle c_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}^{\lambda} \equiv c_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}}^{\lambda} c_{\mathfrak{t}\mathfrak{v}}^{\lambda} \mod \check{A}^{\lambda}.$$

Proposición 3.9. *Sea* $\lambda \in \Lambda$ *y* $x, y \in C^{\lambda}$. *Entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(ii) $\langle xa, y \rangle = \langle x, y * (a) \rangle$ *para todo* $a \in A$

(iii) $x c_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}^{\lambda} = \langle x, c_{\mathfrak{u}}^{\lambda} \rangle c_{\mathfrak{v}}^{\lambda}$ *para todo* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(\lambda)$

Demostración. dado que $\langle\ ,\ \rangle$ es bilineal, es suficiente considerar $x = c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}$, $y = c_{\mathfrak{t}}^{\lambda}$ para algún $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$.

(i) Por la definición (3.8)

$$\begin{array}{rcl} \left\langle c_{\mathfrak{s}}^{\lambda}, c_{\mathfrak{t}}^{\lambda} \right\rangle c_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}^{\lambda} & \equiv & c_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}}^{\lambda} c_{\mathfrak{t}\mathfrak{v}}^{\lambda} \mod \check{A}^{\lambda} \\ & = & *(c_{\mathfrak{v}\mathfrak{t}}^{\lambda} c_{\mathfrak{s}\mathfrak{u}}^{\lambda}) \mod \check{A}^{\lambda} \\ & \equiv & * \left(\left\langle c_{\mathfrak{t}}^{\lambda}, c_{\mathfrak{s}}^{\lambda} \right\rangle c_{\mathfrak{v}\mathfrak{u}}^{\lambda} \right) \\ & = & \left\langle c_{\mathfrak{t}}^{\lambda}, c_{\mathfrak{s}}^{\lambda} \right\rangle c_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}^{\lambda}. \end{array}$$

Por lo tanto $\langle x\ ,\ y\rangle = \langle y\ ,\ x\rangle$.

(ii) Dado $a \in A$

$$\begin{aligned}\left\langle c^{\lambda}_{\mathfrak{s}} a, c^{\lambda}_{\mathfrak{t}}\right\rangle c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} &\equiv (c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}} a) c^{\lambda}_{\mathfrak{t}\mathfrak{b}} \mod \check{A}^{\lambda} \\ &= c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}} (a c^{\lambda}_{\mathfrak{t}\mathfrak{b}}) \mod \check{A}^{\lambda} \\ &\equiv \left\langle c^{\lambda}_{\mathfrak{s}}, c^{\lambda}_{\mathfrak{t}} * (a)\right\rangle c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle xa\ ,\ y\rangle = \langle x\ ,\ y * (a)\rangle$.

(iii) Dado $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \mathscr{T}(\lambda)$, directamente la definición

$$c^{\lambda}_{\mathfrak{s}} c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} = \left\langle c^{\lambda}_{\mathfrak{s}}, c^{\lambda}_{\mathfrak{u}}\right\rangle c^{\lambda}_{\mathfrak{b}}.$$

Por lo tanto $x c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} = \langle x\ ,\ c^{\lambda}_{\mathfrak{u}}\rangle c^{\lambda}_{\mathfrak{b}}$.

□

Definición 3.10. *Definimos*

$$rad\left(C^{\lambda}\right) = \left\{ x \in C^{\lambda} \;\middle|\; \langle x, y\rangle = 0 \;\; para\ todo \;\; y \in C^{\lambda} \right\}.$$

Por la proposición $(3.9)(ii)$ el $rad\left(C^{\lambda}\right)$ es un A-submódulo de C^{λ}. Luego,

$$D^{\lambda} = C^{\lambda} \Big/ rad\left(C^{\lambda}\right)$$

es un A-módulo derecho.

Proposición 3.11. *Si R es un cuerpo y $\mu \in \Lambda$ tal que $D^{\mu} \neq 0$, entonces D^{μ} es irreducible.*

Demostración. Como $D^{\mu} \neq 0$ existe $x \in C^{\mu}$ tal que $x \neq 0$ y $x \notin rad\,(C^{\mu})$. Luego, $\langle x, y\rangle \neq 0$ para algún $y \in C^{\mu}$. Dado que R es un cuerpo, podemos asumir $\langle x, y\rangle = 1$. Ahora $y = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathscr{T}(\mu)} r_{\mathfrak{s}} c^{\mu}_{\mathfrak{s}}$ para algunos $r_{\mathfrak{s}} \in R$. Luego, para cada $\mathfrak{t} \in \mathscr{T}(\mu)$ se define $y_{\mathfrak{t}} = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathscr{T}(\mu)} r_{\mathfrak{s}} c^{\mu}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in A$. Entonces por la proposición $(3.9)(iii)$

$$x y_{\mathfrak{t}} = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathscr{T}(\mu)} r_{\mathfrak{s}} \left(x c^{\mu}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}\right) = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathscr{T}(\mu)} r_{\mathfrak{s}} \left\langle x, c^{\mu}_{\mathfrak{s}}\right\rangle c^{\mu}_{\mathfrak{t}} = \langle x, y\rangle c^{\mu}_{\mathfrak{t}} = c^{\mu}_{\mathfrak{t}}.$$

Por lo tanto, x genera C^{μ} como A-módulo derecho, es decir, D^{μ} es irreducible, pues es unidimensional.

□

Observación 3.12. *Recordemos que el radical de de Jacobson en un módulo M es la intersección de los submódulos maximales de M (definición 2.18). Luego, por la proposición anterior, el $rad(C^\mu)$ es el único A-módulo maximal de C^μ. Así, $J(C^\mu) = rad(C^\mu)$.*

Proposición 3.13. *Sea R un cuerpo, y $\lambda, \mu \in \Lambda$ tal que $D^\mu \neq 0$. Si M es un A-submódulo propio de C^λ y $\theta : C^\mu \to C^\lambda / M$ un homomorfismo de A-módulos, se cumple lo siguiente*

(i) Si θ no es la función nula entonces $\lambda \geq \mu$.

(ii) Si $\lambda = \mu$ entonces existe $r_\theta \in R$ tal que $\theta(z) = M + r_\theta z$ para todo $z \in C^\mu$. Además, $Hom_A\left(C^\mu, C^\mu / M\right) \cong R$.

Demostración. Sea $x, y \in C^\mu$ con $\langle x, y\rangle = 1$ y sea $y_\mathfrak{t} = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\mu)} r_\mathfrak{s} c^\mu_{\mathfrak{st}}$ para cada $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\mu)$ donde $y = \sum_{\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\mu)} r_\mathfrak{s} c^\mu_\mathfrak{s}$. Luego, $xy_\mathfrak{t} = c^\mu_\mathfrak{t}$ como en la demostración anterior. Además, tenemos que $\theta(x) = M + a_\theta$ para algún $a_\theta \in C^\lambda$.

(i) Para todo $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\mu)$ se tiene

$$\theta\left(c^\mu_\mathfrak{t}\right) = \theta(xy_\mathfrak{t}) = \theta(x)y_\mathfrak{t} = M + a_\theta y_\mathfrak{t}.$$

Luego por el lema (3.7), $a_\theta y_\mathfrak{t} = 0$ a no ser que $\lambda \geq \mu$. Por lo tanto, si θ no es la función nula, implica que $\lambda \geq \mu$.

(ii) Si $\lambda = \mu$, entonces $a_\theta \in C^\mu$. Luego, usando la proposición (3.9)(iii)

$$\theta\left(c^\mu_\mathfrak{t}\right) = M + a_\theta y_\mathfrak{t} = M + \sum_{\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\mu)} r_\mathfrak{s} a_\theta c^\mu_{\mathfrak{st}} = M + \sum_{\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\mu)} r_\mathfrak{s}\left\langle a_\theta, c^\mu_\mathfrak{s}\right\rangle c^\mu_\mathfrak{t} = M + \left\langle a_\theta, y\right\rangle c^\mu_\mathfrak{t}.$$

Por lo tanto, $r_\theta = \left\langle a_\theta, y\right\rangle$. Así, la aplicación

$$\begin{aligned} \Pi : C^\mu &\longrightarrow C^\mu / M \\ c^\nu_\mathfrak{t} &\longmapsto M + r_\theta c^\nu_\mathfrak{t} \end{aligned}$$

prueba que $Hom_A\left(C^\mu, C^\mu / M\right) \cong R$.

□

Corolario 3.14. *Sea R un cuerpo, y $\lambda, \mu \in \Lambda$. Si $D^\mu \neq 0$ y $D^\mu \cong D^\lambda$, entonces $\lambda = \mu$.*

Demostración. Sea $\varphi : D^{\mu} \to D^{\lambda}$ un isomorfismo de A-módulos. Si $i : C^{\mu} \to D^{\mu}$ es la inclusión, entonces $\theta = \varphi \circ i$ es un homomorfismo de A-módulos no nulo. luego, por la proposición anterior $\lambda \geq \mu$. Análogamente, $\lambda \leq \mu$. Por lo tanto $\lambda = \mu$.

□

3.2. Módulos Simples de un Álgebra Celular

En esta sección mostramos que cada módulo irreducible es isomorfo a D^{μ}, para algún $\mu \in \Lambda$. En todo momento suponemos que el Poset Λ es finito.

Lema 3.15. *Si λ es un elemento minimal de Λ, entonces $C^{\lambda} = D^{\lambda}$.*

Demostración. Veamos que $rad\left(C^{\lambda}\right) = 0$. Si $x \in rad\left(C^{\lambda}\right)$, sabemos que $x = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}} c^{\lambda}_{\mathfrak{t}}$ para algunos $r_{\mathfrak{t}} \in R$. Si fijamos $\mathfrak{s} \in \mathcal{T}(\lambda)$, se define $\overline{x} = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}} c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ en A^{λ}. Además, $\left\langle x, y \right\rangle = 0$ para todo $y \in C^{\lambda}$. Por lo tanto, usando la definición (3.8). Si $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}(\lambda)$

$$\overline{x} c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}} c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} c^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \equiv \sum_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{t}} \left\langle c^{\lambda}_{\mathfrak{t}}, c^{\lambda}_{\mathfrak{u}} \right\rangle c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}} \mod \check{A}^{\lambda} = \left\langle x, c^{\lambda}_{\mathfrak{u}} \right\rangle c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}} \mod \check{A}^{\lambda} = 0 \mod \check{A}^{\lambda}.$$

Es decir, $\overline{x} a \in \check{A}^{\lambda}$ para todo $a \in A^{\lambda}$. Además, si $a \in A^{\mu}$ para algún $\mu \neq \lambda$, por el lema (3.4)(ii) tenemos que $\overline{x} a \in A^{\lambda} \cap A^{\mu} \subseteq \check{A}^{\lambda}$ ya que λ es minimal. Por lo tanto, $\overline{x} a \in \check{A}^{\lambda}$ para todo $a \in A = \sum_{\mu \in \Lambda} A^{\mu}$. En particular $\overline{x} \cdot 1 = \overline{x} \in \check{A}^{\lambda}$, donde $\overline{x} \in \check{A}^{\lambda}$ si y sólo si $x = 0$.

□

Definición 3.16. *Sea $\Gamma \subseteq \Lambda$ con la siguiente propiedad. Si $\mu \in \Gamma$ tal que $\lambda > \mu$ entonces $\lambda \in \Gamma$. Se define $A(\Gamma)$ como el R-submódulo de A con base*

$$\left\{ c^{\mu}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \;\middle|\; \mu \in \Gamma \text{ y } \mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}(\mu) \right\}.$$

Note que $A(\Gamma) = \sum_{\mu \in \Gamma} A^{\mu}$. Luego, $A(\Gamma)$ es un ideal bilátero de A (Lema 3.4 (ii)). Además, si $\varnothing = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_k = \Lambda$ es una cadena maximal de ideales, existe un orden total $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ en Λ tal que $\Gamma_i = \{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_i\}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Luego,

$$0 = A(\Gamma_0) < A(\Gamma_1) < \cdots < A(\Gamma_k) = A$$

define una filtración de A con factores de composición $A(\Gamma_i) \big/ A(\Gamma_{i-1})$ con base

$$\left\{ c^{\mu_i}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} + A(\Gamma_{i-1}) \;\middle|\; \mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}(\mu_i) \right\}.$$

Observación 3.17. *$A(\Gamma_i)\big/A(\Gamma_{i-1}) \cong A^{\mu_i}\big/\check{A}^{\mu_i}$ como (A,A)-bimódulos con la aplicación canónica*

$$c^{\mu_i}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} + A(\Gamma_{i-1}) \longmapsto c^{\mu_i}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} + \check{A}^{\mu_i}.$$

Entonces, como A-módulos derechos, usando la ecuación 3.6.1

$$A(\Gamma_i)\big/A(\Gamma_{i-1}) \cong A^{\mu_i}\big/\check{A}^{\mu_i} \cong C^{*\mu_i} \otimes_R C^{\mu_i} \cong \bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathcal{T}(\mu_i)} C^{\mu_i}_{\mathfrak{s}}.$$

Es decir, un factor de composición $A(\Gamma_i)\big/A(\Gamma_{i-1})$ irreducible de A es isomorfo a los módulos celulares $C^{\mu_i}_{\mathfrak{s}}$.

Teorema 3.18 (Graham-Lehrer). *Sea R un cuerpo y Λ finito. Entonces*

$$\left\{ D^{\mu} \;\middle|\; \mu \in \Lambda \;\; y \;\; D^{\mu} \neq 0 \right\}$$

es un conjunto completo de A-módulos irreducibles no isomorfos entre sí.

Demostración. Si $D^{\mu} \neq 0$ entonces D^{μ} es irreducible (Proposición 3.11). Además, si $\lambda \in \Lambda$ y $D^{\mu} \cong D^{\lambda}$ entonces $\mu = \lambda$ (Corolario 3.14). Por lo tanto, solo falta probar que cada A-módulo irreducible es isomorfo a D^{μ} para algún $\mu \in \Lambda$. Para esto basta probar que todo factor de composición irreducible de un módulo celular C^{λ} es isomorfo a D^{μ} para algún $\mu \in \Lambda_0$. Procedemos por inducción sobre λ.

- Si λ es un elemento minimal de Λ, entonces $C^{\lambda} \cong D^{\lambda}$ (Lema 3.15).
- Si que λ no es minimal de Λ. Sea D un factor de composición irreducible de C^{λ}. Note que $C^{\lambda} \cong D^{\lambda} \oplus rad\left(C^{\lambda}\right)$. Luego, $D = D^{\lambda}$ ó D es un factor de composición de $rad\left(C^{\lambda}\right)$ (Proposición 2.17). Sea $\Gamma = \{\nu \in \Lambda \mid \lambda \not> \nu\}$, el cual cumple la definición 3.16. Luego, si $a \in A^{\lambda}$, entonces $xa = 0$ para todo $x \in rad\left(C^{\lambda}\right)$ (Proposición 3.9 (iii)). Por otro lado, si $\nu \in \Gamma$ y $\nu \neq \lambda$ entonces $C^{\lambda}A^{\nu} = 0$ (Lema 3.7). Por lo tanto, $rad\left(C^{\lambda}\right)A(\Gamma) = 0$. Luego, cualquier factor de composición de $rad\left(C^{\lambda}\right)$ es un factor de composición de $A/A(\Gamma)$, sin embargo al extender $\varnothing \subset \Gamma \subset \Lambda$ a una cadena maximal, obtenemos que $A/A(\Gamma)$ tiene una filtración con factor de composición isomorfo a los módulos celulares C^{ν} con $\nu \notin \Gamma$, es decir $\lambda > \nu$. Por inducción, si $\lambda > \nu$ entonces todo factor de composición de C^{ν} es isomorfo a D^{μ} para algún $\mu \in \Lambda_0$. Entonces, $D \cong D^{\mu}$ para algún $\mu \in \Lambda_0$.

□

Capítulo 4

Base Celular del Álgebra de Iwahori-Hecke

En este capítulo se construye una base celular para el álgebra de Iwahori-Hecke sobre el grupo simétrico. Dicha base es definida por Murphy en [19], varios años antes de ser introducida la definición de álgebra celular. Sin embargo, la base de Murphy es celular. Sin riesgo de confusión, denotamos por $\mathbb{N}$ a los naturales sin el cero.

4.1. Álgebra de Iwahori-Hecke

Podemos definir el álgebra de Iwahori-Hecke sobre un grupo de Coxeter arbitrario. En particular, la estudiamos sobre el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$. El cual, es un sistema de Coxeter con las trasposiciones básicas.

Definición 4.1. *Sea R un anillo conmutativo con unidad, $q \in R$ invertible y (W, S) un sistema Coxeter. Se define el **álgebra de Iwahori-Hecke** $\mathscr{H}_{R,q}(W)$, como el R-módulo con base $\{ T_w \mid w \in W \}$ con una segunda operación dada por*

$$T_w T_s = \begin{cases} T_{ws} & \text{si } \ell(ws) > \ell(w) \\ qT_{ws} + (q-1)T_w & \text{si } \ell(ws) < \ell(w) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

para todo $s \in S$ y $w \in W$.

Por definición, $T_w = T_{s_{i_1}} T_{s_{i_2}} \cdots T_{s_{i_k}}$ si y sólo si $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ es la expresión reducida de w. Dado el grupo de Coxeter $W = \mathfrak{S}_n$, denotamos $T_i = T_{s_i}$ y $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{R,q}(\mathfrak{S}_n)$. Luego, por la operación definida anteriormente y las relaciones de $\mathfrak{S}_n$ se obtiene que

$$\mathcal{H} = \left\langle T_1, T_2, \cdots, T_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rl} T_iT_j = T_jT_i & \text{si} \quad |i-j|>1 \\ T_iT_jT_i = T_jT_iT_j & \text{si} \quad |i-j|=1 \\ T_i^2 = q+(q-1)T_i & \text{si} \quad i \in \{1,\cdots,n-1\} \end{array} \right\rangle$$

Además, T_i tiene inversa $T_i^{-1} = q^{-1}(T_i - q + 1)$. Por lo tanto, si $s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$ es la expresión reducida de w, entonces $T_w^{-1} = T_{i_1}^{-1}T_{i_2}^{-1}\cdots T_{i_k}^{-1}$.

Observación 4.2. *Note que* $T_wT_v = T_{wv}$ *si* $\ell(w)+\ell(v) = \ell(wv)$. *Además,*

$$\begin{aligned} T_i^2 &= q+(q-1)T_i \\ q^{-1}T_i^2 &= 1+(1-q^{-1})T_i \\ (q^{-1/2}T_i)^2 &= 1+(q^{1/2}-q^{-1/2})(q^{-1/2}T_i) \\ \hat{T}_i^{\,2} &= 1+(u-u^{-1})\hat{T}_i \end{aligned}$$

considerando $u = q^{1/2}$ *y* $\hat{T}_i = q^{-1/2}T_i$. *Así,* $\mathcal{H}$ *es generado por* $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \cdots, \hat{T}_{n-1}$, *sujeto a las siguientes relaciones:*

$$\hat{T}_i\hat{T}_j = \hat{T}_j\hat{T}_i \qquad \text{si} \quad |i-j|>1 \tag{4.2.1}$$

$$\hat{T}_i\hat{T}_j\hat{T}_i = \hat{T}_j\hat{T}_i\hat{T}_j \qquad \text{si} \quad |i-j|=1 \tag{4.2.2}$$

$$\hat{T}_i^{\,2} = 1+(u-u^{-1})\hat{T}_i \qquad \text{si} \quad i \in \{1,\cdots,n-1\}. \tag{4.2.3}$$

4.2. Young Tableaux

Los Young Tableaux (ó tablas de Young) son objetos combinatorios, indispensables en la teoría de representación del grupo simétrico. En este caso, serán necesarios para la construcción de la base de Murphy.

Definición 4.3. *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *La secuencia* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ *tal que* $\mu_i \in \mathbb{N}$ *es llamada* ***composición*** *de n si* $|\mu| := \sum_{i=1}^{k} \mu_i = n$, *y* ***partición*** *de n si es una composición de n tal que* $\mu_i \geq \mu_{i+1}$. *Denotadas por* $\mu \models n$ *y* $\mu \vdash n$ *respectivamente.*

Ejemplo 4.4. *Para $n=5$, algunos $\mu \models n$ y $\lambda \vdash n$ son los siguientes*

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda=(3,1,1) & , & \lambda=(3,2) & , & \lambda=(2,2,1) & , & \lambda=(1,1,1,1,1) \\ \mu=(4,1) & , & \mu=(1,3,1) & , & \mu=(1,1,2,1) & , & \mu=(2,1,1,1) \end{array}$$

Definición 4.5. *Sea $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \models n$. El **diagrama de Young** de μ es el conjunto*

$$[\mu]=\left\{ (i,j) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\middle|\; 1 \le j \le \mu_i \quad y \quad 1 \le i \le k \right\}.$$

Es útil representar dicho conjunto como un arreglo de n cajas con k-filas justificadas a la izquierda. Con μ_i columnas en la i-ésima fila. Por ejemplo, si $\lambda=(3,1,1)$ y $\mu=(1,2,2)$ entonces

$$[\lambda]=\begin{array}{|c|c|c|}\hline &&\\ \hline &\multicolumn{2}{c}{}\\ \cline{1-1} &\multicolumn{2}{c}{}\\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \text{y} \qquad [\mu]=\begin{array}{|c|c|}\hline &\multicolumn{1}{c}{}\\ \hline &\\ \hline &\\ \hline\end{array}$$

Asignando las posiciones (i,j) a cada caja del diagrama de Young.

Definición 4.6. *Sea $\mu \models n$. Un μ-**tableau** es una biyección $\mathfrak{t}:[\mu]\to\{1,\cdots,n\}$. Decimos que $\mathfrak{t}$ tiene **forma** μ y lo denotamos $Shap(\mathfrak{t})=\mu$.*

Un μ-tableau se puede representar como un diagrama de Young etiquetado por los números $1,2,\cdots,n$. Por ejemplo, si $\mu=(2,3,1)$ entonces

$$\mathfrak{t}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&5&\multicolumn{1}{c}{}\\ \hline 1&2&4\\ \hline 6&\multicolumn{2}{c}{}\\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{s}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 6&2&\multicolumn{1}{c}{}\\ \hline 5&1&3\\ \hline 4&\multicolumn{2}{c}{}\\ \cline{1-1}\end{array}$$

son dos μ-tableaux. En consecuencia, clasificamos los μ-tableaux en dos tipos. A partir de las entradas de cada caja por fila y columna.

Definición 4.7. *Sea $\mathfrak{t}$ un μ-tableau. Decimos que $\mathfrak{t}$ es*

- ***Estándar por filas*** *si las entradas aumentan de izquierda a derecha en cada fila.*
- ***Estándar*** *si μ es una partición y las entradas de $\mathfrak{t}$ aumentan de izquierda a derecha en cada fila y de arriba hacia abajo en cada columna.*

Ejemplo 4.8. *si*

1. *$\lambda=(3,1)$ entonces $\mathfrak{t}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\ \hline 3&\multicolumn{2}{c}{}\\ \cline{1-1}\end{array}$ es un λ-tableau estándar.*
2. *$\mu=(2,3)$ entonces $\mathfrak{t}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&\multicolumn{1}{c}{}\\ \hline 3&4&5\\ \hline\end{array}$ es un μ-tableau estándar por filas*

Sea λ una partición. Se define el conjunto

$$\operatorname{Std}(\lambda) = \{\, \mathfrak{t} \mid \mathfrak{t} \text{ es un } \lambda\text{-tableau estándar } \}.$$

Dada cualquier composición μ de n, denotamos por $\mathfrak{t}^{\mu}$ al μ-tableau estándar por filas en la que los números $1, 2, \cdots, n$ son introducidos de izquierda a derecha a lo largo de cada fila de $[\mu]$. Por ejemplo, si $\mu = (2,4)$

$$\mathfrak{t}^{\mu} = \begin{array}{|c|c|cc}\cline{1-2} 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \hline 3 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{5} & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline\end{array}$$

Sea μ una composición de n. Se define la acción por derecha de $\mathfrak{S}_n$ sobre el conjunto de los μ-tableau permutando las entradas. Por ejemplo, si $\mathfrak{t} = \begin{array}{|c|c|c}\cline{1-2} 1 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline\end{array}$ y $(2,4,5,3) \in \mathfrak{S}_5$

$$\mathfrak{t}(2,4,5,3) = \begin{array}{|c|c|c}\cline{1-2} 1 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 4 & 5 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline\end{array}$$

Definición 4.9. *Dada una composición $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ de n. Se define $\mathfrak{S}_{\mu} \subseteq \mathfrak{S}_n$ generado por*

$$\mathscr{B} = \left\{ s_i \in S \;\middle|\; i \neq \sum_{j=1}^{p} \mu_j \text{ para todo } p \in \{1, \cdots, k\} \right\}$$

*$\mathfrak{S}_{\mu}$ es llamado **Young subgrupo** de $\mathfrak{S}_n$.*

Note que $s_i \in \mathscr{B}$ si y sólo si i y $i+1$ están en una misma fila de $\mathfrak{t}^{\mu}$. Es decir, $\mathfrak{S}_{\mu}$ estabiliza las filas de $\mathfrak{t}^{\mu}$. Ahora, es natural definir $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_{\mu})$ como la subálgebra de $\mathscr{H}$ con base $\{\, T_s \mid s \in \mathscr{B} \,\}$. Finalmente, dado $m_{\mu} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{\mu}} T_w \in \mathscr{H}(\mathfrak{S}_{\mu})$ se define el $\mathscr{H}$-módulo derecho $M^{\mu} = m_{\mu}\mathscr{H}$.

Ejemplo 4.10. *Sea $\mu = (2,3)$. Entonces*

$$\mathfrak{t}^{\mu} = \begin{array}{|c|c|c}\cline{1-2} 1 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 3 & 4 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline\end{array}\;, \quad \mathfrak{S}_{\mu} = \langle s_1, s_3, s_4 \rangle \;\; y \;\; m_{\mu} = (1+T_1)(1+T_3+T_4+T_3T_4+T_4T_3+T_3T_4T_3).$$

Lema 4.11. *Sea $\mu \models n$ y $w \in \mathfrak{S}_{\mu}$ entonces $m_{\mu}T_w = q^{\ell(w)} m_{\mu}$.*

Demostración. Es suficiente probar que si $s \in \mathscr{B}$ entonces $m_{\mu}T_s = q m_{\mu}$. Observe que:

$$\sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{\mu} \\ \ell(ws) < \ell(w)}} T_w = \sum_{\substack{ws \in \mathfrak{S}_{\mu} \\ \ell((ws)s) < \ell(ws)}} T_{ws} = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{\mu} \\ \ell(w) < \ell(ws)}} T_{ws}.$$

Entonces,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{\mu}} T_w = \sum_{\substack{ws \in \mathfrak{S}_{\mu} \\ \ell(w) < \ell(ws)}} T_w + \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_{\mu} \\ \ell(ws) < \ell(w)}} T_w = \sum_{\substack{ws \in \mathfrak{S}_{\mu} \\ \ell(w) < \ell(ws)}} (T_w + T_{ws}).$$

Por lo tanto,

$$m_\mu T_s = \sum_{w \in \mathfrak{S}_\mu} T_w T_s = \sum_{\substack{ws \in \mathfrak{S}_\mu \\ \ell(w) < \ell(ws)}} (T_w + T_{ws}) T_s = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_\mu \\ \ell(w) < \ell(ws)}} T_{ws} + \big(qT_w + (q-1)\,T_{ws}\big) = q m_\mu.$$

□

Para comprender los módulos M^μ debemos encontrar su base, para ello necesitamos determinar un conjunto representantes de las clases laterales de $\mathfrak{S}_\mu$ en $\mathfrak{S}_n$.

Proposición 4.12. *Sea $\mu \models n$ y $\mathscr{D}_\mu = \left\{ d \in \mathfrak{S}_n \;\middle|\; \mathfrak{t}^\mu d \text{ es estándar por filas } \right\}$. Entonces $\mathscr{D}_\mu$ es un conjunto completo de representantes de las clases laterales a derecha de $\mathfrak{S}_\mu$ en $\mathfrak{S}_n$. Además, si $w \in \mathfrak{S}_\mu$ y $d \in \mathscr{D}_\mu$ entonces $\ell(wd) = \ell(w) + \ell(d)$ y $T_{wd} = T_w T_d$.*

Demostración. En efecto, si $\mathfrak{S}_\mu w = \mathfrak{S}_\mu v$ entonces los tableaux $\mathfrak{t}^\mu w$ y $\mathfrak{t}^\mu v$ están de acuerdo con una reordenación de las entradas de cada fila. Por lo tanto, $\mathscr{D}_\mu$ es un conjunto completo de representantes de las clases laterales a derecha de $\mathfrak{S}_\mu$ en $\mathfrak{S}_n$.
Sea $w \in \mathfrak{S}_\mu$ y $d \in \mathscr{D}_\mu$. Si $\ell(w) > 1$ se tiene que $w = s_i v$ para algún $s_i \in \mathscr{B}$ y $v \in \mathfrak{S}_\mu$ tal que $\ell(s_i v) = 1 + \ell(v)$. Es decir, $iv < (i+1)v$ (Por 2.40.1). Por otro lado, $\mathfrak{t}^\mu d$ es estándar por filas. Por lo tanto, dado que i y $i+1$ están en la misma fila de $\mathfrak{t}^\mu$ se tiene que $id < (i+1)d$. Así, $ivd < (i+1)vd$. Entonces, $\ell(s_i vd) = 1 + \ell(vd)$ (Por 2.40.1). Luego, usando inducción sobre el largo de v

$$\ell(wd) = \ell(s_i vd) = 1 + \ell(vd) = 1 + \ell(v) + \ell(d) = \ell(w) + \ell(d).$$

Además, $\ell(wd) > \ell(w)$. Luego, $T_{wd} = T_w T_d$ (Por 4.1.1).

□

Por lo tanto, cada μ-tableau estándar por filas es un representante de una clase lateral derecha de $\mathfrak{S}_\mu$ en $\mathfrak{S}_n$.

Definición 4.13. *Si $\mathfrak{t}$ es un μ-tableau, se define $d(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{S}_n$ al único elemento de longitud mínima tal que $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^\mu d(\mathfrak{t})$.*

Observe que si $\mathfrak{t}$ es un μ-tableau estándar por filas, entonces $d(\mathfrak{t})$ el único representante de longitud mínima en la clase lateral $\mathfrak{S}_\mu d(\mathfrak{t})$.

Corolario 4.14. *Sea $\mu \models n$. Entonces M^μ es un R-módulo con base*

$$\left\{ m_\mu T_{d(\mathfrak{t})} \;\middle|\; \mathfrak{t} \text{ es un } \mu\text{-tableau estándar por filas } \right\}.$$

Además, si $\mathfrak{t}$ es estándar por filas y $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}s_i$ para algún $1 \leq i < n$. Entonces

$$m_\mu T_{d(\mathfrak{t})} T_i = \begin{cases} q m_\mu T_{d(\mathfrak{t})} & \text{si } \mathfrak{s} \text{ no es estándar por filas} \\ m_\mu T_{d(\mathfrak{s})} & \text{si } \mathfrak{s} \text{ es estándar por filas y } \ell(d(\mathfrak{s})) > \ell(d(\mathfrak{t})) \\ q m_\mu T_{d(\mathfrak{s})} + (q-1) m_\mu T_{d(\mathfrak{t})} & \text{si } \mathfrak{s} \text{ es estándar por filas y } \ell(d(\mathfrak{s})) < \ell(d(\mathfrak{t})) \end{cases}$$

Demostración. Que M^μ sea un R-módulo libre con base mostrada anteriormente se demuestra de la definición 4.1, proposición 4.12 y el lema 4.11 respectivamente. Los elementos de M^μ se extienden como sumas de $m_\mu T_w$ para algunos $w \in \mathfrak{S}_n$. Donde cada $w = vd$ para algún $v \in \mathfrak{S}_\mu$ y $d \in \mathscr{D}_\mu$. Entonces $m_\mu T_w = q^{\ell(v)} m_\mu T_d$. Luego, solo falta mostrar las formulas de multiplicación.
Sea $w = d(\mathfrak{t}) s_i$. Entonces $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}s_i = \mathfrak{t}^\mu d(\mathfrak{t}) s_i = \mathfrak{t}^\mu w$. Si $\mathfrak{s}$ no es fila estándar se tiene que i y $i+1$ están en la misma fila de $\mathfrak{t}$, en cuyo caso $\mathfrak{S}_\mu w = \mathfrak{S}_\mu d(\mathfrak{t})$. Es decir, $w = sd(t)$ para algún $s \in \mathfrak{S}_\mu$ donde $\ell(w) = \ell(d(\mathfrak{t})) + 1$ (Proposición 4.12). Por lo tanto $m_\mu T_{d(\mathfrak{t})} T_i = m_\mu T_s T_{d(\mathfrak{t})} = q m_\mu T_{d(\mathfrak{t})}$(Lema 4.11). Ahora, Si $\mathfrak{s}$ es estándar por filas, $d(\mathfrak{s}) \in \mathscr{D}_\mu$, y los resultados restantes se derivan de 4.1.1.

□

Concluimos esta sección con el estudio de dos ordenes parciales, uno en el conjunto de composiciones y el otro en el conjunto de los tableaux estándar por filas.

Definición 4.15. *Si μ y ν son composiciones*

$$\mu \trianglerighteq \nu \quad \text{si y sólo si} \quad \sum_{j=1}^{i} \mu_j \geq \sum_{j=1}^{i} \nu_j \quad \text{para todo} \quad i \geq 1.$$

*Decimos que μ **domina** a ν.*

En otras palabras μ domina ν si y sólo si para todo i hay mas o igual número cajas en las primeras i filas de μ que en las primeas i filas de ν. Por ejemplo, si $\mu = (3,1,1)$ y $\nu = (1,2,2)$ entonces $\mu \trianglerighteq \nu$.
Sea $\mu \models n$ y $\mathfrak{t}$ un μ-tableau estándar por filas. Para cada $m < n$ se define $\mathfrak{t}\,|_m$ al tableau

obtenido de $\mathfrak{t}$ al eliminar todas las entradas mayores a m. Note que $\mathfrak{t}\,\vert_m$ es un ν-tableau estándar por filas, donde $\nu = Shap(\mathfrak{t}\,\vert_m)$ es una composición de m.

Definición 4.16. *Si $\mu \models n$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ son μ-tableaux estándar por filas*

$$\mathfrak{s} \trianglerighteq \mathfrak{t} \quad \text{si y sólo si} \quad Shap(\mathfrak{s}\,\vert_m) \trianglerighteq Shap(\mathfrak{t}\,\vert_m) \quad \text{para todo} \quad m < n.$$

Sea λ una partición de n y $\mathfrak{t}$ cualquier λ-tableau estándar por filas. Entonces $\mathfrak{t}^\lambda \rhd \mathfrak{t}$.

Ejemplo 4.17. *Sea $\mathfrak{s} = \begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\\ \boxed{2}\boxed{5}\end{array}$ y $\mathfrak{t} = \begin{array}{l}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}\\ \boxed{1}\boxed{4}\end{array}$. La siguiente tabla muestra que $\mathfrak{s} \rhd \mathfrak{t}$*

m	1	2	3	4	5	6
$\mathfrak{s}\,\vert_m$	$\begin{array}{l}\boxed{1}\\ \boxed{\varnothing}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{1}\\ \boxed{2}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{3}\\ \boxed{2}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{4}\\ \boxed{2}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{4}\\ \boxed{2}\boxed{5}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\\ \boxed{2}\boxed{5}\end{array}$
$\mathfrak{t}\,\vert_m$	$\begin{array}{l}\boxed{\varnothing}\\ \boxed{1}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{2}\\ \boxed{1}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{2}\boxed{3}\\ \boxed{1}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{2}\boxed{3}\\ \boxed{1}\boxed{4}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{5}\\ \boxed{1}\boxed{4}\end{array}$	$\begin{array}{l}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}\\ \boxed{1}\boxed{4}\end{array}$

Sea $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ una palabra de $\mathfrak{S}_n$ no necesariamente reducida. Una subpalabra de w es de la forma $s_{i_{j_1}} s_{i_{j_2}} \cdots s_{i_{j_l}}$ donde $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k$. Es decir, una subpalabra se obtiene eliminando algunas letras de la palabra original.

Definición 4.18. *Dado $v, w \in \mathfrak{S}_n$ escribimos $v \trianglerighteq w$ si y sólo si v tiene una expresión reducida que es una subpalabra de alguna expresión reducida de w.*

Observe que $1 \trianglerighteq w$ para todo $w \in \mathfrak{S}_n$. Además, por el teorema 2.42 del intercambio fuerte $v \trianglerighteq w$ si y sólo si existen reflexiones $t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$ tales que $w = v t_1 t_2 \cdots t_k$ y $\ell(v t_1 t_2 \cdots t_j) = \ell(v) + j$ para todo $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

Teorema 4.19 (**Ehresmann**)**.** *Si $\mu \models n$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ son μ-tableaux estándar por filas. Entonces $\mathfrak{s} \trianglerighteq \mathfrak{t}$ si y sólo si $d(\mathfrak{s}) \trianglerighteq d(\mathfrak{t})$.*

Demostración. Primero suponga que $\mathfrak{s} \rhd \mathfrak{t}$. Sea r el mínimo tal que la fila r de $\mathfrak{s}$ y la fila r de $\mathfrak{t}$ sean diferentes. Ahora, sea a el número más pequeño que está en la fila r de $\mathfrak{s}$ pero no en la fila r de $\mathfrak{t}$ y sea b el número más pequeño que está en la fila r de $\mathfrak{t}$ pero no en la fila r de $\mathfrak{s}$. Luego $b > a$ ya que $\mathfrak{s} \rhd \mathfrak{t}$. Por lo tanto, si $\mathfrak{b} = \mathfrak{t}(a, b)$ entonces $\mathfrak{b} \rhd \mathfrak{t}$ y $d(\mathfrak{b}) \rhd d(\mathfrak{t})$ (Es decir, $\ell(d(\mathfrak{t})) > \ell(d(\mathfrak{b}))$). Además, si a está en la fila t de $\mathfrak{t}$ y b está en la

fila s de $\mathfrak{s}$, entonces $t > r$ y $t > s$. Así $\mathfrak{b} = \mathfrak{s}$ o $\mathfrak{s} \rhd \mathfrak{b}$. Por lo tanto, por inducción $d(\mathfrak{s}) \rhd d(\mathfrak{b})$. Así, $d(\mathfrak{s}) \rhd d(\mathfrak{t})$.
Para probar lo contrario, es suficiente considerar el caso donde $d(\mathfrak{t}) = d(\mathfrak{s})(j,k)$ para algún $(j,k) \in T$ de manera que $\ell(d(\mathfrak{t})) > \ell(d(\mathfrak{s}))$. Sin perdida de generalidad $j < k$. Observe que $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}^\mu d(\mathfrak{s}) = \mathfrak{t}^\mu d(\mathfrak{t})(j,k) = \mathfrak{t}(j,k)$. Por lo tanto $\ell\left(d(\mathfrak{t})^{-1}\right) > \ell\left((j,k)d(\mathfrak{t})^{-1}\right)$. Entonces $kd(\mathfrak{t})^{-1} < jd(\mathfrak{t})^{-1}$ dado que $\mathfrak{t}^\mu = \mathfrak{t}d(\mathfrak{t})^{-1}$. Es decir, k aparece en una fila anterior a j sobre $\mathfrak{t}$. Entonces $\mathfrak{s} \rhd \mathfrak{t}$.

□

En adelante, el teorema anterior se usa de manera muy natural, sin necesidad de ser enunciando. Además, note que si $\mathfrak{s} \trianglerighteq \mathfrak{t}$ entonces $\ell(d(\mathfrak{t})) > \ell(d(\mathfrak{s}))$.

Corolario 4.20. *Si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{t}$ son λ-tableaux estándar por filas, tal que $\mathfrak{p} \rhd \mathfrak{g}$ y $d(\mathfrak{t}) = d(\mathfrak{g})w$ para algún $w \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\ell(d(\mathfrak{t})) = \ell(d(\mathfrak{g})) + \ell(w)$. Entonces existen $r_\mathfrak{s} \in R$ tal que*

$$m_\lambda T_{d(\mathfrak{p})} T_w = \sum_{\mathfrak{s} \rhd \mathfrak{t}} r_\mathfrak{s} m_\lambda T_{d(\mathfrak{s})}.$$

Demostración. Por la definición 4.1 existen $r_x \in R$ tal que $T_{d(\mathfrak{p})} T_w = \sum_x r_x T_x$ donde $r_x \neq 0$ si $x \trianglerighteq d(\mathfrak{p})w$. Entonces, por el corolario 4.14 $m_\lambda T_{d(\mathfrak{p})} T_w = \sum_\mathfrak{s} r_\mathfrak{s} m_\lambda T_{d(\mathfrak{s})}$, donde $r_\mathfrak{s} \neq 0$ si $d(\mathfrak{s}) \trianglerighteq d(\mathfrak{p})w$. Por otro lado, dado que $d(\mathfrak{p}) \rhd d(\mathfrak{g})$ y $\ell(d(\mathfrak{g})w) = \ell(d(\mathfrak{g})) + \ell(w)$. Entonces $d(\mathfrak{p})w \rhd d(\mathfrak{g})w = d(\mathfrak{t})$. Así, $r_\mathfrak{s} \neq 0$ si $d(\mathfrak{s}) \rhd d(\mathfrak{t})$.

□

4.3. Base de Murphy

En esta sección se verifica que $\mathscr{H}$ tiene una base indexada por pares de λ-tableaux estándar, llamada base de Murphy. Esto se concluye usando la base de M^μ, la cual esta indexada por μ-tableaux estándar por filas. Para empezar, definimos el anti-automorfismo sobre $\mathscr{H}$.

Definición 4.21. *Sea $* : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ el anti-automorfismo R-lineal definido por*

$$*(T_w) = T_{w^{-1}} \text{ para todo } w \in \mathfrak{S}_n.$$

Donde, $*(T_i) = T_i$ para todo $1 \leq i < n$. Por otro lado, si $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ son μ-tableaux estándar por *fila de una composición μ de n. Se define*

$$m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) m_\mu T_{d(\mathfrak{t})}.$$

En particular, $*(m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}) = m_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$.

Por el corolario 4.14 y su análogo a izquierda $h \in \mathscr{H} m_\mu \mathscr{H}$, si y sólo si, h se puede escribir como una combinación lineal de elementos $m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ donde $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ son μ-tableaux estándar por filas. El objetivo es ver que cada $m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$, se puede escribir como una combinación lineal de $m_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ donde $\mathfrak{u}, \mathfrak{b}$ son tableaux estándar. A continuación se muestra que inicialmente solo necesitamos los términos $m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ donde $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{t}$ son λ-tableaux estándar por filas para una partición λ de n (en vez de una composición).

Lema 4.22. *Sea $\mu \models n$ y λ la partición obtenida de μ reordenando sus partes. Si $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ son μ-tableaux estándar por filas entonces $m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in \mathscr{H} m_\lambda \mathscr{H}$.*

Demostración. Sea $d \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\mathfrak{t}^\lambda d$ y $\mathfrak{t}^\mu d^{-1}$ son estándar por filas y $\mathfrak{S}_\mu = d^{-1}\mathfrak{S}_\lambda d$. Entonces, por la Proposición 4.12 se obtiene que $d \in \mathscr{D}_\lambda$, $d^{-1} \in \mathscr{D}_\mu$ y $m_\mu = T_{d^{-1}} m_\lambda T_d$. Así

$$m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) m_\mu T_{d(\mathfrak{t})} = *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) * (T_d) m_\lambda T_d T_{d(\mathfrak{t})}.$$

Es decir, $m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in \mathscr{H} m_\lambda \mathscr{H}$.

□

Observe que d y d^{-1} permutan las filas de $\mathfrak{t}^\lambda$ y $\mathfrak{t}^\mu$ respectivamente.

Ejemplo 4.23. *Si* $\mu = (2,1,3,3)$ *entonces* $\lambda = (3,3,2,1)$. *Así*

$$\mathfrak{t}^\mu = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \\ 3 & & \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \qquad y \qquad \mathfrak{t}^\lambda = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \\ 9 & & \end{array}$$

Luego, si $d = (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$

$$\mathfrak{t}^\mu d^{-1} = \begin{array}{ccc} 7 & 8 & \\ 9 & & \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \qquad y \qquad \mathfrak{t}^\lambda d = \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & \\ 3 & & \end{array}$$

son estándar por filas.

Denotamos por $\mathfrak{t}^{(i,j)}$ al número que ocupa la posición (i,j) del tableau $\mathfrak{t}^\lambda$.

Definición 4.24. *Sea λ una partición, y sea $(i,j)\in[\lambda]$ tal que $(i+1,j)\in[\lambda]$. Si $a=\mathfrak{t}^{(i,j)}$ y $b=\mathfrak{t}^{(i+1,j)}$. Se define el $(i,j)^{th}$* ***Garnir tableau*** *de forma λ como el λ-tableau estándar por filas $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{ij}$ en la que todos los números menores que a o mayores que b ocupan las mismas posiciones en $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{t}^{\lambda}$. Además, los números $a, a+1, \cdots, b$ se encuentran en las posiciones restantes en orden creciente de izquierda a derecha, primero a lo largo de la fila $i+1$ y luego a lo largo de la fila i.*

En otras palabras, los números a y b son los que se encuentra en la posición (i,j) y $(i+1,j)$ de $\mathfrak{t}^{\lambda}$ respectivamente.

Ejemplo 4.25. *Si $\lambda=(4,3,2)$*

$$\mathfrak{g}_{11}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2&3&4&5\\\hline 1&6&7\\\cline{1-3} 8&9\\\cline{1-2}\end{array}\quad \mathfrak{g}_{12}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&4&5&6\\\hline 2&3&7\\\cline{1-3} 8&9\\\cline{1-2}\end{array}\quad \mathfrak{g}_{13}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&6&7\\\hline 3&4&5\\\cline{1-3} 8&9\\\cline{1-2}\end{array}\quad \mathfrak{g}_{13}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 6&7&8\\\cline{1-3} 5&9\\\cline{1-2}\end{array}\quad \mathfrak{g}_{13}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&8&9\\\cline{1-3} 6&7\\\cline{1-2}\end{array}\ .$$

Aunque indexaremos nuestra base celular de $\mathscr{H}$ por el conjunto de particiones ordenadas por dominancia. Para los próximos lemas necesitamos el orden lexicográfico en el conjunto de particiones.

Definición 4.26. *Si λ y μ son particiones, escribimos $\mu<\lambda$ si y sólo si existe $j\geq 1$ tal que $\lambda_i=\mu_i$ para $1\leq i<j$ y $\mu_j<\lambda_j$. Luego, si $\lambda\rhd\mu$ entonces $\lambda>\mu$*

A continuación se enuncias dos lemas de gran utilidad para el desarrollo de la base de Murphy. Sus demostraciones pueden ser encontradas en [17].

Lema 4.27. *Si $\lambda\vdash n$ y $\mathfrak{g}$ es un Garnir tableau de forma λ*

$$m_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{g}}=h-\sum_{\mathfrak{p}\in Std(\lambda)}^{\mathfrak{p}\rhd\mathfrak{g}} m_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{p}}$$

donde $h\in\mathscr{H}m_{\mu}\mathscr{H}$ para alguna partición $\mu>\lambda$.

Lema 4.28. *Si $\lambda\vdash n$ y $\mathfrak{t}$ es un λ-tableau estándar por filas que no es estándar, existe un Garnir tableau $\mathfrak{g}$ y $w\in\mathfrak{S}_n$ tal que $\mathfrak{t}=\mathfrak{g}w$ y además $\ell(d(\mathfrak{t}))=\ell(d(\mathfrak{g}))+\ell(w)$.*

Es decir, los Garnir tableau son los tableaux estándar por fila mas pequeños que no son estándar. Así, de lo anterior obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.29. *Si $\lambda \vdash n$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ son λ-tableaux estándar por filas, existen $r_{\mathfrak{b}} \in R$ tal que*

$$m_{\mathfrak{st}} = \sum_{\mathfrak{b} \in Std(\lambda)}^{\mathfrak{b} \trianglerighteq \mathfrak{t}} r_{\mathfrak{b}} m_{\mathfrak{sb}} + h$$

donde $h \in \mathscr{H} m_\mu \mathscr{H}$ para alguna partición $\mu > \lambda$.

Demostración. Si $\mathfrak{t}$ es estándar por filas pero no estándar. Entonces por el lema 4.28, existe $w \in \mathfrak{S}_n$ y un $\mathfrak{g}$ Garnir tableau tal que $\mathfrak{t} = \mathfrak{g} w$. Por lo tanto, $m_{\mathfrak{st}} = m_{\mathfrak{sg}} T_w$. Así

$$\begin{aligned} m_{\mathfrak{st}} = *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) m_{\mathfrak{t}^\lambda \mathfrak{g}} T_w &= *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) \left(h' - \sum_{\mathfrak{p} \in Std(\lambda)}^{\mathfrak{p} \rhd \mathfrak{g}} m_{\mathfrak{t}^\lambda \mathfrak{p}} \right) T_w && \text{(Lema 4.27)} \\ &= *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) \left(h' T_w - \sum_{\mathfrak{p} \in Std(\lambda)}^{\mathfrak{p} \rhd \mathfrak{g}} m_\lambda T_{d(\mathfrak{p})} T_w \right) \\ &= *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) \left(h' T_w - \sum_{\mathfrak{b}' \rhd \mathfrak{t}} r_{\mathfrak{b}'} m_\lambda T_{d(\mathfrak{b}')} \right) && \text{(Corolario 4.20)} \\ &= *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) h' T_w - \sum_{\mathfrak{b}' \rhd \mathfrak{t}} r_{\mathfrak{b}'} m_{\mathfrak{sb}'}. \end{aligned}$$

donde $r_{\mathfrak{b}'} \in R$ y $h' \in \mathscr{H} m_\mu \mathscr{H}$ para alguna partición $\mu > \lambda$. Dado que $\ell(d(\mathfrak{t})) > \ell(d(\mathfrak{b}'))$. Por inducción, cada termino $m_{\mathfrak{sb}'}$ puede escribirse como una combinación lineal de términos $m_{\mathfrak{sb}}$ donde $\mathfrak{b}$ es un λ-tableau estándar.

□

Observación 4.30. *Dado que $h \in \mathscr{H} m_\mu \mathscr{H}$ para alguna partición $\mu > \lambda$.*

$$h = \sum r_{\mathfrak{ub}} m_{\mathfrak{ub}}$$

donde $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{b}$ son μ-tableaux estándar por filas. Luego, por el lema anterior

$$h = \sum r_{\mathfrak{ub}} \left(\sum_{\mathfrak{t}' \in Std(\mu)}^{\mathfrak{t}' \trianglerighteq \mathfrak{b}} r_{\mathfrak{t}'} m_{\mathfrak{ut}'} + h' \right)$$

donde $h' \in \mathscr{H} m'_\mu \mathscr{H}$ para alguna partición $\mu' > \mu$. En general, si definimos el conjunto $Std_F(\mu)$ de μ-tableaux estándar por filas y dadas las condiciones del lema anterior

$$m_{\mathfrak{st}} = \sum_{\mathfrak{t}' \in Std(\lambda)}^{\mathfrak{t}' \rhd \mathfrak{t}} r_{\mathfrak{t}'} m_{\mathfrak{st}'} + \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in Std(\mu) \\ \mathfrak{u} \in Std_F(\mu)}}^{\mu > \lambda} r_{\mathfrak{ub}} m_{\mathfrak{ub}}.$$

Si λ es una partición de n y $\mathfrak{s},\mathfrak{t}$ son λ-tableaux estándar, se define $m^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$. Ahora, por definición $m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}'} = *(m_{\mathfrak{t}'\mathfrak{s}})$ y $m_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} = *(m_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}})$. Luego, nuevamente por el lema anterior

$$\begin{aligned}
m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} &= \sum_{\mathfrak{t}'\in Std(\lambda)}^{\mathfrak{t}'\rhd\mathfrak{t}} r_{\mathfrak{t}'} * (m_{\mathfrak{t}'\mathfrak{s}}) + \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in Std(\mu)\\ \mathfrak{u}\in Std_F(\mu)}}^{\mu>\lambda} r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} * (m_{\mathfrak{b}\mathfrak{u}}) \\
&= \sum_{\mathfrak{t}'\in Std(\lambda)}^{\mathfrak{t}'\rhd\mathfrak{t}} r_{\mathfrak{t}'} * \left(\sum_{\mathfrak{s}'\in Std(\lambda)}^{\mathfrak{s}'\rhd\mathfrak{s}} r_{\mathfrak{s}'} m^{\lambda}_{\mathfrak{t}'\mathfrak{s}'} + \sum_{\substack{\ddot{\mathfrak{b}}\in Std(\ddot{\mu})\\ \ddot{\mathfrak{u}}\in Std_F(\ddot{\mu})}}^{\ddot{\mu}>\lambda} r_{\ddot{\mathfrak{u}}\ddot{\mathfrak{b}}} m_{\ddot{\mathfrak{u}}\ddot{\mathfrak{b}}} \right) \\
&\qquad + \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in Std(\mu)\\ \mathfrak{u}\in Std_F(\mu)}}^{\mu>\lambda} r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} * \left(\sum_{\mathfrak{u}'\in Std(\mu)}^{\mathfrak{u}'\rhd\mathfrak{u}} r_{\mathfrak{u}'} m^{\mu}_{\mathfrak{b}\mathfrak{u}'} + \sum_{\substack{\hat{\mathfrak{b}}\in Std(\hat{\mu})\\ \hat{\mathfrak{u}}\in Std_F(\hat{\mu})}}^{\hat{\mu}>\mu} r_{\hat{\mathfrak{u}}\hat{\mathfrak{b}}} m_{\hat{\mathfrak{u}}\hat{\mathfrak{b}}} \right).
\end{aligned}$$

En conclusión, si $\mathfrak{s},\mathfrak{t}$ son λ-tableaux estándar por filas para alguna partición λ de n. Entonces $m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ puede escribirse como una combinación lineal de términos $m^{\mu}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ para algunas particiones $\mu \geq \lambda$, donde $\mathfrak{u} \unrhd \mathfrak{s}$ y $\mathfrak{b} \unrhd \mathfrak{t}$.

Definición 4.31. *Se define la **base de Murphy** como el conjunto*

$$\mathcal{M} = \left\{ m^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \;\middle|\; \lambda \vdash n \;\; y \;\; \mathfrak{s},\mathfrak{t} \in Std(\lambda) \right\}.$$

Note que por el lema 4.22, el corolario 4.14 y la conclusión anterior, $\mathcal{H}$ es generado por $\mathcal{M}$. Además, por la definición 4.1, $\mathcal{H}$ es un R-módulo libre de rango $n!$ y por otro lado $|\mathcal{M}| = \sum_{\lambda\vdash n} |Std(\lambda)|^2 = n!$ (correspondencia Robinson-Schensted, ver [11]). Es decir, el álgebra de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}$ es libre como R-módulo con base $\mathcal{M}$.

Corolario 4.32. *Sea $\mathfrak{t}$ un λ-tableau estándar tal que i y $i+1$ están en una misma columna de $\mathfrak{t}$. Si $\mathfrak{s}$ es un λ-tableau, existen $r_{\mathfrak{b}} \in R$ tal que*

$$m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} T_i = -m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} + h + \sum_{\mathfrak{b}\in Std(\lambda)}^{\mathfrak{b}\rhd\mathfrak{t}} r_{\mathfrak{b}} m_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$$

donde $h \in \mathcal{H} m_{\mu} \mathcal{H}$ para alguna partición $\mu > \lambda$.

Demostración. Note que $\mathfrak{t}s_i$ es estándar por filas pero no es estándar. Entonces por el lema 4.28, existe $w \in \mathfrak{S}_n$ y un $\mathfrak{g}$ Garnir tableau tal que $\mathfrak{t}s_i = \mathfrak{g}w$ donde $\ell(d(\mathfrak{t}s_i)) = \ell(d(\mathfrak{g})) + \ell(w)$. Además, existe un único λ-tableau estándar $\mathfrak{p}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}s$ para algún

$s \in S$ donde $\ell(d(\mathfrak{g})) = \ell(d(\mathfrak{p})) + 1$, es decir $d(\mathfrak{p}) > d(\mathfrak{g})$. Además, dado que $\ell(d(\mathfrak{t})) = \ell(d(\mathfrak{p})) + \ell(w)$ y $\mathfrak{t} = \mathfrak{p} s w s_i$, obtenemos que $\ell(w) = \ell(sws_i)$ y $\ell(ws_i) = \ell(w) + 1 = \ell(sw)$. Entonces, por el corolario 2.43 $w = sws_i$. Así, $\mathfrak{t} = \mathfrak{p} w$ y $m_{\mathfrak{s}\mathfrak{p}} T_w = m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$. Note que dado $\mathfrak{b}$ un λ-tableau estándar tal que $\mathfrak{b} \rhd \mathfrak{g}$ implica que $\mathfrak{b} \unrhd \mathfrak{p}$. Así

$$
\begin{aligned}
m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} T_i &= m_{\mathfrak{s}\mathfrak{g}} T_w \\
&= *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) m_{\mathfrak{t}^\lambda \mathfrak{g}} t_w \\
&= *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) \left(h' - \sum_{\mathfrak{b} \in Std(\lambda)}^{\mathfrak{b} \rhd \mathfrak{g}} m_{\mathfrak{t}^\lambda \mathfrak{b}} \right) T_w && \text{(Lema 4.27)} \\
&= *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) \left(h' - m_{\mathfrak{t}^\lambda \mathfrak{p}} - \sum_{\mathfrak{b} \in Std(\lambda)}^{\mathfrak{b} \rhd \mathfrak{p}} m_{\mathfrak{t}^\lambda \mathfrak{b}} \right) T_w \\
&= -m_{\mathfrak{s}\mathfrak{p}} T_w + *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) h' T_w - *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) \left(\sum_{\mathfrak{b} \in Std(\lambda)}^{\mathfrak{b} \rhd \mathfrak{p}} m_\lambda T_{d(\mathfrak{b})} T_w \right) \\
&= -m_{\mathfrak{s}\mathfrak{p}} T_w + *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) h' T_w + *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) \left(\sum_{\mathfrak{s}' \rhd \mathfrak{t}} r_{\mathfrak{s}'} m_\lambda T_{d(\mathfrak{s}')} \right) && \text{(Corolario 4.20)} \\
&= -m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} + *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) h' T_w + \left(\sum_{\mathfrak{s}' \rhd \mathfrak{t}} r_{\mathfrak{s}'} m_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}'} \right) \\
&= -m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} + *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) h' T_w + h'' + \sum_{\mathfrak{b} \in Std(\lambda)}^{\mathfrak{b} \rhd \mathfrak{t}} r_{\mathfrak{b}} m_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}} && \text{(Lema 4.29)}
\end{aligned}
$$

donde $*\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) h' T_w + h'' \in \mathscr{H} m_\mu \mathscr{H}$ para alguna partición $\mu > \lambda$.

□

En particular, con las hipótesis del corolario anterior

$$
m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} T_i = -m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} + \sum_{\substack{\mathfrak{b} \in Std_F(\mu) \\ \mathfrak{u} \in Std_F(\mu)}} r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} m_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{t}' \in Std(\lambda)}^{\mathfrak{t}' \rhd \mathfrak{t}} r_{\mathfrak{t}'} m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}'}
$$

para alguna partición $\mu > \lambda$.

Proposición 4.33. *Sea $\mu \models n$ y $h \in M^\mu$. Si*

$$
h = \sum_{\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in Std(\lambda)}^{\lambda \vdash n} r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} m_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^\lambda.
$$

Entonces, $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = 0$ *si* i *y* $i+1$ *pertenezcan a la misma columna de* $\mathfrak{s}$.

Demostración. Sea λ' el mínimo en el orden lexicográfico de modo que $r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \neq 0$ para algunos $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in Std(\lambda')$. Escojamos $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in Std(\lambda')$ tal que $r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \neq 0$ y que cuando $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in Std(\lambda')$ de tal manera que $\mathfrak{u} \trianglerighteq \mathfrak{s}$ y $\mathfrak{b} \trianglerighteq \mathfrak{t}$ entonces $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = 0$. Supongamos que i y $i+1$ están en la misma columna de $\mathfrak{u}$. Luego, por el corolario 4.32

$$T_i h = *(*(h)T_i) = *\left(\sum_{\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in Std(\lambda)}^{\lambda\vdash n} r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} m^{\lambda}_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}} T_i\right) = -r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} m^{\lambda'}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{s},\mathfrak{t}\in Std(\lambda)}^{\lambda>\lambda'} a_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} m^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$$

Donde $a_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} = 0$. Además $T_i m_\mu = q m_\mu$ por el lema 4.11. Es decir, $T_i h = qh$. Así, comparando los coeficientes de $m_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$, se tiene que $q r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} = -r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$, lo cual contradice que $r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \neq 0$. En consecuencia, i y $i+1$ no pertenecen a la misma columna de $\mathfrak{u}$.

□

Definición 4.34. *Sea* $\lambda \vdash n$. *Se define* $\mathscr{H}^\lambda$ *como el* R*-submódulo de* $\mathscr{H}$ *con base*

$$\left\{ m^{\mu}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \mid \mu \vdash n\ ,\ \mu \trianglerighteq \lambda \ \ y \ \ \mathfrak{u},\mathfrak{b} \in Std(\mu) \right\}$$

y $\check{\mathscr{H}}^\lambda$ *como el* R*-submódulo de* $\mathscr{H}$ *con base*

$$\left\{ m^{\mu}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \mid \mu \vdash n\ ,\ \mu \triangleright \lambda \ \ y \ \ \mathfrak{u},\mathfrak{b} \in Std(\mu) \right\}$$

Corolario 4.35. $\check{\mathscr{H}}^\lambda$ *y* $\mathscr{H}^\lambda$ *son ideales bilaterales de* $\mathscr{H}$.

Demostración. Veamos que $\mathscr{H}^\lambda$ es un ideal derecho de $\mathscr{H}$. Es suficiente probar que $m^{\mu}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} T_w \in \mathscr{H}^\lambda$ para todo $m^{\mu}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in \mathscr{M}$ y $w \in \mathfrak{S}_n$. Si $\mu = \lambda$, por la conclusión del lema 4.29

$$m^{\lambda}_{\mathfrak{t}^\lambda\mathfrak{t}} T_w = \sum_{\mathfrak{u},\mathfrak{b}\in Std(\mu)}^{\mu\geq\lambda} r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} m^{\mu}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}.$$

Sea $r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \neq 0$ para algún $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in Std(\mu)$. Por la proposición 4.33, si i y $i+1$ están en la misma fila de $\mathfrak{t}^\lambda$, entonces no pueden estar en la misma columna de $\mathfrak{u}$. De ello se deduce que $1, 2, \cdots, \lambda_1$ deben estar en la primera fila de $\mathfrak{u}$, entonces $\mu_1 \geq \lambda_1$. considerando la segunda fila $\mu_1 + \mu_2 \geq \lambda_1 + \lambda_2$, y así sucesivamente obtenemos que $\mu \trianglerighteq \lambda$ si $r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \neq 0$. Luego

$$m^{\lambda}_{\mathfrak{t}^\lambda\mathfrak{t}} T_w = \sum_{\mathfrak{u},\mathfrak{b}\in Std(\mu)}^{\mu\trianglerighteq\lambda} r_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} m^{\mu}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \in \mathscr{H}^\lambda.$$

Así, $m^{\lambda}_{\mathfrak{st}} T_w = *\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right) m^{\lambda}_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{t}} T_w \in \mathscr{H}^{\lambda}$. Ahora, si $\mu \rhd \lambda$ tenemos que $m^{\mu}_{\mathfrak{st}} T_w \in \mathscr{H}^{\mu} \subseteq \mathscr{H}^{\lambda}$. Por lo tanto $\mathscr{H}^{\lambda}$ es un ideal derecho de $\mathscr{H}$. Y dado que $T_w m^{\mu}_{\mathfrak{st}} = *\left(m^{\mu}_{\mathfrak{ts}} * (T_w)\right)$, se concluye que $\mathscr{H}^{\mu}$ es un ideal bilátero de $\mathscr{H}$. Por otro lado, $\check{\mathscr{H}}^{\lambda} = \sum_{\mu \rhd \lambda} \mathscr{H}^{\mu}$. Es decir, $\check{\mathscr{H}}^{\lambda}$ tambien es un ideal bilátero de $\mathscr{H}$.

□

Sea $(\Lambda, \trianglerighteq)$ el conjunto de particiones de n ordenadas por dominancia. Ahora podemos probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.36 (**Murphy**). *$(\mathscr{M}, \Lambda)$ es una base celular del álgebra de Iwahori-Hecke $\mathscr{H}$. Es decir, $(\mathscr{H}, \Lambda, Std, \mathscr{M}, *)$ es un álgebra celular.*

Demostración. Ya hemos visto que $\mathscr{M}$ es una base de $\mathscr{H}$ y a partir de las definiciones, es inmediato que $*\left(m^{\lambda}_{\mathfrak{st}}\right) = m^{\lambda}_{\mathfrak{ts}}$. Por lo tanto, solo falta demostrar que dado $h \in \mathscr{H}$ y $\mathfrak{t} \in Std(\lambda)$, existen $r_{\mathfrak{b}} \in R$ tal que para todo $\mathfrak{s} \in Std(\lambda)$

$$m^{\lambda}_{\mathfrak{st}} h \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in Std(\lambda)} r_{\mathfrak{b}} m^{\lambda}_{\mathfrak{sb}} \mod \check{\mathscr{H}}^{\lambda}.$$

Si N_{λ} es el R-módulo generado por $\check{\mathscr{H}}^{\lambda}$ y $\left\{ m^{\lambda}_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{t}} \mid \mathfrak{t} \in Std(\lambda) \right\}$. El argumento del corolario 4.35 muestra que N_{λ} es un ideal derecho de $\mathscr{H}$. Por lo tanto, dado $\mathfrak{t} \in Std(\lambda)$ y $h \in \mathscr{H}$, existen $r_{\mathfrak{b}}$ tal que

$$m^{\lambda}_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{t}} h \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in Std(\lambda)} r_{\mathfrak{b}} m^{\lambda}_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{b}} \mod \check{\mathscr{H}}^{\lambda}. \tag{4.36.1}$$

Luego, al multiplicar a izquierda por $*\left(T_{d(\mathfrak{s})}\right)$ se prueba el teorema.

□

En particular, el conjunto de particiones de n ordenadas lexicográficamente $\left(\Lambda, \trianglerighteq_{lex}\right)$ también es una base celular de $\mathscr{H}$. En lo que continua de este capítulo, λ denota una partición de n.

Observación 4.37. *Si $m^{\lambda}_{\mathfrak{t}} := m^{\lambda}_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{t}} + \check{\mathscr{H}}$ para cada $\mathfrak{t} \in Std(\lambda)$, al igual que en la definición 3.5 del capítulo anterior, se define el **módulo celular** S^{λ} como el $\mathscr{H}$-módulo derecho que es libre como R-módulo con base $\{m^{\lambda}_{\mathfrak{t}} \mid \mathfrak{t} \in Std(\lambda)\}$. Donde para cada $h \in \mathscr{H}$ se obtiene*

$$m^{\lambda}_{\mathfrak{t}} h \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in Std(\lambda)} r_{\mathfrak{b}} m^{\lambda}_{\mathfrak{b}}.$$

$r_{\mathfrak{b}} \in R$ *esta determinado por la ecuación 4.36.1 de la demostración del teorema anterior. Además, por el lema 3.4* (iii). *Si* $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in Std(\lambda)$, *existe* $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in R$ *tal que para todo* $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in Std(\lambda)$

$$m^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}} m^{\lambda}_{\mathfrak{t}\mathfrak{b}} \equiv r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} m^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \mod \check{\mathscr{H}}^{\lambda}. \tag{4.37.1}$$

Así, como en la definición 3.8, obtenemos la operación bilineal

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & S^{\lambda} \times S^{\lambda} & \longrightarrow & R \\ & \left(m^{\lambda}_{\mathfrak{s}}\ ,\ m^{\lambda}_{\mathfrak{t}}\right) & \longmapsto & r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \end{array}$$

donde $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in R$ *esta definido por la ecuación 4.37.1. Es decir, para todo* $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in Std(\lambda)$

$$\left\langle m^{\lambda}_{\mathfrak{s}}, m^{\lambda}_{\mathfrak{t}} \right\rangle m^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \equiv m^{\lambda}_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}} m^{\lambda}_{\mathfrak{t}\mathfrak{b}} \mod \check{\mathscr{H}}^{\lambda}.$$

Luego, de la definición 3.10 se define el $\mathscr{H}$*-submódulo de* S^{λ}

$$rad\left(S^{\lambda}\right) = \left\{ x \in S^{\lambda} \,\middle|\, \langle x, y\rangle = 0 \ \ para\ todo\ \ y \in S^{\lambda} \right\}$$

y el $\mathscr{H}$*-módulo derecho*

$$D^{\lambda} = S^{\lambda} \Big/ rad\left(S^{\lambda}\right).$$

Por ultimo, y gracias al teorema 3.18 de Graham y Lehrer, obtenemos el resultado que concluye con este capítulo.

Teorema 4.38 (**Dipper-James**)**.** *Sea R un cuerpo, entonces*

$$\left\{ D^{\lambda} \,\middle|\, \lambda \vdash n \ \ y \ \ D^{\lambda} \neq 0 \right\}$$

es un conjunto completo de $\mathscr{H}$*-módulos irreducibles no isomorfos entre si.*

Capítulo 5

Base Celular del Álgebra de Yokonuma-Hecke

En este capítulo se construye una base celular para el álgebra de Yokonuma-Hecke. Dicha base es construida en [6] como una generalización de la base de Murphy. Esta construcción usa la base definida por J. Juyumaya en [13] para el álgebra de Yokonuma-Hecke y un isomorfismo natural entre la subálgebra $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_\mu)$ de Hecke y la subálgebra $\mathscr{Y}(\mathfrak{S}_\mu)$ de Yokonuma-Hecke.

5.1. Álgebra de Yokonuma-Hecke

El álgebra de Yokonuma-Hecke se define como una generalización del álgebra de Iwahori-Hecke, la cual puede puede ser vista también como una q-deformación del álgebra de grupo de $\mathbb{Z}_r^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

Definición 5.1. *Sea R un anillo conmutativo con unidad, $q \in R$ invertible y $r, n \in \mathbb{N}$. El **álgebra de Yokonuma-Hecke** denotada por $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$, es la R-álgebra asociativa generada* *por $g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}, t_1, t_2, \cdots, t_n$, sujeta a las siguientes relaciones:*

$$t_i^r = 1 \quad si \quad i \geq 1 \tag{5.1.1}$$

$$t_i t_j = t_j t_i \quad si \quad i \geq 1 \tag{5.1.2}$$

$$t_j g_i = g_i t_{j s_i} \quad si \quad i, j \geq 1 \tag{5.1.3}$$

$$g_i g_j = g_j g_i \quad si \quad |i-j| > 1 \tag{5.1.4}$$

$$g_i g_j g_i = g_j g_i g_j \quad si \quad |i-j| = 1 \tag{5.1.5}$$

$$g_i^2 = 1 + \left(q - q^{-1}\right) e_i g_i \quad si \quad i \geq 1 \tag{5.1.6}$$

Donde

$$e_i := \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} t_i^s t_{i+1}^{-s}.$$

Note que g_i tiene inversa $g_i^{-1} = g_i + \left(q^{-1} - q\right) e_i$.
Si $r = 1$, el álgebra $\mathscr{Y}_{1,n}(q)$ coincide con el álgebra de Iwahori-Hecke $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n)$. Por otro lado, e_i es idempotente. En efecto, usando la relación (5.1.1) tenemos

$$e_i^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{p=0}^{r-1} t_i^{s+p} t_{i+1}^{-(s+p)} = \frac{1}{r^2} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{l=s}^{r-1+s} t_i^l t_{i+1}^{-l} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} t_i^l t_{i+1}^{-l} = e_i.$$

Observación 5.2. *Originalmente el álgebra de Yokonuma-Hecke es denotada $\mathscr{Y}_{d,n}(u)$ y generada por $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \cdots, \hat{g}_{n-1}, t_1, t_2, \cdots, t_n$, los cuales satisfacen las relaciones anteriores cambiando la relación cuadrática por*

$$\hat{g}_i^{\,2} = 1 + (u-1)e_i + (u-1)e_i \hat{g}_i.$$

Esta presentación se consigue tomando $u = q^2$ y $\hat{g}_i = g_i + (q-1)e_i g_i$. En efecto,

$$\begin{aligned}
g_i^2 &= 1 + \left(q - q^{-1}\right) e_i g_i \\
g_i^2 \left(1 + \left(q^2 - 1\right) e_i\right) &= \left(1 + \left(q - q^{-1}\right) e_i g_i\right) \left(1 + \left(q^2 - 1\right) e_i\right) \\
g_i^2 \left(1 + (q-1)(q+1) e_i\right) &= 1 + \left(q^2 - 1\right) e_i + \left(q - q^{-1}\right) e_i g_i + \left(q - q^{-1}\right)\left(q^2 - 1\right) e_i g_i \\
g_i^2 \left(1 + (q-1)\left(2e_i + (q-1)e_i\right)\right) &= 1 + \left(q^2 - 1\right) e_i + \left(q - q^{-1}\right)\left(q^2\right) e_i g_i \\
g_i^2 \left(1 + 2(q-1)e_i + (q-1)^2 e_i\right) &= 1 + \left(q^2 - 1\right) e_i + \left(q^2 - 1\right)\left(e_i g_i + (q-1) e_i^2 g_i\right) \\
g_i^2 \left(1 + (q-1)e_i\right)^2 &= 1 + \left(q^2 - 1\right) e_i + \left(q^2 - 1\right) e_i \left(g_i + (q-1) e_i g_i\right) \\
\hat{g}_i^{\,2} &= 1 + (u-1)e_i + (u-1)e_i \hat{g}_i.
\end{aligned}$$

Donde, $\hat{g}_i$ tiene inversa $\hat{g}_i^{-1} = \hat{g}_i + \left(u^{-1} - 1\right) e_i + \left(u^{-1} - 1\right) e_i \hat{g}_i$.

Sea $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$ una expresión reducida de $w \in \mathfrak{S}_n$. Dado que los g_i satisfacen las mismas relaciones que los generadores de $\mathfrak{S}_n$, el lema de Matsumoto en [18] implica que el elemento $g_w := g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_m}$ está bien definido, es decir, no depende de la expresión reducida de w. Entonces tenemos que

$$g_w g_{s_i} = \begin{cases} g_{ws_i} & \text{si } \ell(ws_i) > \ell(w) \\ g_{ws_i} + \left(q - q^{-1}\right) g_w e_i & \text{si } \ell(ws_i) < \ell(w) \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Teorema 5.3 (**J. Juyumaya** [13]). *El álgebra de Yokonuma-Hecke $\mathcal{Y}_{r,n}(q)$ tiene base*

$$\mathcal{B}_{r,n} = \left\{ t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_n^{k_n} g_w \;\middle|\; w \in \mathfrak{S}_n \;\; y \;\; k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \right\}.$$

Es decir, es libre como R-módulo con rango $r^n n!$.

A continuación se definen algunos elementos en $\mathcal{Y}_{r,n}(q)$ necesarios para la construcción de la base celular que deseamos. Denotamos con $\overline{n}$ al conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ y con P_n al conjunto de particiones del conjunto $\overline{n}$.

Definición 5.4 (Ver [13]). *Si $i, j \in \overline{n}$, definimos*

$$e_{ij} := \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} t_i^s t_j^{-s}.$$

Es fácil ver que e_{ij} es idempotente, $e_{ij} = e_{ji}$, $e_{ii} = 1$ y $e_{i,i+1} = e_i$. Además, por la relación (5.1.3) se obtiene

$$e_{ij} g_w = g_w e_{iw, jw} \quad \text{para todo} \quad w \in \mathfrak{S}_n. \tag{5.4.1}$$

Definición 5.5 (Ver [20]). *Si $I \subset \overline{n}$, definimos*

$$E_I := \prod_{i,j \in I}^{i<j} e_{ij}.$$

Luego, si $A = \{I_1, I_2, \cdots, I_k\} \in P_n$, escribimos

$$E_A := \prod_{i=1}^{k} E_{I_i}.$$

Donde la acción a derecha de $\mathfrak{S}_n$ sobre P_n esta dada por $Aw = \{I_1 w, I_2 w, \cdots, I_k w\}$. Además, dadas las definiciones anteriores ,E_A es idempotente.

Lema 5.6 (Ver [20])**.** *Sea $A \in P_n$ y $w \in \mathfrak{S}_n$. Entonces*

$$E_A g_w = g_w E_{Aw}$$

Demostración. Sea $A = \{I_1, I_2, \cdots, I_k\} \in P_n$. Usando (5.4.1)

$$E_A g_w = \prod_{p=1}^{k} \left(\prod_{i,j \in I_p}^{i<j} e_{ij} \right) g_w = g_w \prod_{p=1}^{k} \left(\prod_{i,j \in I_p}^{i<j} e_{iw,jw} \right) = g_w \prod_{p=1}^{k} \left(\prod_{i,j \in I_p w}^{i<j} e_{i,j} \right) = g_w E_{Aw}.$$

□

En particular, si w deja invariante cada I_p de A, o más generalmente, permuta los bloques de igual tamaño de A, entonces E_A y g_w conmutan.

Definición 5.7 (Ver [6])**.** *Sea $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ una composición. Definimos*

$$A_\mu = \{I_1, I_2, \cdots, I_k\} \in P_n$$

donde

$$I_1 = \{1, 2, \cdots, \mu_1\}, I_2 = \left\{\mu_1 + 1, \mu_1 + 1, \cdots, \mu_1 + \mu_2\right\}, \cdots,$$
$$I_k = \left\{ \left(\sum_{p=1}^{k-1} \mu_p \right) + 1, \left(\sum_{p=1}^{k-1} \mu_p \right) + 2, \cdots, \left(\sum_{p=1}^{k-1} \mu_p \right) + \mu_k \right\}.$$

Por ejemplo, si $\mu = (3, 2, 4)$, entonces $A_\mu = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8, 9\}\}$.

Definición 5.8 (Ver [6])**.** *El **espacio propio** para la acción t_i en $\mathcal{Y}_{r,n}(q)$ con valor propio $\xi^k := e^{2\pi k i/r} \in \mathbb{C}$ es $u_{ik}\mathcal{Y}_{r,n}(q) = \left\{v \in \mathcal{Y}_{r,n}(q) \mid t_i v = \xi^k v\right\}$. Donde,*

$$u_{ik} = \frac{1}{r} \sum_{j=o}^{r-1} \xi^{-jk} t_i^j \in \mathcal{Y}_{r,n}(q).$$

Observación 5.9. *u_{ik} es idempotente, en efecto, usando la relación 5.1.1:*

$$(u_{ik})^2 = \left(\frac{1}{r}\sum_{j=o}^{r-1}\xi^{-jk}t_i^j\right)\left(\frac{1}{r}\sum_{p=o}^{r-1}\xi^{-pk}t_i^p\right) = \frac{1}{r^2}\sum_{j=0}^{r-1}\left(\sum_{p=0}^{r-1}\xi^{-(j+p)k}t_i^{j+p}\right) = \frac{1}{r}r\sum_{l=0}^{r-1}\xi^{-lk}t_i^l = u_{ik},$$

dado que ξ y t_i son de orden r.

5.2. Young Multitableaux

Un multitableau es definido a partir de un conjunto finito de tableaux. Dado que estos son vistos como r-tuplas de tableaux, algunos resultados y definiciones importantes sobre tableaux se extienden de forma natural a multitableaux.

Definición 5.10. *Sea $n \in \mathbb{N}$. La r-tupla*

$$\boldsymbol{\mu} = \left(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(r)}\right)$$

*es llamada r-**multicomposición** de n si cada $\mu^{(i)}$ es una composición y $\sum_{i=1}^{r}\left|\mu^{(i)}\right| = n$. Y es llamada r-**multipartición** de n si es una r-multicomposición de n donde cada $\mu^{(i)}$ es una partición. Luego, definimos los conjuntos*

$$Comp_{r,n} := \{\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\mu} \text{ es una } r\text{-multicomposición de } n\}$$
$$Par_{r,n} := \{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \text{ es una } r\text{-multipartición de } n\}.$$

Ejemplo 5.11. *Para $r = 3$ y $n = 20$, algunos $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ y $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{r,n}$ son los siguientes:*

$$\boldsymbol{\mu} = ((3,1,2),(2,2,1),(5,1,3)) \;\; , \;\; \boldsymbol{\mu} = ((3,1,2,1),(2,4),(4,1,1,1))$$
$$\boldsymbol{\lambda} = ((7,2),(3,1,1,1),(2,2,1)) \;\; , \;\; \boldsymbol{\lambda} = ((3,3,3,3),(2,1),(4,1))$$

Definición 5.12. *Sea $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$. El **multidiagrama de Young** es la r-tupla*

$$[\boldsymbol{\mu}] = \left(\left[\mu^{(1)}\right], \left[\mu^{(2)}\right], \cdots, \left[\mu^{(r)}\right]\right).$$

Donde cada $\left[\mu^{(i)}\right]$ es el diagrama de Young de $\mu^{(i)}$.

Es útil representar dicho elemento como la r-tupla de cajas justificadas a la izquierda de cada $\left[\mu^{(i)}\right]$. Por ejemplo, si $\boldsymbol{\mu} = ((1,2,1),(1,2,2))$ y $\boldsymbol{\lambda} = ((3,1,1),(2,2,1),(3,1))$

$$[\boldsymbol{\mu}] = \left(\ydiagram{1,2,1} \ , \ \ydiagram{1,2,2} \right) \quad y \quad [\boldsymbol{\lambda}] = \left(\ydiagram{3,1,1} \ , \ \ydiagram{2,2,1} \ , \ \ydiagram{3,1} \right)$$

Definición 5.13. *Sea* $\boldsymbol{\mu} = \left(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(r)}\right) \in Comp_{r,n}$. *La* r*-tupla* $\mathfrak{t} = \left(\mathfrak{t}^{(1)}, \mathfrak{t}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{t}^{(r)}\right)$ *es un* $\boldsymbol{\mu}$-***multitableau*** *si cada* $\mathfrak{t}^{(i)}$ *es un* $\mu^{(i)}$*-tableau. Decimos que* $\mathfrak{t}$ *tiene* ***forma*** $\boldsymbol{\mu}$ *y lo denotamos* $Shap(\boldsymbol{\mu}) = \mathfrak{t}$.

Un $\boldsymbol{\mu}$-multitableau puede ser representado como un multidiagrama de Young etiquetado.

Ejemplo 5.14. *Si* $\boldsymbol{\mu} = ((2,3,1),(3,2))$

$$\mathfrak{t} = \left(\begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 \end{ytableau} \ , \ \begin{ytableau} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{ytableau} \right) \quad y \quad \mathfrak{s} = \left(\begin{ytableau} 5 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 \end{ytableau} \ , \ \begin{ytableau} 6 & 9 & 11 \\ 1 & 10 \end{ytableau} \right)$$

son dos $\boldsymbol{\mu}$*-multitableaux.*

En consecuencia, clasificamos los $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux en dos tipos. A partir de las etiquetas en cada coordenada, por fila y columna.

Definición 5.15. *Sea* $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ *y* $\mathfrak{t} = \left(\mathfrak{t}^{(1)}, \mathfrak{t}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{t}^{(r)}\right)$ *un* $\boldsymbol{\mu}$*-multitableau. Decimos que* $\mathfrak{t}$ *es* ***estándar por filas*** *si cada* $\mathfrak{t}^{(i)}$ *es estándar por filas, y* ***estándar*** *si cada* $\mathfrak{t}^{(i)}$ *es estándar.*

Continuando con el ejemplo 5.14, $\mathfrak{t}$ es estándar y $\mathfrak{s}$ solo es estándar por filas. Además, si denotamos por $\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\mu}}$ al $\boldsymbol{\mu}$-multitableau en donde $1, 2, \cdots, n$ aparecen en orden a lo largo de cada fila de la primera componente y continuando a lo largo de cada fila de la segunda componente, y así sucesivamente. En el ejemplo anterior $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^{\boldsymbol{\mu}}$.

Si $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{r,n}$, definimos el conjunto

$$\boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\, \mathfrak{t} \mid \mathfrak{t} \text{ es un } \boldsymbol{\lambda}\text{-multitableau estándar } \}.$$

Luego, si $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$, definimos de manera natural la acción por derecha de $\mathfrak{S}_n$ sobre el conjunto de $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux permutando las entradas. En el ejemplo 5.14, si

$(2\ \ 4\ \ 11\ \ 7\ \ 9) \in \mathfrak{S}_{11}$

$$\mathfrak{t}(2\ \ 4\ \ 11\ \ 7\ \ 9) = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 3 & 11 & 5 \\ \hline 6 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 9 & 8 & 2 \\ \hline 10 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} \right).$$

A continuación definimos dos ordenes parciales, uno en el conjunto de multicomposiciones y el otro en el conjunto de los multitableaux estándar por filas.

Definición 5.16. *Si $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in Comp_{r,n}$*

$$\boldsymbol{\mu} \trianglerighteq \boldsymbol{\nu} \quad \textit{si y sólo si} \quad \mu^{(i)} \trianglerighteq \nu^{(i)} \quad \textit{para todo} \quad i \geq 1.$$

*Decimos que $\boldsymbol{\mu}$ **domina** a $\boldsymbol{\nu}$.*

En otras palabras $\boldsymbol{\mu}$ domina $\boldsymbol{\nu}$ si y sólo si en cada componente $\mu^{(i)}$ domina a $\nu^{(i)}$. Por ejemplo, si $\boldsymbol{\mu} = ((3,1,1),(2,2,1),(3,1))$ y $\boldsymbol{\nu} = ((1,2,2),(1,2,1,1),(2,2))$ entonces $\boldsymbol{\mu} \trianglerighteq \boldsymbol{\nu}$.

Sea $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ y $\mathfrak{t}$ un $\boldsymbol{\mu}$-multitableau estándar por filas. Para cada $m < n$ definimos $\mathfrak{t}\,|_m$ al multitableau obtenido de $\mathfrak{t}$ al eliminar todas las entradas mayores a m. Note que $\mathfrak{t}\,|_m$ es un $\boldsymbol{\nu}$-multitableau estándar por filas, donde $\boldsymbol{\nu} = Shap(\mathfrak{t}\,|_m)$ es una multicomposición de m.

Definición 5.17. *Si $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ son $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux estándar por filas*

$$\mathfrak{s} \trianglerighteq \mathfrak{t} \quad \textit{si y sólo si} \quad Shap(\mathfrak{s}\,|_m) \trianglerighteq Shap(\mathfrak{t}\,|_m) \quad \textit{para todo} \quad m < n.$$

En particular, si $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{r,n}$ y $\mathfrak{t}$ cualquier $\boldsymbol{\lambda}$-multitableau estándar por filas entonces $\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}} \triangleright \mathfrak{t}$.

Definición 5.18. *Sea $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$. Definimos el **Young subgrupo** de $\mathfrak{S}_n$*

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}} := \mathfrak{S}_{\mu^{(1)}} \times \mathfrak{S}_{\mu^{(2)}} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu^{(r)}}$$

Donde cada $\mathfrak{S}_{\mu^{(i)}}$ es el Young subgrupo de $\mathfrak{S}_n$ asociado a $\mu^{(i)}$.

Observación 5.19. *Recordando que para cada composición $\mu^{(i)} = \left(\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \cdots, \mu_k^{(i)}\right)$*

$$\mathfrak{S}_{\mu^{(i)}} = \mathfrak{S}_{\mu_1^{(i)}} \times \mathfrak{S}_{\mu_2^{(i)}} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_k^{(i)}}$$

Donde $\mathfrak{S}_{\mu_1^{(i)}}$ es el subgrupo de $\mathfrak{S}_n$ que permuta el conjunto $\{1,2,\cdots,\mu_1^{(i)}\}$, mientras que $\mathfrak{S}_{\mu_2^{(i)}}$ permuta el conjunto $\{\mu_1^{(i)}+1,\mu_1^{(i)}+2,\cdots,\mu_1^{(i)}+\mu_2^{(i)}\}$, y así, para cada $\mathfrak{S}_{\mu_j^{(i)}}$. Tengamos en cuenta que la notación se desvía de la notación normal, donde $\mathfrak{S}_{\mu_j^{(i)}}$ es el grupo simétrico de los números $\{1,2,\cdots,\mu_j^{(i)}\}$. Este tipo de abuso de notación lo seguimos usando con frecuencia, así que ya no debería causar confusión. En conclusión, $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}$ estabiliza las filas de cada componente de $\mathbf{t}^{\boldsymbol{\mu}}$.

Definición 5.20. *Si $\boldsymbol{\mu}\in Comp_{r,n}$ y $\mathbf{t}$ es un $\boldsymbol{\mu}$-multitableau, escribimos*

$$p_{\mathbf{t}}(j):=k \ \text{ si } \ j \ \text{ aparece en la componente } \ \mathrm{t}^{(k)} \ \text{ de } \ \mathbf{t}.$$

*Es decir, $p_{\mathbf{t}}(j)$ es la coordenada de j en $\mathbf{t}$. Si $\mathbf{t}=\mathbf{t}^{\boldsymbol{\mu}}$ escribimos $p_{\boldsymbol{\mu}}(j)$ en lugar de $p_{\mathbf{t}^{\boldsymbol{\mu}}}(j)$. Decimos que $\mathbf{t}$ es un $\boldsymbol{\mu}$-multitableau de **tipo inicial** si $p_{\mathbf{t}}(j)=p_{\boldsymbol{\mu}}(j)$ para todo $j\in\overline{n}$.*

Definición 5.21. *Si $\boldsymbol{\mu}\in Comp_{r,n}$, definimos*

$$U_{\boldsymbol{\mu}}:=\prod_{j=1}^{r} u_{i_j,j}$$

donde i_j es cualquier número de la componente j ésima de $\mathbf{t}^{\boldsymbol{\mu}}$. Es decir, $p_{\boldsymbol{\mu}}(i_j)=j$.

Note que $U_{\boldsymbol{\mu}}$ está bien definido. Pues, si a y b son números de la componente j ésima de $\mathbf{t}^{\boldsymbol{\mu}}$, entonces

Definición 5.22. *Si $\boldsymbol{\mu}\in Comp_{r,n}$, definimos la composición de n*

$$\|\boldsymbol{\mu}\|:=\left(\left|\mu^{(1)}\right|,\left|\mu^{(2)}\right|,\cdots,\left|\mu^{(r)}\right|\right).$$

Ejemplo 5.23. *Si $\boldsymbol{\mu}=((2,3),(1,1),(2,1,2))$, entonces $\|\boldsymbol{\mu}\|=(5,2,5)$. Además, de la definición 5.7 obtenemos que $A_{\|\boldsymbol{\mu}\|}=\{\{1,2,3,4,5\},\{6,7\},\{8,9,10,11,12\}\}$.*

A partir de ahora usamos las siguientes notaciones:

$$A_{\boldsymbol{\mu}}:=A_{\|\boldsymbol{\mu}\|} \quad \text{y} \quad E_{\boldsymbol{\mu}}:=E_{A_{\boldsymbol{\mu}}}$$

Note que i y j están en un mismo elemento de $A_{\boldsymbol{\mu}}$ si y sólo si $p_{\boldsymbol{\mu}}(i)=p_{\boldsymbol{\mu}}(j)$. Además,

$$w\in\mathfrak{S}_{\|\boldsymbol{\mu}\|} \ \text{ si y sólo si } \mathbf{t}^{\boldsymbol{\mu}}w \ \text{ es de tipo inicial}. \tag{5.23.1}$$

Definición 5.24. *Sea* $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$. *Definimos*

$$x_{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}} q^{\ell(w)} g_w \in \mathcal{Y}_{r,n}(q).$$

Luego, considerando $x_{\mu^{(i)}} := \sum_{w \in \mathfrak{S}_{\mu^{(i)}}} q^{\ell(w)} g_w$ y la definición 5.18, podemos factorizar

$$x_{\boldsymbol{\mu}} = x_{\mu^{(1)}} x_{\mu^{(2)}} \cdots x_{\mu^{(r)}}.$$

El siguiente elemento es el punto de partida de la construcción de la base celular de Yokonuma-Hecke. El equivalente de dicho elemento en el álgebra de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}$ seria $m_\mu = \sum_{w \in \mathfrak{S}_\mu} q^{\ell(w)} T_w$ bajo las relaciones de la observación 4.2.

Definición 5.25. *Sea* $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$. *Definimos*

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} := U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} x_{\boldsymbol{\mu}}$$

Observación 5.26. *Inicialmente, de la observación 5.9,* $U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}}$ *es idempotente. Además, si* $p_{\boldsymbol{\mu}}(i) = k$, *de la definición 5.8 se obtiene que* $t_i U_{\boldsymbol{\mu}} = \xi^k U_{\boldsymbol{\mu}}$, *es decir,* $t_i \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} = \xi^k \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}}$. *Luego, si* $p_{\boldsymbol{\mu}}(j) = l$ *tenemos que*

$$e_{ij} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} = \left(\frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} t_i^s t_j^{-s} \right) U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} x_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} \xi^{sk} \xi^{-sl} U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} x_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} \xi^{s(k-l)} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}}.$$

Es decir,

$$e_{ij} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} = \begin{cases} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} & si\ p_{\boldsymbol{\mu}}(i) = p_{\boldsymbol{\mu}}(j) \\ 0 & si\ p_{\boldsymbol{\mu}}(i) \neq p_{\boldsymbol{\mu}}(j) \end{cases} \tag{5.26.1}$$

En particular, dado que $t_i U_{\boldsymbol{\mu}} = U_{\boldsymbol{\mu}} t_i$, *se tiene que* $e_{ij} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} e_{ij}$. *Por otro lado, dado el lema 5.6 y lo anterior,* $U_{\boldsymbol{\mu}}$,$E_{\boldsymbol{\mu}}$ *y* $x_{\boldsymbol{\mu}}$ *conmutan. En particular,* $U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_i = g_i U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}}$ *si* $s_i \in \mathfrak{S}_{\|\boldsymbol{\mu}\|}$. *Por último, si* $s_i \in \mathfrak{S}_{\|\boldsymbol{\mu}\|}$, *sabemos que* $E_{\boldsymbol{\mu}} g_i^2 = E_{\boldsymbol{\mu}} \left(1 + \left(q - q^{-1}\right) g_i\right)$. *Luego, dado que* $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}$ *es un subgrupo de* $\mathfrak{S}_{\|\boldsymbol{\mu}\|}$, *el enunciado del álgebra Iwahori-Hecke del lema 4.11 se soluciona de manera similar para* $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}}$. *Es decir,*

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_w = q^{\ell(w)} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} \quad si \quad w \in \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}. \tag{5.26.2}$$

Lema 5.27. *Sea* $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ *y* $w \in \mathfrak{S}_n$. *Entonces*

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_w g_i = \begin{cases} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{ws_i} & si\, \ell(ws_i) > \ell(w) \\ \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{ws_i} & si\, \ell(ws_i) < \ell(w) \quad y \quad p_{\boldsymbol{\mu}}(iw) \neq p_{\boldsymbol{\mu}}((i+1)w) \\ \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} \left(g_{ws_i} + \left(q - q^{-1}\right) g_w\right) & si\, \ell(ws_i) < \ell(w) \quad y \quad p_{\boldsymbol{\mu}}(iw) = p_{\boldsymbol{\mu}}((i+1)w) \end{cases}$$

Demostración. Si $\ell(ws_i) > \ell(w)$, por la operación 5.2.1 obtenemos $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_w g_{s_i} = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{ws_i}$. Luego, si $\ell(ws_i) < \ell(w)$

$$g_w g_i = g_{ws_i} + \left(q - q^{-1}\right) g_w e_i.$$

Recordando que $e_i = e_{i,i+1}$, por la propiedad 5.4.1

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_w g_i = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{ws_i} + \left(q - q^{-1}\right) \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} e_{iw,(i+1)w} g_w.$$

Luego, por la operación 5.26.1

$$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} e_{iw,(i+1)w} = \begin{cases} \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} & \text{si } p_{\boldsymbol{\mu}}(iw) = p_{\boldsymbol{\mu}}((i+1)w) \\ 0 & \text{si } p_{\boldsymbol{\mu}}(iw) \neq p_{\boldsymbol{\mu}}((i+1)w) \end{cases}$$

Lo cual concluye la prueba.

□

Definición 5.28. *Sea* $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ *y* $\mu = \|\boldsymbol{\mu}\|$. *Definimos* $\mathscr{Y}(\mathfrak{S}_\mu)$ *como la subálgebra de* $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$ *con base* $\left\{ U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_i \mid s_i \in \mathfrak{S}_\mu \right\}$.

Es de notar que $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} x_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathscr{Y}(\mathfrak{S}_\mu)$.

Lema 5.29. $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_\mu) \cong \mathscr{Y}(\mathfrak{S}_\mu)$ *con la aplicación* $T_i \mapsto U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_i$.

Demostración. De la observación 5.26 sabemos que $U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_i = g_i U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}}$ si $s_i \in \mathfrak{S}_\mu$. Por lo tanto, las relaciones 4.2.1 y 4.2.2 que cumple $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_\mu)$, se satisfacen para $U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_i$. Además,

$$\left(U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_i\right)^2 = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_i^2 = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} \left(1 + \left(q - q^{-1}\right) e_i g_i\right)$$

Note que $p_{\boldsymbol{\mu}}(i) = p_{\boldsymbol{\mu}}(i+1)$ ya que $s_i \in \mathfrak{S}_\mu$. Luego, de la operación 5.26.1 obtenemos que $U_{\boldsymbol{\mu}} e_i = U_{\boldsymbol{\mu}} e_{i,i+1} = U_{\boldsymbol{\mu}}$. Así,

$$\left(U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_i\right)^2 \quad = \quad U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} + \left(q - q^{-1}\right) U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_i.$$

Es decir, $U_{\boldsymbol{\mu}}E_{\boldsymbol{\mu}}g_i$ satisface la relación 4.2.3 de $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_\mu)$, pues, en particular $1 \mapsto U_{\boldsymbol{\mu}}E_{\boldsymbol{\mu}}$. Además, $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_\mu)$ y $\mathscr{Y}(\mathfrak{S}_\mu)$ tienen la misma dimensión, lo cual concluye el lema.

$\square$

Definición 5.30. *Si $\mathfrak{t}$ es un $\boldsymbol{\mu}$-multitableau, denotamos por $\boldsymbol{d}(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{S}_n$ al único elemento de largo minimal tal que $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})$.*

Observación 5.31. *Si $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ y $\mu = \|\boldsymbol{\mu}\|$, de la proposición 4.12 sabemos que*

$$\mathscr{D}_\mu = \left\{ d \in \mathfrak{S}_n \;\middle|\; \mathfrak{t}^\mu d \text{ es estándar por filas } \right\}$$

es un conjunto completo de representantes de las clases laterales a derecha de $\mathfrak{S}_\mu$ en $\mathfrak{S}_n$, tal que, si $w \in \mathfrak{S}_\mu$ y $d \in \mathscr{D}_\mu$, entonces $\ell(wd) = \ell(w) + \ell(d)$. Luego, de la ecuación 5.2.1 $g_{wd} = g_w g_d$. Así, dado que $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}$ es un subgrupo de $\mathfrak{S}_\mu$, definimos

$$\mathscr{D}_{\boldsymbol{\mu}} := \mathscr{D}_{\mu^{(1)}} \times \mathscr{D}_{\mu^{(2)}} \times \cdots \times \mathscr{D}_{\mu^{(r)}}.$$

Luego,

$$\mathscr{D}_{\boldsymbol{\mu}} = \left\{ \boldsymbol{d}(\mathfrak{s}) \;\middle|\; \mathfrak{s} \text{ es un } \boldsymbol{\mu}-\text{multitableau estándar por filas } \right\}$$

es un conjunto completo de representantes de las clases laterales a derecha de $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}$ en $\mathfrak{S}_n$. Además, si $w \in \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}$ y $\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}) \in \mathscr{D}_{\boldsymbol{\mu}}$, entonces $\ell(w\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})) = \ell(w) + \ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}))$ y $g_{w\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})} = g_w g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}$.

5.3. Generalización de la Base de Murphy

Esta sección verifica que $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$ tiene una base indexada por pares de $\boldsymbol{\lambda}$-multitableaux estándar. Para empezar, definimos el anti-automorfismo sobre $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$.

Definición 5.32. *Sea $* : \mathscr{Y}_{r,n}(q) \mapsto \mathscr{Y}_{r,n}(q)$ el anti-automorfismo R-linear definido por*

$$*(g_w) = g_{w^{-1}} \quad y \quad *(t_i) = t_i \quad \text{para todo} \quad w \in \mathfrak{S}_n \quad y \quad i \in \{1,2,\cdots,n\}.$$

Donde, $*(g_i) = g_i$ para todo $1 \le i < n$. Por otro lado, si $\mathfrak{s},\mathfrak{t}$ son $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux estándar por filas para algún $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$, definimos

$$\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} := *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}.$$

En particular, escribimos $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} := \boldsymbol{m}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ si $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{r,n}$ y $\mathfrak{u},\mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Observación 5.33. *Sea* $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$, $\mu = \|\boldsymbol{\mu}\|$ *y* $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *dos* $\boldsymbol{\mu}$*-multitableaux de tipo inicial. Sabiendo que* $\boldsymbol{\mu} = \left(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(r)}\right)$, $\mathfrak{s} = \left(\mathfrak{s}^{(1)}, \mathfrak{s}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{s}^{(r)}\right)$, $\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}) = \left(d\left(\mathfrak{s}^{(1)}\right), \cdots, d\left(\mathfrak{s}^{(r)}\right)\right)$, $\mathfrak{t} = \left(\mathfrak{t}^{(1)}, \mathfrak{t}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{t}^{(r)}\right)$ *y* $\boldsymbol{d}(\mathfrak{t}) = \left(d\left(\mathfrak{t}^{(1)}\right), \cdots, d\left(\mathfrak{t}^{(r)}\right)\right)$, *recordemos que*

$$x_{\boldsymbol{\mu}} = x_{\mu^{(1)}} x_{\mu^{(2)}} \cdots x_{\mu^{(r)}}.$$

Además, de 5.23.1 tenemos que $\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}), \boldsymbol{d}(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{S}_\mu$, *entonces de la observación 5.26 tenemos que* $g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}$ *y* $g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}$ *conmuta con* $U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}}$. *Por lo tanto,*

$$\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} x_{\boldsymbol{\mu}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) x_{\boldsymbol{\mu}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} &= U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} \left(*\left(g_{d\left(\mathfrak{s}^{(1)}\right)}\right) x_{\mu^{(1)}} g_{d\left(\mathfrak{t}^{(1)}\right)}\right) \left(*\left(g_{d\left(\mathfrak{s}^{(2)}\right)}\right) x_{\mu^{(2)}} g_{d\left(\mathfrak{t}^{(2)}\right)}\right) \cdots \left(*\left(g_{d\left(\mathfrak{s}^{(r)}\right)}\right) x_{\mu^{(r)}} g_{d\left(\mathfrak{t}^{(r)}\right)}\right) \\ &= U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} x_{\mathfrak{s}^{(1)}\mathfrak{t}^{(1)}} x_{\mathfrak{s}^{(2)}\mathfrak{t}^{(2)}} \cdots x_{\mathfrak{s}^{(r)}\mathfrak{t}^{(r)}}. \end{aligned}$$

Donde, $x_{\mathfrak{s}^{(i)}\mathfrak{t}^{(i)}} := *\left(g_{d\left(\mathfrak{s}^{(i)}\right)}\right) x_{\mu^{(i)}} g_{d\left(\mathfrak{t}^{(i)}\right)}$. *Entonces, bajo el isomorfismo del lema 5.29*

$$*\left(T_{d\left(\mathfrak{s}^{(i)}\right)}\right) m_{\mu^{(i)}} T_{d\left(\mathfrak{t}^{(i)}\right)} \longmapsto U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} *\left(g_{d\left(\mathfrak{s}^{(i)}\right)}\right) x_{\mu^{(i)}} g_{d\left(\mathfrak{t}^{(i)}\right)}.$$

Es decir,

$$m_{\mathfrak{s}^{(1)}\mathfrak{t}^{(1)}} m_{\mathfrak{s}^{(2)}\mathfrak{t}^{(2)}} \cdots m_{\mathfrak{s}^{(r)}\mathfrak{t}^{(r)}} \longmapsto \boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}. \tag{5.33.1}$$

Del capítulo anterior, sabemos que si $\mathfrak{s}^{(i)}$ *y* $\mathfrak{t}^{(i)}$ *son* $\mu^{(i)}$*-tableaux estándar por filas, cada* $m_{\mathfrak{s}^{(i)}\mathfrak{t}^{(i)}} \in \mathscr{H}$ *es una combinación lineal de términos* $m^{\lambda^{(i)}}_{\mathfrak{u}^{(i)}\mathfrak{b}^{(i)}} \in \mathscr{H}$ *tal que* $\lambda^{(i)} \trianglerighteq \mu^{(i)}$, *donde* $\mathfrak{u}^{(i)} \trianglerighteq \mathfrak{s}^{(i)}$ *y* $\mathfrak{b}^{(i)} \trianglerighteq \mathfrak{t}^{(i)}$. *En conclusión, de 5.33.1, si* $\mathfrak{s}$ *y* $\mathfrak{t}$ *son* $\boldsymbol{\mu}$*-multitableaux estándar por filas, obtenemos que* $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in \mathscr{Y}_{r,n}(q)$ *es una combinación lineal de términos* $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \in \mathscr{Y}_{r,n}(q)$ *tal que* $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$, *donde* $\mathfrak{u} \trianglerighteq \mathfrak{s}$ *y* $\mathfrak{b} \trianglerighteq \mathfrak{t}$. *Además, es de notar que* $\mathfrak{u}$ *y* $\mathfrak{b}$ *tambien son de tipo inicial. Y mas aún* $\left|\mu^{(i)}\right| = \left|\lambda^{(i)}\right|$ *para todo* $1 \le i \le r$.

Definición 5.34. *Se define el conjunto*

$$\mathscr{M}_{r,n} = \left\{ \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda} \in Par_{r,n} \;\; y \;\; \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda}) \right\}.$$

Lema 5.35. *Sea* $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ *y* $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ *dos* $\boldsymbol{\mu}$*-multitableaux estándar por filas. Entonces* $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$

es una combinación lineal de términos $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ *tal que* $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$*, donde* $\mathfrak{u} \trianglerighteq \mathfrak{s}$ *y* $\mathfrak{b} \trianglerighteq \mathfrak{t}$.

Demostración. Si $\mu = \|\boldsymbol{\mu}\|$, por la observación 5.31 y 5.23.1, existen $\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}_0), \boldsymbol{d}(\mathfrak{t}_0) \in \mathfrak{S}_\mu$ y $w_\mathfrak{s}, w_\mathfrak{t} \in \mathscr{D}_\mu$ para algunos $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux de tipo inicial $\mathfrak{s}_0$ y $\mathfrak{t}_0$ tal que,

$\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}) = \boldsymbol{d}(\mathfrak{s}_0)\, w_\mathfrak{s}, \boldsymbol{d}(\mathfrak{t}) = \boldsymbol{d}(\mathfrak{t}_0)\, w_\mathfrak{t}$, $\ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})) = \ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}_0)) + \ell(w_\mathfrak{s})$ y $\ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})) = \ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{t}_0)) + \ell(w_\mathfrak{t})$.

Así,

$$\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} = *\left(g_{w_\mathfrak{s}}\right) *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}_0)}\right)\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t}_0)} g_{w_\mathfrak{t}} = *\left(g_{w_\mathfrak{s}}\right)\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}_0\mathfrak{t}_0} g_{w_\mathfrak{t}}.$$

Luego, de la observación 5.33, $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ es combinación lineal de términos $*\left(g_{w_\mathfrak{s}}\right)\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}_0\mathfrak{b}_0} g_{w_\mathfrak{t}}$ tal que $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$, donde $\mathfrak{u}_0 \trianglerighteq \mathfrak{s}_0$ y $\mathfrak{b}_0 \trianglerighteq \mathfrak{t}_0$. Por lo tanto, dado que $w_\mathfrak{s}, w_\mathfrak{t} \in \mathscr{D}_\mu$, tenemos que $\mathfrak{u}_0 w_\mathfrak{s} \trianglerighteq \mathfrak{s}_0 w_\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$ y $\mathfrak{b}_0 w_\mathfrak{t} \trianglerighteq \mathfrak{t}_0 w_\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$. Es decir, $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ es una combinación lineal de términos $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ tal que $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$, donde $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 w_\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 w_\mathfrak{t}$.

□

Lema 5.36. *Sea* $h \in \mathscr{Y}_{r,n}(q)$, $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ *y* $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ *dos* $\boldsymbol{\mu}$*-multitableaux estándar por filas. Entonces* $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h$ *es una combinación lineal de términos* $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$*, donde* $\mathfrak{b}$ *es un* $\boldsymbol{\mu}$*-multitableau estándar por filas.*

Demostración. Por el teorema 5.3, h es una combinación lineal de términos $t_1^{k_1}\cdots t_n^{k_n} g_v$. Además, dado que $t_i \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} = \xi^k \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}}$ si $p_{\boldsymbol{\mu}}(i) = k$, obtenemos $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h$ como una combinación lineal de términos $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} g_v = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} g_v$. Luego, por el lema 5.27, $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} g_v$ es combinación lineal de términos $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_w$. Es decir, $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h$ es una combinación lineal de términos $*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_w$. Además, por la observación 5.31, para cada $w \in \mathfrak{S}_n$ existe $s \in \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}$ y $\boldsymbol{d}(\mathfrak{b}) \in \mathscr{D}_{\boldsymbol{\mu}}$ para algún $\boldsymbol{\mu}$-multitableau estándar por filas $\mathfrak{b}$, tal que $w = s\boldsymbol{d}(\mathfrak{b})$ y $\ell(w) = \ell(s) + \ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{b}))$. Por lo tanto, a través de la igualdad 5.26.2, obtenemos que

$$*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_w = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_s g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{b})} = q^{\ell(s)} *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\mu}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{b})} = q^{\ell(s)}\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}.$$

Así, $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h$ es una combinación lineal de términos $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$, donde $\mathfrak{b}$ es un $\boldsymbol{\mu}$-multitableau estándar por filas.

□

De manera similar para $h\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$, usando el anti-automorfismo $*$.

Corolario 5.37. *Sea* $h \in \mathscr{Y}_{r,n}(q)$, $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,n}$ *y* $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ *dos* $\boldsymbol{\mu}$*-multitableaux estándar por filas. Entonces* $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h$ *es una combinación lineal de términos* $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ *tal que* $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$.

Demostración. Inmediato de los lema 5.36 y 5.35.

□

De lo anterior se tiene que $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$ es generado por $\mathscr{M}_{r,n}$. Por otro lado, la cardinalidad de $\mathscr{M}_{r,n}$ es $r^n n!$. Además, del teorema 5.3, $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$ es un R-módulo libre de rango $r^n n!$. Es decir, el álgebra de Yokonuma-Hecke $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$ es libre como R-módulo con base $\mathscr{M}_{r,n}$. Con lo cual, solo nos queda por demostrar que efectivamente es una base celular.

Definición 5.38. *Sea $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{r,n}$. Definimos $\mathscr{Y}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ como el R-submódulo de $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$ con base*

$$\left\{ \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \mid \boldsymbol{\mu} \in Par_{r,n}\ ,\ \boldsymbol{\mu} \trianglerighteq \boldsymbol{\lambda}\ \text{ y }\ \mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\mu}) \right\}$$

y $\check{\mathscr{Y}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ como el R-submódulo de $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$ con base

$$\left\{ \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \mid \boldsymbol{\mu} \in Par_{r,n}\ ,\ \boldsymbol{\mu} \triangleright \boldsymbol{\lambda}\ \text{ y }\ \mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\mu}) \right\}.$$

Observación 5.39. *El corolario* 5,37 *junto al anti-automorfismo $*$, muestra que $\mathscr{Y}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ es un ideal bilátero de $\mathscr{Y}_{r,n}$. Por otro lado, $\check{\mathscr{Y}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n} = \sum_{\boldsymbol{\mu} \triangleright \boldsymbol{\lambda}} \mathscr{Y}^{\boldsymbol{\mu}}_{r,n}$. Es decir, $\check{\mathscr{Y}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ tambien es un ideal bilátero de $\mathscr{Y}_{r,n}$. Con lo cual podemos probar el resultado principal de esta sección.*

Teorema 5.40. *$(\mathscr{M}_{r,n}, Par_{r,n})$ es una base celular del álgebra de Yokonuma-Hecke $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$. Es decir, $(\mathscr{Y}_{r,n}(q), Par_{r,n}, \boldsymbol{Std}, \mathscr{M}_{r,n}, *)$ es un álgebra celular.*

Demostración. Ya hemos visto que $\mathscr{M}_{r,n}$ es una base de $\mathscr{Y}_{r,n}$, y a partir de las definiciones es inmediato que $*\left(\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}\right) = \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$. Por lo tanto, solo falta demostrar que dado $h \in \mathscr{Y}_{r,n}$ y $\mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ existen $r_{\mathfrak{b}} \in R$ tal que para todo $\mathfrak{s} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$

$$\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{b}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}} \mod \check{\mathscr{Y}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}.$$

Si $N_{\boldsymbol{\lambda}}$ es el R-módulo generado por $\check{\mathscr{Y}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ y $\left\{ \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}\mathfrak{t}} \mid \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda}) \right\}$. El argumento de la observación 5.39 muestra que $N_{\boldsymbol{\lambda}}$ es un ideal de $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$. Por lo tanto, dado $\mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ y $h \in \mathscr{Y}_{r.n}(q)$, existen $\boldsymbol{r}_{\mathfrak{b}}$ tal que

$$\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}\mathfrak{t}} h \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{b}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}\mathfrak{b}} \mod \check{\mathscr{Y}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}. \tag{5.40.1}$$

Luego, al multiplicar a izquierda por $*\left(g_{d(\mathfrak{s})}\right)$ se prueba el teorema.

□

Observación 5.41. *Si* $\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}} := \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\lambda}}\mathfrak{t}} + \check{\mathscr{Y}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ *para cada* $\mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$*, al igual que en la definición 3.5, se define el* ***módulo celular*** $S^{\boldsymbol{\lambda}}$ *como el* $\mathscr{Y}_{r.n}(q)$*-módulo derecho que es libre como* R*-módulo con base* $\{\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}} \mid \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})\}$*. Donde, para cada* $h \in \mathscr{Y}_{r.n}(q)$ *obtenemos*

$$\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}} h \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{b}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{b}}.$$

Donde, $r_{\mathfrak{b}} \in R$ *esta determinado por la ecuación 5.40.1 de la demostración del teorema anterior. Además, por el lema 3.4* (iii)*. Si* $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$*, existe* $r_{\mathfrak{st}} \in R$ *tal que para todo* $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$

$$\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{us}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{tb}} \equiv r_{\mathfrak{st}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{ub}} \mod \check{\mathscr{Y}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}. \tag{5.41.1}$$

Así, como en la definición 3.8, obtenemos la operación bilineal

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & S^{\boldsymbol{\lambda}} \times S^{\boldsymbol{\lambda}} & \longrightarrow & R \\ & \left(\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}}\ ,\ \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}}\right) & \longmapsto & r_{\mathfrak{st}} \end{array}$$

donde $r_{\mathfrak{st}} \in R$ *esta definido por la ecuación 5.41.1. Es decir, para todo* $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$

$$\left\langle \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{s}}, \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{t}} \right\rangle \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{ub}} \equiv \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{us}} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{tb}} \mod \check{\mathscr{Y}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}.$$

Luego, de la definición 3.10 se define el $\mathscr{Y}_{r.n}(q)$*-submódulo de* $S^{\boldsymbol{\lambda}}$

$$rad\left(S^{\boldsymbol{\lambda}}\right) = \left\{ x \in S^{\boldsymbol{\lambda}} \;\middle|\; \langle x, y\rangle = 0 \ \textit{para todo} \ y \in S^{\boldsymbol{\lambda}} \right\}$$

y el $\mathscr{Y}_{r.n}(q)$*-módulo derecho*

$$D^{\boldsymbol{\lambda}} = S^{\boldsymbol{\lambda}} \Big/ rad\left(S^{\boldsymbol{\lambda}}\right).$$

Así, gracias al teorema 3.18 de Graham y Lehrer, obtenemos el resultado que concluye con este capítulo.

Teorema 5.42. *Si* R *es un cuerpo, entonces*

$$\left\{ D^{\boldsymbol{\lambda}} \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda} \in Par_{r,n} \ \ y \ \ D^{\boldsymbol{\lambda}} \neq 0 \right\}$$

es un conjunto completo de $\mathscr{Y}_{r,n}(q)$*-módulos irreducibles no isomorfos entre si.*

Capítulo 6

Base Celular de la Framización del Álgebra de Hecke de Tipo B

En este capítulo se construye una base celular para la framización del álgebra de Hecke de tipo B. Dicha base es inspirada en la construcción realizada para la álgebra ciclotómica de tipo $G(r,1,n)$ en [3] (álgebra de Ariki-Koike) , la cual generaliza el álgebra de Hecke de tipo A y B para $r=1$ y $r=2$ respectivamente. A continuación, se siguen usando las notaciones de las definiciones de los capítulos anteriores.

6.1. Base Celular del Álgebra de Hecke de Tipo B

En lo que sigue, hacemos un breve resumen de la construcción de una base celular para el álgebra $\mathscr{H}(W_n)$ de Hecke de tipo B. Para más detalles, puede ver [2],[3] y [4].

Definición 6.1. *Denotamos W_n al grupo de Coxeter de tipo B generado por $s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}$, con las siguientes relaciones:*

$$\begin{array}{rcllll} s_i^2 & = & 1 & si & i \geq 0 \\ (s_i s_j)^2 & = & 1 & si & |i-j| > 1 \\ (s_i s_{i+1})^3 & = & 1 & si & i \geq 1 \\ (s_0 s_1)^4 & = & 1 & & \end{array}$$

Note que s_i para $i \geq 1$ puede ser visto como la transposición $(i, i+1)$.

Definición 6.2. *Sea W_n el grupo de Coxeter de tipo B. Si R es un anillo conmutativo con unidad y $q, Q \in R$ son invertibles, definimos el* ***álgebra de Iwahori-Hecke de tipo** B* *denotada por $\mathcal{H}(W_n)$, como el R-módulo con base $\{T_w \mid w \in W_n\}$ con una segunda operación dada por*

$$T_w T_{s_i} = \begin{cases} T_{ws_i} & \text{si } \ell(ws_i) > \ell(w) \\ qT_{ws_i} + \left(q-1\right) T_w & \text{si } i \geq 1 \text{ y } \ell(ws_i) < \ell(w) \\ QT_{ws_i} + (Q-1)\, T_w & \text{si } i = 0 \text{ y } \ell(ws_i) < \ell(w) \end{cases}$$

para todo $w \in W_n$.

Por definición, $T_w = T_{s_{i_1}} T_{s_{i_2}} \cdots T_{s_{i_k}}$ si y sólo si $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ es la expresión reducida de w. Luego, denotamos $T_i := T_{s_i}$ para todo $i \geq 0$. Así, de la operación definida anteriormente y las relaciones de W_n se obtienen las siguientes relaciones sobre $\mathcal{H}(W_n)$.

$$T_i T_j = T_j T_i \qquad \text{si} \quad |i-j| > 1 \tag{6.2.1}$$

$$T_i T_j T_i = T_j T_i T_j \qquad \text{si} \quad |i-j| = 1\ ,\ i, j \neq 0 \tag{6.2.2}$$

$$T_0 T_1 T_0 T_1 = T_1 T_0 T_1 T_0 \tag{6.2.3}$$

$$T_i^2 = q + \left(q-1\right) T_i \qquad \text{si} \quad i \geq 1 \tag{6.2.4}$$

$$T_0^2 = Q + (Q-1)\, T_0 \tag{6.2.5}$$

Es de notar que el álgebra de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}$ es una subálgebra de $\mathcal{H}(W_n)$ generada por $\{T_i \mid i \geq 1\}$. En particular, $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_\mu)$ es una subálgebra de $\mathcal{H}(W_n)$, donde $\mathfrak{S}_\mu$ es el Young subgrupo asociado a una composición μ.

Observación 6.3. *Note que $T_w T_v = T_{wv}$ si $\ell(w) + \ell(v) = \ell(wv) > \ell(w)$. Además, si $u = q^{1/2}$, $v = Q^{1/2}$, $\hat{T}_i = q^{-1/2} T_i$ y $\hat{T}_0 = Q^{-1/2} T_0$. Entonces $\mathcal{H}(W_n)$ es generado por $\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2, \cdots, \hat{T}_{n-1}$, sujeto a las siguientes relaciones:*

$$\hat{T}_i \hat{T}_j = \hat{T}_j \hat{T}_i \qquad si \quad |i-j| > 1$$

$$\hat{T}_i \hat{T}_j \hat{T}_i = \hat{T}_j \hat{T}_i \hat{T}_j \qquad si \quad |i-j| = 1\ ,\ i, j \neq 0$$

$$\hat{T}_0 \hat{T}_1 \hat{T}_0 \hat{T}_1 = \hat{T}_1 \hat{T}_0 \hat{T}_1 \hat{T}_0$$

$$\hat{T}_i^{\,2} = 1 + (u - u^{-1}) \hat{T}_i \qquad si \quad i \geq 1$$

$$\hat{T}_0^{\,2} = 1 + (v - v^{-1}) \hat{T}_0 \qquad si \quad i \geq 1$$

Definición 6.4. *Si $i > j$ escribimos $T_{i,j} := T_{i-1}T_{i-2}\cdots T_j$ y $T_{j,i} := T_jT_{j+1}\cdots T_{i-1}$. Así, definimos*

$$u_a^+ := \prod_{i=1}^{a}\left(q^{i-1} + T_{i,1}T_0T_{1,i}\right).$$

Observación 6.5. *En la proposición 3.4 de [2] se prueba que u_a^+ conmuta con T_{s_i} si $a \neq i$. Además, si $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2,n}$, de la observación 3.7 de [3], los elementos de $\mathcal{H}\left(\mathfrak{S}_{\|\boldsymbol{\mu}\|}\right)$ conmutan con u_a^+ cuando $a = \left|\mu^{(1)}\right|$. Esto también se puede ver en la definición 4.1 de [4].*

Para lo que sigue, si $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2,n}$ y $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{2,n}$ son llamados **bicomposición** y **bipartición** respectivamente. Además, $\mathfrak{t}$ es llamado **bitableau**.

Definición 6.6. *Sea $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2,n}$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ dos $\boldsymbol{\mu}$-bitableaux estándar por filas. Se define*

$$\overline{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} := *\left(T_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) u_a^+ m_{\mu^{(1)}} m_{\mu^{(2)}} T_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} \quad \text{donde} \quad a = \left|\mu^{(1)}\right|.$$

Observación 6.7. *De la observación anterior se deduce que u_a^+ conmuta con $m_{\mu^{(1)}}$ y $m_{\mu^{(2)}}$. Por otro lado, de [[3], 3.15] y [[3], 3.18] se obtiene que dado $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ dos $\boldsymbol{\mu}$-bitableaux estándar por filas y $h \in \mathcal{H}$, se cumple que $\overline{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}h$ se puede escribir como una combinación lineal de términos $\overline{m}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ donde $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ para alguna bipartición $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$. Luego, con la siguiente proposición podemos definir la base celular de $\mathcal{H}(W_n)$.*

Proposición 6.8 ([3], Proposición 3.20). *Sea $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{2,n}$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \boldsymbol{std}(\boldsymbol{\lambda})$. Entonces $\overline{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}T_0$ es una combinación lineal de términos $\overline{m}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$, donde $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{std}(\boldsymbol{\mu})$ para alguna bipartición $\boldsymbol{\mu} \trianglerighteq \boldsymbol{\lambda}$.*

Así, si escribimos $\overline{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} := \overline{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ cuando $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{2,n}$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$, definimos el conjunto

$$\mathcal{M}_n = \left\{ \overline{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda} \in Par_{2,n} \text{ y } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda}) \right\}.$$

y el anti-automorfismo R-lineal $* : \mathcal{H}(W_n) \mapsto \mathcal{H}(W_n)$ definido por $*(T_w) = T_{w^{-1}}$ para todo $w \in W_n$. Donde, $*(T_i) = T_i$ para todo $i \geq 0$.

Observación 6.9. *De la observación y proposición anterior, si $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{2,n}$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \boldsymbol{std}(\boldsymbol{\lambda})$, para todo $h \in \mathcal{H}(W_n)$ se obtiene que $\overline{m}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}h$ es una combinación lineal de términos $\overline{m}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}^{\boldsymbol{\mu}}$, para alguna bipartición $\boldsymbol{\mu} \trianglerighteq \boldsymbol{\lambda}$.*

Así, si definimos $\mathcal{H}^{\boldsymbol{\lambda}}(W_n)$ como el R-submódulo de $\mathcal{H}(W_n)$ con base

$$\left\{ \overline{m}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}^{\boldsymbol{\mu}} \mid \boldsymbol{\mu} \in Par_{2,n}\,,\ \boldsymbol{\mu} \trianglerighteq \boldsymbol{\lambda} \text{ y } \mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\mu}) \right\}$$

y $\check{\mathscr{H}}^{\boldsymbol{\lambda}}(W_n)$ como el R-submódulo de $\mathscr{H}(W_n)$ con base

$$\left\{ \overline{m}^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}} \mid \boldsymbol{\mu} \in Par_{2,n} \, , \, \boldsymbol{\mu} \rhd \boldsymbol{\lambda} \ \text{ y } \ \mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\mu}) \right\},$$

obtenemos que $\mathscr{H}^{\boldsymbol{\lambda}}(W_n)$ y $\check{\mathscr{H}}^{\boldsymbol{\lambda}}(W_n)$ son ideales bilaterales de $\mathscr{H}(W_n)$, con lo cual, ya podemos enunciar el teorema principal de esta sección.

Teorema 6.10 ([3], Teorema 3.26)**.** *$\left(\mathscr{M}_n, Par_{2,n}\right)$ es una base celular del álgebra de Hecke de tipo B. Es decir, $\left(\mathscr{H}(W_n), Par_{2,n}, \boldsymbol{Std}, \mathscr{M}_n, *\right)$ es un álgebra celular.*

Hasta este punto ya sabemos la construcción de las bases celulares del álgebras de Iwahori-Hecke de tipo A y tipo B, al igual que la base celular del álgebra de Yokonuma-Hecke. Ahora, podemos obtener una idea de como construir una base celular para la framización del álgebra de Hecke de tipo B. Lo cual se muestra en el trascurso de las siguientes secciones.

Observación 6.11. *La construcción realizada en esta sección se encuentra en general para el álgebra de Ariki-Koike.*

6.2. Framización del Álgebra de Hecke de Tipo B

La idea de framización de un álgebra de nudos fue introducida por J. Juyumaya y S. Lambropoulou en [14], y consiste esencialmente en agregar algunos generadores específicos a una álgebra dada, junto a las relaciones entre nuevos generadores y los presentes en el álgebra inicial. En esta sección presentamos la framización del álgebra de Hecke de tipo B introducida en [8] y posteriormente conjeturamos la base celular para dicha álgebra.

Definición 6.12 (Ver [8])**.** *Sea R un anillo conmutativo con unidad, $r, n \in \mathbb{N}$ y $q, Q \in R$ invertible. La **framización del álgebra de Yokonuma-Hecke de tipo** B, denotada por $\mathscr{Y}^{B}_{r,n}$, es la R-álgebra asociativa generada por $g_0, g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}, t_1, t_2, \cdots, t_n$, sujeta a las* *siguientes relaciones:*

$$t_i^r = 1 \quad si \quad i \geq 1 \tag{6.12.1}$$
$$t_i t_j = t_j t_i \quad si \quad i \geq 1 \tag{6.12.2}$$
$$t_i g_0 = g_0 t_i \quad si \quad i \geq 1 \tag{6.12.3}$$
$$t_j g_i = g_i t_{j s_i} \quad si \quad i, j \geq 1 \tag{6.12.4}$$
$$g_i g_j = g_j g_i \quad si \quad |i-j| > 1 \tag{6.12.5}$$
$$g_i g_j g_i = g_j g_i g_j \quad si \quad |i-j| = 1\ ,\ i, j \neq 0 \tag{6.12.6}$$
$$g_0 g_1 g_0 g_1 = g_1 g_0 g_1 g_0 \tag{6.12.7}$$
$$g_i^2 = 1 + \left(q - q^{-1}\right) e_i g_i \quad si \quad i \geq 1 \tag{6.12.8}$$
$$g_0^2 = 1 + \left(Q - Q^{-1}\right) f_1 g_0 \tag{6.12.9}$$

Donde

$$f_1 := \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} t_1^s \quad y \quad e_i := \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} t_i^s t_{i+1}^{-s} \quad para \quad i \geq 1.$$

Note que f_1 es idempotente. En efecto, usando la relación 6.12.1

$$f_1^2 = \left(\frac{1}{r} \sum_{s=0}^{r-1} t_1^s\right)\left(\frac{1}{r} \sum_{p=0}^{r-1} t_1^p\right) = \frac{1}{r^2} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{p=0}^{r-1} t_1^{s+p} = \frac{1}{r^2} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{l=s}^{r-1+s} t_1^l = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} t_1^l = f_1.$$

Por otro lado, g_0 tiene inversa $g_0^{-1} = g_0 + \left(Q^{-1} - Q\right) f_1$.

Observación 6.13. *Sea $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$ una expresión reducida de $w \in W_n$. Dado que los g_i satisfacen las mismas relaciones que los generadores de W_n, el lema de Matsumoto en [18] implica que el elemento $g_w := g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_m}$ está bien definido, es decir, no depende de la expresión reducida de w. Entonces tenemos que:*

$$g_w g_{s_i} = \begin{cases} g_{ws_i} & si\ \ell(ws_i) > \ell(w) \\ g_{ws_i} + \left(q - q^{-1}\right) g_w e_i & si\ i \geq 1\ y\ \ell(ws_i) < \ell(w) \\ g_{ws_i} + \left(Q - Q^{-1}\right) g_w f_1 & si\ i = 0\ y\ \ell(ws_i) < \ell(w) \end{cases} \tag{6.13.1}$$

Por otro lado, el álgebra de Yokonuma-Hecke $\mathcal{Y}_{r,n}(q)$ es una subálgebra de $\mathcal{Y}_{r,n}^B$ generada por los g_i y t_i tal que $i \geq 1$. En particular, $\mathcal{Y}(\mathfrak{S}_\mu)$ es una subálgebra de $\mathcal{Y}_{r,n}^B$.

Teorema 6.14. *[8] La framización del álgebra de Yokonuma-Hecke $\mathcal{Y}^B_{r,n}$ tiene base*

$$\mathcal{B}^B_{r,n} = \left\{ t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_n^{k_n} g_w \;\middle|\; w \in W_n \;\; y \;\; k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \right\}.$$

Es decir, es libre como R-módulo con rango $2^n r^n n!$.

Observación 6.15. *En particular, si $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,b}$ con $b \leq n$, de la observación 5.26 tenemos que $t_1 U_{\boldsymbol{\mu}} = \xi U_{\boldsymbol{\mu}}$. Así,*

$$f_1 U_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r-1} t_1^s U_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r-1} \xi^s U_{\boldsymbol{\mu}} = 0.$$

En general, $t_i U_{\boldsymbol{\mu}} = \xi^k U_{\boldsymbol{\mu}}$ donde $p_{\boldsymbol{\mu}}(i) = k$. Luego, si para cada $w \in \mathfrak{S}_n$ definimos $f_w = \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r-1} t_i^s$, donde $i = 1w$, tenemos que

$$f_w U_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r-1} t_i^s U_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r-1} \xi^{sk} U_{\boldsymbol{\mu}} = 0.$$

Basados en la sección anterior y tomando en cuenta el cambio de variable, definimos el siguiente objeto.

Definición 6.16. *Si $i > j$ escribimos $g_{i,j} := g_{i-1} g_{i-2} \cdots g_j$ y $g_{j,i} := g_j g_{j+1} \cdots g_{i-1}$. Así, definimos*

$$\boldsymbol{u}_a := \prod_{i=1}^{a} \left(1 + g_{i,1} g_0 g_{1,i}\right).$$

Por ejemplo, si $a = 3$

$$\boldsymbol{u}_3 = (1 + g_0)(1 + g_1 g_0 g_1)(1 + g_2 g_1 g_0 g_1 g_2).$$

Observación 6.17. *Para todo número natural $a \geq 1$, $\boldsymbol{u}_a$ conmuta con g_0.En efecto,*

$$\begin{aligned}
(1 + g_{i-1} \cdots g_2 g_1 g_0 g_1 g_2 \cdots g_{i-1})\, g_0 &= (g_0 + g_{i-1} \cdots g_2 g_1 g_0 g_1 g_0 g_2 \cdots g_{i-1}) \\
&= (g_0 + g_{i-1} \cdots g_2 g_0 g_1 g_0 g_1 g_2 \cdots g_{i-1}) \\
&= g_0 (1 + g_{i-1} \cdots g_2 g_1 g_0 g_1 g_2 \cdots g_{i-1})
\end{aligned}$$

En particular, se puede verificar que $\boldsymbol{u}_a$ conmuta con g_i si $i \neq a$. Además, por las relaciones 6.12.3 y 6.12.4 se obtiene que $\boldsymbol{u}_a$ conmuta con $U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}}$ para todo $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,b}$ y $a \geq 1$, con $b \leq n$.

Lema 6.18. *Sea $g_w \in \mathcal{Y}_{r,n}(q)$ y $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,b}$ con $b \leq n$. Entonces,*

$$U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_w \boldsymbol{u}_a g_0 = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_w \boldsymbol{u}_a$$

Demostración. por la observación 6.17 basta considerar $\boldsymbol{u}_a = (1 + g_0)$. Luego,

$$\begin{aligned} U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_w (1 + g_0) g_0 &= U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_w \left(g_0 + 1 + \left(Q - Q^{-1}\right) f_1 g_0\right) \\ &= U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_w (g_0 + 1) + \left(Q - Q^{-1}\right) U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_w f_1 g_0 \\ &= U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_w (g_0 + 1) + \left(Q - Q^{-1}\right) U_{\boldsymbol{\mu}} f_w E_{\boldsymbol{\mu}} g_w g_0. \end{aligned}$$

Así, de la observación 6.15, tenemos que $U_{\boldsymbol{\mu}} f_w E_{\boldsymbol{\mu}} g_w g_0 = 0$. Lo cual concluye el lema.

□

Teorema 6.19. *Sea $g_w \in \mathcal{Y}_{r,n}(q)$, y sea $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{r,b}$ con $b \leq n$. Entonces,*

$$U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{u}_a g_w g_0 = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} (\boldsymbol{u}_a h_1 + \boldsymbol{u}_{a+1} h_2)$$

para algún $h_1, h_2 \in \mathcal{Y}_{r,n}(q)$.

Demostración. Si $\nu = (a, n - a)$, por la observación 5.31, dado $w \in \mathfrak{S}_n$, existe $u \in \mathfrak{S}_\nu$ y $d \in \mathcal{D}_\nu$ tal que $w = ud$ y $\ell(w) = \ell(u) + \ell(d)$. Entonces,

$$U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{u}_a g_w g_0 = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{u}_a g_u g_d g_0 = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_u \boldsymbol{u}_a g_d g_0$$

Luego, en el caso que d deja fijo al 1, tenemos que g_d conmuta con g_0. Entonces, usando lema 6.18,

$$U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{u}_a g_w g_0 = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_u \boldsymbol{u}_a g_0 g_d = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} g_u \boldsymbol{u}_a g_d = U_{\boldsymbol{\mu}} E_{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{u}_a g_w.$$

Donde $h_1 = g_w$ y $h_2 = 0$. Ahora, siguiendo la idea de la demostración del lema 4,4 en [4], si d no fija al 1, dado que $\mathfrak{t}^\nu d$ es estándar por filas, existe $d' \in \mathfrak{S}_n$ que deja fijo al 1 tal que $d = s_a s_{a-1} \cdots s_1 d'$ y $\ell(d) = a + \ell(d')$. Entonces,

$$\boldsymbol{u}_a g_w g_0 = g_u \boldsymbol{u}_a g_d g_0 = g_u \boldsymbol{u}_a g_{s_a} \cdots g_{s_1} g_{d'} g_0 = g_u \boldsymbol{u}_a g_{a+1,1} g_0 g_{d'}. \qquad (6.19.1)$$

Además, por definición $\boldsymbol{u}_{a+1} = \boldsymbol{u}_a \left(1 + g_{a+1,1} g_0 g_{1,a+1}\right)$. Así, $-\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{u}_{a+1} = \boldsymbol{u}_a g_{a+1,1} g_0 g_{1,a+1}$.

Luego, continuando la ecuación 6.19.1,

$$\begin{aligned} g_u \boldsymbol{u}_a g_{a+1,1} g_0 g_{d'} &= g_u\left(-\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{u}_{a+1}\right) g_{s_a}^{-1} \cdots g_{s_1}^{-1} g_{d'} \\ &= -\boldsymbol{u}_a g_u g_{s_a}^{-1} \cdots g_{s_1}^{-1} g_{d'} + \boldsymbol{u}_{a+1} g_u g_{s_a}^{-1} \cdots g_{s_1}^{-1} g_{d'}. \end{aligned}$$

Así, tomando $h_1 = -g_u g_{s_a}^{-1} \cdots g_{s_1}^{-1} g_{d'}$ y $h_2 = g_u g_{s_a}^{-1} \cdots g_{s_1}^{-1} g_{d'}$ se concluye el Teorema.

□

Definición 6.20. *Si $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2r,n}$, definimos $\widehat{\boldsymbol{\mu}} \in Comp_{r,a}$ y $\overline{\boldsymbol{\mu}} \in Comp_{r,b}$ tal que*

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} := \left(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(r)}\right) \quad y \quad \overline{\boldsymbol{\mu}} := \left(\mu^{(r+1)}, \mu^{(r+2)}, \cdots, \mu^{(2r)}\right)$$

Y escribimos $\boldsymbol{\mu} = \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \overline{\boldsymbol{\mu}}\right)$. Análogamente, si $\mathfrak{s}$ es un $\boldsymbol{\mu}$-multitableau, definimos el $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$-multitableau $\widehat{\mathfrak{s}}$ y el $\overline{\boldsymbol{\mu}}$-multitableau $\overline{\mathfrak{s}}$ tal que

$$\widehat{\mathfrak{s}} := \left(\mathfrak{s}^{(1)}, \mathfrak{s}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{s}^{(r)}\right) \quad y \quad \overline{\mathfrak{s}} := \left(\mathfrak{s}^{(r+1)}, \mathfrak{s}^{(r+2)}, \cdots, \mathfrak{s}^{(2r)}\right).$$

Y escribimos $\mathfrak{s} = \left(\widehat{\mathfrak{s}}, \overline{\mathfrak{s}}\right)$. De igual manera si $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{2r,n}$.

6.3. Base Celular del Framizado de Hecke de Tipo B

Esta sección se verifica que $\mathcal{Y}_{r,n}^B$ tiene una base indexada por pares de $\boldsymbol{\lambda}$-multitableaux estándar. La cual se motiva, a partir de la construcción de la base celular de cada álgebra estudiada anteriormente. Para iniciar, definimos el anti-automorfismo sobre $\mathcal{Y}_{r,n}^B$.

Definición 6.21. *Sea $* : \mathcal{Y}_{r,n}^B \mapsto \mathcal{Y}_{r,n}^B$ el anti-automorfismo R-linear definido por*

$$*(g_w) = g_{w^{-1}} \quad y \quad *(t_i) = t_i \quad \text{para todo} \quad w \in W_n \quad y \quad i \geq 1.$$

Donde, $*(g_i) = g_i$ para todo $i \geq 0$. Por otro lado, si $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ son $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux para algún $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2r,n}$, definimos

$$\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} := *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} \quad donde \quad a = \left|\widehat{\boldsymbol{\mu}}\right|.$$

En particular, escribimos $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} := \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ si $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{2r,n}$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$.

Observación 6.22. *Inicialmente, de la observación 6.17 tenemos que $\boldsymbol{u}_a$ conmuta con $\boldsymbol{m}_{\widehat{\mu}}$ y $\boldsymbol{m}_{\overline{\mu}}$. Por otro lado, es de notar que,*

$$*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\mu}}\boldsymbol{m}_{\overline{\mu}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\widehat{\mathfrak{s}})}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\mu}}g_{\boldsymbol{d}(\widehat{\mathfrak{t}})} *\left(g_{\boldsymbol{d}(\overline{\mathfrak{s}})}\right)\boldsymbol{m}_{\overline{\mu}}g_{\boldsymbol{d}(\overline{\mathfrak{t}})} = \boldsymbol{m}_{\widehat{\mathfrak{s}}\widehat{\mathfrak{t}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\mathfrak{s}}\overline{\mathfrak{t}}}.$$

A continuación, siguiendo la idea de las demostraciones de los lemas 5.35 y 5.36 del capitulo anterior, podemos realizar los siguientes dos lemas.

Lema 6.23. *Sea $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2r,n}$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ dos $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux estándar por filas. Entonces $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ es una combinación lineal de términos $\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ tal que $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$, donde $\mathfrak{u} \trianglerighteq \mathfrak{s}$ y $\mathfrak{b} \trianglerighteq \mathfrak{t}$.*

Demostración. Si $\mu = \|\boldsymbol{\mu}\|$, por la observación 5.31 y 5.23.1, existen $\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}_0), \boldsymbol{d}(\mathfrak{t}_0) \in \mathfrak{S}_\mu$ y $w_{\mathfrak{s}}, w_{\mathfrak{t}} \in \mathscr{D}_\mu$ para algunos $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux de tipo inicial $\mathfrak{s}_0$ y $\mathfrak{t}_0$ tal que,

$\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}) = \boldsymbol{d}(\mathfrak{s}_0)w_{\mathfrak{s}}, \boldsymbol{d}(\mathfrak{t}) = \boldsymbol{d}(\mathfrak{t}_0)w_{\mathfrak{t}}, \ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})) = \ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}_0)) + \ell(w_{\mathfrak{s}})$ y $\ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})) = \ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{t}_0)) + \ell(w_{\mathfrak{t}})$.

Entonces, $g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}_0)}$ conmuta con $\boldsymbol{u}_a$. Así, junto a la observación 6.22,

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_a\boldsymbol{m}_{\widehat{\mu}}\boldsymbol{m}_{\overline{\mu}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} &= *\left(g_{w_{\mathfrak{s}}}\right)*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s}_0)}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\mu}}\boldsymbol{m}_{\overline{\mu}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t}_0)}\boldsymbol{u}_a g_{w_{\mathfrak{t}}}\\ &= *\left(g_{w_{\mathfrak{s}}}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\mathfrak{s}_0}\widehat{\mathfrak{t}_0}}\boldsymbol{m}_{\overline{\mathfrak{s}_0}\overline{\mathfrak{t}_0}}\boldsymbol{u}_a g_{w_{\mathfrak{t}}}.\end{aligned}$$

Luego, de la observación 5.33, $\boldsymbol{m}_{\widehat{\mathfrak{s}}\widehat{\mathfrak{t}}}$ es combinación lineal de términos $\boldsymbol{m}^{\widehat{\boldsymbol{\lambda}}}_{\widehat{\mathfrak{u}_0}\widehat{\mathfrak{b}_0}}$ tal que $\widehat{\boldsymbol{\lambda}} \trianglerighteq \widehat{\boldsymbol{\mu}}$, donde $\widehat{\mathfrak{u}_0} \trianglerighteq \widehat{\mathfrak{s}_0}$, $\widehat{\mathfrak{b}_0} \trianglerighteq \widehat{\mathfrak{t}}_0$ y $\widehat{\mathfrak{u}_0}$, $\widehat{\mathfrak{b}_0}$ son de tipo inicial. De igual manera, $\boldsymbol{m}_{\overline{\mathfrak{s}}\overline{\mathfrak{t}}}$ es combinación lineal de términos $\boldsymbol{m}^{\overline{\boldsymbol{\lambda}}}_{\overline{\mathfrak{u}_0}\overline{\mathfrak{b}_0}}$ tal que $\overline{\boldsymbol{\lambda}} \trianglerighteq \overline{\boldsymbol{\mu}}$, donde $\overline{\mathfrak{u}_0} \trianglerighteq \overline{\mathfrak{s}_0}$, $\overline{\mathfrak{b}_0} \trianglerighteq \overline{\mathfrak{t}}_0$ y $\overline{\mathfrak{u}_0}$, $\overline{\mathfrak{b}_0}$ son de tipo inicial. Es decir, $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$, $\mathfrak{u}_0 \trianglerighteq \mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{b}_0 \trianglerighteq \mathfrak{t}_0$ y $\mathfrak{u}_0$,$\mathfrak{b}_0$ son de tipo inicial. Ahora, dado que $\mathfrak{b}_0$ es de tipo inicial, s_a no es un factor de $\boldsymbol{d}(\mathfrak{b}_0)$. Así, $\boldsymbol{u}_a$ conmuta con $g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{b}_0)}$. Por otro lado, es de notar que $\left|\widehat{\boldsymbol{\lambda}}\right| = \left|\widehat{\boldsymbol{\mu}}\right| = a$. Así, $\boldsymbol{u}_a$ conmuta con $\boldsymbol{m}_{\widehat{\lambda}}$ y $\boldsymbol{m}_{\overline{\lambda}}$. Entonces,

$$\begin{aligned}*\left(g_{w_{\mathfrak{s}}}\right)\boldsymbol{m}^{\widehat{\boldsymbol{\lambda}}}_{\widehat{\mathfrak{u}_0}\widehat{\mathfrak{b}_0}}\boldsymbol{m}^{\overline{\boldsymbol{\lambda}}}_{\overline{\mathfrak{u}_0}\overline{\mathfrak{b}_0}}\boldsymbol{u}_a g_{w_{\mathfrak{t}}} &= *\left(g_{w_{\mathfrak{s}}}\right)*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{u}_0)}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\lambda}}\boldsymbol{m}_{\overline{\lambda}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{b}_0)}\boldsymbol{u}_a g_{w_{\mathfrak{t}}}\\ &= *\left(g_{w_{\mathfrak{s}}}\right)*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{u}_0)}\right)\boldsymbol{u}_a\boldsymbol{m}_{\widehat{\lambda}}\boldsymbol{m}_{\overline{\lambda}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{b}_0)}g_{w_{\mathfrak{t}}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $w_{\mathfrak{s}}, w_{\mathfrak{t}} \in \mathscr{D}_\mu$, tenemos que $\mathfrak{u}_0 w_{\mathfrak{s}} \trianglerighteq \mathfrak{s}_0 w_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}$ y $\mathfrak{b}_0 w_{\mathfrak{t}} \trianglerighteq \mathfrak{t}_0 w_{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}$. Entonces, si $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 w_{\mathfrak{s}}$ y $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 w_{\mathfrak{t}}$, continuando con la ecuación anterior

$$*\left(g_{w_{\mathfrak{s}}}\right)*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{u}_0)}\right)\boldsymbol{u}_a\boldsymbol{m}_{\widehat{\lambda}}\boldsymbol{m}_{\overline{\lambda}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{b}_0)}g_{w_{\mathfrak{t}}} = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{u})}\right)\boldsymbol{u}_a\boldsymbol{m}_{\widehat{\lambda}}\boldsymbol{m}_{\overline{\lambda}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{b})} = \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}.$$

Así, $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$ es combinación lineal de términos $\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ tal que $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$, donde $\mathfrak{u} \trianglerighteq \mathfrak{s}$ y $\mathfrak{b} \trianglerighteq \mathfrak{t}$. □

Lema 6.24. *Sea $h \in \mathscr{Y}_{r,n}(q)$, $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2r,n}$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ dos $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux estándar por filas. Entonces $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h$ es una combinación lineal de términos $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$, donde $\mathfrak{b}$ es un $\boldsymbol{\mu}$-multitableau estándar por filas.*

Demostración. Por el teorema 5.3, h es una combinación lineal de términos $t_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n} g_v$. Además, dado que $t_i \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \xi^k \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$ si $p_{\boldsymbol{\mu}}(i) = k$, obtenemos $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h$ como una combinación lineal de términos $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} g_v = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} g_v$. Luego, por el corolario 5.27, $\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} g_v$ es combinación lineal de términos $\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} g_w$ tal que $w \in \mathfrak{S}_n$. Es decir, $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h$ es una combinación lineal de términos $*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} g_w$. Además, por la observación 5.31, para cada $w \in \mathfrak{S}_n$ existe $s \in \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\mu}}$ y $\boldsymbol{d}(\mathfrak{b}) \in \mathscr{D}_{\boldsymbol{\mu}}$ para algún $\boldsymbol{\mu}$-multitableau estándar por filas $\mathfrak{b}$, tal que $w = s\boldsymbol{d}(\mathfrak{b})$ y $\ell(w) = \ell(s) + \ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{b}))$. Por lo tanto, usando la igualdad 5.26.2, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} g_w &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} g_s g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{b})} \\
&= q^{\ell(s)} *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right) \boldsymbol{u}_a \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{b})} \\
&= q^{\ell(s)} \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}.
\end{aligned}
$$

Así, $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} h$ es una combinación lineal de términos $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$, donde $\mathfrak{b}$ es un $\boldsymbol{\mu}$-multitableau estándar por filas.

□

De manera similar para $h\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$, usando el anti-automorfismo $*$.

Ahora, la siguiente conjetura es clave para la continuación del trabajo.

Conjetura 6.25. *Si $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2r,n}$ y $a = \left|\widehat{\boldsymbol{\mu}}\right|$, existe $h \in \mathscr{Y}_{r,n}$ y $\boldsymbol{\mu}' \in Compr_{2r,n}$ tal que $\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}'} \boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}'} h$, donde $\left|\widehat{\boldsymbol{\mu}}'\right| = a + 1$.*

En adelante, las conjeturas enunciadas poseen "demostración", en el caso que conjetura 6.25 sea cierta. Planteando así, un camino a seguir, para encontrar la base celular de la framización del álgebra de Hecke de tipo B.

Conjetura 6.26. *Sea $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2r,n}$ y $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ dos $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux estándar por filas. Entonces $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} g_0$ es una combinación lineal de términos $\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}$ tal que $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$.*

Demostración. Sea $\mu = \|\boldsymbol{\mu}\|$. En el caso particular en que $g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} \in \mathfrak{S}_\mu$, tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}g_0 = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_a\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}g_0 &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}\boldsymbol{u}_a g_0\\ &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}U_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}E_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}x_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}\boldsymbol{u}_a g_0\\ &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}x_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}U_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}E_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}\boldsymbol{u}_a g_0.\end{aligned}$$

Luego, por el lema 6.18 obtenemos $U_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}E_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}\boldsymbol{u}_a g_0 = U_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}E_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}\boldsymbol{u}_a$. Así, $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}g_0 = \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}$. Luego, por el lema 6.23 se concluye la demostración. Ahora, si $g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})} \notin \mathfrak{S}_\mu$, por la observación 5.31, existe $u \in \mathfrak{S}_\mu$ y $w \in \mathscr{D}_\mu$ tal que $\boldsymbol{d}(\mathfrak{t}) = uw$ y $\ell(\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})) = \ell(u) + \ell(w)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}g_0 = *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_a\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{t})}g_0 &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_a\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u g_w g_0\\ &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_a\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}U_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}E_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}x_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u g_w g_0\\ &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}x_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u U_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}E_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{u}_a g_w g_0.\end{aligned}$$

Luego, por el teorema 6.19 existen $h_1, h_2 \in \mathscr{Y}_{r,n}(q)$, tal que la ecuación anterior

$$\begin{aligned}&= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}x_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u U_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}E_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}\left(\boldsymbol{u}_a h_1 + \boldsymbol{u}_{a+1}h_2\right)\\ &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}U_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}E_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}x_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u\left(\boldsymbol{u}_a h_1 + \boldsymbol{u}_{a+1}h_2\right)\\ &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u\left(\boldsymbol{u}_a h_1 + \boldsymbol{u}_{a+1}h_2\right)\\ &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_a\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u h_1 + *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_{a+1}\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u h_2\\ &= \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\mu}}}g_u h_1 + *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_{a+1}\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u h_2.\end{aligned}$$

Así, de los lemas 6.24 y 6.23, tenemos que la primera componente $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\mu}}}g_u h_1$ es combinación lineal de términos $\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\nu}}_{\mathfrak{g}\mathfrak{p}}$ tal que $\boldsymbol{\nu} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$. Por otro lado, por la conjetura 6.25, existe $\boldsymbol{\mu}' \in Comp_{2r,n}$ tal que $\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}} = \boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}'}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}'}h$, donde $\left|\widehat{\boldsymbol{\mu}}'\right| = a+1$. Entonces,

$$\begin{aligned}*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_{a+1}\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}}g_u h_2 &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\boldsymbol{u}_{a+1}\boldsymbol{m}_{\widehat{\boldsymbol{\mu}}'}\boldsymbol{m}_{\overline{\boldsymbol{\mu}}'}h g_u h_2\\ &= *\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\mu}'}\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\mu}'}}h g_u h_2.\end{aligned}$$

Así, de los lemas 6.24 y 6.23, tenemos que la segunda componente $*\left(g_{\boldsymbol{d}(\mathfrak{s})}\right)\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\mu}'}\mathfrak{t}^{\boldsymbol{\mu}'}}h g_u h_2$ es combinación lineal de términos $\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\nu}'}_{\mathfrak{g}'\mathfrak{p}'}$ tal que $\boldsymbol{\nu}' \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}'$. Lo cual concluye la conjetura.

□

Conjetura 6.27. *Sea $h \in \mathcal{Y}^B_{r,n}$, $\boldsymbol{\mu} \in Comp_{2r,n}$ y $\mathfrak{s},\mathfrak{t}$ dos $\boldsymbol{\mu}$-multitableaux estándar por filas. Entonces $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{st}}h$ es una combinación lineal de términos $\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{ub}}$ tal que $\boldsymbol{\lambda} \trianglerighteq \boldsymbol{\mu}$.*

Demostración. Inmediato de los lemas 6.24, 6.23 y la conjetura 6.26. □

Definición 6.28. *Se define el conjunto*

$$\overline{\mathcal{M}}_{r,n} = \left\{ \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}} \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda} \in Par_{2r,n} \;\; y \;\; \mathfrak{s},\mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda}) \right\}.$$

Así, de la conjetura 6.27, obtenemos que $\mathcal{Y}^B_{r,n}$ es generado por $\overline{\mathcal{M}}_{r,n}$. Además, por el teorema 6.14, $\mathcal{Y}^B_{r,n}$ es un R-módulo libre de rango $2^n r^n n!$. Por otro lado, la cardinalidad de $\overline{\mathcal{M}}_{r,n}$ es $2^n r^n n!$. Es decir, la framización del álgebra de Yokonuma-Hecke $\mathcal{Y}^B_{r,n}$ es libre como R-módulo con base $\overline{\mathcal{M}}_{r,n}$. Con lo cual, solo nos queda por demostrar que efectivamente es una base celular.

Definición 6.29. *Sea $\boldsymbol{\lambda} \in Par_{2r,n}$. Definimos $\mathcal{Y}^{B\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ como el R-submódulo de $\mathcal{Y}^B_{r,n}$ con base*

$$\left\{ \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{ub}} \;\middle|\; \boldsymbol{\mu} \in Par_{2r,n} \,,\; \boldsymbol{\mu} \trianglerighteq \boldsymbol{\lambda} \;\; y \;\; \mathfrak{u},\mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\mu}) \right\}$$

y $\check{\mathcal{Y}}^{B\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ como el R-submódulo de $\mathcal{Y}^B_{r,n}$ con base

$$\left\{ \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathfrak{ub}} \;\middle|\; \boldsymbol{\mu} \in Par_{2r,n} \,,\; \boldsymbol{\mu} \triangleright \boldsymbol{\lambda} \;\; y \;\; \mathfrak{u},\mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\mu}) \right\}.$$

Observación 6.30. *La conjetura* 6,27 *junto al anti-automorfismo $*$, muestra que $\mathcal{Y}^{B\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ es un ideal bilátero de $\mathcal{Y}^B_{r,n}$. Por otro lado, $\check{\mathcal{Y}}^{B\boldsymbol{\lambda}}_{r,n} = \sum_{\boldsymbol{\mu} \triangleright \boldsymbol{\lambda}} \mathcal{Y}^{B\boldsymbol{\mu}}_{r,n}$. Es decir, $\check{\mathcal{Y}}^{B\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}$ tambien es un ideal bilátero de $\mathcal{Y}^B_{r,n}$. Con lo cual podemos probar el resultado principal de esta sección.*

Conjetura 6.31. *$\left(\overline{\mathcal{M}}_{r,n}, Par_{2r,n}\right)$ es una base celular de la framización del álgebra de Yokonuma-Hecke $\mathcal{Y}^B_{r,n}$. Es decir, $\left(\mathcal{Y}^B_{r,n}, Par_{2r,n}, \boldsymbol{Std}, \overline{\mathcal{M}}_{r,n}, *\right)$ es un álgebra celular.*

Demostración. Ya hemos visto que a partir de la conjetura 6.27 $\overline{\mathcal{M}}_{r,n}$ es una base de $\mathcal{Y}^B_{r,n}$, y a partir de las definiciones es inmediato que $*\left(\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}}\right) = \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{ts}}$. Por lo tanto, solo falta demostrar que dado $h \in \mathcal{Y}^B_{r,n}$ y $\mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ existen $r_{\mathfrak{b}} \in R$ tal que para todo $\mathfrak{s} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$

$$\overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{st}} h \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{b}} \overline{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathfrak{sb}} \mod \check{\mathcal{Y}}^{B\boldsymbol{\lambda}}_{r,n}.$$

Si $\overline{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$ es el R-módulo generado por $\check{\mathcal{Y}}_{r,n}^{B\boldsymbol{\lambda}}$ y $\left\{ \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda}) \right\}$. El argumento de la observación 6.30 muestra que $\overline{N}_{\boldsymbol{\lambda}}$ es un ideal de $\mathcal{Y}_{r,n}^{B}$. Por lo tanto, dado $\mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$ y $h \in \mathcal{Y}_{r.n}^{B}$, existen $\boldsymbol{r}_{\mathfrak{b}}$ tal que

$$\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} h \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})} r_{\mathfrak{b}} \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{b}}^{\boldsymbol{\lambda}} \mod \check{\mathcal{Y}}_{r,n}^{B\boldsymbol{\lambda}}. \tag{6.31.1}$$

Luego, al multiplicar a izquierda por $*\left(g_{d(\mathfrak{s})}\right)$ se prueba el enunciado.

$\square$

Observación 6.32. *Si $\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} := \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}^{\lambda}\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} + \check{\mathcal{Y}}_{r,n}^{B\boldsymbol{\lambda}}$ para cada $\mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$, al igual que en la definición 3.5, se define el **módulo celular** $\overline{S}^{\boldsymbol{\lambda}}$ como el $\mathcal{Y}_{r.n}^{B}$-módulo derecho que es libre como R-módulo con base $\{\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})\}$. Donde, para cada $h \in \mathcal{Y}_{r.n}^{B}$ obtenemos*

$$\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} h \equiv \sum_{\mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\lambda)} r_{\mathfrak{b}} \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{b}}^{\boldsymbol{\lambda}}.$$

$r_{\mathfrak{b}} \in R$ esta determinado por la ecuación 6.31.1 de la conjetura anterior. Además, por el lema 3.4 (iii). Si $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$, existe $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in R$ tal que para todo $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$

$$\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}}^{\boldsymbol{\lambda}} \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}\mathfrak{b}}^{\boldsymbol{\lambda}} \equiv r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}^{\boldsymbol{\lambda}} \ mod\, \check{\mathcal{Y}}_{r,n}^{B\boldsymbol{\lambda}}. \tag{6.32.1}$$

Así, como en la definición 3.8, obtenemos la operación bilineal

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle: & \overline{S}^{\boldsymbol{\lambda}} \times \overline{S}^{\boldsymbol{\lambda}} & \longrightarrow & R \\ & \left(\overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}}^{\boldsymbol{\lambda}}\ ,\ \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}}\right) & \longmapsto & r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \end{array}$$

donde $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \in R$ esta definido por la ecuación 6.32.1. Es decir, para todo $\mathfrak{u}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{Std}(\boldsymbol{\lambda})$

$$\left\langle \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{s}}^{\boldsymbol{\lambda}}, \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}}^{\boldsymbol{\lambda}} \right\rangle \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{b}}^{\boldsymbol{\lambda}} \equiv \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}}^{\boldsymbol{\lambda}} \overline{\boldsymbol{m}}_{\mathfrak{t}\mathfrak{b}}^{\boldsymbol{\lambda}} \mod \check{\mathcal{Y}}_{r,n}^{B\boldsymbol{\lambda}}.$$

Luego, de la definición 3.10 se define el $\mathcal{Y}_{r.n}^{B}$-submódulo de $\overline{S}^{\boldsymbol{\lambda}}$

$$rad\left(\overline{S}^{\boldsymbol{\lambda}}\right) = \left\{ x \in \overline{S}^{\boldsymbol{\lambda}} \ \middle|\ \langle x, y \rangle = 0 \ \ para\ todo\ \ y \in \overline{S}^{\boldsymbol{\lambda}} \right\}$$

y el $\mathcal{Y}_{r.n}^{B}$-módulo derecho

$$\overline{D}^{\boldsymbol{\lambda}} = \overline{S}^{\boldsymbol{\lambda}} \Big/ rad\left(\overline{S}^{\boldsymbol{\lambda}}\right).$$

Así, gracias al teorema 3.18 de Graham y Lehrer, obtenemos el enunciado que concluye con este trabajo.

Conjetura 6.33. *Si R es un cuerpo, entonces*

$$\left\{ \overline{D}^{\boldsymbol{\lambda}} \;\middle|\; \boldsymbol{\lambda} \in Par_{2r,n} \;\; y \;\; \overline{D}^{\boldsymbol{\lambda}} \neq 0 \right\}$$

es un conjunto completo de $\mathcal{Y}_{r,n}^{B}$-módulos irreducibles no isomorfos entre si.

Demostración. Inmediato del teorema 3.18 y la conjetura 6.31. □

Bibliografía

[1] CECCHERINI-SILBERSTEIN, T., SCARABOTTI, F., AND TOLLI, F. *Representation theory of the symmetric groups: the Okounkov-Vershik approach, character formulas, and partition algebras*, vol. 121. Cambridge University Press, 2010.

[2] DIPPER, R., AND JAMES, G. Representations of hecke algebras of type bn. *Journal of algebra 146*, 2 (1992), 454–481.

[3] DIPPER, R., JAMES, G., AND MATHAS, A. Cyclotomic q–schur algebras. *Mathematische Zeitschrift 229*, 3 (1998), 385–416.

[4] DIPPER, R., JAMES, G., AND MURPHY, E. Hecke algebras of type bn at roots of unity. *Proceedings of the London Mathematical Society 3*, 3 (1995), 505–528.

[5] ERDMANN, K., AND HOLM, T. *Algebras and Representation Theory*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 2018.

[6] ESPINOZA, J., AND RYOM-HANSEN, S. Cell structures for the Yokonuma–Hecke algebra and the algebra of braids and ties. *Journal of Pure and Applied Algebra 222* (2018), 3675–3720.

[7] ETINGOF, P., GOLBERG, O., HENSEL, S., LIU, T., SCHWENDNER, A., VAINTROB, D., AND YUDOVINA, E. *Introduction to representation theory*, vol. 59. American Mathematical Soc, 2011.

[8] FLORES, M., JUYUMAYA, J., AND LAMBROPOULOU, S. A Framization of the Hecke algebra of Type B. *Journal of Pure and Applied Algebra 222* (2018), 778–806.

[9] FROBENIUS, F. Über Gruppencharaktere. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1896), 985–1021.

[10] FROBENIUS, F. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1897), 944–1015.

[11] FULTON, W. *The Robinson–Schensted–Knuth correspondence*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1996, p. 36–57.

[12] HUNGERFORD, W. *Algebra. Graduate Texts in Mathematics*, vol. 73. Springer, 1974.

[13] JUYUMAYA, J. Markov trace on the Yokonuma-Hecke algebra. *Journal of Knot Theory and its Ramifications 1* (2004).

[14] JUYUMAYA, J., AND LAMBROPOULOU, S. On the framization of knot algebras. In *New Ideas in Low Dimensional Topology*. World Scientific, 2015, pp. 297–333.

[15] KÖNIG, S., AND XI, C. On the number of cells of a cellular algebra. *Communications in Algebra 27* (1999), 5463–5470.

[16] LEHRER, G., AND GRAHAM, J. Cellular algebras. *Inventiones Mathematicae 123* (1996), 1–34.

[17] MATHAS, A., AND MATHAS, M. *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*, vol. 15. American Mathematical Soc, 1999.

[18] MATSUMOTO, H. Générateurs et rélations des groupes de Weyl généralisées. *C. R. Acad. Sci., Paris 258* (1964), 3419–3422.

[19] MURPHY, G. On the representation theory of the symmetric groups and associated Hecke algebras. *Journal of Algebra 152* (1992), 492–513.

[20] RYOM-HANSEN, S. On the representation theory of an algebra of braids and ties. *Journal of Algebraic Combinatorics 33*, 1 (2011), 57–79.

[21] SCHUR, I. Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1905), 406–432.

[22] XI, C. On the quasi-heredity of Birman–Wenzl algebras. *American Mathematical Soc 154* (2000), 280–298.

[23] YOKONUMA, T. Sur la structure des anneaux de Hecke d'un groupe de Chevalley fini. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics 264* (1967), 344.