



UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

Invariantes para Links y Tied Links vía Tensores

por

ERICK ALARCÓN MAMANI

Tesis presentada para optar al grado de Magíster en Matemáticas

Profesor guía Dr. Jesús Juyumaya

Valparaíso 2019

Agradecimientos

A Dios, nuestro Padre y Salvador.

A mi familia compuesta por: Mi pareja Viviana Cruz e hijo Tomás Alarcón. También a mis padres Ana Mamani y Carlos Alarcón, quienes siempre me han apoyado incondicionalmente.

Un especial agradecimiento a los profesores:

- Diego Arcis, quien me ayudó en el desarrollo del programa y me motivó a investigar distintas áreas de la programación.
- Bruno Cisneros, quien me ayudó investigar sobre la dificultad de las multiplicaciones de matrices de gran tamaño.
- Antonio Behn, quien inició mi motivación por aprender a usar Sage. Además, me ayudo en la etapa final del programa.

Por último, quiero dar las gracias al profesor Jesús Juyumaya por su apoyo, motivación y paciencia durante estos dos últimos años.

Índice general

Agradecimientos	1
Índice de figuras	4
Introducción	5
Capítulo 1. Preliminares	11
1. Nudos, links y trenzas	11
1.1. Nudos y links	11
1.2. Trenzas	15
2. Relación entre links y trenzas	18
3. Herramientas algebraicas	19
Capítulo 2. Construcción del polinomio de Jones	23
1. Método de Kauffman	23
2. Usando tensores	25
3. Método de Turaev	35
3.1. Caso dimensión 2	44
4. Caso dimensión 4	52
Capítulo 3. Tied links	64
1. Conceptos fundamentales	64
2. Invariante de tipo Homflypt	66
3. Una representación de TB_n	70
Capítulo 4. Invariantes en Sage	85
1. Software Sage	85

Índice general	3
2. Códigos para invariantes	86
3. Datos computacionales y análisis	93
Bibliografía	97

Índice de figuras

1. Hopf link	12
2. Links isotópicos	12
3. Tipos de cruce. Sobre o por debajo.	13
4. Movimientos de Reidemeister	14
5. Cruce positivo y cruce negativo	14
6. 3-Trenza en \mathbb{R}^3 , proyección y diagrama.	15
7. Diagramas de las trenzas elementales σ_i y σ_i^{-1}	17
1. Marcas y descomposición del cruce	23
1. Diagrama de un tied link	65
2. Diagramas de tied links no tie-isotópicos	65
3. Link visto como tied link	66
4. Tie esencial	66
5. Discos, donde TL_+ , TL_- , TL_\sim , $TL_{+,\sim}$ y $TL_{-,\sim}$ no son tie-isotópicos.	67
6. Diagramas de los generadores σ_i , σ_i^{-1} y η_i	71

Introducción

La teoría de nudos, es la rama de la topología de baja dimensión que estudia las propiedades de los nudos y links (o enlaces). Esta teoría comienza a estudiarse en los siglos XVIII y XIX, pero gran parte de los avances se desarrolló durante el siglo XX. Actualmente, es de mucho interés en matemática, como también sus aplicaciones en otras ciencias.

El gran problema, sin resolver aún, es determinar la clasificación de links. Una herramienta que ayuda al problema de clasificación, son las invariantes para links. Una invariante para links es una función del conjunto de links, en un conjunto (bien entendido), tal que si dos links son equivalentes, sus imágenes son la misma. Algunas invariantes famosas son: el mínimo número de cruces, la tricolorabilidad, el grupo fundamental de un nudo y las invariantes polinomiales, tales como: polinomio de Kauffman [14], Alexander [2], Homflypt [9] y Jones [11].

En 1985, V.F.R. Jones presentó su invariante que revolucionaría esta teoría, ver [11]. En pocos meses después, se descubrió un polinomio de dos variables que generaliza a los polinomios de Jones y Alexander. Este polinomio es conocido como el polinomio Homflypt o polinomio de Jones en dos variables. El polinomio Homflypt puede construirse a partir de la composición de la representación del grupo de trenza con una función traza (traza de Ocneanu) sobre el álgebra de Hecke, este procedimiento es conocido como la receta de Jones. Kurpita y Murasugi en [16] realizan la construcción del polinomio Homflypt, usando la receta de Jones, pero representando el grupo de trenza en un espacio tensorial. Esta idea es debido a V. G. Turaev [19], que utilizó la famosa ecuación de Yang-Baxter, es

decir, la ecuación:

$$(\mathbf{R} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{R})(\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R})(\mathbf{R} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}),$$

donde \mathbf{R} es una matriz cuadrada e \mathbf{I} la matriz identidad.

En 2016, F. Aicardi y J. Juyumaya, ver [3], introdujeron elementos llamados tied links. Estos elementos son links clásicos donde sus componentes puedan estar conectados por ciertos ties (lazos). Un tied link es la clausura de un tied braid (trenzas con ties). Los tied braids forman un monoide, denotado por \mathbf{TB}_n , y es definido por los generadores de trenzas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ y ‘generadores ties’ $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ y ciertas relaciones, ver Definición 3.6. Además, como el conjunto de los links \mathcal{L} esta contenido en el conjunto de los tied links \mathcal{L}^t , se tiene en consecuencia que todo invariante para tied link se puede derivar a una invariante para links clásicos. Por otra parte, en la categoría de los tied links podemos encontrar invariantes polinomiales usando la receta de Jones. Para usar esta receta de Jones, es necesario tener los teoremas de Alexander y Markov para tied links, para más detalles, ver páginas 17 y 18 de [3].

Con el fin de definir una invariante para tied links mediante el método de Turaev, es necesario determinar una representación del monoide \mathbf{TB}_n en un espacio tensorial. Este es realizado en el Teorema 3.2. El problema es ahora traspasar el método de Turaev en el contexto de tied links. A pesar de esto, no esta completamente determinado. La existencia de la función ψ permite conjeturar que existe tal método de Turaev para tied links.

A continuación, describiremos brevemente el desarrollo de la tesis, mostrando en particular los resultados obtenidos.

En el Capítulo 1 estudiaremos la teoría de nudos, links y trenzas del punto de vista algebraico y geométrico, ver [16]. Presentaremos teoremas fundamentales tales como el de Reidemeister, ver [13]; el cual indica cuando dos diagramas de links representan dos links equivalentes, ver Teorema 1.1. Además, para estudiar los links (o nudos) en términos algebraicos, presentaremos el teorema de Artin,

ver [6], el cual indica que el grupo de n -trenzas B_n tiene la siguiente presentación:

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, & \text{si } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle,$$

donde los σ_k son las n -trenzas elementales, ver Teorema 1.4. Con este teorema, empezamos a estudiar, en la Sección 2, las relaciones entre los links y trenzas; en efecto, *la clausura de una trenza* determina un link (o nudo). El Teorema de Alexander, ver [13], dice que la operación clausura es epiyectiva, es decir, todo link (orientado) proviene de la clausura de una trenza. Después del teorema de Alexander, estudiaremos dos movimientos en el conjunto de las trenzas que son conocidos como los *movimientos de Markov*. Con estos movimientos tenemos el teorema de Markov, ver [13], el cual dice que las clausuras de dos trenzas resultan links equivalentes si y solo si tales trenzas están relacionadas según los movimientos de Markov, ver Teorema 1.6. Por otra parte, dado que queremos usar el método de Turaev, recordaremos el producto tensorial entre espacios vectoriales. Además, recordaremos las propiedades y teoremas del producto de Kronecker de matrices, ver [10]. Por último, presentaremos un teorema fundamental de álgebra que serán utilizado en el Capítulo 2.

En el Capítulo 2 recordaremos la construcción del polinomio bracket definido por Kauffman [14]. Para luego construir el polinomio de Jones usando este *polinomio bracket*; este método de construcción del polinomio de Jones se llama polinomio de *Jones à la Kauffman*. Notar que la construcción de Kauffman no proviene de la receta de Jones y solo utiliza herramientas de combinatoria. El polinomio de Jones à la Kauffman evaluado sobre un link ℓ está definido por:

$$f(\ell) := (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}], \quad (0.1)$$

donde D es un diagrama del link ℓ , $w(D)$ es el writhe del diagrama D y $\langle D \rangle$ es el polinomio bracket de D , ver [14]. En (0.1) podemos recuperar la versión original del polinomio de Jones haciendo A igual a $t^{-1/4}$.

La construcción del polinomio de Jones à la Kauffman produce un polinomio en dos variables, conocido como polinomio de Kauffman [15]. Cabe notar que el polinomio de Kauffman no es equivalente con la otra generalización del polinomio de Jones, el polinomio Homflypt [9]. En la Sección 2 de este capítulo estudiaremos, según Kurpita y Murasugi [16], la construcción del polinomio de Jones vía tensores. El polinomio de Jones será construido utilizando cierto homomorfismo Φ_n de B_n en $M(2^n, \mathbb{Z}[\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}])$, ver Definición 2.2, y ciertas matrices fijas R, μ . Este polinomio es definido por:

$$\xi(\hat{\beta}) := \frac{t^{\frac{1}{2}(\exp(\beta) - n + 1)} \text{tr}(\Phi_n(\beta)\mu^{\otimes n})}{1 + t},$$

donde $\hat{\beta}$ es la clausura de la trenza $\beta \in B_n$, $\exp(\beta)$ es la función exponente de β y tr denota la traza usual, ver Definición 1.15. Además, realizaremos algunos cálculos de ξ para nudos y links. En la Sección 3 analizaremos el método de Turaev [19], el que utilizaremos para la construcción de una invariante para links y conjeturar una invariante para tied links de tipo Homflypt. Uno de los elementos fundamentales para este método, viene dado por la ecuación cuántica de Yang-Baxter, ya que su solución determina la matriz R , que llamaremos operador de Yang-Baxter (u operador-YB). Con R podemos determinar una representación del grupo de trenzas en un espacio tensorial. Por otra parte, podemos determinar cierta matriz μ , como la utilizada en la construcción de la invariante de la Sección 2, y un operador de Yang-Baxter mejorado (u operador-EYB). Estos pasos serán ordenados en una receta que permite calcular un operador de Yang-Baxter mejorado (ver Observación 2.5). En consecuencia, por Teorema 2.5, podemos construir la invariante de Jones sin normalizar. Por último, en la Sección 4, considerando que la dimensión del espacio vectorial es 4 y dado cierto operador de Yang-Baxter, determinaremos los ingredientes para construir un operador de Yang-Baxter mejorado, según la receta de Observación 2.5, así se obtiene una invariante para links de tipo Homflypt, ver [9]. Este polinomio está definido por:

$$\Psi(\hat{\sigma}) := \frac{u^{\frac{1}{2}(1-3\exp(\sigma)-n)} \text{tr}(\psi_n(\sigma)\mu^{\otimes n})}{2(1+u)}, \quad (0.2)$$

donde \exp es la suma de los exponentes de cada trenza elemental que define la trenza σ y ψ_n es el homomorfismo que define la representación de B_n en $V^{\otimes n}$. Además, para verificar que nuestro polinomio es una invariante para links, demostraremos que el polinomio es invariante por los movimientos de Markov (ver Teorema 1.6). En esta demostración, fue fundamental determinar una formula recursiva para calcular $\mu^{\otimes n}$, lo cual no es evidente en principio. En la construcción del polinomio Ψ , dado que el operador de Yang-Baxter es una matriz de tamaño 16, varios cálculos son realizados usando programas matemáticos tales como Scientific Workplace ver. 5.5 y Sagemath cell.

En el Capítulo 3 comenzaremos estudiando los conceptos fundamentales de los tied links del punto de vista topológico. En particular, veremos cuando dos tied links son tie-isotópicos, es decir, equivalentes. Con esto daremos un salto al estudio de invariantes de tipo Homflypt para tied links. Mas precisamente, en la Sección 2 presentaremos el invariante (de tipo Homflypt) \mathcal{F} , la cual es construida mediante relaciones skein, ver [3]. \mathcal{F} mirado como una invariante para links clásicos, notablemente, distingue links que no puede distinguir el invariante de Homflypt, es decir, \mathcal{F} es una extensión no trivial del polinomio Homflypt. Para beneficio del lector, se ejemplificará el uso de \mathcal{F} calculando $\mathcal{F}(H)$, donde H es el Hopf link. Por último, dejaremos algunas observaciones acerca de la relación de \mathcal{F} con Homflypt. Finalmente, siguiendo la idea de [18], en la Sección 4, determinaremos una representación del monoide Tied Braid TB_n en un espacio tensorial $V^{\otimes n}$, lo cual es demostrado por casos. Esta representación, ver Teorema 3.2, de TB_n es uno de los resultados que aporta esta tesis. Notemos que, después de encontrar una representación del monoide Tied Braid, queda por hacer la construcción de una invariante para tied links de tipo Homflypt usando el método de Turaev.

Finalmente en el Capítulo 4, son usados fuertemente herramientas computacionales, dado que los cálculos a realizar involucran tensores, y se vuelven imposibles de resolver a ‘escala humana’. Por esa razón, diseñamos programas informáticos usando el lenguaje Python y otro para ser usado en Sage. Así, calcularemos las invariantes para links construidas en las Secciones 2 y 4 del Capítulo 2. Por lo anterior, en la Sección 1, daremos una breve descripción del software Sage. En la Sección 2 adjuntaremos dos códigos de programación para calcular la invariante Ψ definida en Sección 4 del Capítulo 2 y un último código para ser usado en Sage que calcula la invariante ξ definida en Sección 2 del Capítulo 2. Por último, en la Sección 3, realizaremos ciertos cálculos de la invariante Ψ lo que nos permitirá compararla con otras invariantes para links definidas recientemente, tales como Δ de [3] y Θ de [8]. Notemos que, para comparar las invariantes mencionadas, utilizaremos los resultados de las invariantes Δ y Θ para ciertos links, ver [5]. Además, para denotar los links, utilizaremos las notaciones que se encuentran en [7].

En esta tesis, para conservar el lenguaje usado en Valparaíso de Chile, existen palabras que serán utilizadas en inglés en vez del español, tales como: tied link en vez de liga enlazada o writhe en vez de torsión.

Powered@NLHPC: Esta tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del NLHPC (ECM-02).

El tema desarrollado en la presente tesis es parte del proyecto FONDECYT 1180036.

Capítulo 1

Preliminares

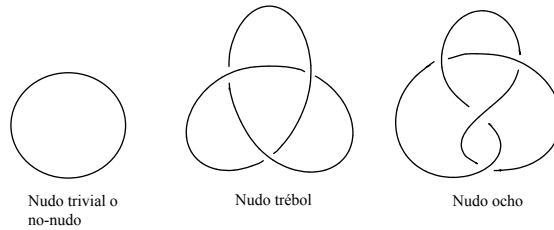
1. Nudos, links y trenzas

Para estudiar los nudos, links y trenzas primero tenemos que introducir una definición formal para los mismos. En esta sección, presentaremos los conceptos básicos de la teoría de nudos que nos ayudará a entender el resto la tesis.

1.1. Nudos y links.

Definición 1.1. *Se dice que $k \subset \mathbb{R}^3$ es un nudo si existe un homeomorfismo del círculo unitario S^1 en \mathbb{R}^3 cuya imagen es k .*

Ejemplo 1.1. *Tres de los nudos clásicos más mencionados en la tesis son los siguientes:*



Definición 1.2. *Un m -link (o enlace) es una incrustación de m círculos disjuntos en \mathbb{R}^3 y m es llamado el número de componentes del m -link.*

Ejemplo 1.2. *El link clásico más utilizado aquí es el Hopf link y este tiene dos componentes (ver Figura 1).*

Observación 1.1. *En la tesis, K denota el conjunto de nudos y L el conjunto de links. Es claro que $K \subset L$.*

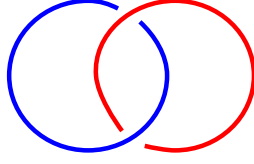


FIGURA 1. Hopf link

Siendo poco preciso, sean ℓ_1 y ℓ_2 dos links, se dice que ℓ_1 es isotópico con ℓ_2 , si ℓ_2 es obtenido a partir de ℓ_1 mediante una deformación continua. La notación $\ell_1 \approx \ell_2$ significa que ℓ_1 es isotópico a ℓ_2 . Una definición formal, es la siguiente.

Definición 1.3. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos links, se dice que ℓ_1 y ℓ_2 son isotópicos si existe una isotopía F , es decir, una función continua:

$$F : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

tal que $F(x, 0) = \ell_1$ y $F(x, 1) = \ell_2$, además $F(x, t)$ es continua e inyectiva, para todo t en $[0, 1]$.

Ejemplo 1.3. El diagrama del nudo trebol es isotópico a los otros dos.



FIGURA 2. Links isotópicos

Proposición 1.1. La relación de isotopía de links (o nudos), denotada por \approx , es una relación de equivalencia.

La demostración de la Proposición 1.1 está en [1].

Notación 1. El conjunto cociente L/\approx será denotado por \mathcal{L} .

Definición 1.4. Dado un link ℓ . Un diagrama de ℓ , que denotamos por D_ℓ , lo construimos del siguiente modo:

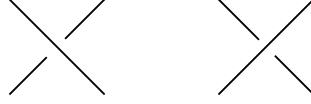


FIGURA 3. Tipos de cruce. Sobre o por debajo.

1. Se proyecta ℓ en un plano, donde los únicos cruces admisibles son los de doble punto.
2. A cada cruce le asociamos una configuración (ver Figura 3).

Por lo tanto, tenemos que existe una función biyectiva, la cual es

$$f : \mathcal{L} \longrightarrow D(\mathcal{L}).$$

Por otra parte, por abuso de lenguaje, diremos simplemente links en vez de diagrama de links.

Teorema 1.1. Sean ℓ_1, ℓ_2 dos links. ℓ_1 es isotópico a ℓ_2 si y solo si D_{ℓ_1} y D_{ℓ_2} son equivalentes mediante los movimientos de Reidemeister. Estos movimientos los podemos ver en la Figura 4.

La demostración del teorema de Reidemeister está en [13].

Definición 1.5. Un link orientado es dar una orientación a cada componente mediante una flecha, donde cada cruce queda como muestra la Figura 5.

Observación 1.2. Los conceptos mencionados anteriormente sobre link (o nudos), aplican para un link (o nudo) orientado.

Definición 1.6. El writhe de un diagrama de link orientado D denotado por $w(D)$, es definido como

$$w(D) := \sum_c^D \chi_c,$$

donde c es un cruce de D y χ_c es el signo del cruce c .

Observación 1.3. El writhe es un invariante de isotopía regular, es decir, respeta los movimientos R_0 , R_2 y R_3 .

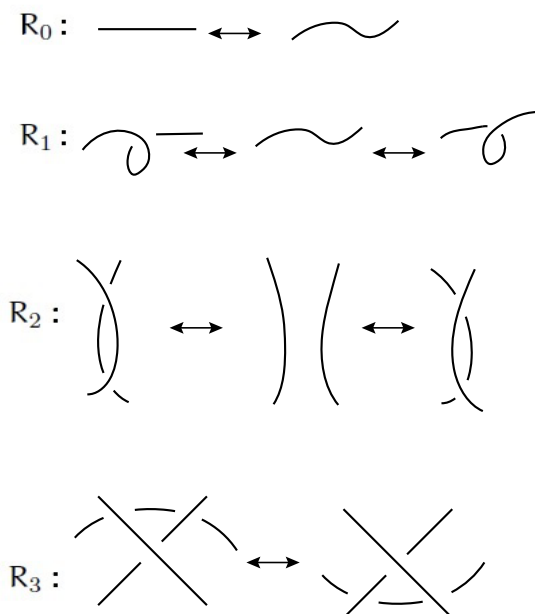


FIGURA 4. Movimientos de Reidemeister

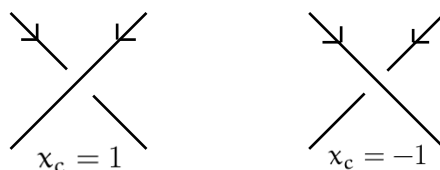


FIGURA 5. Cruce positivo y cruce negativo

Para poder determinar si dos links son isotópicos, podemos estudiar sus diagramas, pero no es un proceso sencillo. Por esto, definiremos lo siguiente.

Definición 1.7. Sea A un conjunto con elementos fácilmente comparables. Una invariante para links (o nudos) es una función $f : D(L) \rightarrow A$, tal que si $\ell_1 \approx \ell_2$, entonces $f(\ell_1) = f(\ell_2)$.

Una definición equivalente a la Definición 1.7, que nos será útil, es la siguiente: Si $f(\ell_1)$ es distinto a $f(\ell_2)$, entonces ℓ_1 no es isotópico a ℓ_2 . Así, tenemos una

herramienta para distinguir links. Por otra parte, existen distintos tipos de invariantes, por ejemplo: numéricos, geométricos, algebraicos y polinómicos. Este último utilizaremos en la tesis.

1.2. Trenzas.

Definición 1.8. *Dados dos planos paralelos $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}^3$. Una \mathfrak{n} -trenza geométrica es un conjunto de \mathfrak{n} arcos (o \mathfrak{n} cuerdas) que parten de $P_i = (i, 0, 1) \in \pi_1$ y terminan en $Q_j = (j, 0, 0) \in \pi_2$, tal que:*

1. *Cada cuerda de la \mathfrak{n} -trenza geométrica intersecta en un solo punto a todo plano paralelo a los iniciales.*
2. *La \mathfrak{n} -trenza geométrica corta a cada plano paralelo a los iniciales exactamente en \mathfrak{n} -puntos.*

Al igual que con los links, podemos construir diagramas de trenzas, realizando una proyección en \mathbb{R}^2 . Además, utilizaremos la misma configuración en los cruces como muestra la Figura 3. Siguiendo con esta dualidad, las trenzas pueden tener orientación, en nuestro caso, será de arriba hacia abajo.

En la Figura 6, tenemos un ejemplo del diagrama de una 3-trenza orientada.

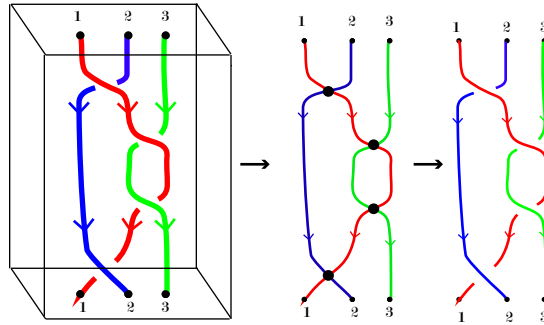


FIGURA 6. 3-Trenza en \mathbb{R}^3 , proyección y diagrama.

Agrupando las trenzas según el número de cuerdas, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.9. *Al conjunto de trenzas con \mathfrak{n} cuerdas la denotaremos por $\mathcal{B}_{\mathfrak{n}}$.*

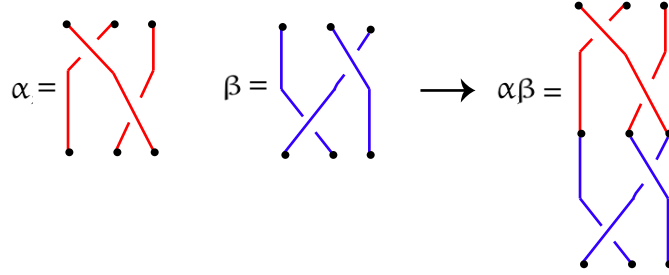
Definición 1.10. Diremos que dos trenzas son isotópicas, si una de ellas se obtiene a partir de la otra mediante un número finito de deformaciones continuas, y esta relación la denotaremos por \sim (cf. Definición 1.3).

Observación 1.4. Es evidente que la relación de isotopía \sim es refleja, simétrica y transitiva, es decir, es una relación de equivalencia en \mathcal{B}_n .

Por Observación 1.4, construimos el conjunto cociente de \mathcal{B}_n con respecto a \sim , denotado por $\mathcal{B}_n := \mathcal{B}_n / \sim$.

Definición 1.11. Sean 2 trenzas α y $\beta \in \mathcal{B}_n$. Denotaremos por $\alpha\beta$ la trenza que se obtiene identificando los puntos finales de α con los iniciales de β .

Ejemplo 1.4. Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_3$, tenemos



Lema 1.2. Sean $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathcal{B}_n$. Si $\alpha \sim \beta$ y $\alpha' \sim \beta'$, entonces $\alpha\alpha' \sim \beta\beta'$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que la relación \sim es transitiva, es fácil demostrar que se cumple Lema 1.2, ver [16] para detalles. \square

Definición 1.12. Sean $[\alpha], [\beta] \in \mathcal{B}_n$. El producto entre las clases $[\alpha]$ y $[\beta]$ es definido por:

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta].$$

Por Lema 1.2, este producto de clases de equivalencia está bien definido. Además, desde ahora, usaremos simplemente α en vez de $[\alpha]$.

Teorema 1.3. El producto de Definición 1.12 es asociativo, tiene elemento neutro e inverso. Así, \mathcal{B}_n es un grupo y lo llamamos grupo de n -trenzas.

La demostración del Teorema 1.3 está en [16].

Definición 1.13. Llamaremos n -trenzas elementales a las trenzas σ_i y σ_i^{-1} , donde σ_i^{-1} es la inversa de σ_i . En la Figura 7 podemos ver los diagramas de estas trenzas.

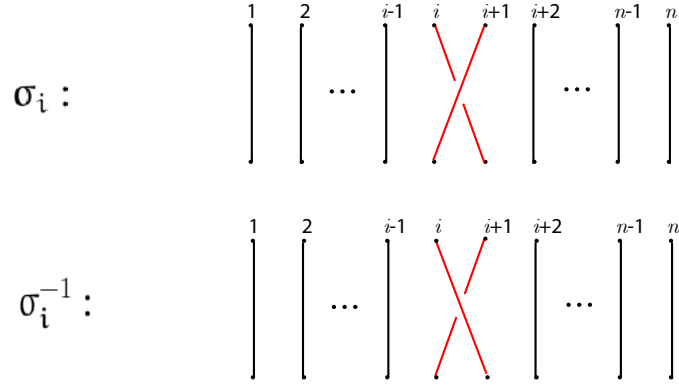


FIGURA 7. Diagramas de las trenzas elementales σ_i y σ_i^{-1}

Teorema 1.4 (Artin, 1925). *El grupo de n -trenzas B_n tiene la siguiente presentación:*

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} ; \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ si } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, \text{ si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle,$$

donde los σ_k son las n -trenzas elementales.

La demostración fue resuelta por Artin en [6].

Observación 1.5. *En resumen, B_1 es el grupo trivial, B_2 es isomorfo a \mathbb{Z} y desde B_3 en adelante, son grupos no abelianos. Además, $B_1 \hookrightarrow B_2$, $B_2 \hookrightarrow B_3$ y así sucesivamente.*

Definición 1.14. Definimos B_∞ como la unión disjunta de todos los grupos de trenzas, es decir,

$$B_\infty := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Por el Teorema 1.4, podemos definir la función exponente de una trenza $\beta \in B_n$, denotado por \exp .

Definición 1.15. Sea $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \in B_n$, con $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n-1$ y $\varepsilon_j = \pm 1$. Entonces tenemos

$$\exp(\beta) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i.$$

Definición 1.16. Definimos la función clausura por:

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} : B_\infty &\longrightarrow \mathcal{L} \\ \sigma &\longmapsto \hat{\sigma} \end{aligned}$$

La función clausura $\hat{\cdot}$, geométricamente, toma el extremo superior de cada cuerda en la posición i y la extiende hasta unir la con el extremo inferior de cada cuerda en la posición i .

2. Relación entre links y trenzas

Existe una estrecha relación entre el conjunto de los links L y los grupos de trenzas B_n . Para comprenderla, es necesario estudiar los resultados de J. Alexander y A. Markov, ver [13].

Teorema 1.5 (Alexander, 1932). *La función $\hat{\cdot}$ es epiyectiva, es decir, todo link (orientado) proviene de la clausura de una trenza.*

La demostración del Teorema de Alexander se encuentra en [13].

Definición 1.17. Dado $\alpha, \beta \in B_n$. En B_∞ definimos las siguientes aplicaciones llamadas movimientos de Markov:

M1. Transforma α en la n -trenza $\beta\alpha\beta^{-1}$ o viceversa,

M2. Transforma α en la $(n+1)$ -trenza $\alpha\sigma_n$ ó $\alpha\sigma_n^{-1}$ o viceversa.

Definición 1.18. Sean $\alpha, \beta \in B_\infty$. Decimos que α es Markov equivalente (o M -equivalente) con β si y solo si β es determinada a partir de α aplicando una secuencia finita de movimientos de Markov. Esta relación la denotaremos por $\alpha \sim_M \beta$.

Proposición 1.2. \sim_M es una relación de equivalencia en B_∞ .

La demostración de la Proposición 2 está en [16].

Teorema 1.6 (Markov, 1935). Si ℓ_1 y ℓ_2 provienen de clausurar respectivamente las trenzas α y β . Los links ℓ_1 y ℓ_2 son isotópicos si y solo si α y β son M -equivalentes.

La demostración del Teorema de Markov se encuentra en [13].

Por los Teoremas 1.5 y 1.6, tenemos que:

$$\mathcal{L}/\approx \longleftrightarrow B_\infty/\sim_M.$$

Esto permite definir invariantes $X : B_\infty \longrightarrow \{\text{conocido}\}$ tal que $X(\alpha) = X(\beta)$ si $\alpha \sim_M \beta$. Así, es natural pensar en representaciones de B_n .

3. Herramientas algebraicas

En esta sección recordaremos el concepto de producto tensorial de espacios vectoriales y sus principales propiedades, lo que será de gran utilidad en el desarrollo de esta tesis.

Definición 1.19. Sean V, W y S espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbb{K} . Llamaremos producto tensorial al par (S, \otimes) , donde S es un espacio vectorial y $\otimes : V \times W \longrightarrow S$ es una aplicación bilineal que satisface la siguiente condición: Para toda aplicación bilineal $\phi : V \times W \longrightarrow H$ tenemos que existe una única aplicación lineal $f : S \longrightarrow H$, tal que $\phi = f \circ \otimes$, es decir:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\otimes} & S \\
 \searrow \phi & & \swarrow f \\
 & H &
 \end{array}$$

Notación 2. En el caso anterior, el \mathbb{K} -espacio vectorial S se suele escribir $V \otimes W$ y es llamado producto tensorial entre los \mathbb{K} -espacios vectoriales V y W .

Corolario 1.1. Sean $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ base de W y $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ base de V , entonces $\{w_i \otimes v_j ; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ es una base de $W \otimes V$.

Corolario 1.2. Sean V, W dos \mathbb{K} -espacios vectoriales, respectivamente, de dimensión n y m , entonces

$$\dim(V \otimes W) = nm.$$

Proposición 1.3 (Propiedades). Dados $x, x_1, x_2 \in V, y, y_1, y_2 \in W, \lambda, \gamma \in \mathbb{K}$. Por bilinialidad de \otimes , tenemos lo siguiente:

1. $(\lambda x_1 + \gamma x_2) \otimes y = \lambda(x_1 \otimes y) + \gamma(x_2 \otimes y),$
2. $x \otimes (\lambda y_1 + \gamma y_2) = \lambda(x \otimes y_1) + \gamma(x \otimes y_2),$
3. $\alpha(x \otimes y) = (\alpha y) \otimes x = x \otimes (\alpha y).$

Observación 1.6. El producto tensorial entre matrices es llamado, usualmente, producto de Kronecker.

Definición 1.20. Sea $A = (a_{ij})$ con tamaño $p \times q$ y $B = (a_{kl})$ con tamaño $r \times s$. Entonces el producto Kronecker entre A y B , denotado por $A \otimes B$, es la matriz de tamaño $pr \times qs$ determinada por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2q}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \dots & a_{pq}B \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.5.
$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 4 & -20 \\ 6 & -30 \\ 4 & 6 \\ 8 & 12 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}.$$

Notación 3. La traza usual de matrices será denotada por tr .

Proposición 1.4 (Propiedades). *Algunas propiedades que se utilizarán en la tesis son:*

1. Sean A, B, C matrices de cualquier tamaño. Entonces

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C),$$

2. Sea A, C matrices de tamaño m y B, D matrices de tamaño n , entonces

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD,$$

3. $\text{tr}(M \otimes N) = \text{tr}(M)\text{tr}(N)$,

4. $A \otimes (BC) = (A \otimes B)(A \otimes C)$.

Observación 1.7. Es fácil probar que $I_m \otimes I_n = I_{mn}$, en particular:

$$I_m \otimes I_m = I_{m^2}.$$

Observación 1.8. En particular, en la Propiedad 2, tenemos

$$(A \otimes \text{Id})(C \otimes \text{Id}) = (AC \otimes \text{Id})$$

donde Id es la matriz identidad de tamaño n .

Teorema 1.7. Si M es una matriz de tamaño $n \times m$ y P una matriz de tamaño $m \times n$, entonces

$$\text{tr}(MP) = \text{tr}(PM).$$

Por otra parte, recordaremos un teorema fundamental para definir una representación de grupo que será utilizado en los próximos capítulos.

Teorema 1.8. *Dado un grupo $G = \langle x_1, \dots, x_n ; R_1 = R_j = \dots = R_m = 1 \rangle$. Además, sea H un grupo arbitrario y f una función, tal que $f(x_i) = w_i \in H$, con $i = 1, 2, \dots, n$. Si todos los w_i satisfacen las relaciones R_i , entonces f es homomorfismo de G en H .*

Ejemplo 1.6. *Sea $G = \langle a, b; a^4 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$ y definamos la función*

$$f : G \longrightarrow S_4$$

$$a \longmapsto (1234)$$

$$b \longmapsto (12)$$

Como $f(a^4) = (1)$, $f(b^2) = (1)$ y $f((ab)^3) = (1)$, tenemos que f es un homomorfismo de G en S_4 .

Capítulo 2

Construcción del polinomio de Jones

El polinomio de Jones es una invariante para links (orientados) descubierto por Vaughan Jones en [11]. Este polinomio es parte importante para la tesis, por tal razón, en este capítulo estudiaremos dos formas de como construirlo. La primera, mediante el método de Kauffman, ver [14]. La segunda es usando el producto tensorial, método debido a Turaev, ver [19].

1. Método de Kauffman

Un método simple para determinar el polinomio de Jones es usando el método de Kauffman. Para esto, es necesario saber el writhe y el polinomio bracket de Kauffman de un diagrama del link. En esta sección, construiremos el polinomio usando el método Jones à la Kauffman.

Sea D un diagrama del link ℓ . Consideremos en cada sector de un cruce las marcas A y B para lograr descomponer este cruce de dos maneras como se muestra en la Figura 1.

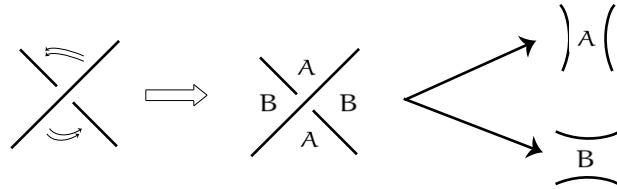


FIGURA 1. Marcas y descomposición del cruce

El procedimiento anterior, lo aplicaremos en cada cruce de D de manera iterativa, hasta determinar solo nudos triviales con marcas A y B , que llamaremos estados de D . Por último, para cada estado s asociamos un producto conmutativo

de las marcas, que denotaremos por $\langle D, s \rangle$. Con lo anterior podemos definir lo siguiente.

Definición 2.1. *El polinomio bracket de Kauffman $\langle \rangle$ de un diagrama D es una función del conjunto de los diagramas de links en el anillo de los polinomios de tres variables A, B y z con coeficientes enteros. Este polinomio es definido por*

$$\langle D \rangle := \sum_s z^{|s|} \langle D, s \rangle,$$

donde $|s|$ es el número de componentes -1 .

Observación 2.1. *El polinomio bracket de Kauffman es una invariante de isotopía regular, es decir, solo respeta R_2 y R_3 . Para que $\langle \rangle$ respete todos los movimientos de Reidemeister tenemos que especializar z a $-(A^2 + A^{-2})$ y B a A^{-1} . Así, tenemos el siguiente teorema.*

Teorema 2.1. *Sea D un diagrama (orientado) del link ℓ . Entonces la función $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ definida por*

$$f(\ell) := (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle,$$

es una invariante para links orientados.

Observación 2.2. *La invariante del Teorema 2.1 es el polinomio de Jones. Su versión original se recupera haciendo A igual a $t^{-\frac{1}{4}}$.*

Ejemplo 2.1. *Calculemos el polinomio de Jones del nudo trébol reflejado T^* .*

Paso 1. En cada cruce, determinemos los estados de D_{T^} y luego los productos conmutativos de las marcas A y B . Para el nudo trébol reflejado, los productos conmutativos de las marcas A y B son:*

$$AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB.$$

Paso 2. Usando Definición 2.1 y considerando Observación 2.1, tenemos

$$\langle D_{T^*} \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}.$$

Paso 3. Por Teorema 2.1, resulta

$$f(T^*) = -A^{16} + A^{12} + A^4.$$

Paso 4. Reemplazando A por $t^{-1/4}$, recuperamos la versión original del polinomio de Jones del nudo trébol reflejado. En efecto, tenemos

$$V_{T^*}(t) = t^{-1} + t^{-3} + t^{-4}.$$

Observación 2.3. *Análogamente, la invariante de Jones del nudo trébol es $V_T(t) = t + t^3 - t^4$. Por lo tanto, T^* y T no son isotópicos, es decir, no es aquiral.*

2. Usando tensores

En esta sección estudiaremos el polinomio de Jones usando tensores. Más adelante, en Sección 3 de éste mismo capítulo, se justificará el origen de la construcción.

Proposición 2.1. *Sea $\mu := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ y $\mu^{\otimes n} := \underbrace{\mu \otimes \mu \otimes \dots \otimes \mu}_{n\text{-veces}}$, entonces tenemos:*

$$\text{tr}(\mu^{\otimes n}) = (1 + t)^n.$$

Ejemplo 2.2. *Sea $n = 2$, entonces*

$$\mu \otimes \mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix},$$

y su traza es

$$\text{tr}(\mu \otimes \mu) = 1 + 2t + t^2 = (1 + t)^2.$$

A continuación, utilizando el producto de Kronecker, definiremos la función Φ_n que depende de cierta matriz R .

Definición 2.2. Sean $R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $R^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{t} & -\frac{1}{\sqrt{t}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definamos la función

$$\Phi_n : B_n \longrightarrow M(2^n, \mathbb{Z}[\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}])$$

$$\sigma_i^\varepsilon \longmapsto \Phi_n(\sigma_i^\varepsilon) := \underbrace{(I_2 \otimes \dots \otimes I_2)}_{i-1 \text{ veces}} \otimes R^\varepsilon \otimes \underbrace{(I_2 \otimes \dots \otimes I_2)}_{n-i-1 \text{ veces}},$$

donde $\varepsilon = \pm 1$ e I_2 denota la matriz identidad de tamaño 2.

Proposición 2.2. La función Φ_n , de Definición 2.2, es un homomorfismo de B_n en $M(2^n, [\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}])$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que Φ_n es homomorfismo aplicaremos el Teorema 1.8. Así, las imágenes de las trenzas elementales mediante Φ deben satisfacer las relaciones del grupo de trenza B_n . Es decir, demostraremos:

$$\Phi_n(\sigma_i)\Phi_n(\sigma_j) = \Phi_n(\sigma_j)\Phi_n(\sigma_i), \text{ para } |i-j| > 1, \quad (1)$$

$$\Phi_n(\sigma_i)\Phi_n(\sigma_{i+1})\Phi_n(\sigma_i) = \Phi_n(\sigma_{i+1})\Phi_n(\sigma_i)\Phi_n(\sigma_{i+1}), \text{ si } i = 1, \dots, n-2. \quad (2)$$

Demostración de (1):

$$\begin{aligned} \Phi_n(\sigma_i)\Phi_n(\sigma_j) &= (I_2^{\otimes i-1} \otimes R \otimes I_2^{\otimes n-i-1})(I_2^{\otimes j-1} \otimes R \otimes I_2^{\otimes n-j-1}) \quad (\text{por definición}) \\ &= (I_2^{\otimes i-1} \otimes R \otimes I_2^{\otimes j-i-2} \otimes I_2^{\otimes 2} \otimes I_2^{\otimes n-j-1})(I_2^{\otimes i-1} \otimes I_2^{\otimes 2} \otimes I_2^{\otimes j-i-2} \otimes \\ &\quad R \otimes I_2^{\otimes n-j-1}) \quad (\text{reduciendo}) \\ &= I_2^{\otimes i-1} \otimes R \otimes I_2^{\otimes j-i-2} \otimes R \otimes I_2^{\otimes n-j-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, de modo similar, se tiene

$$\Phi_n(\sigma_j)\Phi_n(\sigma_i) = I_2^{\otimes i-1} \otimes R \otimes I_2^{\otimes j-i-2} \otimes R \otimes I_2^{\otimes n-j-1}.$$

Por lo tanto,

$$\Phi_n(\sigma_i)\Phi_n(\sigma_j) = \Phi_n(\sigma_j)\Phi_n(\sigma_i), \text{ para } |i - j| > 1.$$

Demostración de (2):

Sea $A := \Phi_n(\sigma_i)\Phi_n(\sigma_{i+1})\Phi_n(\sigma_i)$ y $B := \Phi_n(\sigma_{i+1})\Phi_n(\sigma_i)\Phi_n(\sigma_{i+1})$.

Tenemos,

$$\begin{aligned} A &= (I_2^{\otimes i-1} \otimes R \otimes I_2^{\otimes n-i-1})(I_2^{\otimes i} \otimes R \otimes I_2^{\otimes n-i-2})(I_2^{\otimes i-1} \otimes R \otimes I_2^{\otimes n-i-1}) \\ &= (I_2^{\otimes i-1} \otimes (R \otimes I_2) \otimes I_2^{\otimes n-i-2})(I_2^{\otimes i-1} \otimes (I_2 \otimes R) \otimes I_2^{\otimes n-i-2})(I_2^{\otimes i-1} \otimes \\ &\quad (R \otimes I_2) \otimes I_2^{\otimes n-i-2}) \text{ (descomponiendo y asociando).} \\ &= I_2^{\otimes i-1} \otimes [(R \otimes I_2)(I_2 \otimes R)(R \otimes I_2)] \otimes I_2^{\otimes n-i-2} \text{ (por propiedad de tensores).} \end{aligned}$$

Por otro lado, de forma similar,

$$B = I_2^{\otimes i-1} \otimes [(I_2 \otimes R)(R \otimes I_2)(I_2 \otimes R)] \otimes I_2^{\otimes n-i-2}.$$

Así, A y B son iguales, por que se cumple la ecuación de Yang-Baxter, es decir:

$$(I_2 \otimes R)(R \otimes I_2)(I_2 \otimes R) = (R \otimes I_2)(I_2 \otimes R)(R \otimes I_2).$$

Por lo tanto,

$$\Phi_n(\sigma_i)\Phi_n(\sigma_{i+1})\Phi_n(\sigma_i) = \Phi_n(\sigma_{i+1})\Phi_n(\sigma_i)\Phi_n(\sigma_{i+1}),$$

si $i = 1, \dots, n-2$. Por consiguiente, Φ_n es homomorfismo de B_n en $M(2^n, [\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}])$. □

En consecuencia,

$$\Phi_n(\beta) = \Phi_n(\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}) \cdots \Phi_n(\sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}) \in M(2^n, \mathbb{Z}[\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}]).$$

Teorema 2.2 (Invariante de Jones). *Sea Φ_n el homomorfismo de la Definición 2.2 y μ la matriz definida en Proposición 2.1, entonces:*

$$\xi(\hat{\beta}) := \frac{t^{\frac{1}{2}(\exp(\beta) - n + 1)} \text{tr}(\Phi_n(\beta) \mu^{\otimes n})}{1 + t} \quad (2.1)$$

es una invariante para links. Este polinomio es el polinomio de Jones y como es usual, lo denotaremos por $V_{\hat{\beta}}(t)$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que ξ es una invariante de link, debe respetar los movimientos de Markov, es decir, se debe cumplir:

M1. $\xi(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \xi(\beta)$, para todo $\beta, \gamma \in B_n$.

M2. $\xi(\beta) = \xi(\beta\sigma_n) = \xi(\beta\sigma_n^{-1})$, para todo $\beta \in B_n$.

Es claro que dada cualquier trenza, tenemos que ξ tiene una variación en las funciones tr y \exp . Entonces M1 y M2 las demostraremos en dos partes.

Demostración de M1. Sean $\gamma, \beta \in B_n$, entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Phi_n(\gamma\beta\gamma^{-1}) \mu^{\otimes n}) &= \text{tr}(\Phi_n(\gamma) \Phi_n(\beta) \Phi_n(\gamma)^{-1} \mu^{\otimes n}) \quad (\text{porque } \Phi \text{ es hom.}). \\ &= \text{tr}(\Phi_n(\gamma) \Phi_n(\gamma)^{-1} \Phi_n(\beta) \mu^{\otimes n}) \quad (\text{porque } \text{tr} \text{ es cíclica}). \\ &= \text{tr}(\Phi_n(\beta) \mu^{\otimes n}). \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos $\exp(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \exp(\beta)$, por lo tanto

$$\xi(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \xi(\beta).$$

Demostración de M2. Sea $\beta \in B_n$. Como Φ es homomorfismo, tenemos

$$\Phi_{n+1}(\beta\sigma_n) = \Phi_{n+1}(\beta) \Phi_{n+1}(\sigma_n). \quad (2.2)$$

Por definición de Φ se sigue

$$\Phi_{n+1}(\beta) = \Phi_n(\beta) \otimes I_2 \text{ y } \Phi_{n+1}(\sigma_n) = I_2^{\otimes(n-1)} \otimes R. \quad (2.3)$$

Multiplicando por $\mu^{\otimes(n+1)}$ cada miembro de (2.2), nos resulta

$$\Phi_{n+1}(\beta\sigma_n) \mu^{\otimes(n+1)} = \Phi_{n+1}(\beta) \Phi_{n+1}(\sigma_n) \mu^{\otimes(n+1)}. \quad (2.4)$$

Considerando $M := \Phi_n(\beta)$ y reemplazando los resultados de (2.3) en (2.4), nos queda:

$$\Phi_{n+1}(\beta \sigma_n) \mu^{\otimes(n+1)} = (M \otimes I_2)(I_2^{\otimes(n-1)} \otimes R) \underbrace{(\mu \otimes \dots \otimes \mu)}_{n+1 \text{ veces}}. \quad (2.5)$$

Además, si $M = (a_{ij})$, entonces

$$\text{tr}(\Phi_n(\beta) \mu^{\otimes n}) = \sum_{i=1}^{2^n} a_{ii} b_i, \quad (2.6)$$

donde

$$\mu^{\otimes n} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_{2^n} \end{bmatrix},$$

con

$$b_i = \begin{cases} tb_p & \text{si } i = 2p \\ b_p & \text{si } i = 2p - 1, \end{cases}$$

considerando $b_1 := 1$ y $b_2 := t$.

De (2.5), nos ocuparemos de los siguientes factores:

$$(M \otimes I_2)(I_2^{\otimes(n-1)} \otimes R). \quad (2.7)$$

Es claro que $(I_2^{\otimes(n-1)} \otimes R) = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}$ tiene 2^{n-1} bloques de matrices R .

Es por eso que (2.7) es equivalente a:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \dots & \dots & \dots & \mathbf{a}_{12^n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & & & & & \vdots \\ \mathbf{a}_{31} & & \mathbf{a}_{33} & & & & \vdots \\ \vdots & & & \mathbf{a}_{44} & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{2^n 1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{a}_{2^n} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_2 \right) \begin{bmatrix} \mathbf{R} & & & & & & \\ & \mathbf{R} & & & & & \\ & & \mathbf{R} & & & & \\ & & & \mathbf{R} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \mathbf{R} & \\ & & & & & & \mathbf{R} \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{11} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \mathbf{a}_{22} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \mathbf{a}_{22} & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \mathbf{a}_{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_{2^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \mathbf{a}_{22}(1-t) & & & & \\ & & & \mathbf{a}_{22} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} = \mathbf{H}.
\end{aligned}$$

De modo general, el i -ésimo bloque de la matriz \mathbf{H} es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{2i-1,2i-1} & & & \\ & 0 & & \\ & & \mathbf{a}_{2i,2i}(1-t) & \\ & & & \mathbf{a}_{2i,2i} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Sea $B := \text{tr}(\Phi_{n+1}(\beta\sigma_n)\mu^{\otimes(n+1)})$. Por resultado (2.6), tenemos

$$B = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \{a_{2i-1,2i-1}b_{4i-3} + a_{2i,2i}(1-t)b_{4i-1} + a_{2i,2i}tb_{4i}\}. \quad (2.9)$$

Reescribiendo, tenemos

$$B = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \{a_{2i-1,2i-1}b_{2(2i-1)-1} + a_{2i,2i}(1-t)b_{2(2i)-1} + a_{2i,2i}tb_{2(2i)}\}. \quad (2.10)$$

Factorizando, se tiene

$$B = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \{a_{2i-1,2i-1}b_{2i-1} + a_{2i,2i}[(1-t)b_{2i} + tb_{2i}]\}. \quad (2.11)$$

Reduciendo términos, nos resulta

$$B = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \{a_{2i-1,2i-1}b_{2i-1} + a_{2i,2i}b_{2i}\}. \quad (2.12)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^n} a_{jj}b_j = \text{tr}(\Phi_n(\beta)\mu^{\otimes n}). \quad (2.13)$$

Por lo tanto, de (2.5) tenemos

$$\text{tr}(\Phi_{n+1}(\beta\sigma_n)\mu^{\otimes(n+1)}) = \text{tr}(\Phi_n(\beta)\mu^{\otimes n}).$$

Además, sabemos que

$$\exp(\beta\sigma_n) = \exp(\beta) + 1.$$

En consecuencia,

$$\xi(\beta) = \xi(\beta\sigma_n)$$

Por otra parte, demostrar que $\xi(\beta\sigma_n^{-1}) = \xi(\beta)$, se realiza de manera similar.

Por lo tanto, ξ es una invariante para links. \square

Ejemplo 2.3. *Calculemos la invariante de Jones para el link asociado a $\beta \in B_3$, donde $\beta = \sigma_1\sigma_2$.*

Realizando los cálculos correspondientes, tenemos

$$\exp(\beta) = 2, \quad n = 3, \quad \Phi_3(\sigma_1\sigma_2) = \Phi_3(\sigma_1)\Phi_3(\sigma_2),$$

$$\begin{aligned} \text{donde } \Phi_3(\sigma_1) = \mathbf{R} \otimes \mathbf{I}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & 1-t & 0 & & \\ & & & & 0 & 1-t & & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{y } \Phi_3(\sigma_2) = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Phi_3(\beta) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & (1-t)\mathbf{I}_2 & \\ & & & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1-t & \\ & & & & & 1-t \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1-t & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 1-t \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1-t & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 1-t \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, $\mu^{\otimes 3} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & t & & & & \\ & & t & & & \\ & & & t^2 & & \\ & & & & t & \\ & & & & & t^2 \\ & & & & & & t^2 \\ & & & & & & & t^2 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\Phi_3(\beta)\mu^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & t - t^2 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & t^2 - t^3 \\ & & & & & & & t^3 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\text{tr}(\Phi_3(\beta)\mu^{\otimes 3}) = 1 + t - t^2 + t^2 - t^3 + t^3 = 1 + t.$$

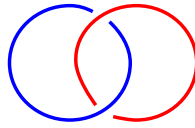
De lo anterior:

$$\xi(\hat{\beta}) = \frac{t^{(2-3+1)/2}(1+t)}{1+t} = 1.$$

Por lo tanto, el polinomio de Jones asociado al link $\hat{\beta}$ es:

$$V_{\hat{\beta}}(t) = 1.$$

Ejemplo 2.4. Calculemos la invariante de Jones para el Hopf link H de la siguiente figura.



Por el Teorema 1.5, el link $H = \hat{\beta}$, donde $\beta = \sigma_1 \sigma_1 \in B_2$. Luego, realizando los cálculos correspondientes en Scientific WorkPlace 5.5, tenemos que:

$$\Phi_2(\sigma_1 \sigma_1) = \Phi_2(\sigma_1) \Phi_2(\sigma_1) = R^2, \text{tr}(R^2 \mu^{\otimes 2}) = t^3 + t^2 + t + 1 \text{ y } \exp(\sigma_1 \sigma_1) = 2.$$

Entonces por Teorema 2.2, el polinomio de Jones para $\hat{\beta}$ es:

$$V_{\hat{\beta}}(t) = \frac{t^{1/2}(t^3 + t^2 + t + 1)}{1+t} = t^{1/2} + t^{5/2}.$$

3. Método de Turaev

La ecuación cuántica de Yang-Baxter (o ecuación de Yang-Baxter) es parte fundamental de esta tesis. Nos permitirá construir al invariante de Jones sin utilizar álgebra de Hecke ni diagramas. Así, en esta sección introduciremos los ingredientes necesarios para la construcción del invariante en la Sección 2. Gran parte de los resultados en torno al invariante de Jones han sido extraídos de [19].

En lo que sigue, \mathbb{K} es un cuerpo y V es un \mathbb{K} -espacio vectorial con base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, con $m \geq 1$. Además, dado $n \in \mathbb{N}$, el producto tensorial $V \otimes \dots \otimes V$ (n -veces) lo denotamos por $V^{\otimes n}$, en particular, $V^{\otimes 1} = V$ y $V^{\otimes 2} = V \otimes V$. También, por cada base B de V , la base $B^{\otimes n}$ de $V^{\otimes n}$ es

$$B^{\otimes n} := \{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_n}; i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, m\}\}. \quad (2.14)$$

Definición 2.3. Dado $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq i \leq n-1$, el automorfismo R_i de $V^{\otimes n}$, se define por:

$$R_i(n) := \text{Id}_V^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes \text{Id}_V^{\otimes(n-i-1)} : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}. \quad (2.15)$$

Notar que, para todo $v_1, \dots, v_n \in V$, se tiene:

$$R_i(n)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes R(v_i \otimes v_{i+1}) \otimes v_{i+2} \otimes \dots \otimes v_n. \quad (2.16)$$

En la definición de la función lineal $R_i(n)$, vemos que hay una matriz fija R , la cual la caracterizaremos a continuación.

Definición 2.4. La función lineal $R : V^{\otimes 2} \longrightarrow V^{\otimes 2}$ es llamado operador de Yang-Baxter (o también, un operador-YB) si las funciones lineales $R_1 := R_1(3)$ y $R_2 := R_2(3)$ de $V^{\otimes 3}$ satisfacen la ecuación

$$R_1 \circ R_2 \circ R_1 = R_2 \circ R_1 \circ R_2, \quad (2.17)$$

o equivalentemente,

$$(\mathbf{R} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{R})(\mathbf{R} \otimes \mathbf{I}) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R})(\mathbf{R} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}). \quad (2.18)$$

Esta ecuación se llama ecuación de Yang-Baxter.

El operador de Yang-Baxter es parte fundamental en la tesis, ya que, junto con la presentación de Artin del grupo de \mathfrak{n} -trenzas B_n , construiremos una representación de B_n en un espacio tensorial $V^{\otimes n}$, mediante cierto homomorfismo b_R . Mas precisamente tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Sea $R_i(\mathfrak{n})$ la función lineal de la Definición 2.3 y $R \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ un operador-YB, entonces la función*

$$b_R : \sigma_i \longmapsto R_i(\mathfrak{n})$$

define una representación de B_n en un espacio tensorial $V^{\otimes n}$.

DEMOSTRACIÓN. Por Teorema 1.8, tenemos que

$$\begin{aligned} b_R : B_n &\longrightarrow V^{\otimes n} \\ \sigma_i &\longmapsto R_i(\mathfrak{n}), \end{aligned}$$

es un homomorfismo. Por lo tanto, $(b_R, V^{\otimes n})$ es una representación de B_n .

□

Observación 2.4. *Si $f \in \text{End}(V^{\otimes n})$, entonces*

$$f(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} f_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} v_{j_1} \otimes v_{j_2} \otimes \cdots \otimes v_{j_n}, \quad (2.19)$$

donde $(f_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n})$ es una matriz con múltiples índices en \mathbb{K} .

Ejemplo 2.5. Sea V el \mathbb{K} -espacio vectorial, $B = \{v_1, v_2\}$ base de V y $B^{\otimes 2}$ base de $V^{\otimes 2}$. Definamos $R \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ por:

$$R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$$

$$v_1 \otimes v_1 \mapsto v_1 \otimes v_1$$

$$v_1 \otimes v_2 \mapsto -\sqrt{t}v_2 \otimes v_1$$

$$v_2 \otimes v_1 \mapsto -\sqrt{t}v_1 \otimes v_2 + (1-t)v_2 \otimes v_1$$

$$v_2 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_2.$$

Luego, en este caso, tenemos que:

$$[R]_{B^{\otimes 2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definición 2.5. Sea $f \in \text{End}(V^{\otimes n})$, para cada $i_1, \dots, i_{n-1} \in \{1, 2, \dots, m\}$, definamos el operador traza $\text{Sp}_n(f)$, como el endomorfismo sobre $V^{\otimes(n-1)}$, dado por

$$\text{Sp}_n(f)(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{n-1}}) := \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_{n-1}, j \leq m} f_{i_1 \dots i_{n-1} j}^{j_1 \dots j_{n-1} j} v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_{n-1}}.$$

Ejemplo 2.6. Consideraremos las mismas condiciones que el Ejemplo 2.5. Para calcular $\text{Sp}_2(R)$, usaremos la Definición 2.5; así tenemos

$$\text{Sp}_2(R)(v_{i_1}) = \sum_{1 \leq j_1, j \leq 2} f_{i_1 j}^{j_1 j} v_{j_1}.$$

Expandiendo, resulta:

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{Sp}_2(R)(v_1) &= \sum_{1 \leq j_1, j \leq 2} R_{ij}^{j_1 j} v_{j_1} = R_{11}^{11} v_1 + R_{12}^{12} v_1 + R_{11}^{21} v_2 + R_{12}^{22} v_2 = 1v_1. \\ \blacksquare \text{Sp}_2(R)(v_2) &= \sum_{1 \leq j_1, j \leq 2} R_{2j}^{j_1 j} v_{j_1} = R_{21}^{11} v_1 + R_{22}^{12} v_1 + R_{21}^{21} v_2 + R_{22}^{22} v_2 = (1-t)v_2 + 1v_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R})]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 - \mathbf{t} \end{bmatrix}.$$

Proposición 2.3. *Tenemos $\mathrm{tr}(\mathrm{Sp}_n(f)) = \mathrm{tr}(f) \in \mathbb{K}$, donde tr denota la traza usual de funciones lineales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ y $\mathbf{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Por la Definición 2.5, sabemos que

$$\mathrm{Sp}_n(f)(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{n-1}}) = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_{n-1}, j \leq m} f_{i_1 \dots i_{n-1} j}^{j_1 \dots j_{n-1} j} v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_{n-1}}$$

Aplicando tr , tenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathrm{Sp}_n(f)(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{n-1}})) &= \mathrm{tr}\left(\sum_{1 \leq j_1, \dots, j_{n-1}, j \leq m} f_{i_1 \dots i_{n-1} j}^{j_1 \dots j_{n-1} j} v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_{n-1}}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1}, j \leq m} f_{i_1 \dots i_{n-1} j}^{i_1 \dots i_{n-1} j} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{n-1}} \\ &= \mathrm{tr}(f)(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{n-1}}). \end{aligned}$$

□

Definición 2.6. *Dado $\mu \in \mathrm{End}(V)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{R} \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$, diremos que la 4-tupla $(\mathbf{R}, \mu, \alpha, \beta)$ es un operador-YB mejorado (u operador-EYB), si satisface las siguientes condiciones:*

1. *La función lineal $\mu \otimes \mu : V^{\otimes 2} \longrightarrow V^{\otimes 2}$ conmuta con el operador \mathbf{R} .*
2. *$\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R} \circ (\mu \otimes \mu)) = \alpha \beta \mu$ y $\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}^{-1} \circ (\mu \otimes \mu)) = \alpha^{-1} \beta \mu$.*

Proposición 2.4. *Conservando notación. Si μ es un automorfismo, entonces la segunda condición de la Definición 2.6 es equivalente a:*

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}^{\pm 1} \circ (\mathrm{Id}_V \otimes \mu)) = \alpha^{\pm 1} \beta \mathrm{Id}_V,$$

para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos que la condición

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}(\mathrm{Id}_V \otimes \mu)) = \alpha\beta \mathrm{Id}_V \quad (2.20)$$

es equivalente a

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R} \circ (\mu \otimes \mu)) = \alpha\beta\mu, \quad (2.21)$$

cuando μ es automorfismo.

En esta demostración, consideremos que $\dim(V) = m$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y μ una matriz definida por:

$$\mu := \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_m \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

De (2.21) tenemos que $\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}(\mu \otimes \mu))$ es equivalente a:

$$(\mathrm{Sp}_2) \left(\mathbf{R} \begin{bmatrix} \mu_1^2 & & & & & \\ & \mu_1\mu_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mu_1\mu_m & & \\ & & & & \mu_2\mu_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \mu_2\mu_m \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \mu_m\mu_1 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \mu_m^2 \end{bmatrix} \right), \quad (2.23)$$

y la matriz $\alpha\beta\mu$ es igual a:

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta\mu_1 & & & \\ & \alpha\beta\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha\beta\mu_m \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Luego, igualando (2.23) con (2.24) y calculando \mathbf{Sp}_2 del producto entre \mathbf{R} y $\mu^{\otimes 2}$. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1\mu_1^2 + \mathbf{R}_1\mu_1\mu_2 + \dots + \mathbf{R}_m\mu_1\mu_m &= \alpha\beta\mu_1 \\ \mathbf{R}_{m+1}\mu_2\mu_1 + \dots + \mathbf{R}_{2m}\mu_2\mu_m &= \alpha\beta\mu_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{R}_{(m-1)m+1}\mu_m\mu_1 + \dots + \mathbf{R}_{m^2}\mu_m^2 &= \alpha\beta\mu_m, \end{aligned}$$

que es equivalente a:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1\mu_1 + \mathbf{R}_1\mu_2 + \dots + \mathbf{R}_m\mu_m &= \alpha\beta \\ \mathbf{R}_{m+1}\mu_1 + \dots + \mathbf{R}_{2m}\mu_m &= \alpha\beta \\ &\vdots \\ \mathbf{R}_{(m-1)m+1}\mu_1 + \dots + \mathbf{R}_{m^2}\mu_m &= \alpha\beta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para simplificar notación, denotemos el sistema de ecuaciones (2.25) por matrices diagonales de la siguiente forma:

$$\text{diag}(\mathbf{R}_1\mu_1 + \mathbf{R}_2\mu_2 + \dots + \mathbf{R}_m\mu_m, \mathbf{R}_{m+1}\mu_1 + \dots + \mathbf{R}_{2m}\mu_m, \mathbf{R}_{(m-1)m+1}\mu_1 + \dots + \mathbf{R}_{m^2}\mu_m) = \text{diag}(\alpha\beta, \dots, \alpha\beta).$$

En la igualdad anterior, la primera matriz diagonal tiene elementos de $\mathbf{Sp}_2(\mathbf{R}\mu^{\otimes 2})$.

Entonces nos resulta:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}\mu^{\otimes 2})(v_1) &= (\mathbf{R}_1\mu_1 + \mathbf{R}_2\mu_2 + \dots + \mathbf{R}_m\mu_m)v_1 \\ \mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}\mu^{\otimes 2})(v_2) &= (\mathbf{R}_{m+1}\mu_1 + \dots + \mathbf{R}_{2m}\mu_m)v_2 \\ &\vdots \\ \mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}\mu^{\otimes 2})(v_m) &= (\mathbf{R}_{(m-1)m+1}\mu_1 + \dots + \mathbf{R}_{m^2}\mu_m)v_m, \end{aligned}$$

que es equivalente a:

$$\mathrm{Sp}_2 \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\mu_1 & & & & & \\ & \mathbf{R}_2\mu_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{R}_m\mu_m & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{R}_{(m-1)m+1}\mu_1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \mathbf{R}_{m^2}\mu_m \end{bmatrix} \right). \quad (2.26)$$

Luego, (2.26) es igual a:

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}(\mathbf{I} \otimes \mu)). \quad (2.27)$$

Por lo tanto, considerando (2.27), el sistema de ecuaciones de (2.25) nos queda:

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}(\mathbf{I} \otimes \mu)) = \mathrm{diag}(\underbrace{\alpha\beta \dots \alpha\beta}_{m\text{-veces}}) = \alpha\beta \mathrm{Id}_V.$$

Así, hemos demostrado que (2.20) es equivalente a (2.21), cuando μ es automorfismo. De forma similar se demuestra que

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}^{-1}(\mathrm{Id}_V \otimes \mu)) = \alpha^{-1}\beta \mathrm{Id}_V \quad (2.28)$$

es equivalente a

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbf{R}^{-1} \circ (\mu \otimes \mu)) = \alpha^{-1}\beta\mu, \quad (2.29)$$

cuando μ es automorfismo. □

Teorema 2.4. *Sea $R \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ un operador de Yang-Baxter, $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de V y $\mu \in \text{End}(V)$. Entonces la 4-tupla (R, μ, α, β) , es operador-YB mejorado si satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *Para cualquier $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, m\}$, se cumple:*

$$(\mu_i \mu_j - \mu_k \mu_l) R_{i,j}^{k,l} = 0.$$

2. *Para cualquier $i, k, l \in \{1, 2, \dots, m\}$, se cumple:*

$$\sum_{j=1}^m R_{i,j}^{k,j} \mu_j = \alpha \beta \delta_i^k \text{ y } \sum_{j=1}^m (R^{-1})_{i,j}^{k,j} \mu_j = \alpha^{-1} \beta \delta_i^k,$$

donde δ_i^k es el delta de Kronecker.

Observación 2.5. *Para construir un operador de Yang-Baxter mejorado $S = (R, \mu, \alpha, \beta)$, tenemos que seguir la siguiente receta:*

Paso 1. Construir un operador de Yang-Baxter R .

Paso 2. Verificar que R cumpla Condición 1 del Teorema 2.4. Luego, determinar las entradas μ_i , según Condición 2 del mismo teorema.

Paso 3. Comprobar que R y μ satisfacen Condición 1 de la Definición 2.6. Luego, determinar α y β usando la Condición 2 de la misma definición.

Con nuestro operador de Yang-Baxter mejorado S y aplicando el siguiente teorema, podemos determinar el polinomio de Jones sin normalización.

Teorema 2.5. *Sea $S = (R, \mu, \alpha, \beta)$ un operador-EYB. Si $\mu^{\otimes n} \in \text{End}(V^{\otimes n})$, entonces la función $T_S : \bigsqcup_{n \geq 1} B_n \longrightarrow \mathbb{K}$, definido por*

$$T_S(\delta) := \alpha^{-\exp(\delta)} \beta^{-n} \text{tr}(b_R(\delta) \mu^{\otimes n}), \text{ con } \delta \in B_n, \quad (2.30)$$

es una invariante sin normalización.

Observación 2.6. *Para normalizar la invariante T_S , basta dividir T_S por $T_S(\bigcirc)$. Entonces, calculado el valor de T_S para el nudo trivial, resulta:*

$$T_S(\bigcirc) = \beta^{-1} \text{Sp}(\mu).$$

Luego, la invariante normalizada queda definida por:

$$T_S(\delta) := \frac{\alpha^{-\exp(\delta)} \beta^{-n+1} \text{tr}(\mathbf{b}_R(\delta) \mu^{\otimes n})}{\text{Sp}(\mu)}, \text{ con } \delta \in \mathbf{B}_n.$$

$$\begin{aligned}
\text{Id}_V \otimes R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $(R \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes R)(R \otimes \text{Id}_V)$ resulta ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & \sqrt{t}(t-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & \sqrt{t}(t-1) & 0 & (t-1)^2 - t(t-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & \sqrt{t}(t-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & \sqrt{t}(t-1) & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Por otro lado, $(I \otimes R)(R \otimes I)(I \otimes R)$ es la matriz

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & \sqrt{t}(t-1) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\
0 & t & \sqrt{t}(t-1) & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & \sqrt{t}(t-1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & \sqrt{t}(t-1) & (t-1)^2 - t(t-1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

De (2.31) y (2.32) se sigue que R es un operador-YB. Así, por Teorema 2.3, R define una representación del grupo de trenzas B_n , mediante el homomorfismo $\phi : \sigma_i \longmapsto R_i$.

A continuación, construiremos un operador de Yang-Baxter mejorado. Para esto, consideremos el mismo operador Yang-Baxter $R \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$ y V el A -espacio vectorial con base $B = \{v_1, v_2\}$, $\alpha, \beta \in A$ y $\mu \in \text{Aut}(V)$ definida por

$$\mu : V \longrightarrow V$$

$$v_1 \mapsto \mu_1 v_1$$

$$v_2 \mapsto \mu_2 v_2,$$

donde $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$.

Comencemos por demostrar que R satisface la Condición 1 del Teorema 2.4 y luego construiremos el isomorfismo μ que satisfaga la Condición 2 de este mismo teorema.

1. Dado cualquier $i, j, k, l \in \{1, 2\}$, tenemos que

$$(\mu_i \mu_j - \mu_k \mu_l) R_{i,j}^{k,l} = 0,$$

donde $R_{i,j}^{k,l}$ son las entradas de la matriz R .

Para el caso $\mu_i \mu_j = \mu_k \mu_l$, se tiene:

$$R_{1,1}^{1,1} = 1, \quad R_{1,2}^{1,2} = 0, \quad R_{2,1}^{1,2} = -\sqrt{t}, \quad R_{1,2}^{2,1} = -\sqrt{t}, \quad R_{2,1}^{2,1} = 1 - t, \quad R_{2,2}^{2,2} = 1,$$

y para el caso $\mu_i \mu_j \neq \mu_k \mu_l$ tenemos que las entradas de R son nulos. Por lo tanto, R cumple Condición 1.

2. Sea $i, k \in \{1, 2\}$, tenemos:

$$\sum_{j=1}^2 R_{i,j}^{k,j} \mu_j = \alpha \beta \delta_i^k,$$

donde δ_i^k es delta de Kronecker. Analizando por casos, según i y k , tenemos:

- Si $i = k = 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^2 R_{1,j}^{1,j} \mu_j = R_{11}^{11} \mu_1 + R_{12}^{12} \mu_2 = \mu_1 = \alpha \beta,$$

- Si $i = 1$, y $k = 2$, entonces

$$\sum_{j=1}^2 R_{1,j}^{2,j} \mu_j = R_{11}^{21} \mu_1 + R_{12}^{22} \mu_2 = 0,$$

- Si $i = 2$, y $k = 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^2 R_{2,j}^{1,j} \mu_j = R_{21}^{11} \mu_1 + R_{22}^{12} \mu_2 = 0,$$

- Si $i = k = 2$, entonces

$$\sum_{j=1}^2 R_{2,j}^{2,j} \mu_j = R_{21}^{21} \mu_1 + R_{22}^{22} \mu_2 = (1 - t) \mu_1 + \mu_2 = \alpha \beta.$$

Esto nos permite generar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \alpha\beta \end{bmatrix},$$

el cual tiene como solución: $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = t$.

De manera análoga se puede determinar el valor de μ_1 y μ_2 , considerando

$$\sum_{j=1}^2 (R^{-1})_{ij}^{kj} \mu_j = \alpha^{-1} \beta \delta_i^k.$$

Para encontrar el operador-EYB, solo resta determinar $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ que satisfaga las dos condiciones de la Definición 2.6.

Demostración de Condición 1:

Sea $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$, entonces $\mu^{\otimes 2} : V^{\otimes 2} \longrightarrow V^{\otimes 2}$ conmuta con el operador R .

En efecto:

$$\begin{aligned} \mu^{\otimes 2} R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -t^{\frac{3}{2}} & -t(t-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} \\ R \mu^{\otimes 2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -t^{\frac{3}{2}} & -t(t-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demostración de condición 2:

Consideremos $B = \{v_1, v_2\}$ base de V y $B^{\otimes 2} = \{v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2, v_2 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2\}$ base de $V^{\otimes 2}$, $R \mu^{\otimes 2} \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ definida por la matriz $(g_{i_1 i_2}^{j_1 j_2})$, con $1 \leq i_1, j_1, i_2, j_2 \leq 2$.

Luego, por Observación 2.4 tenemos

$$R \mu^{\otimes 2}(v_{i_1} \otimes v_{i_2}) = \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq 2} g_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} v_{j_1} \otimes v_{j_2}.$$

Además, para facilitar la lectura, definiremos $g := R\mu^{\otimes 2}$. Así, tenemos

$$(\mathrm{Sp}_2 g)(v_{i_1}) = \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq 2} g_{i_1 j_1}^{j_1 j_2} v_{j_1},$$

donde $(g_{i_1 j_1}^{j_1 j_2})$ es la matriz $R\mu^{\otimes 2}$ y $1 \leq i_1, j_1, i_2, j_2 \leq 2$.

Demostremos que

$$\mathrm{Sp}_2(R\mu^{\otimes 2}) = \alpha\beta\mu.$$

Aplicando definición del operador Sp_2 , tenemos:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Sp}_2 g)(v_1) &= \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq 2} g_{1j_1}^{j_1 j_2} v_{j_1} = g_{11}^{11} v_1 + g_{12}^{12} v_1 + g_{11}^{21} v_2 + g_{12}^{22} v_2 = v_1. \\ (\mathrm{Sp}_2 g)(v_2) &= \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq 2} g_{2j_1}^{j_1 j_2} v_{j_1} = g_{21}^{11} v_1 + g_{22}^{12} v_1 + g_{21}^{21} v_2 + g_{22}^{22} v_2 = t(1-t)v_2 + t^2 v_2 = tv_2. \end{aligned}$$

Así,

$$[\mathrm{Sp}_2(R\mu^{\otimes 2})]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}.$$

Esto indica que

$$1 = \alpha\beta. \tag{2.33}$$

Por otra parte, se debe cumplir $\mathrm{Sp}_2(R^{-1}\mu^{\otimes 2}) = \alpha^{-1}\beta\mu$.

Es claro que

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{t} & \frac{-1}{\sqrt{t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-\sqrt{t}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$R^{-1}\mu^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & -\sqrt{t} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}.$$

Para los siguientes cálculos, definiremos $f := R^{-1} \circ \mu^{\otimes 2}$, notar que $f \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$.

Entonces tenemos:

$$f(v_1 \otimes v_1) = v_1 \otimes v_1, \text{ entonces } f_{11}^{11} = 1,$$

$f(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = (\mathbf{t} - 1)\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 - \sqrt{\mathbf{t}}\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$, entonces $f_{12}^{12} = \mathbf{t} - 1$ y $f_{12}^{21} = \sqrt{\mathbf{t}}$,

$f(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1) = -\sqrt{\mathbf{t}}\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$, entonces $f_{21}^{12} = -\sqrt{\mathbf{t}}$,

$f(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2) = \mathbf{t}^2\mathbf{v}_2$, entonces $f_{22}^{22} = \mathbf{t}^2$.

Aplicando la definición del operador \mathbf{Sp}_2 , tenemos:

$$(\mathbf{Sp}_2 f)(\mathbf{v}_1) = \sum_{1 \leq j_1, j \leq 2} f_{1j}^{j_1 j} \mathbf{v}_{j_1} = f_{11}^{11} \mathbf{v}_1 + f_{12}^{12} \mathbf{v}_1 + f_{11}^{21} \mathbf{v}_2 + f_{12}^{22} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{t} - 1)\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}\mathbf{v}_1,$$

y

$$(\mathbf{Sp}_2 f)(\mathbf{v}_2) = \sum_{1 \leq j_1, j \leq 2} f_{2j}^{j_1 j} \mathbf{v}_{j_1} = f_{21}^{11} \mathbf{v}_1 + f_{22}^{12} \mathbf{v}_1 + f_{21}^{21} \mathbf{v}_2 + f_{22}^{22} \mathbf{v}_2 = \mathbf{t}^2 \mathbf{v}_2.$$

Entonces:

$$[\mathbf{Sp}_2 f]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & 0 \\ 0 & \mathbf{t}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix}.$$

Esto indica que

$$\mathbf{t} = \alpha^{-1} \beta. \quad (2.34)$$

De (2.33) y (2.34) determinamos que:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{t}}} \text{ y } \beta = \sqrt{\mathbf{t}}.$$

Resumiendo tenemos:

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\mathbf{t}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\mathbf{t}} & 1 - \mathbf{t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{t}}} \text{ y } \beta = \sqrt{\mathbf{t}}.$$

Así, la 4-tupla $(\mathbf{R}, \mu, \alpha, \beta)$ es un operador-EYB. Luego, según Teorema 2.5, se tiene

$$\tilde{\Phi}(\sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{t}}}\right)^{-\exp(\sigma)} (\sqrt{\mathbf{t}})^{-n} \text{tr}(\phi(\sigma) \mu^{\otimes n}), \quad (2.35)$$

donde $\sigma \in B_n$. Para normalizar la invariante $\tilde{\Phi}$, vamos a calcular $\tilde{\Phi}(K)$, donde K es el nudo trivial. En efecto:

$$\tilde{\Phi}(K) = \frac{1+t}{\sqrt{t}}.$$

Por lo tanto, para nuestro caso $\dim(V) = 2$, la invariante normalizada de Jones para links es

$$\Phi(\sigma) = \frac{t^{\frac{1}{2}(\exp(\sigma)-n+1)} \text{tr}(\phi_n(\sigma)\mu^{\otimes n})}{1+t}. \quad (2.36)$$

Notemos que el polinomio Φ es el mismo de la Sección 2 del Capítulo 2.

4. Caso dimensión 4

En esta sección, usando la el método de Turaev de la Sección 3, construiremos una invariante para links llamado Ψ y demostraremos que satisface los movimientos de Markov.

A continuación, definiremos el operador-YB mejorado S y determinaremos la invariante asociada Ψ . En lo que sigue, en esta sección, tomaremos $\mathbb{C} := \mathbb{Z}[\mathbf{u}, \frac{1}{\mathbf{u}}]$. Además, consideremos

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u} \end{bmatrix} \in M(16, \mathbb{C}).$$

También, sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base de V y $B^{\otimes 2} = \{v_i \otimes v_j ; i, j = 1, 2, 3, 4\}$ base de $V^{\otimes 2}$.

Usando SageMath cell, sabemos que T es un operador de Yang-Baxter, demostrando que:

$$(T \otimes I)(I \otimes T)(T \otimes I) = (I \otimes T)(T \otimes I)(I \otimes T).$$

Más adelante justificaremos (ver Capítulo 3), por casos, que T es un operador-YB, demostrando que satisface la relación de trenzas. Así, T define una representación del grupo de trenzas B_n , mediante la asignación $\psi : \sigma_i \longmapsto T_i$.

A continuación, construiremos un operador de Yang-Baxter mejorado. Para esto, consideremos el mismo operador Yang-Baxter T , $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y la función definida por:

$$\mu : V \longrightarrow V$$

$$v_1 \mapsto \mu_1 v_1$$

$$v_2 \mapsto \mu_2 v_2$$

$$v_3 \mapsto \mu_3 v_3$$

$$v_4 \mapsto \mu_4 v_4,$$

donde $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{C}$.

Demostremos que T satisface las primera condición del Teorema 2.4, luego construiremos el isomorfismo μ que satisfaga la segunda condición.

La condición 1 del Teorema 2.4 indica que, dado cualquier $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, se debe tener:

$$(\mu_i \mu_j - \mu_k \mu_l) T_{ij}^{kl} = 0, \quad (2.37)$$

donde T_{ij}^{kl} son las entradas de la matriz T .

Analizaremos todas las combinaciones de los índices i, j, k, l . Tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1. Si $\mu_i \mu_j = \mu_k \mu_l$, es decir, si $i = k$ y $j = l$ ó $i = l$ y $j = k$, tenemos que

T_{ij}^{kl} toma los siguientes valores:

$T_{11}^{11} = u$	$T_{22}^{22} = u$	$T_{33}^{33} = u$	$T_{44}^{44} = u$
$T_{12}^{12} = 0$	$T_{21}^{21} = 0$	$T_{31}^{31} = u - 1$	$T_{41}^{41} = 0$
$T_{12}^{21} = 1$	$T_{21}^{12} = 1$	$T_{31}^{13} = 1$	$T_{41}^{41} = u - 1$
$T_{13}^{13} = 0$	$T_{23}^{23} = 0$	$T_{32}^{32} = 0$	$T_{42}^{42} = 0$
$T_{13}^{31} = u$	$T_{23}^{32} = 1$	$T_{32}^{23} = 1$	$T_{42}^{24} = 1$
$T_{14}^{14} = 0$	$T_{24}^{24} = 0$	$T_{34}^{34} = 0$	$T_{43}^{43} = 0$
$T_{14}^{41} = 1$	$T_{24}^{42} = u$	$T_{44}^{43} = 0$	$T_{43}^{34} = 1$

Caso 2. Si $\mu_i \mu_j \neq \mu_k \mu_l$, es decir, si $i \neq k$ o $j \neq l$ y $i \neq l$ o $j \neq k$, tenemos que $T_{ij}^{kl} = 0$.

Así, nuestro operador T satisface Condición 1 del Teorema 2.4.

Ahora, construiremos el isomorfismo μ que satisfaga la Condición 2. Esta condición indica que, dado cualquier $i, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, se debe tener

$$\sum_{j=1}^4 T_{ij}^{kj} \mu_j = \alpha \beta \delta_i^k,$$

donde δ_i^k es el delta de Kronecker. Analizaremos todas las combinaciones de los índices i, j, k, l . Tenemos los siguientes 5 casos:

Caso 1. Si $i = k = 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^4 T_{1j}^{1j} \mu_j = T_{11}^{11} \mu_1 + T_{12}^{12} \mu_2 + T_{13}^{13} \mu_3 + T_{14}^{14} \mu_4 = \alpha \beta,$$

así tenemos $u \mu_1 = \alpha \beta$.

Caso 2. Si $i = 1, k = 2$, entonces

$$\sum_{j=1}^4 T_{1j}^{2j} \mu_j = T_{11}^{21} \mu_1 + T_{12}^{22} \mu_2 + T_{13}^{23} \mu_3 + T_{14}^{24} \mu_4 = 0.$$

Caso 3. Si $i = k = 2$, entonces

$$\sum_{j=1}^4 T_{2j}^{2j} \mu_j = T_{21}^{21} \mu_1 + T_{22}^{22} \mu_2 + T_{23}^{23} \mu_3 + T_{24}^{24} \mu_4 = u \mu_2,$$

así tenemos $u \mu_2 = \alpha \beta$.

Caso 4. Si $i = k = 3$, entonces

$$\sum_{j=1}^4 T_{3j}^{3j} \mu_j = T_{31}^{31} \mu_1 + T_{32}^{32} \mu_2 + T_{33}^{33} \mu_3 + T_{34}^{34} \mu_4 = (u - 1) \mu_1 + u \mu_3,$$

así tenemos $(u - 1) \mu_1 + u \mu_3 = \alpha \beta$.

Caso 5. Si $i = k = 4$, entonces

$$\sum_{j=1}^4 T_{4j}^{4j} \mu_j = T_{41}^{41} \mu_1 + T_{42}^{42} \mu_2 + T_{43}^{43} \mu_3 + T_{44}^{44} \mu_4 = (u - 1) \mu_2 + u \mu_4,$$

así tenemos $(u - 1) \mu_2 + u \mu_4 = \alpha \beta$.

Por consiguiente, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ u - 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & u - 1 & 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \beta \\ \alpha \beta \\ \alpha \beta \\ \alpha \beta \end{bmatrix},$$

que tiene como solución:

$$\mu_1 = \frac{\alpha \beta}{u}, \mu_2 = \frac{\alpha \beta}{u}, \mu_3 = \frac{\alpha \beta}{u^2} \text{ y } \mu_4 = \frac{\alpha \beta}{u^2},$$

o equivalentemente:

$$\mu_1 u = \mu_2 u = \mu_3 u^2 = \mu_4 u^2.$$

Por lo tanto,

$$\mu = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

$$\sum_{j=1}^4 (T^{-1})_{ij}^k \mu_j = \alpha^{-1} \beta \delta_i^k.$$

1. Considerando nuestro operador \mathbb{T} y μ construido anteriormente, veremos que

$$\mu^{\otimes 2}T = T\mu^{\otimes 2}.$$

$$\mu^{\otimes 2} T = \begin{bmatrix} u^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u(u-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u(u-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

(2.39)

$$= T\mu^{\otimes 2}.$$

Es decir, $\mu^{\otimes 2}$ conmuta con T .

2. Para facilitar la lectura, tomaremos $f := T\mu^{\otimes 2}$. En este caso, tenemos que

$$\text{Sp}_2 f(v_{i_1}) = \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq 4} f_{i_1 j_1}^{j_1 j_2} v_{j_1},$$

donde $(f_{i_1 i_2}^{j_1 j_2})$ es la matriz asociada determinada en (2.39) y $1 \leq i_1, j_1, i_2, j_2 \leq 4$.

Demostremos que

$$\text{Sp}_2(T\mu^{\otimes 2}) = \alpha\beta\mu.$$

Aplicando definición del operador Sp_2 , tenemos:

$$\begin{aligned} \blacksquare (\text{Sp}_2 f)(v_1) &= \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq 4} f_{1j_1}^{j_1 j_2} v_{j_1} = f_{11}^{11} v_1 + f_{12}^{12} v_1 + f_{13}^{13} v_1 + f_{14}^{14} v_1 + f_{11}^{21} v_2 + f_{12}^{22} v_2 + \\ &\quad f_{13}^{23} v_2 + f_{14}^{24} v_2 + f_{11}^{31} v_3 + f_{12}^{32} v_3 + f_{13}^{33} v_3 + f_{14}^{34} v_3 + f_{11}^{41} v_4 + f_{12}^{42} v_4 + f_{13}^{43} v_4 + f_{14}^{44} v_4 = u^3 v_1. \\ \blacksquare (\text{Sp}_2 f)(v_2) &= \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq 4} f_{2j_1}^{j_1 j_2} v_{j_1} = f_{21}^{11} v_1 + f_{22}^{12} v_1 + f_{23}^{13} v_1 + f_{24}^{14} v_1 + f_{21}^{21} v_2 + f_{22}^{22} v_2 + \\ &\quad f_{23}^{23} v_2 + f_{24}^{24} v_2 + f_{21}^{31} v_3 + f_{22}^{32} v_3 + f_{23}^{33} v_3 + f_{24}^{34} v_3 + f_{21}^{41} v_4 + f_{22}^{42} v_4 + f_{23}^{43} v_4 + f_{24}^{44} v_4 = u^3 v_2. \\ \blacksquare (\text{Sp}_2 f)(v_3) &= \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq 4} f_{3j_1}^{j_1 j_2} v_{j_1} = f_{31}^{11} v_1 + f_{32}^{12} v_1 + f_{33}^{13} v_1 + f_{34}^{14} v_1 + f_{31}^{21} v_2 + f_{32}^{22} v_2 + \\ &\quad f_{33}^{23} v_2 + f_{34}^{24} v_2 + f_{31}^{31} v_3 + f_{32}^{32} v_3 + f_{33}^{33} v_3 + f_{34}^{34} v_3 + f_{31}^{41} v_4 + f_{32}^{42} v_4 + f_{33}^{43} v_4 + f_{34}^{44} v_4 \\ &= (u(u-1) + u)v_3. \\ \blacksquare (\text{Sp}_2 f)(v_4) &= \sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq 4} f_{4j_1}^{j_1 j_2} v_{j_1} = f_{41}^{11} v_1 + f_{42}^{12} v_1 + f_{43}^{13} v_1 + f_{44}^{14} v_1 + f_{41}^{21} v_2 + f_{42}^{22} v_2 + \\ &\quad f_{43}^{23} v_2 + f_{44}^{24} v_2 + f_{41}^{31} v_3 + f_{42}^{32} v_3 + f_{43}^{33} v_3 + f_{44}^{34} v_3 + f_{41}^{41} v_4 + f_{42}^{42} v_4 + f_{43}^{43} v_4 + f_{44}^{44} v_4 \\ &= (u(u-1) + u)v_4. \end{aligned}$$

Entonces,

$$[\text{Sp}_2 f]_B = \begin{bmatrix} u^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u^2 \end{bmatrix} = u^2 \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Ahora, nos queda demostrar que:

$$\text{Sp}_2(T^{-1}\mu^{\otimes 2}) = \alpha^{-1}\beta\mu.$$

Como en la demostración anterior, tomaremos $\mathbf{g} := (\mathbf{T}^{-1}\mu^{\otimes 2})$. Aplicando definición de \mathbf{Sp}_2 , tenemos:

$$\begin{aligned}
\blacksquare (\mathbf{Sp}_2\mathbf{g})(\mathbf{v}_1) &= \sum_{1 \leq j_1, j \leq 4} f_{ij}^{j_1 j} \mathbf{v}_{j_1} = g_{11}^{11} \mathbf{v}_1 + g_{12}^{12} \mathbf{v}_1 + g_{13}^{13} \mathbf{v}_1 + g_{14}^{14} \mathbf{v}_1 + g_{11}^{21} \mathbf{v}_2 + g_{12}^{22} \mathbf{v}_2 + \\
&\quad g_{13}^{23} \mathbf{v}_2 + g_{14}^{24} \mathbf{v}_2 + g_{11}^{31} \mathbf{v}_3 + g_{12}^{32} \mathbf{v}_3 + g_{13}^{33} \mathbf{v}_3 + g_{14}^{34} \mathbf{v}_3 + g_{11}^{41} \mathbf{v}_4 + g_{12}^{42} \mathbf{v}_4 + g_{13}^{43} \mathbf{v}_4 + g_{14}^{44} \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1. \\
\blacksquare (\mathbf{Sp}_2\mathbf{g})(\mathbf{v}_2) &= \sum_{1 \leq j_1, j \leq 4} g_{2j}^{j_1 j} \mathbf{v}_{j_1} = g_{21}^{11} \mathbf{v}_1 + g_{22}^{12} \mathbf{v}_1 + g_{23}^{13} \mathbf{v}_1 + g_{24}^{14} \mathbf{v}_1 + g_{21}^{21} \mathbf{v}_2 + g_{22}^{22} \mathbf{v}_2 + \\
&\quad g_{23}^{23} \mathbf{v}_2 + g_{24}^{24} \mathbf{v}_2 + g_{21}^{31} \mathbf{v}_3 + g_{22}^{32} \mathbf{v}_3 + g_{23}^{33} \mathbf{v}_3 + g_{24}^{34} \mathbf{v}_3 + g_{21}^{41} \mathbf{v}_4 + g_{22}^{42} \mathbf{v}_4 + g_{23}^{43} \mathbf{v}_4 + g_{24}^{44} \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2. \\
\blacksquare (\mathbf{Sp}_2\mathbf{g})(\mathbf{v}_3) &= \sum_{1 \leq j_1, j \leq 4} g_{3j}^{j_1 j} \mathbf{v}_{j_1} = g_{31}^{11} \mathbf{v}_1 + g_{32}^{12} \mathbf{v}_1 + g_{33}^{13} \mathbf{v}_1 + g_{34}^{14} \mathbf{v}_1 + g_{31}^{21} \mathbf{v}_2 + g_{32}^{22} \mathbf{v}_2 + \\
&\quad g_{33}^{23} \mathbf{v}_2 + g_{34}^{24} \mathbf{v}_2 + g_{31}^{31} \mathbf{v}_3 + g_{32}^{32} \mathbf{v}_3 + g_{33}^{33} \mathbf{v}_3 + g_{34}^{34} \mathbf{v}_3 + g_{31}^{41} \mathbf{v}_4 + g_{32}^{42} \mathbf{v}_4 + g_{33}^{43} \mathbf{v}_4 + g_{34}^{44} \mathbf{v}_4 \\
&= \frac{1}{u} \mathbf{v}_3. \\
\blacksquare (\mathbf{Sp}_2\mathbf{g})(\mathbf{v}_4) &= \sum_{1 \leq j_1, j \leq 4} g_{4j}^{j_1 j} \mathbf{v}_{j_1} = g_{41}^{11} \mathbf{v}_1 + g_{42}^{12} \mathbf{v}_1 + g_{43}^{13} \mathbf{v}_1 + g_{44}^{14} \mathbf{v}_1 + g_{41}^{21} \mathbf{v}_2 + g_{42}^{22} \mathbf{v}_2 + \\
&\quad g_{43}^{23} \mathbf{v}_2 + g_{44}^{24} \mathbf{v}_2 + g_{41}^{31} \mathbf{v}_3 + g_{42}^{32} \mathbf{v}_3 + g_{43}^{33} \mathbf{v}_3 + g_{44}^{34} \mathbf{v}_3 + g_{41}^{41} \mathbf{v}_4 + g_{42}^{42} \mathbf{v}_4 + g_{43}^{43} \mathbf{v}_4 + g_{44}^{44} \mathbf{v}_4 \\
&= \frac{1}{u} \mathbf{v}_4.
\end{aligned}$$

Luego,

$$[\mathbf{Sp}_2\mathbf{g}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{bmatrix} = \frac{1}{u} \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Ahora, debido a (2.40) y (2.41) tenemos:

$$u^2 = \alpha\beta$$

y

$$\frac{1}{u} = \alpha^{-1}\beta.$$

Por lo tanto,

$$\alpha = u^{\frac{3}{2}} \text{ y } \beta = \sqrt{u}.$$

En resumen, hemos determinado el automorfismo μ , el operador-YB \mathbf{T} , α y $\beta \in \mathbb{Z}[u, \frac{1}{u}]$. Así, tenemos que la 4-tupla $S = (\mathbf{T}, \mu, \alpha, \beta)$ es un operador-EYB. Luego, según Teorema 2.5, se tiene que $\tilde{\Psi} : B_n \longrightarrow \mathbb{Z}[u, \frac{1}{u}]$ respeta los

movimientos de Markov, donde

$$\tilde{\Psi}(\hat{\sigma}) := (\mathbf{u}^{\frac{3}{2}})^{-\exp(\sigma)} (\sqrt{\mathbf{u}})^{-n} \text{tr}(\psi(\sigma) \mu^{\otimes n}). \quad (2.42)$$

Para normalizar la invariante $\tilde{\Psi}$, vamos a determinar $\tilde{\Psi}(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})$.

Ahora, un cálculo directo muestra que

$$\tilde{\Psi}(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) = \frac{2(\mathbf{u} + 1)}{\sqrt{\mathbf{u}}}.$$

En general, normalizando $\tilde{\Psi}$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Sea ψ_n el homomorfismo de la Proposición 2.2, μ la matriz del resultado (2.38), entonces*

$$\Psi(\hat{\sigma}) := \frac{\mathbf{u}^{\frac{1}{2}(1-3\exp(\sigma)-n)} \text{tr}(\psi_n(\sigma) \mu^{\otimes n})}{2(1 + \mathbf{u})} \quad (2.43)$$

es una invariante para links.

A continuación, demostraremos que Ψ respeta los movimientos de Markov. Es decir, dado $\beta \in B_n$, demostraremos que Ψ cumple las siguientes dos condiciones:

M1. $\Psi(\alpha\beta\alpha^{-1}) = \Psi(\beta)$, para todo $\alpha \in B_n$.

M2. $\Psi(\beta) = \Psi(\beta\sigma_n) = \Psi(\beta\sigma_n^{-1})$.

DEMOSTRACIÓN. Primero demostraremos $\Psi(\alpha\beta\alpha^{-1}) = \Psi(\beta)$. Esto es,

$$\frac{\mathbf{u}^{\frac{1}{2}(1-3\exp(\alpha\beta\alpha^{-1})-n)} \text{tr}(\psi_n(\alpha\beta\alpha^{-1}) \mu^{\otimes n})}{2(1 + \mathbf{t})} = \frac{\mathbf{u}^{\frac{1}{2}(1-3\exp(\beta)-n)} \text{tr}(\psi_n(\beta) \mu^{\otimes n})}{2(1 + \mathbf{t})}.$$

Es evidente que $\exp(\alpha\beta\alpha^{-1}) = \exp(\alpha\alpha^{-1}\beta) = \exp(\beta)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\psi_n(\alpha\beta\alpha^{-1}) \mu^{\otimes n}) &= \text{tr}(\psi_n(\alpha) \psi_n(\beta) \psi_n(\alpha^{-1}) \mu^{\otimes n}) \\ &= \text{tr}(\psi_n(\alpha) \psi_n(\beta) \psi_n(\alpha^{-1}) \mu^{\otimes n}) \\ &= \text{tr}(\psi_n(\alpha) \psi_n(\beta) \psi_n(\alpha)^{-1} \mu^{\otimes n}) \\ &= \text{tr}(\psi_n(\alpha) \psi_n(\alpha)^{-1} \psi_n(\beta) \mu^{\otimes n}) \\ &= \text{tr}(\psi_n(\beta) \mu^{\otimes n}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Ψ respeta M1.

Ahora, demostraremos que Ψ respeta M2, es decir,

$$\Psi(\beta\sigma_n) = \Psi(\beta),$$

donde $\beta \in B_n$.

Para que se cumpla la igualdad, basta analizar

$$\text{tr}(\psi_{n+1}(\beta\sigma_n)\mu^{\otimes(n+1)}) \text{ y } \exp(\beta\sigma_n).$$

En primer lugar, como ψ es homomorfismo, tenemos

$$\psi_{n+1}(\beta\sigma_n) = \psi_{n+1}(\beta)\psi_{n+1}(\sigma_n). \quad (2.44)$$

Como $\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$, tenemos

$$\psi_{n+1}(\beta) = T_{i_1}^{\varepsilon_1} T_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots T_{i_k}^{\varepsilon_k}, \quad (2.45)$$

donde $T_{i_j}^{\varepsilon_j} = I_4^{\otimes(i_j-1)} \otimes T^{\varepsilon_j} \otimes I_4^{\otimes(n-i_j)}$, con $1 \leq i_j \leq n$ y $\varepsilon_j = \pm 1$. Además,

$$T_{i_j}^{\varepsilon_j} = (I_4^{\otimes(i_j-1)} \otimes T^{\varepsilon_j} \otimes I_4^{\otimes(n-i_j-1)}) \otimes I_4. \quad (2.46)$$

Si reemplazamos los $T_{i_j}^{\varepsilon_j}$ de (2.46) en (2.45) y aplicando la propiedad $(A \otimes I_4)(B \otimes I_4) = AB \otimes I_4$, de modo reiterativo, en (2.45), este se simplifica y resulta

$$\psi_{n+1}(\beta) = \psi_n(\beta) \otimes I_4. \quad (2.47)$$

Por otro lado, aplicando la definición de ψ en (2.44), se concluye

$$\psi_{n+1}(\sigma_n) = I_4^{\otimes(n-1)} \otimes T. \quad (2.48)$$

Por lo tanto, de (2.47), (2.48) y considerando el factor $\mu^{\otimes(n+1)}$, tenemos que

$$\psi_{n+1}(\beta\sigma_n)\mu^{\otimes(n+1)} = (\psi_n(\beta) \otimes I_4)(I_4^{\otimes n-1} \otimes T)\mu^{\otimes(n+1)}. \quad (2.49)$$

Por otra parte,

$$\mathrm{tr}(\psi_n(\beta)\mu^{\otimes n}) = \sum_{i=1}^{4^n} a_{ii} b_i, \quad (2.50)$$

donde

$$\mu^{\otimes n} = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{4^n} \end{bmatrix},$$

con $b_1 := u^n$, $b_2 := u^n$, $b_3 := u^{n-1}$, $b_4 := u^{n-1}$ y para $i > 4$,

$$b_i = \begin{cases} b_p & \text{si } i = 4p - 3 \\ b_p & \text{si } i = 4p - 2 \\ \frac{b_p}{u} & \text{si } i = 4p - 1 \\ \frac{b_p}{u} & \text{si } i = 4p. \end{cases},$$

Definamos ahora la matriz $M := \psi_n(\beta)$ con componentes a_{ij} y de orden 4^n . Entonces la expresión (2.49) queda

$$\psi_{n+1}(\beta\sigma_n)\mu^{\otimes(n+1)} = (M \otimes I_4)(I_4^{\otimes n-1} \otimes T)\mu^{\otimes(n+1)}. \quad (2.51)$$

Los factores del miembro derecho de la ecuación (2.51) son equivalentes a las siguientes matrices:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \dots & \dots & \mathbf{a}_{14^n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & & & & \vdots \\ \mathbf{a}_{31} & & \mathbf{a}_{33} & & & \vdots \\ \vdots & & & \mathbf{a}_{44} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{4^n 1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{a}_{4^n 4^n} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_4 \right) \begin{bmatrix} \mathbf{T} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mu^{\otimes(n+1)}. \quad (2.52)$$

De (2.52), es claro que el producto es una matriz de tamaño 4^{n+1} . Para una mejor comprensión, denotemos el producto (2.52), sin considerar el factor $\mu^{\otimes(n+1)}$, por

$$(\text{diag}(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{22}, \dots, \mathbf{a}_{4^n 4^n}) \otimes \text{diag}(1, 1, 1, 1)) \text{diag}(\underbrace{\mathbf{T}, \dots, \mathbf{T}}_{4^{n-1}}). \quad (2.53)$$

Al resolver el primer factor, tenemos

$$(\text{diag}(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{11}, \dots, \mathbf{a}_{4^n 4^n}, \mathbf{a}_{4^n 4^n}, \mathbf{a}_{4^n 4^n}, \mathbf{a}_{4^n 4^n})) \text{diag}(\underbrace{\mathbf{T}, \dots, \mathbf{T}}_{4^{n-1}}). \quad (2.54)$$

El producto de (2.54) lo expresamos por bloques de matrices, donde el i -ésimo bloque es

$$\text{diag}(\mathbf{u}\mathbf{a}_{4i-3}, 0, 0, 0, 0, \mathbf{u}\mathbf{a}_{4i-2}, 0, 0, (\mathbf{u}-1)\mathbf{a}_{4i-1}, 0, \mathbf{u}\mathbf{a}_{4i}, 0, 0, (\mathbf{u}-1)\mathbf{a}_{4i}, 0, \mathbf{u}\mathbf{a}_{4i}, \dots). \quad (2.55)$$

Consideremos

$Z := \text{tr}(\psi_{n+1}(\beta\sigma_n)\mu^{\otimes(n+1)})$. Luego, usando (2.50) en (2.55) tenemos que

$$Z = \sum_{i=1}^{4^{n-1}} \{\mathbf{a}_{2i-1, 2i-1} \mathbf{b}_{4i-3} + \mathbf{a}_{2i, 2i} (1 - \mathbf{t}) \mathbf{b}_{4i-1} + \mathbf{a}_{2i, 2i} \mathbf{t} \mathbf{b}_{4i}\},$$

reescribiendo,

$$= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \{\mathbf{a}_{2i-1, 2i-1} \mathbf{b}_{2(2i-1)-1} + \mathbf{a}_{2i, 2i} (1 - \mathbf{t}) \mathbf{b}_{2(2i)-1} + \mathbf{a}_{2i, 2i} \mathbf{t} \mathbf{b}_{2(2i)}\},$$

factorizando:

$$= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \{a_{2i-1,2i-1} b_{2i-1} + a_{2i,2i} [(1-t)b_{2i} + tb_{2i}]\},$$

reduciendo terminos

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \{a_{2i-1,2i-1} b_{2i-1} + a_{2i,2i} b_{2i}\} \\ &= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} a_{jj} b_j = \text{tr}(\psi_n(\beta) \mu^{\otimes n}). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{tr}(\psi_{n+1}(\beta \sigma_n) \mu^{\otimes n+1}) = \text{tr}(\psi_n(\beta) \mu^{\otimes n});$$

además, es evidente que:

$$\exp(\beta \sigma_n) = \exp(\beta) + 1 \text{ y } \exp(\beta) = \exp(\beta \sigma_n).$$

En consecuencia,

$$\Psi(\beta) = \Psi(\beta \sigma_n).$$

De manera similar, se demuestra

$$\Psi(\beta \sigma_n^{-1}) = \Psi(\beta).$$

Así, concluimos que Ψ satisface las condiciones de Markov, por consiguiente,

Ψ es una invariante para links. □

Capítulo 3

Tied links

En este capítulo introduciremos un nuevo tipo de link que será llamado tied link [3]. Además estudiaremos la invariante \mathcal{F} mediante relaciones skein. Y por último determinaremos una representación del monoide TB_n en un espacio tensorial $V^{\otimes n}$, lo que nos permitirá hacer una conjetura con respecto a una invariante de tipo Homflypt para tied links.

1. Conceptos fundamentales

En 2016 F. Aicardi y J. Juyumaya, ver [3], introdujeron un nuevo tipo de links llamados tied links. Esta construcción, del punto de vista algebraico, fue realizada a partir del monoide tied braid (trenzas con identificación). En esta sección estudiaremos los tied links del punto de vista topológico.

Definición 3.1. *Un tied link es un link donde sus componentes pueden estar conectados por ties (lazos). Los ties se representan como resortes para indicar que pueden ser contraídos y/o extendidos, dejando que sus extremos se muevan a lo largo de las componentes del link.*

Notación 4. *Al conjunto de los tied links lo denotaremos por \mathcal{L}^t .*

Definición 3.2. *Un diagrama de tied link es un diagrama de link con $\text{tie}(s)$ que une(n) dos puntos de la curva. Por ejemplo, en la Figura 1 vemos un diagrama de un tied link que tiene dos componentes y tres ties.*

Observación 3.1. *El tie no es un elemento topológico, es solo una herramienta para indicar que una componente está conectada con otra.*

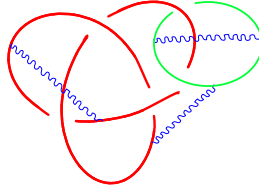


FIGURA 1. Diagrama de un tied link

Observación 3.2. *Al igual que los links clásicos, los tied links pueden tener orientación (cf. Definición 1.5).*

Definición 3.3. *Sean TL_1 y TL_2 dos tied links. Se dice que son tie-isotópicos si cumplen las siguientes dos condiciones:*

1. *Los links TL_1 y TL_2 son isotópicos,*
2. *Ellos definen la misma partición del conjunto de componentes, salvo reenumeración.*

Ejemplo 3.1. *En la Figura 2 tenemos dos diagramas de tied links no tie-isotópicos, ya que no definen la misma partición del conjunto.*

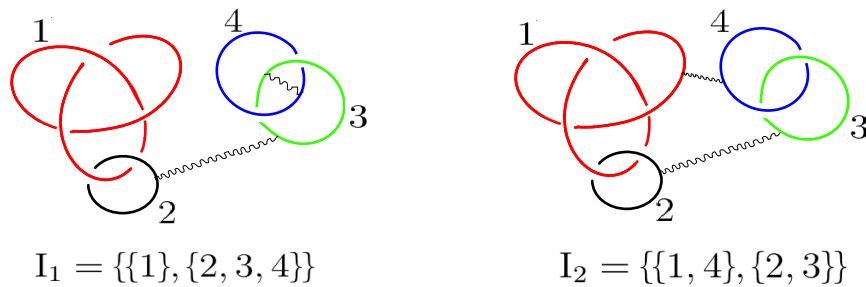


FIGURA 2. Diagramas de tied links no tie-isotópicos

Observación 3.3. *Todo link clásico puede ser visto como:*

1. Un link sin ties,
o bien
2. Un link en la que todos sus componentes están conectados por ties.

En 2 de Observación 3.3 se cumple, ya que al agregar ties en cada componente de un link, determinamos las misma particiones que un link sin ties. En la Figura 3 queda en evidencia lo observado.

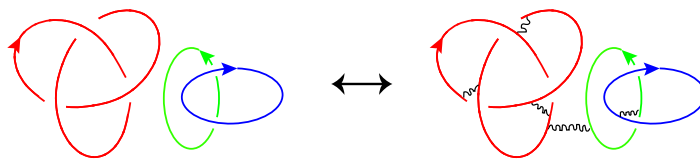


FIGURA 3. Link visto como tied link

Definición 3.4. Llamamos tie esencial entre dos componentes, a un tie que al eliminarlo, hace cambiar la isotopía del tied link. En la Figura 4 tenemos un ejemplo de un tie esencial entre dos componentes.

Observación 3.4. Un tie entre dos componentes distintos es esencial.

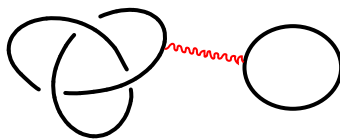


FIGURA 4. Tie esencial

2. Invariante de tipo Homflypt

En esta sección, presentaremos cierta invariante polinomial de tipo Homflypt para tied link denotada por \mathcal{F} y será definido mediante relaciones skein (ver [3]).

Notación 5. En lo que sigue, a todo tied link o diagrama de tied link lo denotaremos por TL . Además, un tied link junto a el nudo trivial desconectado lo denotaremos por TL° .

Definición 3.5. Sea B un conjunto con elementos fácilmente comparables. Una invariante para tied link (orientado) es una función $f : \mathcal{L}^t \rightarrow B$, que toma un valor constante en cada clase de tied links tie-isotópicos.

Para definir \mathcal{F} es necesario considerar las siguientes notaciones.

Notación 6. Las notaciones: TL_+ , TL_- , TL_{\sim} , $TL_{+,\sim}$ y $TL_{-,\sim}$ indican que un diagrama de tied link se modifica en un cruce como se indica en la Figura 5 y el resto del diagrama de tied link se conserva.

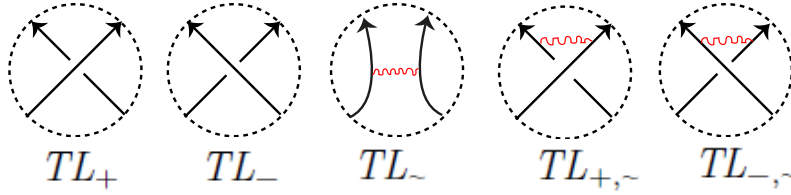


FIGURA 5. Discos, donde TL_+ , TL_- , TL_{\sim} , $TL_{+,\sim}$ y $TL_{-,\sim}$ no son tie-isotópicos.

Teorema 3.1. Sea $A := \mathbb{C}(u, z, w)$. Existe una función $\mathcal{F} : \mathcal{L}^t \rightarrow A$, invariante de tied link orientado, definido de manera única por las siguientes tres condiciones:

1. $\mathcal{F}(\bigcirc) = 1$, donde \bigcirc es el nudo trivial,
2. Para todo tied link,

$$\mathcal{F}(TL^o) = \frac{1}{wz} \mathcal{F}(TL), \quad (3.1)$$

3. La relación skein es:

$$\frac{1}{w} \mathcal{F}(TL_+) - w \mathcal{F}(TL_-) = (1 - u^{-1}) \mathcal{F}(TL_{\sim}) + \frac{1}{w} (1 - u^{-1}) \mathcal{F}(TL_{+,\sim}). \quad (3.2)$$

La demostración del Teorema 3.1 es una adaptación de la demostración realizada en [17].

Corolario 3.1. Las siguientes relaciones son equivalentes a la relación skein (3.2) del Teorema 3.1.

1. $\frac{1}{\mathbf{u}\mathbf{w}} \mathcal{F}(TL_{+,\sim}) - \mathbf{w}\mathcal{F}(TL_{-,\sim}) = (1 - \mathbf{u}^{-1})\mathcal{F}(TL_{\sim}),$
2. $\frac{1}{\mathbf{w}}\mathcal{F}(TL_{+}) = \mathbf{w}[\mathcal{F}(TL_{-}) + (\mathbf{u} - 1)\mathcal{F}(TL_{-,\sim})] + (\mathbf{u} - 1)\mathcal{F}(TL_{\sim}),$
3. $\mathbf{w}\mathcal{F}(TL_{-}) = \frac{1}{\mathbf{w}}[\mathcal{F}(TL_{+,\sim}) + (\mathbf{u}^{-1} - 1)\mathcal{F}(TL_{+,\sim})] + (\mathbf{u}^{-1} - 1)\mathcal{F}(TL_{\sim}).$

DEMOSTRACIÓN. La relación 1 se demuestra agregando un tie entre las dos hebras de los discos de la relación skein de (3.2). Las relaciones 2 y 3 se demuestran con (3.2) y 1 de este mismo corolario. \square

Proposición 3.1. *Sean \mathbf{c} círculos (nudo trivial) separados con un tie, representados por $X_{\mathbf{c}}$, entonces*

$$\mathcal{F}(X_{\mathbf{c}+1}) = \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{w}\mathbf{z}}\mathcal{F}(X_{\mathbf{c}}).$$

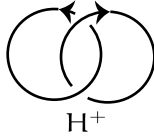
Nótese que $\mathcal{F}(X_1) = 1$.

Ejemplo 3.2. *Algunos polinomios que utilizaremos son:*

$$\mathcal{F}(X_1) = 1 \quad ; \quad \mathcal{F}(X_2) = \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{w}\mathbf{z}} \quad ; \quad \mathcal{F}(X_3) = \frac{\mathbf{t}^2}{(\mathbf{w}\mathbf{z})^2}.$$

A continuación calcularemos, de modo axiomático, el polinomio \mathcal{F} del Hopf link.

Ejemplo 3.3. *Sea H^+ un link como se muestra en la siguiente figura:*



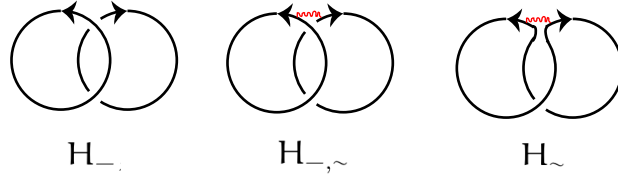
Para calcular $\mathcal{F}(H^+)$, usemos 2 del Corolario 3.1 en el cruce superior de H^+ , así tenemos:

$$\frac{1}{\mathbf{w}} \mathcal{F}(H^+) = \mathbf{w}[\mathcal{F}(H_-) + (\mathbf{u} - 1)\mathcal{F}(H_{-,\sim})] + (\mathbf{u} - 1)\mathcal{F}(H_{\sim}).$$

Despejando $\mathcal{F}(H^+)$, nos queda

$$\mathcal{F}(H^+) = \mathbf{w}^2[\mathcal{F}(H_-) + (\mathbf{u} - 1)\mathcal{F}(H_{-,\sim})] + \mathbf{w}(\mathbf{u} - 1)\mathcal{F}(H_{\sim}),$$

donde H_- , $H_{-,\sim}$ y H_{\sim} tiene, respectivamente, los siguientes diagramas:



En el diagrama de H_- , usemos los movimientos de Reidemeister para tener dos nudos triviales desconectados, así podemos aplicar 3 del Teorema 3.1. Por otro lado, en el diagrama de $H_{-,~}$ aplicamos los movimientos de Reidemeister para tener dos nudos triviales con un tie, así podemos aplicar la Proposición 3.1. Por último, en el diagrama de $H_~$ tenemos un tie que no es esencial, entonces puede omitirse. Luego, usando los movimientos de Reidemeister determinamos un nudo trivial, así podemos utilizar 1 del Teorema 3.1.

Por lo anterior,

$$\mathcal{F}(H_-) = \frac{1}{wz} , \mathcal{F}(H_{-,~}) = \frac{t}{wz} \text{ y } \mathcal{F}(H_~) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}(H^+) = wz^2 \left[\frac{1}{wz} + (u-1) \frac{t}{wz} \right] + w(u-1) = \frac{w}{z} (1 + ut + uz - t - z).$$

Proposición 3.2 (Propiedades, ver [3]). *El polinomio \mathcal{F} tiene las siguientes cuatro propiedades:*

1. *La invariante \mathcal{F} de la suma conexa ($\#$) de dos tieds links es el producto de la invariante de cada tied link, es decir:*

$$\mathcal{F}(TL_1 \# TL_2) = \mathcal{F}(TL_1) \mathcal{F}(TL_2).$$

2. *El valor de $\mathcal{F}(TL)$ no cambia si las orientaciones de todas las componentes de TL tienen sentido opuesto.*
3. *Sea TL un tied link cuyas componentes están todas con ties. Si cambiamos todos los cruces de TL , dejando TL^+ ó TL^- , tenemos que $\mathcal{F}(TL^\pm)$ se obtiene de $\mathcal{F}(TL)$ mediante un cambio de w por su inversa y u por su inversa.*
4. *Sea ℓ un link cuyos componentes estén todos ligados con ties, entonces la invariante \mathcal{F} satisface la relación skein de tipo Homflypt, es decir,*

$$\ell \mathcal{F}(TL_{+,~}) + \ell^{-1} \mathcal{F}(TL_{-,~}) + m \mathcal{F}(TL_~) = 0 ,$$

donde $\ell = \frac{i}{\sqrt{uw}}$ y $m = i(\frac{1}{\sqrt{u}} - \sqrt{u})$. Las demostraciones de todas las propiedades anteriores son triviales y estas las dejamos como ejercicio para el lector (ver [12]).

5. La invariante Δ es igual a \mathcal{F} cuando se evalúa en links (ver [8]).

Observación 3.5. Sea χ la invariante de Homflypt para link clásico y \mathcal{F} la invariante para tied link, entonces estas invariantes se relacionan de la siguiente manera:

1. Para un link clásico con una componente (o nudo), tenemos que las invariantes son iguales, es decir, $\mathcal{F} = \chi$, ver [12].
2. Para un link clásico con dos o más componentes, tenemos que \mathcal{F} no es equivalente a χ , es decir, existen links clásicos que \mathcal{F} distingue y que el polinomio χ no. Por lo tanto, \mathcal{F} puede considerarse como una extensión del polinomio Homflypt, ver [12].
3. Al igual que χ , la invariante \mathcal{F} puede ser construido mediante la receta de Jones. Los teoremas de Alexander y Markov para tied links tienen algunas diferencias, ver [3].

3. Una representación de TB_n

En esta sección, construiremos una representación del monoide Tied Braids TB_n en un espacio tensorial $V^{\otimes n}$. Comenzaremos definiendo el monoide Tied Braids TB_n mostrando su presentación, después definiremos los operadores T, E y construiremos el operador T^{-1} , y finalmente extenderemos los operadores T, E para demostrar que TB_n tiene una representación en el espacio tensorial $V^{\otimes n}$. Esta demostración se realizará por casos.

Definición 3.6. El monoide Tied Braids denotado por TB_n es presentado por los generadores trenzas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ y los generadores $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$, llamados

ties, tal que, satisfacen las siguientes relaciones:

$$\eta_i \eta_j = \eta_j \eta_i \quad \text{para todo } i, j, \quad (3.3)$$

$$\eta_i \sigma_j = \sigma_j \eta_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (3.4)$$

$$\eta_i^2 = \eta_i \quad \text{para todo } i, \quad (3.5)$$

$$\eta_i \sigma_i = \sigma_i \eta_i \quad \text{para todo } i, \quad (3.6)$$

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (3.7)$$

$$\eta_j \sigma_i \sigma_j = \sigma_i \sigma_j \eta_i \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (3.8)$$

$$\eta_i \eta_j \sigma_j = \eta_i \sigma_j \eta_i = \sigma_j \eta_i \eta_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (3.9)$$

$$\eta_i \sigma_j \sigma_i^{-1} = \sigma_j \sigma_i^{-1} \eta_j \quad \text{para } |i - j| = 1. \quad (3.10)$$

Estos generadores del monoide TB_n los podemos graficar, según se muestra en la Figura 6.

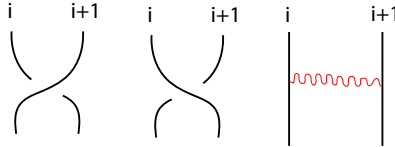


FIGURA 6. Diagramas de los generadores σ_i , σ_i^{-1} y η_i

Por el resto del capítulo, denotaremos $V^{\otimes 2}$ por el espacio del producto tensorial entre V y si mismo, donde V es un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n^2 y $\mathbb{K} := \mathbb{C}(u)$. A continuación, vamos a definir ciertos operadores que utilizaremos para construir una representación de TB_n en $V^{\otimes n}$ usando la idea que se encuentra en [18].

Definición 3.7. Sea B base de V , donde $B = \{v_i^j ; i, j = 1, 2, \dots, n\}$ y $B^{\otimes n}$ base de $V^{\otimes n}$, donde $B^{\otimes n} = \{v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} \otimes \dots \otimes v_{i_n}^{j_n} ; 1 \leq i_k \leq n \text{ y } 1 \leq j_k \leq n\}$. Los

operadores $E, T \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ son definidos por:

$$E(v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2}) = \begin{cases} v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} & \text{si } j_1 = j_2 \\ 0 & \text{si } j_1 \neq j_2, \end{cases}$$

y

$$T(v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2}) = \begin{cases} v_{i_2}^{j_1} \otimes v_{i_1}^{j_2} & \text{si } j_1 \neq j_2 \\ uv_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_1}^{j_1} & \text{si } j_1 = j_2, i_1 = i_2 \\ v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_1}^{j_1} & \text{si } j_1 = j_2, i_1 < i_2 \\ uv_{i_2}^{j_1} \otimes v_{i_1}^{j_1} + (u-1)v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} & \text{si } j_1 = j_2, i_1 > i_2. \end{cases}$$

De la Definición 3.7, calculemos T^{-1} , como sigue:

Desde ahora consideraremos $n=2$. En consecuencia, el \mathbb{K} -espacio vectorial V tiene base $B = \{v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_2^2\}$ y la base usual de $V^{\otimes 2}$ con respecto a B es

$$B^{\otimes 2} = \left\{ \begin{array}{cccc} v_1^1 \otimes v_1^1 & v_1^1 \otimes v_1^2 & v_1^1 \otimes v_2^1 & v_1^1 \otimes v_2^2 \\ v_1^2 \otimes v_1^1 & v_1^2 \otimes v_1^2 & v_1^2 \otimes v_2^1 & v_1^2 \otimes v_2^2 \\ v_2^1 \otimes v_1^1 & v_2^1 \otimes v_1^2 & v_2^1 \otimes v_2^1 & v_2^1 \otimes v_2^2 \\ v_2^2 \otimes v_1^1 & v_2^2 \otimes v_1^2 & v_2^2 \otimes v_2^1 & v_2^2 \otimes v_2^2 \end{array} \right\}.$$

En la siguiente tabla, determinamos la imagen de cada elemento de la base $B^{\otimes 2}$.

Usando Scientific WorkPlace 5.5, tenemos

$$[T^{-1}]_{B^{\otimes 2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{u}(u-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{u}(u-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora podemos determinar la imagen de cada elemento de la base de $V^{\otimes 2}$ según T^{-1} .

$T^{-1}(v_1^1 \otimes v_1^1) = \frac{1}{u}v_1^1 \otimes v_1^1$	$T^{-1}(v_2^1 \otimes v_1^1) = v_1^1 \otimes v_2^1$
$T^{-1}(v_1^1 \otimes v_1^2) = v_1^2 \otimes v_1^1$	$T^{-1}(v_2^1 \otimes v_1^2) = v_1^2 \otimes v_2^1$
$T^{-1}(v_1^1 \otimes v_2^1) = \frac{-1}{u}(u-1)v_1^1 \otimes v_2^1 + \frac{1}{u}v_2^1 \otimes v_1^1$	$T^{-1}(v_2^1 \otimes v_2^1) = \frac{1}{u}v_2^1 \otimes v_2^1$
$T^{-1}(v_1^1 \otimes v_2^2) = v_2^2 \otimes v_1^1$	$T^{-1}(\frac{1}{2}v_2^2) = v_2^2 \otimes v_2^1$
$T^{-1}(v_1^2 \otimes v_1^1) = v_1^1 \otimes v_1^2$	$T^{-1}(v_2^2 \otimes v_1^1) = v_1^1 \otimes v_2^2$
$T^{-1}(v_1^2 \otimes v_1^2) = \frac{1}{u}v_1^2 \otimes v_1^2$	$T^{-1}(v_2^2 \otimes v_1^2) = v_1^2 \otimes v_2^2$
$T^{-1}(v_1^2 \otimes v_2^1) = v_2^1 \otimes v_1^2$	$T^{-1}(v_2^2 \otimes v_2^1) = v_2^1 \otimes v_2^2$
$T^{-1}(v_1^2 \otimes v_2^2) = \frac{-1}{u}(u-1)v_1^2 \otimes v_2^2 + \frac{1}{u}v_2^2 \otimes v_1^2$	$T^{-1}(v_2^2 \otimes v_2^2) = \frac{1}{u}v_2^2 \otimes v_2^2$

Así, tenemos que el endomorfismo, denotado T^{-1} , esta definido por:

$$T^{-1}(v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2}) = \begin{cases} v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_1}^{j_1} & \text{si } j_1 \neq j_2 \\ \frac{1}{u} v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} & \text{si } j_1 = j_2, i_1 = i_2 \\ \frac{-1}{u}(u-1)v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} + \frac{1}{u} v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_1}^{j_1} & \text{si } j_1 = j_2, i_1 < i_2 \\ v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_1}^{j_1} & \text{si } j_1 = j_2, i_1 > i_2. \end{cases}$$

En efecto T^{-1} es el inverso de T . Para esto verificamos que:

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \text{Id}. \quad (3.11)$$

Caso 1. Para el caso $j_1 \neq j_2$ ó $j_1 = j_2$ y $i_1 > i_2$, es evidente que se cumple (3.11), ya que T y T^{-1} actúan como permutación.

Caso 2. Para el caso $j_1 = j_2$ y $i_1 = i_2$ se cumple (3.11), ya que

$$\begin{aligned} (T \circ T^{-1})(v_{i_1} \otimes v_{i_2}) &= T\left(\frac{1}{u} v_{i_1} \otimes v_{i_2}\right) \\ &= v_{i_2} \otimes v_{i_1} \\ &= (T^{-1} \circ T)(v_{i_1} \otimes v_{i_2}). \end{aligned}$$

Caso 3. Para el caso $j_1 = j_2$ y $i_1 < i_2$,

$$\begin{aligned} (T \circ T^{-1})(v_{i_1} \otimes v_{i_2}) &= T\left(\frac{-1}{u}(u-1)v_{i_1} \otimes v_{i_2} + \frac{1}{u} v_{i_2} \otimes v_{i_1}\right) \\ &= T\left(\frac{-1}{u}(u-1)v_{i_1} \otimes v_{i_2}\right) + T\left(\frac{1}{u} v_{i_2} \otimes v_{i_1}\right) \\ &= \frac{-(u-1)v_{i_2}}{u} \otimes v_{i_1} + uv_{i_1} \otimes \frac{v_{i_2}}{u} + (u-1)v_{i_2} \otimes v_{i_1} \\ &= v_{i_1} \otimes v_{i_2}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$(T^{-1} \circ T)(v_{i_1} \otimes v_{i_2}) = T^{-1}(v_{i_2} \otimes v_{i_1}) = v_{i_1} \otimes v_{i_2}.$$

Por lo tanto,

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \text{Id}.$$

Considerando los operadores de Definición 3.7. Para definir una representación del monoide TB_n en un espacio tensorial, extenderemos T, E a operadores T_k, E_r actuando en el espacio tensorial $V^{\otimes n}$, como se indica en las siguientes definiciones:

$$T_k(v_{i_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}^{j_n}) := v_{i_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes T(\underbrace{v_{i_k}^{j_k} \otimes v_{i_{k+1}}^{j_{k+1}}}_{\text{posición}(k, k+1)}) \cdots \otimes v_{i_n}^{j_n}, \quad (3.12)$$

es decir, T actúa sobre el factor de la posición $(k, k+1)$.

$$E_r(v_{i_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}^{j_n}) = v_{i_1}^{j_1} \otimes \cdots \otimes E(\underbrace{v_{i_r}^{j_r} \otimes v_{i_{r+1}}^{j_{r+1}}}_{\text{posición}(r, r+1)}) \cdots \otimes v_{i_n}^{j_n}, \quad (3.13)$$

vale decir, E actúa sobre el factor de la posición $(r, r+1)$.

Para determinar una representación de TB_n en $V^{\otimes n}$, definamos ψ por:

$$\psi : TB_n \longrightarrow GL(V^{\otimes n})$$

$$\sigma_k \longmapsto T_k$$

$$\eta_r \longmapsto E_r$$

Teorema 3.2. *El monoide TB_n tiene una representación en el espacio tensorial $V^{\otimes n}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1.8, basta demostrar que la función ψ desde TB_n en $GL(V^{\otimes n})$ respeta todas relaciones de TB_n , es decir, las relaciones de la Definición 3.6.

Comenzaremos por demostrar que ψ respeta relación (3.3), es decir,

$$\psi(\eta_i) \circ \psi(\eta_j) = \psi(\eta_j) \circ \psi(\eta_i),$$

que lo denotaremos por,

$$E_i \circ E_j = E_j \circ E_i, \text{ para todo } i, j.$$

Supongamos que $n = 4$ y que la base de $V^{\otimes 4}$ es $B = \{x \otimes y \otimes z \otimes w\}$, entonces,

$$\begin{aligned} (E_1 \circ E_2)(x \otimes y \otimes z \otimes w) &= E_1(x \otimes E(y \otimes z) \otimes w) \\ &= E(x \otimes y) \otimes z \otimes w \\ &= x \otimes y \otimes z \otimes w \\ &= (E_2 \circ E_1)(x \otimes y \otimes z \otimes w). \end{aligned}$$

Para el resto de los valores del índice i, j , se cumple. Por lo tanto, ψ respeta la relación (3.3).

De la misma manera, se puede demostrar que ψ respeta las relaciones (3.4), (3.5) y (3.6).

Ahora, nos queda demostrar que ψ respeta la relación (3.7), es decir

$$\psi(\sigma_i) \circ \psi(\sigma_j) \circ \psi(\sigma_i) = \psi(\sigma_j) \circ \psi(\sigma_i) \circ \psi(\sigma_j) \text{ para } |i - j| = 1,$$

es decir:

$$T_i \circ T_j \circ T_i = T_j \circ T_i \circ T_j \text{ para } |i - j| = 1.$$

Para esto basta considerar $n = 3$, luego tenemos que $B = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_1^3, v_2^3, v_3^3\}$, y $B^{\otimes 3} = \{v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_3}^{j_3} ; i_k, j_k = 1, 2, 3\}$. Así, nuestra demostración la desarrollaremos en los siguientes tres casos:

Caso 1. Supongamos que $j_1 \neq j_2$, $j_2 \neq j_3$ y $j_1 \neq j_3$.

$$\begin{aligned}
(T_2 \circ T_1 \circ T_2)(v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_3}^{j_3}) &= (T_2 \circ T_1)(v_{i_1}^{j_1} \otimes T(v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_3}^{j_3})) \\
&= T_2(v_{i_3}^{j_3} \otimes v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2}) \\
&= v_{i_3}^{j_3} \otimes v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_1}^{j_1} \\
&= (T_1 \circ T_2 \circ T_1)(v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_3}^{j_3}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T_2 \circ T_1 \circ T_2 = T_1 \circ T_2 \circ T_1, \text{ cuando } j_1 \neq j_2, j_2 \neq j_3 \text{ y } j_1 \neq j_3.$$

Caso 2. Supongamos que $j_1 = j_2 = j_3$.

Es evidente que este caso se cumple siempre. Dejaremos un ejemplo de esta veracidad.

Ejemplo 3.4. *Supongamos que $i_1 < i_2$, $i_3 < i_2$ y $i_3 < i_1$. Para una mejor comprensión denotaremos a i_1, i_2, i_3 , respectivamente, por i, j, k .*

Sea $Z := (T_1 \circ T_2 \circ T_1)(v_i \otimes v_j \otimes v_k)$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
Z &= (T_1 \circ T_2)(v_j \otimes v_i \otimes v_k) \\
&= T_1(v_j \otimes uv_k \otimes v_i + v_j \otimes (u-1)v_i \otimes v_k) \\
&= T_1(v_j \otimes uv_k \otimes v_i) + T_1(v_j \otimes (u-1)v_i \otimes v_k) \\
&= u^2v_k \otimes v_j \otimes v_i + (u-1)v_j \otimes uv_k \otimes v_i + u(u-1)v_i \otimes \\
&\quad v_j \otimes v_k + (u-1)v_j \otimes (u-1)v_i \otimes v_k \\
&= u^2v_k \otimes v_j \otimes v_i + (u-1)uv_j \otimes v_k \otimes v_i + u(u-1)v_i \otimes \\
&\quad v_j \otimes v_k + (u-1)^2v_j \otimes v_i \otimes v_k.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(T_2 \circ T_1 \circ T_2)(v_i \otimes v_j \otimes v_k) &= (T_2 \circ T_1)(v_i \otimes uv_k \otimes v_j + v_i \otimes (u-1)v_j \otimes v_k) \\
&= T_2(u^2v_k \otimes v_i \otimes v_j + (u-1)v_i \otimes uv_k \otimes v_j + \\
&\quad (u-1)v_j \otimes v-i \otimes v_k) \\
&= T_2(u^2v_k \otimes v_i \otimes v_j) + T_2((u-1)v_i \otimes uv_k \otimes v_j) + \\
&\quad T_2((u-1)v_j \otimes v-i \otimes v_k) \\
&= u^2v_k \otimes v_j \otimes v_i + (u-1)v_i \otimes v_j \otimes uv_k + \\
&\quad (u-1)v_j \otimes uv_k \otimes v_i + (u-1)v_j \otimes (u-1)v_i \otimes v_k \\
&= u^2v_k \otimes v_j \otimes v_i + (u-1)uv_j \otimes v_k \otimes v_i + \\
&\quad u(u-1)v_i \otimes v_j \otimes v_k + (u-1)^2v_j \otimes v_i \otimes v_k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T_1 \circ T_2 \circ T_1 = T_2 \circ T_1 \circ T_2, \text{ cuando } j_1 = j_2 = j_3.$$

Caso 3. Nos queda demostrar el caso $j_1 = j_2 \neq j_3$.

Supongamos que los índices de los factores sin prima valen 1 ó 2, ya que si vale 3, el operador T actúa de la misma manera. Además, omitiremos el índice i_3 del factor prima, ya que T actúa como una permutación entre un factor prima y otro sin prima. Por lo anterior, tenemos los siguientes doce casos:

$v_1 \otimes v_1 \otimes v'$	$v_2 \otimes v_1 \otimes v'$	$v' \otimes v_2 \otimes v_1$
$v_1 \otimes v_2 \otimes v'$	$v_2 \otimes v_2 \otimes v'$	$v' \otimes v_1 \otimes v_2$
$v_1 \otimes v' \otimes v_1$	$v_1 \otimes v' \otimes v_1$	$v' \otimes v_2 \otimes v_1$
$v_1 \otimes v' \otimes v_2$	$v_1 \otimes v' \otimes v_2$	$v' \otimes v_2 \otimes v_2$

De la tabla anterior, tenemos que los factores sin primos con índices iguales son fáciles de demostrar que cumplen, ya que están en el caso $j_1 = j_2, i_1 = i_2$ y

una permutación (ó viceversa).

Así, nos quedamos con los siguientes seis casos:

$v_1 \otimes v_2 \otimes v'$	$v_2 \otimes v_1 \otimes v'$
$v_1 \otimes v' \otimes v_2$	$v_2 \otimes v' \otimes v_1$
$v' \otimes v_1 \otimes v_2$	$v' \otimes v_2 \otimes v_1$

Para los casos de la segunda columna, tenemos que todos se cumplen. Probaremos, mediante un ejemplo, uno de esos casos, donde $i_1 > i_2$.

Ejemplo 3.5.

$$\begin{aligned}
(T_1 \circ T_2 \circ T_1)(v_2 \otimes v_1 \otimes v') &= (T_1 \circ T_2)(T(v_2 \otimes v_1) \otimes v') \\
&= (T_1 \circ T_2)((uv_1 \otimes v_2 + (u-1)v_2 \otimes v_1) \otimes v') \\
&= (T_1 \circ T_2)((uv_1 \otimes v_2) \otimes v' + ((u-1)v_2 \otimes v_1) \otimes v') \\
&= (T_1 \circ T_2)(uv_1 \otimes v_2 \otimes v' + (u-1)v_2 \otimes v_1 \otimes v') \\
&= (T_1 \circ T_2)(uv' \otimes v_2 \otimes v') + (T_1 \circ T_2)((u-1)v_2 \otimes v_1 \otimes v') \\
&= T_1(uv_1 \otimes v' \otimes v_2) + T_1((u-1)v_2 \otimes v' \otimes v_1) \\
&= v' \otimes uv_1 \otimes v_2 + v' \otimes (u-1)v_2 \otimes v_1 \\
&= v' \otimes u(v_1 \otimes v_2) + v' \otimes (u-1)(v_2 \otimes v_1).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(T_2 \circ T_1 \circ T_2)(v_2 \otimes v_1 \otimes v') &= (T_2 \circ T_1)(v_2 \otimes T(v_1 \otimes v')) \\
&= (T_2 \circ T_1)(v_2 \otimes v' \otimes v_1) \\
&= T_2(v' \otimes v_2 \otimes v_1) \\
&= v' \otimes T(v_2 \otimes v_1) \\
&= v' \otimes (uv_1 \otimes v_2 + (u-1)v_1 \otimes v_1) \\
&= v' \otimes u(v_1 \otimes v_2) + v' \otimes (u-1)(v_2 \otimes v_1).
\end{aligned}$$

También es claro que se cumplen todos los casos de la primera columna. Probaremos, mediante un ejemplo, uno de esos casos, donde $i_1 < i_2$.

Ejemplo 3.6.

$$\begin{aligned}
 (T_1 \circ T_2 \circ T_1)(v_1 \otimes v_2 \otimes v') &= (T_1 \circ T_2)(T(v_1 \otimes v_2) \otimes v') \\
 &= (T_1 \circ T_2)(v_2 \otimes v_1 \otimes v') \\
 &= T_1(v_2 \otimes v' \otimes v_1) \\
 &= v' \otimes v_2 \otimes v_1.
 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 (T_2 \circ T_1 \circ T_2)(v_1 \otimes v_2 \otimes v') &= (T_2 \circ T_1)(v_1 \otimes T(v_2 \otimes v')) \\
 &= (T_2 \circ T_1)(v_1 \otimes v' \otimes v_2) \\
 &= T_2(T(v_1 \otimes v') \otimes v_2) \\
 &= T_2(v' \otimes v_1 \otimes v_2) \\
 &= v' \otimes T(v_1 \otimes v_2) \\
 &= v' \otimes v_2 \otimes v_1.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T_1 \circ T_2 \circ T_1 = T_2 \circ T_1 \circ T_2, \text{ cuando } j_1 = j_2 \neq j_3,$$

es decir, la función ψ respeta la Relación (3.7).

Ahora, demostraremos que ψ respeta Relación (3.8), es decir,

$$\psi(\eta_j)\psi(\sigma_i)\psi(\sigma_j) = \psi(\sigma_i)\psi(\sigma_j)\psi(\eta_i) , \text{ para } |i - j| = 1,$$

que denotaremos por

$$E_j \circ T_i \circ T_j = T_i \circ T_j \circ E_i \text{ para } |i - j| = 1.$$

Consideremos $n = 3$ y V tiene base B , en consecuencia tenemos que $B = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_1^3, v_2^3, v_3^3\}$, $V^{\otimes 3}$ tiene base $B^{\otimes 3}$, donde $B^{\otimes 3} = \{v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_3}^{j_3} ; i_k, j_k = 1, 2, 3\}$. Así, nuestra demostración será por tres casos:

Caso 1. Para el caso $j_1 \neq j_2, j_2 \neq j_3$ y $j_1 \neq j_3$.

Es trivial demostrar que $E_2 \circ T_1 \circ T_2 = T_1 \circ T_2 \circ E_1$, ya que el operador E anula todos los factores.

Caso 2. Consideremos $j_1 = j_2 = j_3$.

Como el operador E actúa como identidad, tenemos que $E_2 \circ T_1 \circ T_2 = T_1 \circ T_2 \circ E_1$ se cumple para todos los casos.

Caso 3. Nos queda analizar el caso $j_1 = j_2 \neq j_3$.

Nuevamente, usaremos la notación simplificada $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v'_{i_3}$.

Al generar todas las combinaciones según las condiciones, observamos que E_2 actúa como identidad en los elementos de la forma $v'_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3}$.

Por lo tanto,

$$(E_1 \circ T_2 \circ T_1)(v'_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3}) = v_{i_2} \otimes v_{i_3} \otimes v'_{i_1} = (E_1 \circ T_2 \circ T_1)(v'_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v_{i_3}).$$

El resto de los elementos que son de la forma

$v_{i_1} \otimes v'_{i_2} \otimes v_{i_3}$ o $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v'_{i_3}$ se anulan por el operador E .

Por lo tanto,

$$E_1 \circ T_2 \circ T_1 = T_2 \circ T_1 \circ E_2, \text{ cuando } j_1 = j_2 \neq j_3.$$

La relación $E_2 \circ T_1 \circ T_2 = T_1 \circ T_2 \circ E_1$ se verifica de forma similar.

Así, hemos demostrado que la función ψ respeta la Relación (3.8).

Por otro lado, se tiene que ψ respeta relación (3.9), es decir,

$$\psi(\eta_i)\psi(\eta_j)\psi(\sigma_j) = \psi(\eta_i)\psi(\sigma_j)\psi(\eta_i) = \psi(\sigma_j)\psi(\eta_i)\psi(\eta_j) \text{ para } |i - j| = 1,$$

que denotaremos por

$$E_i \circ E_j \circ T_j = E_i \circ T_j \circ E_i = T_j \circ E_i \circ E_j \text{ para } |i - j| = 1.$$

Una vez más tomemos $n = 3$. Usaremos las mismas consideraciones que en los casos anteriores.

Demostremos, en tres casos, que se cumple:

$$E_1 \circ E_2 \circ T_2 = E_1 \circ T_2 \circ E_1 = T_2 \circ E_1 \circ E_2.$$

Caso 1. Si j_1, j_2 y j_3 son distintos.

La acción de los 3 operadores es cero.

Caso 2. Si $j_1 = j_2 = j_3$.

Como el operador E actúa como identidad, observamos que solo T_2 actúa en $v_{i_1}^{j_1} \otimes v_{i_2}^{j_2} \otimes v_{i_3}^{j_3}$ y cumple las igualdades.

Caso 3. Nos queda analizar el caso $j_1 = j_2 \neq j_3$.

Observamos que en cada uno de los tres operadores resulta cero para todas las combinaciones y así, hemos demostrado que

$$E_1 \circ E_2 \circ T_2 = E_1 \circ T_2 \circ E_1 = T_2 \circ E_1 \circ E_2.$$

Del mismo modo, se demuestra que

$$E_2 \circ E_1 \circ T_1 = E_2 \circ T_1 \circ E_2 = T_1 \circ E_2 \circ E_1.$$

Por lo tanto, la función ψ respeta la relación (3.9).

Por último, falta demostrar que ψ respeta la relación (3.10), esto es,

$$\psi(\eta_i)\psi(\sigma_j)\psi(\sigma_i^{-1}) = \psi(\sigma_j)\psi(\sigma_i^{-1})\psi(\eta_j) , \text{ para } |i - j| = 1,$$

que denotaremos por

$$E_i \circ T_j \circ T_i^{-1} = T_j \circ T_i^{-1} \circ E_j \text{ para } |i - j| = 1.$$

Como en los casos anteriores, sea $\mathfrak{n} = 3$.

Demostremos, en tres casos, que se cumple:

$$E_2 \circ T_1 \circ T_2^{-1} = T_1 \circ T_2^{-1} \circ E_1.$$

Caso 1. Si j_1, j_2 y j_3 son distintos.

Como todos los índices superiores son distintos, el operador E anula todos los factores. Se cumple la igualdad.

Caso 2. Si $j_1 = j_2 = j_3$.

Como los índices superiores son iguales, los operadores E_1 y E_2 actúan como identidad. Luego, nos queda el operador $T_1 \circ T_2^{-1}$ actuando para ambos lados de la igualdad. Por lo tanto, en este caso se cumple la relación.

Caso 3. Por último analicemos el caso $j_1 = j_2 \neq j_3$.

Como en los casos anteriores, si consideramos los elementos de la forma $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v'$, el operador E_1 actúa como identidad y tenemos lo siguiente:

$$(T_1 \circ T_2^{-1})(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v') = T_1(v_{i_1} \otimes v' \otimes v_{i_2}) = E_2 \circ T_1 T_2^{-1}(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes v').$$

El resto de los casos son nulos por los operadores E_1 y E_2 .

Por lo tanto, se cumple

$$E_2 \circ T_1 \circ T_2^{-1} = T_1 \circ T_2^{-1} \circ E_1.$$

La relación $E_1 \circ T_2 \circ T_1^{-1} = T_2 \circ T_1^{-1} \circ E_2$ se demuestra de forma similar.

Por lo tanto, ψ respeta la relación (3.10).

Por todo lo anterior,

$$(\psi, V^{\otimes n}) \text{ es una representación de } TB_n.$$

□

Capítulo 4

Invariantes en Sage

En este capítulo, determinaremos la relación que existe entre la invariante Ψ con las invariantes Θ definida [8] y Δ definida en [3]. Para esto, hacemos un programa (en Sage) que calcula Ψ , ver Teorema 4. Esto permite experimentar con determinados links a los cuales se les conoce su valor por Θ y Δ . Así, finalizaremos este capítulo demostrando la relación que tiene Ψ con Δ usando los resultados de Aicardi, Juyumaya en [5].

1. Software Sage

Sage (o Sagemath) es un software gratuito que, inicialmente, fue creado para realizar cálculos en álgebra y geometría, pero evolucionó con el objetivo de convertirse en una alternativa libre a Maple, Mathematica, Matlab, Magma, entre otros software matemáticos. El lenguaje de programación que se utiliza en Sage es Python. Por otra parte, Sage incluye varias librerías (o también llamados paquetes) de matemáticas para ser usadas en el álgebra, estadística, teoría de números, análisis entre otras. Sage esta disponible en tres formatos distintos:

- El formato en línea, llamado Sagemath cell, se puede usar ingresando en la siguiente dirección <https://sagecell.sagemath.org/>. Es la forma más sencilla de usar Sage, pero cuenta con limitaciones. Además, Sagemath cell permite compilar otros lenguajes tales como R, GAP, HTML, etc.
- Está disponible el formato estable para Windows, Mac OS X y Linux y se pueden descargar en <http://www.sagemath.org/download.html>. Al instalar Sage en el computador, aparecen tres ejecutables, el cual utilizaremos ‘SageMath 8.3 Shell’. En ese entorno ejecutaremos nuestro programa hecho en Python usando librerías de Sage para calcular la invariante Ψ


```

17         [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0],
18         [0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
19         [0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,u-1,0,0],
20         [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0],
21         [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,u]])
22
23 def num_strands(list_braid):#Determina el número de cuerdas de la
    trenza dada por "list_braid".
24     res=abs(list_braid[0])+1
25     for elem in list_braid[1:]:
26         if abs(elem)>res-1: res=abs(elem)+1
27     return res
28 def tensor_identities(num):#Crea un diccionario con "num" matrices
    identidades de la forma Id_{4^{"num"}} etc.
29     res={1:Matrix(E,[[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])}
30     for ind in range(2,num+1):
31         res[ind]=identity_matrix(4^(ind))
32     return res
33 def mu_matrix(num):#Calcula la matriz "umatrix" tensorizada consigo
    misma "num" veces.
34     res=umatrix
35     for index in range(num-1): res=res.tensor_product(umatrix)
36     return res
37 def tensor_psi(strands,tensor_id_dic,indexp):#Determina la imagen de
    psi, según el homomorfismo \psi.
38     res=tmatrix^(indexp/abs(indexp))
39     if (abs(indexp)-1)>0:
40         res=tensor_id_dic[abs(indexp)-1].tensor_product(res)
41     if (strands-abs(indexp)-1)>0:
42         res=res.tensor_product(tensor_id_dic[strands-abs(indexp)-1])
43     return res
44 def tensor_psies(strands,tensor_id_dic,list_braid):#Crea un
    diccionario con cada valor de "tensor_psi".
45     res=dict()
```



```

46     for indexp in list_braid:
47         if indexp not in res:
48             res[indexp]=tensor_psi(strands , tensor_id_dic , indexp)
49     return res
50 def link_inv(list_braid):#Determina el invariante de Jones para un
    link.
51     strands=num_strands(list_braid)
52     tensor_id_dic=tensor_identities(strands-2)
53     tensor_ph_dic=tensor_psies(strands , tensor_id_dic , list_braid)
54     psi_braid=tensor_ph_dic[list_braid[0]]
55     for elem in list_braid[1:]:
56         psi_braid=psi_braid*tensor_ph_dic[elem]
57     final_product=psi_braid*mu_matrix(strands)
58     exp=0
59     for elem in list_braid: exp=exp+(elem/abs(elem))
60     return( u^((int((1-(3*exp)-strands)/2)) )*((final_product.trace
        ()) )/(2*(1+u)))
61 print('El polinomio Psi para el link ingresado es:')
62 print(simplify(link_inv([1,1,1])))#Se ingresan las trenzas
    elementales asociadas al link a calcular.

```

LISTING 4.1. Programa para calcular el polinomio Ψ en Sage

El Listing 4.1 puede ser visto en <https://matematica.uv.cl/grupoAtN/implementacion-de-invariantes.html>.

Para ejecutar el programa en la versión estable de Sage adjuntamos el siguiente código en el lenguaje Python que utiliza librerías de Sage. Este programa calcula el polinomio Ψ para links, construido en la Sección 4 del Capítulo 2.

```

1 from sage.all import *
2 from sage.rings.polynomial.polynomial_ring_constructor import
    PolynomialRing
3 from sage.rings.rational_field import RationalField

```

```

4 from sage.matrix.constructor import Matrix
5 from sage.matrix.special import identity_matrix
6
7 QQ=RationalField()
8 E=PolynomialRing(QQ, 'u'); u=E.gen(); v=u-1
9 umatrix=Matrix(E,4,4,{(0,0):u,(1,1):u,(2,2):1,(3,3):1})#Matriz
    dispersa para acelerar los c\'alculos.
10 tmatrix=Matrix(E,16,16,{(0,0): u,(1,4):1,(2,8):u,(3,12):1,(4,1)
    :1,(5,5):u,(6,9):1,(7,13):u,(8,2):1,(8,8):u-1,(9,6):1,(10,10):u
    ,(11,14):1,(12,3):1,(13,7):1,(13,13):u-1,(14,11):1,(15,15):u})#
    Matriz dispersa para acelerar los c\'alculos.
11
12 def num_strands(list_braid):#Determina el n\'umero de cuerdas de la
    trenza dada por "list_braid".
13     res=abs(list_braid[0])+1
14     for elem in list_braid[1:]:
15         if abs(elem)>res-1: res=abs(elem)+1
16     return res
17 def tensor_identities(num):#Crea un diccionario con "num" matrices
    identidades de la forma Id_{4^{"num"}} etc.
18     res={1:Matrix(E,[[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])}
19     for ind in range(2,num+1): res[ind]=identity_matrix(4**(ind))
20     return res
21 def mu_matrix(num):#C\'alcula la matriz "umatrix" tensorizada
    consigo misma "num" veces.
22     res=umatrix
23     for index in range(num-1): res=res.tensor_product(umatrix)
24     return res
25 def tensor_psi(strands,tensor_id_dic,indexp):#Determina la imagen de
    psi, seg\'un el homomorfismo \psi.
26     if indexp>0:
27         res=tmatrix
28     else: res=tmatrix.inverse()

```

```

29     if int(abs(indexp)-1)>0: res=tensor_id_dic[abs(indexp)-1].
    tensor_product(res)
30     if int(strands-abs(indexp)-1)>0: res=res.tensor_product(
    tensor_id_dic[strands-abs(indexp)-1])
31     return res
32 def tensor_psi(strands, tensor_id_dic, list_braid):#Crea un
    diccionario con cada valor de "tensor_psi".
33     res=dict()
34     for indexp in list_braid:
35         if indexp not in res: res[indexp]=tensor_psi(strands,
    tensor_id_dic, indexp)
36     return res
37 def link_inv(list_braid):#Determina el invariante de Jones para un
    link.
38     strands=num_strands(list_braid)
39     tensor_id_dic=tensor_identities(strands-2)
40     tensor_ph_dic=tensor_psi(strands, tensor_id_dic, list_braid)
41     psi_braid=tensor_ph_dic[list_braid[0]]
42     for elem in list_braid[1:]:
43         psi_braid=psi_braid*tensor_ph_dic[elem]
44     final_product=psi_braid*mu_matrix(strands)
45     exp=0
46     for elem in list_braid: exp=exp+(elem/abs(elem))
47     return( u*((int((1-(3*exp)-strands)/2)) )*(final_product.trace
    () )/(2*(1+u)))
48 print('El polinomio Psi para el link ingresado es:')
49 print(simplify(link_inv([1,1,1])))#Se ingresan las trenzas
    elementales asociadas al link a calcular.

```

LISTING 4.2. Programa para calcular el polinomio Ψ en Python

El Listing 4.2 puede ser visto en <https://matematica.uv.cl/grupoAtN/implementacion3n-de-invariantes.html>.

El siguiente código en Sage es un programa que determina el polinomio de Jones para links estudiado en la Sección 2 del Capítulo 2.

```

1 E=PolynomialRing(QQ, 't'); t=E.0; v=sqrt(t)
2 umatrix=Matrix(SR,[[1,0],
3                  [0,t]])
4 rmatrix=Matrix(SR,[[1,0,0,0],
5                  [0,0,-v,0],
6                  [0,-v,1-t,0],
7                  [0,0,0,1]])
8 def num_strands(list_braid):#Determina el número de cuerdas de la
   trenza dada por "list_braid".
9     res=abs(list_braid[0])+1
10    for elem in list_braid[1:]:
11        if abs(elem)>res-1: res=abs(elem)+1
12    return res
13 def tensor_identities(num):#Crea un diccionario con "num" matrices
   identidades de la forma Id_{4^{"num"}} etc.
14     res={1:Matrix(E,[[1,0],[0,1]])}
15     for ind in range(2,num+1):
16         res[ind]=identity_matrix(2^(ind))
17     return res
18 def mu_matrix(num):#Calcula la matriz "umatrix" tensorizada consigo
   misma "num" veces.
19     res=umatrix
20     for index in range(num-1): res=res.tensor_product(umatrix)
21     return res
22 def tensor_phi(strands, tensor_id_dic, indexp):#Determina la imagen de
   Phi, según el homomorfismo \psi.
23     res=rmatrix^(indexp/abs(indexp))
24     if (abs(indexp)-1)>0:
25         res=tensor_id_dic[abs(indexp)-1].tensor_product(res)

```

```

26     if (strands-abs(indexp)-1)>0:
27         res=res.tensor_product(tensor_id_dic[strands-abs(indexp)-1])
28     return res
29 def tensor_phies(strands,tensor_id_dic,list_braid):#Crea un
    diccionario con cada valor de "tensor_phi".
30     res=dict()
31     for indexp in list_braid:
32         if indexp not in res:
33             res[indexp]=tensor_phi(strands,tensor_id_dic,indexp)
34     return res
35 def link_inv(list_braid):#Determina el invariante de Jones para un
    link.
36     strands=num_strands(list_braid)
37     tensor_id_dic=tensor_identities(strands-2)
38     tensor_ph_dic=tensor_phies(strands,tensor_id_dic,list_braid)
39     phi_braid=tensor_ph_dic[list_braid[0]]
40     for elem in list_braid[1:]:
41         phi_braid=phi_braid*tensor_ph_dic[elem]
42     final_product=phi_braid*mu_matrix(strands)
43     exp=0
44     for elem in list_braid: exp=exp+(elem/abs(elem))
45     return(simplify(t**(int((exp-strands+1)/2))*(final_product.trace
        ())/(1+t)))
46 print('El polinomio de Jones para el link ingresado es:')
47 print(link_inv([1,1,1]))#Se ingresan las trenzas elementales
    asociadas al link a calcular.
48 #simplify()#Use la funci'on simplify para simplificar el polinomio
    resultante.

```

LISTING 4.3. Programa para calcular el polinomio de Jones de Kurpita y Murasugi en Sage

Observación 4.1. *Para los códigos vistos en Listing 4.1 y 4.2, tenemos que considerar lo siguiente:*

1. La trenza $\sigma_{a_1}^{\varepsilon_1} \cdots \sigma_{a_n}^{\varepsilon_n}$ con $\varepsilon_i = \pm 1$ corresponde a la lista $[a_1, \dots, a_n]$. Por ejemplo: La notación $[1, 2, -3]$ representa a una trenza expresada por la palabra $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}$.
2. La matriz ‘umatrix’ representa a la matriz μ que se utiliza en el Capítulo 2.
3. Estos códigos pueden ser modificados, cambiando los parámetros que definen el operador de Yang-baxter mejorado.
4. Todos los códigos adjuntados tienen una limitación que dependerá de las características del computador utilizado. Mientras más grande sea el número de hebras, más recursos exigirá el programa. Una solución a esta limitación es usar las funciones *save()* y *load()* que nos permitirá guardar resultado en un espacio del disco duro, para retornarlas en otro momento.

3. Datos computacionales y análisis

En esta sección utilizaremos los programas de la Sección 2 para calcular la invariante Ψ en nudos y links de la Sección 4 del Capítulo 2. Notar que los links considerados son aquellos que se les conoce su valor por las invariantes Θ , Δ , trabajo realizado en [8]. Así, la invariante Ψ la podemos comparar con otras invariantes, tales como Θ de [8] y Δ de [3].

Ejemplo 4.1. *Calculemos el valor del polinomio Ψ para el nudo trébol T : Sabemos que $T = \hat{\beta} = \widehat{\sigma_1 \sigma_1 \sigma_1}$. Entonces ingresando la lista $[1, 1, 1]$ en el primer programa, tenemos:*

$$\Psi(T) = u^{-1} + u^{-3} - u^{-4}.$$

Si reemplazamos A por u^{-1} , recuperaremos la versión original del polinomio de Jones para el nudo trébol, el cual es:

$$V_T(u) = A + A^3 - A^4$$

Ejemplo 4.2. *Calculemos el valor del polinomio Ψ para el nudo 8.*

Recordemos que el nudo 8 viene dado por la clausura de la trenza $\alpha = \sigma_1, \sigma_{-2}, \sigma_1, \sigma_{-2}$.

Entonces ingresando la lista $[1, -2, 1, -2]$ en el segundo programa, tenemos que resulta

$$\frac{u^4 - u^3 + u^2 - u + 1}{u^2},$$

que es equivalente a:

$$u^2 - u + 1 - u^{-1} + u^{-2}$$

Si reemplazamos A por u^{-1} , recuperaremos la versión original del polinomio de Jones para el nudo 8, el cual es

$$A^{-2} - A^{-1} + 1 - A + A^2$$

.

Observación 4.2. *Para los nudos, la invariante Ψ es igual a las invariantes θ y Δ , es decir, identifican los mismos nudos. A pesar que no damos una demostración que Ψ es una invariante de Jones a nivel de nudos, es de esperar que así sea.*

Por otra parte, en las siguientes tablas dejamos algunos resultados obtenidos por la invariante Ψ para links. Las notaciones de los links y de las trenzas son obtenidos de [7].

L11n358{0,1}	[1,-2,-3,-4,3,3,-5,4,-3,2,-1,-3,-2,-4,3,-2,-2,-2,5,4,-3]
L11n418{0,0}	[-1, -2, 3, -2, -3, 2, -1, -3, -3, 2, -3]

$$\Psi(\text{L11n358}\{0,1\}) = u^{11} + 4u^9 + 6u^7 - 2u^6 + 7u^5 - 5u^4 + 7u^3 - 4u^2 + 3u - 1$$

$$\Psi(\text{L11n418}\{0,0\}) = u^{11} + 4u^9 + 6u^7 - 2u^6 + 7u^5 - 5u^4 + 7u^3 - 4u^2 + 3u - 1$$

L11n356{1,0}	[-1, 2, -1, 3, 3, -2, -2, 3, 3, 2, -1]
L11n434{0,0}	[1, 2, -3, 2, -1, -1, 2, -3, 2, 1, -2]

$$\Psi(\text{L11n356}\{1, 0\}) = -\frac{u^9 - 5u^8 + 5u^7 - 10u^6 + 9u^5 - 11u^4 + 3u^3 - 8u^2 + 2u - 2}{u^6}$$

$$\Psi(\text{L11n434}\{0, 0\}) = \frac{4u^8 - 7u^7 + 11u^6 - 7u^5 + 12u^4 - 5u^3 + 7u^2 - u + 2}{u^6}$$

L11n325{1,1}	[-1, 2, -1, 2, -1, -2, -2, 3, -2, 3, -2]
L11n424{0,0}	[-1, 2, -1, -2, 3, -2, -2, 1, -2, 3, -2]

$$\Psi(\text{L11n325}/1, 1/) = -\frac{u^9 - 2u^8 + 5u^7 - 9u^6 + 7u^5 - 17u^4 + 7u^3 - 9u^2 + 4u - 3}{u}$$

$$\Psi(\text{L11n424}\{0, 0\}) = -\frac{u^9 - u^8 + 4u^7 - 11u^6 + 8u^5 - 15u^4 + 8u^3 - 11u^2 + 3u - 2}{u}$$

L10n79{1,1}	[-1, 2, -1, 2, -1, -2, -2, -2, -2, -2]
L10n95{1,0}	[-1, 2, -1, -2, -2, -2, 1, -2, -2, -2]

$$\Psi(\text{L10n79}\{1, 1\}) = 3u^{10} + 3u^9 + 6u^8 - 5u^7 + 6u^6 - 5u^5 + 6u^4 - u^3 + 3u^2$$

$$\Psi(\text{L10n95}\{1, 0\}) = u^{12} + u^{11} + 2 * u^{10} + u^9 + 4 * u^8 - 5 * u^7 + 8 * u^6 - 3 * u^5 + 7 * u^4 - 2 * u^3 + 2 * u^2$$

L11a404{1,1}	[-1, -1, 2, 2, -1, 3, 2, 2, -1, 2, 2, -3, 2]
L11n425{1,0}	[-1, 2, -1, -3, -3, -2, 1, 3, -2, -3, -3]

$$\Psi(\text{L11a404}\{1, 1\}) = 3u^{10} + 3u^9 + 6u^8 - 5u^7 + 6u^6 - 5u^5 + 6u^4 - u^3 + 3u^2$$

$$\Psi(\text{L11n425}\{1, 0\}) = u^{12} + u^{11} + 2u^{10} + u^9 + 4u^8 - 5u^7 + 8u^6 - 3u^5 + 7u^4 - 2u^3 + 2u^2$$

Observación 4.3 (Ver [5]). *Comparando las invariantes Θ y Δ , tenemos las siguiente observaciones:*

- *En la categoría de los nudos los invariantes Θ y Δ son iguales, pero en la categoría de los links no son equivalentes, es decir, existe un par de links que Θ identifica, pero Δ no.*
- *Las invariantes Θ y Δ para links son más fuertes que Homflypt, es decir, distinguen links que Homflypt no distingue.*

- *La invariante Θ puede ser construida mediante la receta de Jones y por relaciones skein, pero la invariante Δ solo puede ser construida por la receta de Jones.*
- *En la categoría de los tied links, las invariantes Θ y Δ no son equivalentes.*

Por otra parte, mostraremos cinco pares de links no isotópicos con tres componentes y veremos si las invariantes Θ , Δ y Ψ logran distinguirlas. Los resultados de las invariantes Θ y Δ fueron extraídas de los resultados de Aicardi y Juyumaya en [5]. En la siguiente tabla, el símbolo \checkmark indica que la invariante distingue los links.

Link	Link	Θ	Δ	Ψ
L11n358{0,1}	L11n418{0,0}	\checkmark		
L11n356{1,0}	L11n434{0,0}		\checkmark	\checkmark
L11n325{1,1}	L11n424{0,0}	\checkmark	\checkmark	\checkmark
L10n79{1,1}	L10n95{1,0}	\checkmark	\checkmark	\checkmark
L11a404{1,1}	L11n425{1,0}	\checkmark	\checkmark	\checkmark

Para calcular el valor de $\Psi(\text{L11n358}\{0,1\})$, utilizamos el Laboratorio Nacional de Computación de Alto Rendimiento (NLHPC) del Centro de Modelamiento Matemático (CMM) de la Universidad de Chile. Además, en este cálculo, cada multiplicación entre matrices de tamaño 4096 tarda 5 horas en resolverse.

Observación 4.4. *Según la tabla anterior, tenemos que la invariante Ψ , construida en esta tesis, es igual a la invariante Δ , es decir, hemos construido la invariante Δ usando el producto tensorial de matrices. Además, como en la categoría de los links, los invariantes Δ y \mathcal{F} son iguales, y el monoide TB_n tiene una representación en un espacio tensorial, entonces podemos pensar en extender Ψ a una invariante para tied links, lo cual queda por hacer.*

Bibliografía

- [1] C. Adams. (2004). The Knot book. United States: American Mathematical Society.
- [2] J. Alexander. (1928). Topological Invariants of Knots and Links. Transactions of the American Mathematical Society, **30**, 275-306.
- [3] F. Aicardi, J. Juyumaya. (2016). Tied links. J. Knot Theory Ramifications, **25**, 28.
- [4] F. Aicardi, J. Juyumaya. (2018). Kauffman type invariants for tied links. Mathematische Zeitschrift, **289**, 567-591.
- [5] F. Aicardi, J. Juyumaya. (2018). Two parameters bt-algebra and invariants for links and tied links. Geometric Topology, **2**. <https://arxiv.org/abs/1811.03675v2>.
- [6] E. Artin. (1925). Theorie der Zppfe. Abh, **4**, 47-72.
- [7] J. Cha. (2018). C. Livingston, LinkInfo: Table of Knot Invariants, <http://www.indiana.edu/~linkinfo>.
- [8] M. Chlouveraki, J. Juyumaya, K. Karvounis, S. Lambropoulou. (2016). Identifying the Invariants for Classical Knots and Links from the Yokonuma-Hecke Algebras. International Mathematics Research Notices, <https://doi.org/10.1093/imrn/rny013>.
- [9] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu [HOMFLY]. (1985). A new polynomial invariant of knots and links. Bulletin of the American Mathematical Society, **12**, 239-246.
- [10] W. Greub. (1978). Multilinear algebra. United States: Springer-Verlag.
- [11] V. Jones. (1987). Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials. Annals of Mathematics, **126**, 335-388.
- [12] J. Juyumaya. (2019). Polynomial invariants for links and tied links. Geometric Topology. <https://arxiv.org/abs/1901.06762v1>.
- [13] C. Kassel y V. Turaev. (2008). Braid Groups. United States: Springer.
- [14] L. Kauffman. (1987). States model and the Jones polynomial. Topology, **318**, 417-471.

- [15] L. Kauffman. (1990). An Invariant of Regular Isotopy. Transactions of the American Mathematical Society, **318**, 417-471.
- [16] B. Kurpita y K. Murasugi. (1999). A study of Braids. The Netherlands: Academic Publishers.
- [17] W. Lickorish y K. Millett. (1987). A polynomial invariant of oriented links. Topology, **26**, 107-141.
- [18] S. Ryom-Hansen. (2011). On the Representation Theory of an Algebra of Braids and Ties. Journal of Algebraic Combinatorics, **33**, 57-79.
- [19] V. Turaev. (1988). The Yang - Baxter equation and invariant of link. Inventiones mathematicae, **92**, 527-553.