Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

El Lema de Regularidad de Szemerédi y el Problema de Erdős y Rothschild

Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas

Presentada por:
ANGELO BASTIÁN SAAVEDRA HERRERA

Profesor Guía: Dra. Andrea Patricia Jiménez Ramírez

VALPARAÍSO
ENERO 2020

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a Andrea Jiménez, por haber aceptado dirigir mi trabajo de tesis. Agradezco enormemente su gran colaboración, su paciencia, su dedicación, los conocimientos que me ha entregado y que me han permitido culminar esta etapa importante. Agradecer por todas las reuniones que tuvimos, siempre fueron muy fructíferas y cada una de ellas de gran agrado para mi.

También agradezco a todos los profesores del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valparaíso con quienes tuve el privilegio de formar parte de sus clases como alumno. Quiero hacer mención especial al profesor Rodrigo Castro quien me motivó a seguir estudios de magíster y agradecer por todos los conocimientos que me ha entregado en sus clases. A mis compañeros de ingreso al magíster Erick y Luis, con quienes pudimos compartir y colaborar especialmente en las asignaturas del primer año.

Quiero dar las gracias a la Universidad de Valparaíso y a sus personas por haberme permitido estudiar con beca FIV-UV y al proyecto Fondecyt/Iniciación 11170931 por financiar parcialmente mi trabajo.

Agradecer a los profesores Gerardo Honorato y Hiệp Hàn por haber aceptado formar parte de la comisión de tesis.

Finalmente, agradecer a mis padres por ser mis principales promotores, por todos los valores y principios que me han inculcado y porque siempre me apoyaron incondicionalmente en cada una de las etapas de mi vida como estudiante.

Resumen

Esta tesis se centra en el estudio de aspectos fundamentales de la combinatoria extremal clásica y moderna. El objetivo principal es mostrar el tipo de preguntas y resultados de la combinatoria extremal, asi como también algunas de las técnicas importantes en el desarrollo de ésta área.

Dividimos este trabajo en dos partes. En la primera parte, presentamos nociones básicas y algunos de los principales resultados de la teoría extremal de grafos. Mostramos dos de los teoremas más importantes de esta área, el Teorema de Turán y su generalización, el Teorema de Erdős-Stone. El Teorema de Turán afirma que la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo en n vértices sin contener un subgrafo completo en $r+1$ vértices, denotado por K_{r+1}, está dada por la cantidad de aristas de un grafo r-partito, completo y balanceado, este último denotado por $T_r(n)$ y su cantidad de aristas por $t_r(n)$. Además el único grafo que alcanza $t_r(n)$ aristas es $T_r(n)$. La generalización aproximada de este resultado es el Teorema de Erdős-Stone, en el cual en vez de prohibir grafos completos se prohiben grafos en general. Más precisamente, se tiene que dado cualquier H, la máxima cantidad posible de aristas que puede tener un grafo en n vértices sin contener H como subgrafo está dada por $t_{\chi(H)-1}(n)+o(n^2)$, en donde $\chi(H)$ corresponde al número cromático de H. Luego, introducimos una de las herramientas más poderosas y revolucionarias de la combinatoria extrema, el Lema de Regularidad de Szemerédi. A grandes rasgos, este importante resultado dice que todos los grafos se pueden particionar en una cantidad constante de partes de manera que las aristas entre la mayoria de las partes se comportan bien. Concluimos esta primera parte ilustrando el uso del Lema de Regularidad de Szemerédi en la demostración del Teorema de Roth, el Teorema de Erdős-Stone y también, en la demostración del Teorema de Estabilidad de Simonovits dada por Füredi [14].

En la segunda parte de este trabajo estudiaremos un problema planteado por Erdős y Rothschild: dados enteros n, k y r, ¿cuál es la máxima cantidad de k-arista-coloraciones que un grafo en n vértices puede alcanzar sin contener una copia monocromática de K_{r+1}?. A esta cantidad la denotamos por $F(n,k,r+1)$. Además, ¿qué grafos alcanzan $F(n,k,r+1)$?. Una cota inferior trivial para $F(n,k,r+1)$ está dada por todas las k-arista-coloraciones de $T_r(k)$, pues $T_r(k)$ no contiene copias de K_{r+1} como subgrafo. En este trabajo revisaremos dos artículos relacionados a este problema, que describimos a continuación. Inicialmente Erdős y Rothschild conjeturaron que

$F(n,2,3) = 2^{t_2(n)}$ y que el único grafo que alcanza este valor es $T_2(n)$, el grafo bipartito, completo y balanceado. Yuster [25] probó que esta conjetura es cierta. Además, utilizando el Lema de Regularidad de Szemerédi demostró que $F(n,2,r+1)$ es asintóticamente igual a $2^{t_r(n)}$ y conjeturó que $F(n,2,r+1) = 2^{t_r(n)}$ para n suficientemente grande. Luego, Alon et al. [1] comprobaron la conjetura de Yuster y además probaron que $F(n,3,r+1) = 3^{t_r(n)}$ para n suficientemente grande y que el único grafo que alcanza este valor es $T_r(n)$ el grafo en n vértices, r-partito, completo y balanceado.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo se enmarca en el área de la combinatoria extremal que es, hoy en dia, una de las ramas más populares de la matemática discreta. El vínculo metodológico de la combinatoria extremal con otras áreas de la matemática y con la informática teórica ha producido un rápido desarrollo y refinamiento tanto de las técnicas utlizadas en el área como de la variada gama de aplicaciones que se encuentran. En efecto, uno de los resultados más influyentes de la combinatoria extremal es el Lema de Regularidad de Szemerédi [24] del año 1975. Esta poderosa y compleja herramienta, creada por Endre Szemerédi (Premio Abel 2012), ha mostrado tener significativas aplicaciones [16], entre otras, es el lema clave en la resolución de la famosa conjetura de Erdős y Turán acerca de progresiones aritméticas [12].

Esta tesis se compone esencialmente de dos partes. En la primera de ellas, revisamos conceptos elementales de la teoría de grafos y estudiamos resultados clásicos de la teoría de grafos extremal. En la segunda parte, en el contexto de la teoría de grafos extremal moderna, introducimos el problema de Erdős y Rothschild, y presentamos dos resultados relacionados a este problema. A continuación entregamos una visión más detallada del trabajo realizado.

El Teorema de Turán del año 1941, es considerado el primer resultado de la teoría de grafos extremal. Este teorema establece que la máxima cantidad de aristas que puede tener un grafo en n vértices sin contener como subgrafo un grafo completo en $r+1$ vértices es igual a $t_r(n)$, que es conocido como el número de Turán, el cual es aproximadamente $\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}$ (Corolario 2.2.4). La versión fuerte de este teorema (Teorema 2.2.2) establece que además hay un único grafo que alcanza dicha cota, este grafo es conocido como el grafo de Turán, se denota por $T_r(n)$ y corresponde al grafo en n vértices, r-partito, completo y balanceado. Luego de conocer este resultado para grafos completos, es natural preguntarse que sucede con otros grafos, digamos, un grafo H arbitrario. El Teorema de Erdős-Stone (Teorema 2.3.1) da una respuesta asintótica a este problema, probando que el número extremal $ex(n,H)$, que corresponde a la máxima cantidad de aristas que tiene un grafo en n vértices sin contener copias de H como subgrafo, está en general, controlado por el número cromático de H. El número cromático de H, denotado por $\chi(H)$, es el número entero ℓ más pequeño de manera que H es ℓ-partito. Para entender el resultado de Erdős y Stone, notemos que cualquier grafo en n vértices sin copias de H entrega una cota inferior para $ex(n,H)$. En particular, el grafo de Turán $T_{\chi(H)-1}(n)$ no contiene a H y por lo tanto

$$ex(n,H) \geq t_{\chi(H)-1}(n).$$

El Teorema de Erdős-Stone indica que $ex(n,H)$ está acotado por arriba asintóticamente por $t_{\chi(H)-1}(n)$, es decir

$$ex(n,H) = t_{\chi(H)-1}(n) + o(n^2).$$

Cuando H es un grafo bipartito (grafos con número cromático 2) el Teorema de Kövari-Sós-Turán (Teorema 2.3.3) indica que $ex(n,K_{s,t})$ está acotado por arriba por $c \cdot n^{2-1/s}$, donde $K_{s,t}$ es el grafo bipartito completo con partes de tamaño s,t con $s \leq t$ y c es una constante.

Como mencionamos al inicio, el Lema de Regularidad de Szemerédi (Teorema 2.4.5) es una de las herramientas más poderosas y complejas de la combinatoria extremal. A grandes razgos, el Lema de Regularidad de Szemerédi asegura que todo grafo se puede particionar en una cantidad constante de partes de manera que las aristas entre la mayoria de las partes se comportan bien. La formalización de este resultado está en la Sección 2.4. En este trabajo presentamos la demostración de este resultado e ilustramos su uso con dos ejemplos. El primero de ellos es la demostración del Teorema de Roth (Teorema 2.4.13). El Teorema de Roth es un resultado clásico de la teoría combinatoria de números. Este teorema asegura que para cada $\delta > 0$ y n suficientemente grande, todo subconjunto de $[n]$ de cardinalidad al menos δn contiene una progresión aritmética de largo 3; una progresión aritmética de largo 3 en un conjunto A es un subconjunto de la forma $\{x, x+a, x+2a\} \subseteq A$. El segundo ejemplo es la demostración del Teorema de Erdős-Stone antes mencionado que utiliza el Lema de Regularidad de

Szemerédi.

Muchas veces en la combinatoria extremal es necesario flexibilizar los resultados exactos, tales como el Teorema de Turán, para ampliar su espectro de aplicación. Una de las propiedades para flexibilizar los resultados, cuando es posible, es conocida como “estabilidad de las estructuras extremales”. En el caso del Teorema de Turán, la estabilidad de la estructura extremal correspondería a verificar que si un grafo en n vértices y sin copias de K_{r+1} como subgrafo tiene casi $t_r(n)$ aristas, entonces este grafo difiere por muy poco del grafo de Turán $T_r(n)$. El Teorema 2.5.1, conocido como “Estabilidad de Simonovits” confirma que esto es cierto. La demostración original del Teorema de Estabilidad de Simonovits se debe a Erdős y Simonovits [11], Erdős [9, 10], y Simonovits [21]. Una prueba alternativa se puede encontrar en [17]. Para concluir la primera parte de este trabajo presentamos una demostración hecha por Füredi en [14].

En la segunda parte de esta tesis nos abocamos al estudio del número máximo de coloraciones de aristas sin grafos completos monocromáticos que admite un grafo en n vértices. Este problema es conocido como el problema de Erdős y Rothschild. Más formalmente, se define $F(n,k,r+1)$ como la máxima cantidad de k-arista-coloraciones que un grafo en n vértices puede alcanzar sin contener una copia monocromática de K_{r+1}. Una k-arista-coloración de un grafo es simplemente una asignación de colores en $[k]$ a las aristas del grafo. Una cota inferior trivial para $F(n,k,r+1)$ está dada por los grafos sin copias de K_{r+1}. Más precisamente, si G es un grafo K_{r+1}-libre, entonces $F(G,k,r+1)$ que es el número de k-coloraciones de G sin K_{r+1} monocromáticos es igual a $k^{e(G)}$, pues a cada arista de G le podemos asignar el color que queramos. En particular, para el grafo de Turán $T_r(n)$ se tiene que $F(T_r(n),k,r+1) = k^{t_r(n)}$ y así obtenemos la cota inferior

$$F(n,k,r+1) \geq k^{t_r(n)}. \tag{1.1}$$

Erdős y Rothschild conjeturaron que para un grafo en n vértices con n suficientemente grande, el número máximo de 2-arista-coloración sin K_{r+1} monocromáticos es a lo más $2^{t_r(n)}$. Esta conjetura fue demostrada por Yuster en [25]. Además, Yuster obtiene que para un grafo en n vértices el número máximo de 2-arista-coloraciones sin K_{r+1} monocromáticos es a lo más $2^{t_r(n)+o(n^2)}$. Esto último, lo probó utilizando el Lema de Regularidad de Szemerédi. Ambos resultados de Yuster son presentados en este trabajo de tesis. En [1], Alon, Balogh, Keevash y Sudakov, extendiendo el resultado de Yuster, y en particular, probando una conjetura que Yuster hizo en su mismo trabajo. Más precisamente, probaron que para $k \in \{2,3\}$ y $r+1 \geq 3$, se tiene $F(G,k,r+1) = k^{t_r(n)}$ y que esta cota es alcanzada exclusivamente por $T_r(n)$. Este resultado utiliza, de manera no trivial, el Lema de Regularidad de Szemerédi (Teorema 2.4.5), el Teorema de Estabilidad de Simonovits (Teorema 2.5.1) y un Lema de incrustación (Lema 3.2.2), entre otros. Revisaremos este resultado en la Sección 3.3.

Finalmente, relacionado al estudio del número $F(n,k,r+1)$ planteado por Erdős y Rothschild, existen varios otros resultados relevantes que mencionamos (de manera no exhaustiva) a continuación. Alon et al. [1] mostraron que para $k > 3$ y $r+1 \geq 3$, la cota inferior trivial ya no es una cota superior y plantearon la pregunta ¿cuál es el correcto orden de crecimiento de $n_0 = n_0(r)$?, donde $n_0 = n_0(r)$ es la cota inferior para la cantidad de vértices de los grafos para los cuales se satisface $F(G,k,r+1) = k^{t_r(n)}$ con $k\{2,3\}$ y $r+1 \geq 3$. Hàn y Jiménez [15] respondieron a esta pregunta utilizando el método de contenedores [2, 20]. Pikhurko y Yilma [18] resolvieron el problema de encontrar los valores de $F(G,4,3)$ y $F(G,4,4)$ junto a los grafos que alcanzan estos números. Recientemente, Botler et al. [5], mostraron el valor de $F(n,3,6)$ y un valor aproximado para $F(n,3,5)$, para n suficientemente grande. Además caracterizaron todos los grafos que alcanzan la cota para $r = 6$.

Capítulo 2

Combinatoria Extremal Clásica

La teoría de *grafos extremales* estudia aquellos grafos, mínimos o máximos en un sentido cuantitavivo o cualitativo, que satisfacen una determinada propiedad. Aquí nuestros problemas se pueden resumir de la siguiente manera: dados ciertos paramétros y características para un grafo entonces, ¿cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener?, ¿cómo es la estructura?, ¿es este grafo único?.

En la Sección 2.1 se presentan las definiciones y notaciones básicas concernientes a la teoría de grafos que se utilizan en este trabajo. En la Sección 2.2 presentamos el Teorema de Turán que nos proporcionará una cota superior para el número de aristas de un grafo en n vértices que no contiene como subgrafo a un grafo completo K_{r+1}. En la Sección 2.3 hacemos un estudio del Teorema de Erdős-Stone que es básicamente una generalización asintótica del Teorema de Turán en el sentido en que en vez de considerar grafos completos podemos ahora considerar un grafo arbitrario H y entonces la conclusión del teorema depende solamente del número cromático de H. También mostramos el Teorema de Kövari-Sós-Turán para el caso en que H es bipartito. En la Sección 2.4 estudiamos el Lema de Regularidad de Szemerédi. Después en la Subsecció presentamos una demostración del Lema de Regularidad. En la Subsección 2.4.2 mostramos el Teorema de Roth y en la Subsección 2.4.3 presentamos una demostración del Teorema de Erdős-Stone que utiliza el Lema de Regularidad. Por último en la Sección estudiamos el Teorema de Estabilidad de Simonovits.

2.1. Preliminares

En esta sección vamos a resumir las definiciones, la terminología y la notaciones básicas utilizadas en este trabajo de tesis, todas ellas tomadas de textos clásicos de la teoría de grafos y la combinatoria extremal, así como también de los artículos que hemos estudiado durante la preparación de este trabajo [14, 25, 1]. En cuanto a los textos clásicos, las fuentes principales que hemos utilizado son: el libro *Graph Theory* de R. Diestel [8] y los libros *Extremal Graph Theory* y *Modern Graph Theory* de B. Bollobás [3, 4]. De manera complementaria, hemos utilizado los apuntes de un curso de combinatoria extremal dictado por D. Conlon, profesor del Instituto de Tecnológico de California CALTECH

`http://www.its.caltech.edu/ dconlon/Extremal-course.html.`

Un *grafo* es un par $G = (V, E)$ en donde V es un conjuto finito y E es un subconjunto del conjunto de todos los conjuntos de cardinalidad 2 que se pueden formar con V, es decir

$$E \subseteq \{\{x, y\} | x \in V, y \in V \setminus \{x\}\}.$$

Los elementos de V son llamados *vértices* y los elementos de E son llamados *aristas*. Denotaremos por $V(G)$ y por $E(G)$ al conjunto de los vértices del grafo G y de las aristas del grafo G, respectivamente. En este trabajo, la cardinalidad de un conjunto S la denotamos por $|S|$. Para las cardinalidades del conjunto de vértices y del conjunto de aristas utilizamos las siguientes notaciones:

$$|V(G)| := |G| \, , |E(G)| := e(G).$$

Si G es un grafo tal que $|G| = n$ diremos que G es un n-grafo. Un grafo de orden 0 u orden 1 es llamado *trivial*.

Notemos que $e(G) \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Esta cota superior la podemos interpretar como el número de combinaciones sin repetición de 2 elementos elegidos entre los n elementos. De hecho, esta cota es el número máximo de aristas que puede tener un n-grafo. Un n-grafo con $\binom{n}{2}$ aristas es llamado *grafo completo* de orden n y es denotado por K_n. Como casos particulares, tenemos que K_0 y K_1 son los grafos triviales, K_2 son dos vértices y la arista que los une y K_3 es un *triángulo*.

Para denotar la arista $\{x, y\}$ escribiremos (x, y) o simplemente xy según sea el contexto. Los vértices x e y son llamados *extremos* de la arista xy y se dice que x e y son *adyacentes*. Si un vértice v es tal que $v \in e$ donde e es una arista, entonces diremos que v es *incidente* en e. Evidentemente $x, y \in xy = (x, y) = \{x, y\}$. Cuando no existe una arista entre x e y diremos que estos vértices son *disjuntos*.

Para $r \geq 2$, un grafo $G = (V, E)$ se dice r*-partito* si y solo si V admite una partición en r partes tal que cada arista tiene sus extremos en dos partes distintas. Dicho de otro modo, cada par de vértices de una misma parte es un par de vértices disjuntos. En particular, un grafo 2-partito es llamado *bipartito*, un grafo 3-partito es llamado tripartito. En general, cuando $r \geq 4$ al grafo r-partito se le denomina grafo *multipartito*.

Cuando $V \subseteq V'$ y $E \subseteq E'$ entonces se dice que $G = (V, E)$ es *subgrafo* de $G' = (V', E')$, o de manera equivalente, que G' es *supergrafo* de G. Este hecho es denotado simplemente por $G \subseteq G'$. Cuando G no tiene como subgrafo un grafo H diremos que G es un grafo H*-libre*. Si $G \subseteq G'$ y G contiene todas las aristas de $xy \in E'$ tal que $x, y \in V$, entonces diremos que G es un *subgrafo inducido* de G' por V. En este caso anotaremos

$$G := G'[V].$$

Si A y B son dos subgrafos de G entonces denotaremos por $E(A, B)$ o $E(B, A)$ a las aristas en G que tienen un extremo en A y el otro extremo en B. Al cardinal de estos conjuntos lo denotaremos por $e(A, B)$ o $e(B, A)$. Cuando $V(A) \cap V(B) = \emptyset$, diremos que A y B son *vértice-disjuntos*. Por otra parte, cuando $E(A) \cap E(B) = \emptyset$ se dice que A y B son *arista-disjuntos*.

Sea $G = (V, E)$ un grafo. El conjunto de vecinos, o *vecindad* de un vértice $v \in V$ en un grafo G, denotado por $N_G(v)$ o simplemente por $N(v)$, son los vértices de $V \setminus \{v\}$ que inciden en las mismas aristas que v. más generalmente, si $U \subseteq V$, entonces el conjunto de vecinos de U en G, que es denotado por $N_G(U)$ o simplemente por $N(U)$, es el conjunto de vértices en $V \setminus U$ que inciden en las mismas aristas que en U. El *grado* de un vértice $v \in V$, denotado por $\deg_G(v)$, es la cardinalidad de la vecindad de v, es decir, $|N_G(v)| = \deg_G(v)$.

El *grado mínimo* y el *grado máximo* de un grafo G se definen, respectivamente, de la siguiente manera

$$\delta(G) := \text{mín}\{\deg_G(v) | v \in V\}$$

$$\Delta(G) := \text{máx}\{\deg_G(v) | v \in V\}.$$

Un *camino* es un grafo con $V \neq \emptyset$ y $P = (V, E)$ donde $V(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ y $E(P) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{k-1} v_k\}$ y todos los vértices son distintos. Escribiremos el camino simplemente como $v_1 v_2 \dots v_k$. Un grafo $C = (V, E)$ con vértices $V(C) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ y aristas $E(C) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_k v_1\}$ es llamado *ciclo*. Se dice que un grafo G es *conexo* si para cada par de vértices existe un camino en G que los une.

Sea G un grafo, k un entero positivo y se define el conjunto $[k] := \{1, \dots, k\}$.Una *k-vértice-coloración* de un grafo es una función $c : V(G) \to [k]$ en la que se cumple lo siguiente,

$$c(v_1) = c(v_2) \text{ entonces } v_1 v_2 \notin E(G)$$

para todo $v_1, v_2 \in V(G)$. Este número es llamado *número cromático* de G y es denotado por $\chi(G)$, es decir

$$\chi(G) = \text{mín}\{k \in \mathbb{Z}^+ | G \text{ admite una } k\text{-vértice-coloración}\}.$$

En este trabajo, el número cromático se usa de la siguiente manera. Si $\chi(G) = k$, entonces $V(G)$ se puede particionar en k partes haciendo de G un grafo k-partito. Por otro lado, si un grafo se puede particionar en k partes, entonces su número cromático es a lo más k.

2.2. El Teorema de Turán

Turán en el año 1940 presentó el teorema que lleva su nombre. Se preguntó cual es el número máximo posible de aristas que puede tener un n-grafo que no contiene como subgrafo a K_{r+1}. Este número es conocido como el *número de Turán* y es denotado por $t_r(n)$.

En primer lugar notemos que un grafo r-partito no puede contener al grafo K_{r+1}, pues para contener al grafo K_{r+1} se requieren al menos $r+1$ partes. Así, el número de aristas de cualquier grafo r-partito entrega una cota inferior para el número de Turán. A continuación, veremos que el grafo r-partito con mayor cantidad de aristas es aquel en el cual sus partes tienen tamaño lo más similar posible, es decir, en que los tamaños de sus partes difieren en a lo más 1. Diremos que un grafo r-partito con partes $(V_1, \dots, V_r)$ es *balanceado* si

$$\text{Para cada par } (V_i, V_j) \text{ se tiene que } ||V_i| - |V_j|| \le 1. \tag{2.1}$$

En este caso también decimos que la partición $(V_1, \dots, V_r)$ es *balanceada*.

Observemos que el n-grafo r-partito, completo y balanceado es único salvo permutación de sus partes. A este grafo se le conoce como *grafo de Turán* y es denotado por $T_r(n)$.

Proposición 2.2.1. *Si H es un n-grafo r-partito y completo, entonces $e(H) \leq e(T_r(n))$. Además, si H no es balanceado, entonces la desigualdad es estricta.*

Demostración. Sea H un n-grafo r-partito y completo con partes $(S_1,\dots,S_r)$. Por la hipótesis, podemos asumir que para algún par (S_i,S_j) se tiene que $||S_i|-|S_j|| \geq 2$ y supongamos sin perdida de generalidad que $|S_i|-|S_j| \geq 2$. Tomamos algún $v \in V(S_i)$ y hacemos $S_i' = S_i \setminus \{v\}$ y $S_j' = S_j \cup \{v\}$, por lo cual $|S_i'| = |S_i|-1$ y $|S_j'| = |S_j|+1$. Ahora, sea H' el n-grafo r-partito y completo con conjunto de partes

$$(S_1,\dots,S_{i-1},S_i',S_{i+1},\dots,S_{j-1},S_j',S_{j-1},\dots,S_r),$$

es decir, el par (S_i,S_j) de H lo reemplazamos por (S_i',S_j') para construir el grafo H'. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} e(S_i',S_j') &= |S_i'|\cdot|S_j'| \\ &= (|S_i|-1)(|S_j|+1) \\ &= |S_i||S_j|+|S_i|-|S_j|-1 \\ &\geq |S_i||S_j|+1 \\ &> |S_i||S_j| = e(S_i,S_j). \end{aligned}$$

Así, se tiene que $e(H) < e(H')$. Podemos iterar este procedimiento hasta obtener un grafo balanceado, el cual por unicidad es $T_r(n)$, lo cual prueba la afirmación. □

Tenemos que la cantidad de aristas del grafo completo r-partito balanceado es una cota inferior para el número de Turán. El Teorema de Turán afirma que esta cota es también superior y que además, el grafo de Turán es el único grafo que alcanza la cota. Por esto, tendremos que $e(T_r(n)) = t_r(n)$. A continuación, presentamos el Teorema de Turán y su demostración. Recordemos que un grafo se dice H-libre cuando no contiene a H como subgrafo.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Turán)**.** *Sea G un n-grafo. Si G es K_{r+1}-libre, entonces $e(G) \leq t_r(n)$. Además, $G = T_r(n)$ si y solo si $e(G) = t_r(n)$.*

La demostración del Teorema de Turán que presentamos en este trabajo se basa en el siguiente lema.

Lema 2.2.3. *Sea G un n-grafo K_{r+1}-libre. Entonces existe un grafo r-partito H con $V(H) = V(G)$ tal que*

$$\deg_H(v) \geq \deg_G(v) \quad \forall\ v \in V(G).$$

Además, si $e(G) = e(H)$, entonces G es r-partito y completo.

En la demostración del Lema 2.2.3 usamos una técnica conocida como *simetrización*, que describimos a continuación. Dado un grafo G que es K_{r+1}-libre y un vértice $w \in V(G)$ de grado máximo en G, reemplazamos la vecindad de cada $v \in V(G) \setminus N_G(w)$ por la vecindad de w. De esta forma obtenemos un grafo H' con $V(H') = V(G)$ que es K_{r+1}-libre, pues $G[N_G(w)]$ es K_r-libre. Además, para todo $v \in V(G)$ el grado no se reduce, es decir, $\deg_{H'}(v) \geq \deg_G(v)$ para todo $v \in V(G)$. Diremos que H' es la *simetrización* de G por w.

Demostración del Lema 2.2.3. Procederemos por inducción en r. Si $r = 1$ entonces G no contiene aristas y el resultado es trivial. Ahora probamos para valores $r \geq 2$. Supongamos que el lema es válido para grafos K_r-libres. Sea $w \in V(G)$ de grado máximo en G y sea H' la simetrización de G por w. Sea $G' = H'[N_{H'}(w)] = G[N_G(w)]$, luego G' es K_r-libre y entonces por la hipótesis inductiva existe H'' con $V(H'') = V(G')$ que es $(r-1)$-partito tal que

$$\deg_{H''}(v) \geq \deg_{G'}(v)$$

para todo $v \in V(G')$. Entonces el grafo H buscado lo obtenemos a partir de H' reemplazando G' por H''. El grafo H es r-partito, sus partes estan compuestas por las $r-1$ partes de H'' y el conjunto $V(G) \setminus N_G(w)$. Observemos ahora que el grado de cada vértice no decrece:

- Si $v \in V(G) \setminus N_G(v)$, entonces por la simetrización es claro que $\deg_H(v) \geq \deg_G(v)$.
- Si $v \in N_G(w)$, entonces

$$\begin{aligned}
\deg_H(v) &= \deg_{H''}(v) + (\deg_{H'}(v) - \deg_{G'}(v)) \\
&\geq \deg_{G'}(v) + (\deg_{H'}(v) - \deg_{G'}(v)) \\
&= \deg_{H'}(v) \\
&\geq \deg_G(v).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene la desigualdad requerida para todo $v \in V(G)$. Ahora supongamos que $e(H) = e(G)$. Por un lado, necesariamente se tiene que $e(H'') = e(G')$, por lo que G'

es un grafo $(r-1)$-partito y completo. Por otro lado, la cantidad de aristas en $G\setminus E(G')$ y $H\setminus E(G')$ debe ser la misma. Si el conjunto de vértices $V(G)\setminus N_G(w)$ no es un conjunto independiente en G, entonces por la maximalidad del grado de w se tiene que

$$e(G\setminus E(G')) \leq \deg_G(w)\cdot|V(G)\setminus N_G(w)|-1 = e(H\setminus E(G'))-1,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto el conjunto de vértices $V(G)\setminus N_G(w)$ es un conjunto independiente en G y así podemos concluir que G es un grafo r-partito y completo. □

Demostración del Teorema 2.2.2. Sea G un n-grafo K_{r+1}-libre. Por el Lema 2.2.3, existe un grafo r-partito y completo H tal que $e(G)\leq e(H)$, en donde la desigualdad es estricta si G no es r-partito y completo. Por la Proposición 2.2.1 el grafo r-partito y completo con la mayor cantidad de aristas debe ser balanceado, o sea, $T_r(n)$. Por lo tanto, $e(G)\leq t_r(n)$, en donde la desigualdad es estricta si y solo si $G\neq T_r(n)$. □

Una consecuencia directa del Teorema de Turán, Teorema 2.2.2, es el Corolario 2.2.4, esta es una versión conocida como la versión débil del Teorema de Turán. Por completitud, incluimos una demostración de esta versión que no utiliza el Teorema 2.2.2.

Corolario 2.2.4. Sea G un n-grafo K_{r+1}-libre. Entonces

$$e(G)\leq\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Demostración. Procederemos por indución en n. Primero, notemos que el teorema es válido para $2\leq n\leq r$ pues

$$e(G)\leq\binom{n}{2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{n^2}{2}\leq\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Por tanto, queda solo probar para $n>r$. Supongamos que el teorema es válido para grafos con $n-1$ vértices y supongamos que G tiene el máximo número de aristas posibles. Esto último implica, en particular, que G contiene a K_r como subgrafo pues de lo contrario sería posible aumentar el número de aristas de G. Sea K una copia de K_r en G y sea $G'=G[V\setminus V(K)]$. Como $|V(G')|=n-r$ tenemos que por hipótesis inductiva se cumple que

$$e(G')\leq\left(1-\frac{1}{r}\right)\frac{(n-r)^2}{2}.$$

Notemos que $\deg_K(x) \le r-1$ para todo $x \in V(G')$ pues de lo contrario G tendría a K_{r+1} como subgrafo. Entonces, obtenemos que

$$\begin{aligned} e(G) &= e(G') + e(K) + e(K, G') \\ &\le \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{(n-r)^2}{2} + \binom{r}{2} + (n-r)(r-1) \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

□

2.3. El Teorema de Erdős-Stone

En esta sección revisaremos una generalización asintótica del Teorema de Turán. Dado un grafo H, se define el número *extremal* de H, denotado por $\mathrm{ex}(n, H)$, como el número máximo de aristas que puede tener un n-grafo sin contener a H como subgrafo. Más precisamente,

$$\mathrm{ex}(n, H) := \text{máx}\{e(G) : |G| = n \text{ y } G \text{ es } H\text{-libre}\}.$$

En la sección anterior estudiamos el número máximo de aristas que puede tener un n-grafo sin contener a K_{r+1} como subgrafo, es decir, el número extremal de K_{r+1}. El Teorema de Turán, Teorema 2.2.2, junto al Corolario 2.2.4 indican que

$$\mathrm{ex}(n, K_{r+1}) = t_r(n) \le \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}.$$

En general, se tiene la cota inferior $\mathrm{ex}(n, H) \ge t_{\chi(H)-1}(n)$ para el número extremal de un grafo H, en donde $\chi(H)$ corresponde al número cromático del grafo H. En efecto, todo grafo con número cromático a lo más $\chi(H) - 1$ es H-libre. En particular el grafo de Turán $T_{\chi(H)-1}(n)$ es H-libre. Adicionalmente, se tiene que para todo $\epsilon > 0$ y n suficientemente grande,

$$\mathrm{ex}(n, H) \ge t_{\chi(H)-1}(n) \ge \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \epsilon\right)\frac{n^2}{2}$$

El Teorema de Erdős-Stone (Teorema 2.3.1) afirma que esta cota inferior es también una cota superior para el número extremal de un grafo H arbitrario.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Erdős-Stone)**.** *Para todo grafo H y todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(H,\epsilon)$ tal que para todo $n \geq n_0$*

$$ex(n,H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \epsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

En lo que sigue utilizamos la siguiente notación. Dados X e Y subconjuntos de vértices disjuntos de un grafo G, la notación (X,Y) corresponde al subgrafo bipartito de G con vértices $X \cup Y$ y aristas $E(X,Y) = E_G(X,Y)$. Recordemos que la notación $E_G(X,Y)$ corresponde al conjunto de las aristas en G que tienen un extremo en X y otro en Y. El siguiente lema es el resultado clave en la demostración del Teorema 2.3.1. Este lema, indica que cada grafo de turán r-partito es subgrafo de cualquier n-grafo con $t_r(n) + \epsilon n^2$ aristas, si n es suficientemente grande.

Lema 2.3.2 (Lema de incrustación en grafos globalmente densos)**.** *Para todo par de enteros r, t y para todo $\epsilon < 1/r$ existe $n_0 = n_0(r,t,\epsilon)$ tal que ocurre lo siguiente. Todo n-grafo G con $n \geq n_0$ y*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \epsilon\right)\frac{n^2}{2}$$

contiene $r+1$ conjuntos disjuntos de vértices $A_1, \ldots, A_{r+1}$ de tamaño t tal que (A_i, A_j) es completo para cada par $i, j \in [r+1]$ distintos.

Demostración. Primero, obtendremos un subgrafo G' de G que satisface

$$\deg_{G'}(v) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right)|G'| \qquad \forall\ v \in V(G'). \tag{2.2}$$

Para obtener G' realizamos el siguiente proceso. Borramos uno a uno los vértices del grafo G que tengan grado menor al deseado. Comenzamos borrando un vértice, en caso de existir, de grado menor que $\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right)n$. En cada paso, si el grafo obtenido tiene l vértices y contiene un vértice de grado menor que $\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right)l$ entonces ese vértice se borra, para así obtener un nuevo grafo. El proceso termina cuando todos los vértices alcanzan el grado deseado. Sea G' el grafo obtenido. Por lo cual G' satisface (2.2). Vamos a verificar que $n' = |G'|$ no es demasiado pequeño. En efecto, notemos que la cantidad total de aristas que se han borrado en el proceso para la obtención de G' es a lo más

$$\begin{aligned}
\sum_{l=n'+1}^{n}\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\epsilon}{2}\right)l &= \left(1-\frac{1}{r}+\frac{\epsilon}{2}\right)\sum_{l=n'+1}^{n} l \\
&= \left(1-\frac{1}{r}+\frac{\epsilon}{2}\right)\frac{(n-n')(n+n'+1)}{2} \\
&\leq \left(1-\frac{1}{r}+\frac{\epsilon}{2}\right)\frac{n^2-n'^2}{2}+\frac{n-n'}{2}
\end{aligned}$$

pues $\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\epsilon}{2}\right)\leq 1$ por la hipótesis . Dado que el grafo G' tiene a lo más $\frac{n'^2}{2}$ aristas entonces se tiene

$$e(G)\leq\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\epsilon}{2}\right)\frac{n^2-n'^2}{2}+\frac{n-n'}{2}+\frac{n'^2}{2}.$$

Por nuestra hipótesis, $e(G)\geq\left(1-\frac{1}{r}+\epsilon\right)\frac{n^2}{2}$ y se sigue que

$$\left(1-\frac{1}{r}+\epsilon\right)\frac{n^2}{2}\leq\left(1-\frac{1}{r}+\frac{\epsilon}{2}\right)\frac{n^2-n'^2}{2}+\frac{n-n'}{2}+\frac{n'^2}{2}.$$

lo que es equivalente a la desigualdad

$$\epsilon\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}\leq\left(\frac{1}{r}-\frac{\epsilon}{2}\right)\frac{n'^2}{2}-\frac{n'}{2}.$$

Por lo tanto, n' es mayor que cualquier N que satisface la desigualdad inversa

$$\epsilon\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}>\left(\frac{1}{r}-\frac{\epsilon}{2}\right)\frac{N^2}{2}-\frac{N}{2}.$$

Podemos así tomar $n'=\sqrt{\epsilon r}\,n$ lo más pequeño posible. De ahora en adelante, asumiremos que estamos trabajando dentro de este buen comportamiento del subgrafo G'.

Probaremos lo siguiente por inducción en r para todo entero t. Existen $r+1$ conjuntos disjuntos de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$ en $V(G')$, cada uno de tamaño t, tal que (A_i, A_j) es completo para cada par $i, j \in [r+1]$ distintos. Para $r=0$ no hay nada que probar. Dado $r>0$ y $s=\lceil 3t/\epsilon\rceil$, usamos la hipótesis inductiva para encontrar r conjuntos disjuntos $B_1, \ldots, B_r$ de tamaño s tal que (B_i, B_j) es completo para $i, j \in [r]$ distintos.

Ahora, definimos el siguiente conjunto y un subconjunto de él respectivamente

$$U = V(G') \setminus \{B_1 \cup \ldots \cup B_r\}$$

$$W = \{v \in U| \text{ para todo } i \in [r], |N_{G'}(v) \cap B_i| \geq t\}$$

es decir, W es el conjunto de vértices en U que son adyacentes a por lo menos t vértices en cada B_i. Naturalmente se sigue que

$$U \setminus W = \{v \in U| \text{ existe } i \in [r] \text{ tal que } |N_{G'}(v) \cap B_i| < t\}.$$

Sea $\tilde{m}$ el número de aristas *faltantes* entre el conjunto U y la unión $B_1 \cup \ldots \cup B_r$. Es decir,

$$\tilde{m} = \left| \left\{ xy \in \binom{V(G')}{2} \setminus E(G') \,\middle|\, x \in U \wedge y \in B_1 \cup \ldots \cup B_r \right\} \right|.$$

Vamos a estimar el valor de $\tilde{m}$. Dado que todo vértice en $U \setminus W$ es adyacente a menos que t vértices en algún B_i, tenemos la siguiente cota inferior para el número de aristas faltantes $\tilde{m}$

$$\tilde{m} \geq |U \setminus W|(s-t) \geq (n' - rs - |W|)\left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right)s. \tag{2.3}$$

Vamos a obtener ahora una cota superior. Consideremos un vértice $v \in B_1 \cup \ldots \cup B_r$. Sin pérdida de generalidad $v \in B_1$. Sabemos que el grado de v en G' es al menos $(1 - 1/r + \epsilon/2)n'$ y que v está conectado a todos los vértices de $B_2 \cup \ldots \cup B_r$, por lo que la contribución de v a las aristas faltantes $\tilde{m}$ es a lo más

$$n' - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right)n' = \left(\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{2}\right)n'.$$

Entonces, considerando todos los vértices en $B_1 \cup \ldots \cup B_r$ tenemos que el número de aristas faltantes $\tilde{m}$ es a lo más

$$\tilde{m} \leq rs\left(\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{2}\right)n' = \left(1 - \frac{r\epsilon}{2}\right)sn'. \tag{2.4}$$

Por lo tanto, de (2.3) y (2.4) se obtiene que

$$
\begin{aligned}
|W|\left(1-\frac{\epsilon}{3}\right)s &\geq (n'-rs)\left(1-\frac{\epsilon}{3}\right)s-\left(1-\frac{r\epsilon}{2}\right)sn' \\
&= \epsilon\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{3}\right)sn'-\left(1-\frac{\epsilon}{3}\right)rs^2.
\end{aligned}
$$

Como ϵ, r y s están fijos, podemos elegir $|W|$ tan grande como queramos a través de la elección de n' grande (que depende de $n_0 = n_0(r,t,\epsilon)$). En particular, vamos a elegir n_0 de manera que $|W|$ satisface

$$|W| > \binom{s}{t}^r (t-1).$$

Cada elemento en W tiene al menos t vecinos en cada B_i. Hay a lo más $\binom{s}{t}^r$ maneras de escoger subconjuntos de t elementos de cada B_i, $i \in [r]$. Por el principio del palomar y el tamaño de W, deben existir subconjuntos $A_1,\ldots,A_r$ y un conjunto A_{r+1} de tamaño t de W tal que cada vértice en A_{r+1} está conectado a todo vértice de $A_1\cup\ldots\cup A_r$. Como $A_1,\ldots,A_r$ están todos conectados en la manera apropiada, se completa la prueba. □

Ahora, estamos en condiciones de presentar la demostración del Teorema de Erdős-Stone.

Demostración del Teorema 2.3.1. Sea H un grafo y $0<\epsilon<\frac{1}{\chi(H)-1}$. Sea $r=\chi(H)-1$ y $t=|H|$. Tomemos $n_0=n_0(r,t,\epsilon)$ del Lema 2.3.2 y un n-grafo G con $n\geq n_0$ y

$$e(G)\geq\left(1-\frac{1}{r}+\epsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

Por el Lema 2.3.2, en el grafo G existen conjuntos de vértices disjuntos $A_1,A_2,\ldots,A_{r+1}$, cada uno de tamaño t, de manera que el grafo A_iA_j es completo para todo $i,j\in[r+1]$. Claramente, el subgrafo de G inducido por $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{r+1}$ contiene a H, lo que concluye la demostración. □

El resultado que presentamos a continuación, conocido como el Teorema de Kövari-Sós-Turán, mejora el Teorema 2.3.1 para este caso. En general, no se sabe si la cota del Teorema de Kövari-Sós-Turán es justa, es decir, no se conocen grafos que alcancen dicha cota. Sin embargo se conoce que la cota es justa para $s=2$ y para $s=t=3$, esto debido a resultados de los trabajos de Füredi [13] y Brown [6], respectivamente. En la demostración que sigue, utilizaremos las siguientes cotas para el coeficiente binomial:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k\leq\binom{n}{k}\leq\left(\frac{ne}{k}\right)^k. \tag{2.5}$$

y también utilizaremos la Desigualdad de Jensen: dada una función convexa f, elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en su dominio y a_i positivos, se cumple lo siguiente:

$$f\left(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}\right) \leq \frac{\sum a_i f(x_i)}{\sum a_i}.$$

También, denotaremos por $K_{s,t}$ al grafo bipartito completo con partes de tamaño s y t.

Teorema 2.3.3 (Teorema de Kövari-Sós-Turán)**.** *Para todo par de enteros s, t con $s \leq t$ existe $c > 0$ tal que*

$$ex(n, K_{s,t}) \leq c \cdot n^{2-1/s}.$$

Demostración. Sea G un n-grafo que es $K_{s,t}$-libre. Queremos encontrar una cota superior para $e(G)$. Consideremos

$$W := \left\{ (v, S) \in V \times \binom{V}{s} \middle| \, v \text{ está conectado a cada vértice de } S \right\}$$

en donde $\binom{V}{s} = \{S \subseteq V : |S| = s\}$. Vamos a estimar $|W|$ utilizando doble conteo. Primero para cada $v \in V$ contamos la cantidad de pares $(v, s) \in W$ que existen. Tenemos que,

$$\begin{aligned} |W| &= \sum_{v \in V} \left| \left\{ S \subseteq V : |S| = s \text{ y } v \text{ está conectado a cada vértice en } S \right\} \right| \\ &= \sum_{v \in V} \binom{\deg(v)}{s} \geq n \binom{\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \deg(v)}{s} = n \binom{2e(G)/n}{s}, \end{aligned}$$

en donde la desigualdad está justificada por la Desigualdad de Jensen para la función $f(x) = \binom{x}{s}$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} |W| &= \sum_{s \in \binom{V}{s}} |\{v \in V | v \text{ está conectado a cada elemento en } S\}| \\ &\leq \sum_{s \in \binom{V}{s}} (t-1) = (t-1)\binom{n}{s}. \end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo a las cotas inferior y superior para $|W|$ tenemos que

$$(t-1)\binom{n}{s} \geq n \binom{2e(G)/n}{s}.$$

Usando las cotas descritas en (2.5) para el coeficiente binomial, obtenemos que

$$(t-1)\left(\frac{ne}{s}\right)^s \geq n\left(\frac{2m}{ns}\right)^s,$$

lo cual implica que

$$m \leq \frac{\sqrt[s]{t-1}e}{2} \cdot n^{2-1/s}.$$

Por lo tanto, eligiendo $c = \dfrac{\sqrt[s]{t-1}e}{2}$ se obtiene el resultado. □

2.4. Lema de Regularidad de Szemerédi

El Lema de Regularidad de Szemerédi [23], probado en 1975, es una de las herramientas más poderosas y complejas en combinatoria extremal. Un concepto fundamental para describir el Lema de Regularidad de Szemerédi es el de *densidad*. Si G es un grafo y $A, B \subseteq V(G)$ son subconjuntos disjuntos, entonces la densidad entre A y B, que denotaremos por $d(A,B)$, es el cociente entre el número de aristas que unen A y B y el número de todas las aristas posibles que podrían unir A y B. Más precisamente,

$$d(A,B) = \frac{e(A,B)}{|A| \cdot |B|}.$$

Notemos que $0 \leq d(A,B) \leq 1$. La siguiente definición nos entrega un parámetro para medir que tan bién distribuidas están las aristas en $E_G(A,B)$, es decir, aristas con un extremo en A y el otro extremo en B.

Definición 2.4.1 (Par regular)**.** Sea G un grafo, $A, B \subset V(G)$ disjuntos y sea $\epsilon > 0$. El par A, B se dice ϵ-*regular* si para cada par de subconjuntos $A' \subset A$, $B' \subset B$ con $|A'| \geq \epsilon|A|$ y $|B'| \geq \epsilon|B|$ se cumple que

$$|d(A',B') - d(A,B)| \leq \epsilon.$$

Observación 2.4.2. Notemos que para G un grafo, $A, B \subset V(G)$ disjuntos y $\epsilon, \epsilon' > 0$ con $\epsilon < \epsilon'$ se tiene que si el par A, B es ϵ-*regular* entonces es ϵ'-*regular*. El recíproco no es cierto.

Definición 2.4.3 (Partición regular)**.** Sea G un grafo y $\epsilon > 0$. Una partición $(X_1, \ldots, X_m)$ de $V(G)$ se dice ϵ-*regular* si es balanceada y para cada $1 \leq i < j \leq m$, el par X_i, X_j es ϵ-regular, excepto por a lo más $\epsilon\binom{m}{2}$ pares.

En la siguiente proposición afirmamos que en una partición ϵ-regular de un grafo no hay muchas aristas entre pares que no son ϵ-regulares.

Proposición 2.4.4. *Sea $(X_1,\dots,X_m)$ una partición ϵ-regular de los vértices de un n-grafo con $n \geq 4m$ y sea $\mathscr{M}$ el conjunto de pares definido por $\mathscr{M} = \{(i,j)|1 \leq i < j \leq m$ y (X_i,X_j) no es ϵ-regular$\}$. Entonces,*

$$\sum_{(i,j)\in\mathscr{M}} |X_i||X_j| \leq \epsilon n^2.$$

Demostración. Dado que las partes son de tamaño $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ o bien de tamaño $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ y también por el hecho que $\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 1$ podemos efectuar el siguiente acotamiento cuando $n \geq 4m$,

$$\sum_{(i,j)\in\mathscr{M}} \frac{|X_i||X_j|}{n^2} \leq \epsilon \binom{m}{2} \cdot \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2 \cdot \frac{1}{n^2} \leq \epsilon \frac{m^2}{2} \cdot \left(\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1 \right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\leq \epsilon \frac{m^2}{2} \left(\frac{n+m-1}{m} \right)^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \epsilon \frac{(n+m-1)^2}{2n^2} = \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{m-1}{n} + \left(\frac{m-1}{\sqrt{2}n} \right)^2 \right) \leq \epsilon$$

y así podemos concluir el resultado deseado. □

A continuación presentamos el Lema de Regularidad de Szemerédi. El Lema de Regularidad asegura que todo grafo admite una partición ϵ-regular, en donde el número de partes no depende del orden del grafo si no exclusivamente de ϵ.

Teorema 2.4.5 (Lema de Regularidad de Szemerédi)**.** *Para todo $\epsilon > 0$ existe $M = M(\epsilon)$ y $N = N(\epsilon)$ tal que todo n-grafo G con $n \geq N$ admite una partición ϵ-regular de $V(G)$ en m partes con $\frac{1}{\epsilon} \leq m \leq M$.*

2.4.1. Prueba del Lema de Regularidad de Szemerédi

Esta demostración está tomada del libro de Diestel [8]. Antes de comenzar presentaremos algunas definiciones sobre regularidad para particiones que contienen parte excepcional. En efecto, diremos que una partición de $V(G)$ tiene *parte excepcional* si es de la forma $(C_0, C_1,\dots,C_k)$ en donde C_0 es llamada *parte excepcional* (a veces, esta parte puede ser vacía). Esta partición se dice *ϵ-regular** si se cumplen las tres condiciones siguientes:

I) $|C_0| \leq \epsilon |V(G)|$.

II) $|C_1| = \ldots = |C_k|$.

III) Todos los pares (C_i, C_j) con $1 \leq i < j \leq k$ son ϵ-regular salvo a lo más ϵk^2.

Ahora vamos a probar el siguiente teorema, que implica trivialmente el lemma de regularidad (Teorema 2.4.5).

Teorema 2.4.6. *Para todo $\epsilon > 0$ y cada $\ell \geq 1$ existe $M = M(\epsilon)$ y $N = N(\epsilon)$ tal que todo n-grafo G con $n \geq N$ admite una partición ϵ-regular* de $V(G)$ en k partes con $\ell \leq k \leq M$.*

Para comenzar la prueba del Lema de Regularidad de Szemerédi necesitaremos la siguiente desigualdad para números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ y $\beta_1, \ldots, \beta_k > 0$,

$$\sum \frac{\alpha_i^2}{\beta_i} \geq \frac{(\sum \alpha_i)^2}{\sum \beta_i} \tag{2.6}$$

Esto último se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que establece que

$$\sum a_i^2 \sum b_i^2 \geq \left(\sum a_i b_i\right)^2$$

y luego tomando $a_i = \alpha_i \sqrt{\beta_i}$ y $b_i = \sqrt{\beta_i}$ se obtiene nuestro resultado.

Sea G un n-grafo. Para $A, B \subset V(G)$ cualquier par de subconjuntos disjuntos definimos el número q como

$$q(A,B) := \frac{|A||B|}{n^2}(d(A,B))^2 = \frac{e(A,B)^2}{|A||B|n^2}.$$

Para particiones $\mathscr{A}$ de A y $\mathscr{B}$ de B definimos

$$q(\mathscr{A}, \mathscr{B}) := \sum_{A' \in \mathscr{A}; B' \in \mathscr{B}} q(A', B')$$

y para una partición $\mathscr{P} = (C_1, \ldots, C_k)$ de $V(G)$ se define

$$q(\mathscr{P}) := \sum_{i<j} q(C_i, C_j).$$

Para definir el número q en una partición $\mathscr{P} = (C_0, C_1, \ldots, C_k)$ con parte excepcional

C_0 tratamos a este conjunto como una familia de conjuntos unitarios y definimos

$$q(\mathscr{P}) := q(\tilde{\mathscr{P}})$$

donde $\tilde{\mathscr{P}} := (C_1, \ldots, C_k) \cup (\{v\} : v \in C_0)$.

La función $q(\mathscr{P})$ es fundamental en la demostración del Teorema 2.4.6, pues mide la uniformidad de la partición $\mathscr{P}$ en el siguiente sentido: si $\mathscr{P}$ tiene demasiados pares irregulares, es posible tomar pares (X, Y) que no cumplen con la ϵ-regularidad y subparticionarlos en subconjuntos que, como probaremos, dan lugar a un refinamiento de $\mathscr{P}$ en donde el número q para la nueva partición es más grande que para $\mathscr{P}$. Este incremento de $q(\mathscr{P})$ está acotado inferiormente por alguna constante que depende solamente de ϵ. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} q(\mathscr{P}) &= \sum_{i<j} q(C_i, C_j) \\ &= \sum_{i<j} \frac{|C_i||C_j|}{n^2} d^2(C_i, C_j) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i<j} |C_i||C_j| \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

lo cual indica que la cantidad de veces que el número q puede ser incrementado es también acotado por una constante, en otras palabras, despues de algún número de refinamientos la partición obtenida será ϵ-regular* y así se completaria la demostración del Teorema 2.4.6. Todo lo que tenemos que hacer es notar cuántas partes puede tener esta última partición comenzando con una partición de ℓ partes, y elegir este número como M.

En el siguiente lema probaremos que cuando se refina una partición, entonces el número q no decrece.

Lema 2.4.7. *Para todo grafo G se cumple lo siguiente.*

(1) Sean $C, D \subset V(G)$ conjuntos disjuntos. Si $\mathscr{C}$ es una partición de C y $\mathscr{D}$ es una partición de D, entonces $q(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \geq q(C, D)$.

(2) Si $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}'$ son particiones de $V(G)$ y $\mathscr{P}'$ es un refinamiento de $\mathscr{P}$ entonces $q(\mathscr{P}') \geq q(\mathscr{P})$.

Demostración. Probamos cada una de las propiedades por separado.

(1) Sean $\mathscr{C} := (C_1, \dots, C_k)$ y $\mathscr{D} := (D_1, \dots, D_l)$. Utilizando la desigualdad (2.6) se tiene que

$$\begin{aligned} q(\mathscr{C}, \mathscr{D}) &= \sum_{i,j} q(C_i, D_j) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \frac{e(C_i, C_j)^2}{|C_i||C_j|} \\ &\geq \frac{1}{n^2} \frac{\left(\sum_{i,j} e(C_i, C_j)\right)^2}{\sum_{i,j} |C_i||C_j|} \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{e(C, D)^2}{\left(\sum_i |C_i|\right)\left(\sum_j |D_j|\right)} \\ &= q(C, D). \end{aligned}$$

(2) Sea $\mathscr{P} = (C_1, \dots, C_k)$. Para cada $i \in [k]$, sea $\mathscr{C}_i$ la partición de C_i inducida por $\mathscr{P}'$. Como $q(\mathscr{P}') = \sum_i q(\mathscr{C}_i) + \sum_{i<j} q(\mathscr{C}_i, \mathscr{C}_j)$ y por la desigualdad en (1) se tiene que

$$q(\mathscr{P}) = \sum_{i<j} q(C_i, C_j) \leq \sum_{i<j} q(\mathscr{C}_i, \mathscr{C}_j) \leq q(\mathscr{P}')$$

□

Ahora, mostraremos que si refinamos una partición subparticionando algún par irregular entonces tenemos un pequeño aumento en el valor de q. Al trabajar con un solo par, la cantidad del aumento es más pequeño que una constante, más precisamente, es proporcional a $1/n^2$.

Lema 2.4.8. *Sea $\epsilon > 0$ y sean $C, D \subset V(G)$ disjuntos. Si (C, D) es un par no ϵ-regular, entonces existen subparticiones $\mathscr{C} = (C_1, C_2)$ y $\mathscr{D} = (D_1, D_2)$ tal que*

$$q(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \geq q(C, D) + \epsilon^4 \frac{|C||D|}{n^2}$$

Demostración. Supongamos que el par (C, D) no es ϵ-regular. Entonces existen subconjuntos $C_1 \subseteq C$ y $D_1 \subseteq D$ con $|C_1| > \epsilon |C|$ y $|D_1| > \epsilon |D|$ tal que

$$|\eta| > \epsilon \tag{2.7}$$

con $\eta := d(C_1, D_1) - d(C, D)$. Definimos las particiones $\mathscr{C} := \{C_1, C_2\}$ y $\mathscr{D} := \{D_1, D_2\}$ donde $C_2 := C \setminus C_1$ y $D_2 := D \setminus D_1$. Mostraremos que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ satisfacen la conclusión del lema. Ahora escribiremos $c_i := |C_i|$, $d_i := |D_i|$, $e_{i,j} := e(C_i, D_j)$, $c := |C|$, $d := |D|$ y $e := e(C, D)$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
q(\mathscr{C}, \mathscr{D}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} \frac{e_{i,j}^2}{c_i d_j} \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\frac{e_{1,1}^2}{c_1 d_1} + \sum_{i+j>2} \frac{e_{i,j}^2}{c_i d_j} \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\frac{e_{1,1}^2}{c_1 d_1} + \frac{\left(\sum_{i+j>2} e_{i,j} \right)^2}{\sum_{i+j>2} c_i d_j} \right) \\
&\geq \frac{1}{n^2} \left(\frac{e_{1,1}^2}{c_1 d_1} + \frac{(e - e_{1,1})^2}{cd - c_1 d_1} \right).
\end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de (2.6). Por definición de η, tenemos que $e_{1,1} = \dfrac{c_1 d_1 e}{cd} + \eta c_1 d_1$ lo que implica

$$\begin{aligned}
n^2 q(\mathscr{C}, \mathscr{D}) &\geq \frac{1}{c_1 d_1} \left(\frac{c_1 d_1 e}{cd} + \eta c_1 d_1 \right)^2 + \frac{1}{cd - c_1 d_1} \left(\frac{cd - c_1 d_1}{cd} e - \eta c_1 d_1 \right)^2 \\
&= \frac{c_1 d_1 e^2}{c^2 d^2} + \frac{2e\eta c_1 d_1}{cd} + \eta^2 c_1 d_1 + \frac{cd - c_1 d_1}{c^2 d^2} e^2 - \frac{2e\eta c_1 d_1}{cd} + \frac{\eta^2 c_1^2 d_1^2}{cd - c_1 d_1} \\
&\geq \frac{e^2}{cd} + \eta^2 c_1 d_1
\end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de (2.7). Por nuestra elección de C_1 y D_1 se tiene que $c_1 \geq \epsilon c$ y $d_1 \geq \epsilon d$ y así obtenemos

$$n^2 q(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \geq \frac{e^2}{cd} + \epsilon^4 cd$$

que es equivalente al resultado deseado. □

El siguiente lema dice que si una partición tiene suficientes pares irregulares como para no cumplir la definición de ϵ-regularidad*, entonces al subparticionar todos estos pares se obtendrá un incremento de q por una constante.

Lema 2.4.9. *Sea $0 < \epsilon < 1/4$ y sea $\mathscr{P} = (C_0, C_1, \ldots, C_k)$ una partición de $V(G)$ con parte excepcional C_0 tal que $|C_0| \leq \epsilon n$ y $|C_1| = \ldots = |C_k| = c$. Si $\mathscr{P}$ no es ϵ-regular* entonces existe una partición $\mathscr{P}' = (C'_0, C'_1, \ldots, C'_l)$ de $V(G)$ con parte excepcional C'_0, donde $k \leq l \leq k4^k$ tal que $|C'_0| \leq |C_0| + n/2^k$, $|C'_1| = \ldots = |C'_l|$ y*

$$q(\mathscr{P}') \geq q(\mathscr{P}) + \epsilon^5/2.$$

Demostración. Para todo $1 \leq i < j \leq k$ definimos una partición $\mathscr{C}_{i,j}$ de C_i y una partición $\mathscr{C}_{j,i}$ de C_j de la siguiente manera: si el par (C_i, C_j) es ϵ-regular entonces hacemos $\mathscr{C}_{i,j} := \{C_i\}$ y $\mathscr{C}_{j,i} := \{C_j\}$. Si por el contrario (C_i, C_j) no es ϵ-regular, entonces por el Lema 2.4.8 existen particiones $\mathscr{C}_{i,j}$ y $\mathscr{C}_{j,i}$ de C_i y C_j respectivamente con $|\mathscr{C}_{i,j}| = |\mathscr{C}_{j,i}| = 2$ y que cumplen

$$q(\mathscr{C}_{i,j}, \mathscr{C}_{j,i}) \geq q(C_i, C_j) + \frac{\epsilon^4 |C_i||C_j|}{n^2} = q(C_i, C_j) + \frac{\epsilon^4 c^2}{n^2} \tag{2.8}$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$, sea $\mathscr{C}_i$ la única partición minimal de C_i que refina cada una de las particiones $\mathscr{C}_{i,j}$ con $j \neq i$. En otras palabras, si consideramos dos elementos de $\mathscr{C}_i$ como equivalentes siempre que ellos vivan en la misma parte de la partición $\mathscr{C}_{i,j}$ para cada $j \neq i$, entonces $\mathscr{C}_i$ es el conjunto de partes de equivalencia. De esta manera tenemos que $|\mathscr{C}_i| \leq 2^{k-1}$. Ahora consideremos la partición

$$\mathscr{C} := \{C_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{C}_i$$

de $V(G)$, con C_0 como parte excepcional. Entonces $\mathscr{C}$ refina $\mathscr{P}$ y

$$k \leq |\mathscr{C}| \leq k2^k \tag{2.9}$$

Sea $\mathscr{C}_0 := \{\{v\} : v \in C_0\}$. Ahora, si $\mathscr{P}$ no es ϵ-regular*, entonces para un número mayor que ϵk^2 de los pares (C_i, C_j), con $1 \leq i < j \leq k$, la partición $\mathscr{C}_{i,j}$ no es trivial. Por lo tanto, por nuestra definición de q para particiones con parte excepcional y haciendo uso de (2.8) y (1) del Lema 2.4.7 se obtiene que

$$\begin{aligned}
q(\mathscr{C}) &= \sum_{1\le i<j} q(\mathscr{C}_i,\mathscr{C}_j) + \sum_{1\le i} q(\mathscr{C}_0,\mathscr{C}_i) + \sum_{0\le i} q(\mathscr{C}_i) \\
&\ge \sum_{1\le i<j} q(\mathscr{C}_{i,j},\mathscr{C}_{j,i}) + \sum_{1\le i} q(\mathscr{C}_0,\{C_i\}) + q(\mathscr{C}_0) \\
&\ge \sum_{1\le i<j} q(C_i,C_j) + \epsilon k^2\frac{\epsilon^4 c^2}{n^2} + \sum_{1\le i} q(\mathscr{C}_0,\{C_i\}) + q(\mathscr{C}_0) \\
&= q(\mathscr{P}) + \epsilon^5\left(\frac{kc}{n}\right)^2 \\
&\ge q(\mathscr{P}) + \frac{\epsilon^5}{2},
\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado que $|C_0| \le \epsilon n \le \frac{1}{4}n$ y luego $kc \ge \frac{3}{4}n$.

Ahora a partir de $\mathscr{C}$ queremos obtener la partición deseada $\mathscr{P}'$, entonces todo lo que queda por hacer es disminuir el tamaño de sus partes para quedar con partes de igual tamaño, suficientemente pequeño de manera que todos los vértices restantes puedan ser colocados en la parte excepcional sin hacer esta demasido grande. Sea $(C'_1,\dots,C'_\ell)$ la colección maximal de conjuntos disjuntos de tamaño $d := \lfloor c/4^k \rfloor$ tal que cada C'_i esta contenido en algún $C \in \mathscr{C} \setminus \{C_0\}$ y hagamos $C'_0 := V(G) \setminus \bigcup C'_i$. Entonces $\mathscr{P}' = (C'_0, C'_1,\dots,C'_\ell)$ es de hecho una partición de $V(G)$. Más aún, $\mathscr{P}'$ refina a $\mathscr{C}$, lo que por (2) del Lema 2.4.7

$$q(\mathscr{P}') \ge q(\mathscr{C}) \ge q(\mathscr{P}) + \epsilon^5/2.$$

Como cada $C'_i \ne C'_0$ está también contenido en uno de los conjuntos $C_1,\dots,C_\ell$, pero no más de 4^k conjuntos C'_i pueden estar dentro del mismo C_j (por elección de d), tenemos también que $k \le \ell \le k4^k$ como es requerido. Finalmente, los conjuntos $C'_1,\dots,C'_\ell$ usan todos salvo a lo más d vértices de cada uno de los conjuntos $C \ne C_0$ de $\mathscr{C}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|C'_0| &\le |C_0| + d|\mathscr{C}| \\
&\le |C_0| + \frac{c}{4^k}k2^k \\
&= |C_0| + ck/2^k \\
&\le |C_0| + n/2^k
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 2.4.6. Sea $\epsilon > 0$ y sea $\ell \geq 1$. Supongamos sin perdida de generalidad que $\epsilon < \frac{1}{4}$ y sea $s := 2/\epsilon^5$. El número s es una cota superior para el número de iteraciones del Lema 2.4.9 que puede ser aplicado a la partición de un grafo antes que se convierta en ϵ-regular*, recordemos que $q(\mathscr{P}) \leq 1$ para cualquier partición $\mathscr{P}$.

Existe un requerimiento formal que una partición $(C_0, C_1, \ldots, C_k)$ con $|C_1| = \ldots = |C_k|$ tiene que satisfacer antes de que el Lema 2.4.9 pueda ser (re-)aplicado: el tamaño $|C_0|$ de su parte excepcional no debe exceder ϵn. Con cada iteración del Lema 2.4.9, sin embargo, el tamaño de la parte excepcional puede crecer hasta $n/2^k$. (Más precisamente, hasta $n/2^l$, donde l es el número de otros conjuntos en la partición actual; pero $l \geq k$ por el lema, entonces $n/2^k$ es ciertamente una cota superior para el incremento). Luego, queremos escoger k suficientemente grande como para que incluso s incrementos de $n/2^k$ sumen a lo más $\frac{1}{2}\epsilon n$, y n suficientmente grande tal que para cualquier valor inicial de $|C_0| < k$, tengamos $|C_0| \leq \frac{1}{2}\epsilon n$. (Si le damos a nuestra partición inicial k partes no-excepcionales $C_1, \ldots, C_k$, deberiamos permitir un tamaño inicial de hasta k para C_0, para poder lograr $|C_1| = \ldots = |C_k|$.)

Sea $k \geq \ell$ lo suficientemente grande tal que $2^{k-1} \geq s/\epsilon$. Entonces $s/2^k \leq \epsilon/2$, y por lo tanto

$$k + \frac{s}{2^k} n \leq \epsilon n \tag{2.10}$$

siempre que $k/n \leq \epsilon/2$, es decir, para todo $n \geq 2k/\epsilon$.

Ahora, vamos a elegir M. Esto debe ser una cota superior en el número de partes no-excepcionales en nuestra partición después de s iteraciones del Lema 2.4.9 donde en cada iteración este número puede crecer a partir de su valor actual r hasta a lo más $r4^r$. Así, sea f la función $x \mapsto x4^x$ y tomemos $M := \text{máx}\{f^s(k), 2k/\epsilon\}$, el segundo término en el máximo asegura que cualquier $n \geq M$ es suficientemente grande para satisfacer (2.10).

Finalmente tenemos que mostrar que cada grafo $G = (V, E)$ de orden al menos ℓ tiene una partición ϵ-regular* $(V_0, V_1, \ldots, V_k)$ con $\ell \leq k \leq M$. Ahora, sea G un n-grafo con $n = |V(G)|$. Si $n \leq M$, particionamos G en $k := n$ conjuntos unitarios, escogiendo $V_0 := \emptyset$ y $|V_1| = \ldots = |V_k| = 1$. Esta partición de G es claramente ϵ-regular*. Supongamos ahora que $n > M$. Sea $C_0 \subseteq V(G)$ el conjuto minimal tal que k divide $|V(G) \setminus C_0|$, y sea $(C_1, \ldots, C_k)$ una partición cualquiera de $V(G) \setminus C_0$ en partes de igual tamaño. Entonces $|C_0| < k$, y por lo tanto $|C_0| \leq \epsilon n$ por (2.10). Comenzando con $(C_0, C_1, \ldots, C_k)$ aplicamos el Lema 2.4.9 una y otra vez, hasta que la partición de G obtenida sea ϵ-regular; esto va a pasar después de a lo más s iteraciones, pues por (2.10) el tamaño de la parte excepcional en las particiones queda por debajo de ϵn, por lo que el lema podría de hecho ser reaplicado hasta el máximo teórico de s veces. $\square$

2.4.2. Una aplicación del Lema de Regularidad

En esta sección veremos como usar el Lema de Regularidad para demostrar el Teorema de Roth. El Teorema de Roth [19] es un resultado clásico de la teoría combinatoria de números. Este teorema establece que para cada $\delta > 0$ y n suficientemente grande, todo subconjunto de $[n]$ de cardinalidad al menos δn contiene una progresión aritmética de largo 3. Recordemos que una progresión aritmética de largo 3 en un conjunto A es un subconjunto de la forma $\{x, x+a, x+2a\} \subseteq A$. En esta sección presentamos una demostración que utiliza el Lema de Regularidad de Szemerédi.

Lema 2.4.10 (Conteo de triángulos)**.** *Sea G un grafo y sean $X, Y, Z \subset V(G)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que los pares (X, Y), (Y, Z) y (X, Z) son ϵ-regulares. Además, definimos*

$$\alpha := d(X, Y), \beta := d(Y, Z), \gamma := d(X, Z).$$

Si $\alpha, \beta, \gamma \geq 2\epsilon$, entonces la cantidad de copias de K_3 (triángulos) en G es al menos

$$(1-2\epsilon)(\alpha-\epsilon)(\beta-\epsilon)(\gamma-\epsilon)|X||Y||Z|.$$

Demostración. Para cada vértice $v \in V(G)$ denotamos por $d_Y(v)$ y $d_Z(v)$ a la cantidad de vecinos de v en Y y en Z respectivamente. Verificaremos que la cantidad de vértices $x \in X$ tal que $d_Y(x) < (\alpha - \epsilon)|Y|$ es a lo más $\epsilon|X|$. Por contradicción, supongamos que existe un subconjunto de vértices $X' \subset X$ con $|X'| \geq \epsilon|X|$ tal que para todo $x \in X'$ se cumple que

$$d_Y(x) < (\alpha - \epsilon)|Y|.$$

Tomando $Y = Y'$ tenemos que

$$\begin{aligned}
d_Y(x) < (\alpha-\epsilon)|Y| \quad &\Longrightarrow \quad e(X', Y) \leq (\alpha-\epsilon)|X'||Y| \\
&\Longrightarrow \quad e(X', Y) \leq \alpha|X'||Y| - \epsilon|X'||Y| \\
&\Longrightarrow \quad \epsilon|X'||Y| \leq \alpha|X'||Y| - e(X', Y) \\
&\Longrightarrow \quad \epsilon \leq \alpha - \frac{e(X', Y)}{|X'||Y|} \\
&\Longrightarrow \quad \epsilon \leq \alpha - d(X', Y)
\end{aligned}$$

y esto último contradice el hecho de que el par (X,Y) es ϵ-regular. Similarmente se prueba que la cantidad de $x \in X$ tal que $d_Z(x) < (\gamma-\epsilon)|Z|$ es a los más $\epsilon|X|$. Por lo tanto

$$|\{x \in X : d_Y(x) < (\alpha-\epsilon)|Y|\}| < \epsilon|X|$$

$$|\{x \in X : d_Z(x) < (\gamma-\epsilon)|Z|\}| < \epsilon|X|.$$

Luego, en X existen al menos $(1-\epsilon)|X|$ vértices con $d_Y(x) \geq (\alpha-\epsilon)|Y|$ y $(1-\epsilon)|X|$ vértices con $d_Z(x) \geq (\gamma-\epsilon)|Z|$. Dado que $\alpha, \gamma \geq 2\epsilon$ entonces

$$|Y'| \geq (\alpha-\epsilon)|Y| \geq \epsilon|Y|$$

$$|Z'| \geq (\gamma-\epsilon)|Z| \geq \epsilon|Z|.$$

Por ϵ-regularidad del par (Y,Z) tenemos que $|d(Y',Z')-\beta| \leq \epsilon$, lo que es equivalente a

$$\left|\frac{e(Y',Z')}{|Y'||Z'|}-\beta\right| \leq \epsilon,$$

o sea $\dfrac{e(Y',Z')}{|Y'||Z'|}-\beta \geq -\epsilon$. Luego tenemos que

$$e(Y',Z') \geq (\beta-\epsilon)|Y'||Z'|.$$

Ahora, para cada $x \in X'$, la cantidad de triángulos distintos en G que contienen a x es al menos

$$\begin{aligned} e(Y',Z') &\geq (\beta-\epsilon)|Y'||Z'| \\ &\geq (\beta-\epsilon)(\alpha-\epsilon)|Y|(\gamma-\epsilon)|X| \\ &\geq (\alpha-\epsilon)(\beta-\epsilon)(\gamma-\epsilon)|Y||Z|, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

El siguiente lema, conocido como el lema de remoción de triángulos, ilustra de manera sencilla el uso del lema de regularidad (Teorema 2.4.5). Este lema asegura que si se deben borrar al menos ϵn^2 aristas de un grafo para que sea K_3-libre, entonces este grafo contiene al menos δn^3 copias de K_3.

Lema 2.4.11 (Remoción de triángulos)**.** *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ y $n_0 = n_0(\delta)$ tal que para cada n-grafo con $n \geq n_0$ y a lo más δn^3 triángulos es posible borrar a lo más ϵn^2 aristas para obtener un grafo K_3-libre.*

Demostración. Por el Lema de Regularidad, Teorema 2.4.5, existe una partición $(X_1, \ldots, X_t)$ de los vértices de G que es $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$-regular con $t \geq \frac{4}{\epsilon}$. Ahora, borraremos todas las aristas $xy \in E(G)$ que satisfacen alguna de las siguientes condiciones:

(1) xy se encuentra entre un par (X_i, X_j) que no es $\frac{\epsilon}{4}$-regular.

(2) xy se encuentra entre un par (X_i, X_j) con densidad menor que $\frac{\epsilon}{2}$.

(3) xy se encuentra dentro de un parte de la partición.

Por la $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$-regularidad de la partición y por la Proposición 2.4.4 tenemos que $\sum\limits_{i,j} \frac{|X_i||X_j|}{n^2} \leq \frac{\epsilon}{4}$. Como $\sum\limits_{i,j} |X_i||X_j|$ representa la suma de todas las aristas que están entre los pares (X_i, X_j) entonces por la condición (1) se borran a lo más

$$\sum_{i,j} |X_i||X_j| \leq \frac{\epsilon}{4} n^2$$

aristas. Por la condición (2), por cada par poco denso estamos borrando a lo más $\frac{\epsilon}{2}\left(\frac{n}{t}\right)^2$ aristas pues

$$e(X_i, X_j) = d(X_i, X_j) \cdot |X_i||X_j| < \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{n}{t}\right)^2.$$

Como en cada parte se tienen a lo más $\binom{n/t}{2}$ aristas y además $\binom{n/t}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{t}\right)$, por la condición (3) borramos en total

$$t \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{n}{t}\right)^2 = \frac{1}{2t} n^2 \leq \frac{\epsilon}{8} n^2$$

aristas. Entonces, por las condiciones (1), (2) y (3) se borran en total a lo más ϵn^2 aristas.

Sea G' el grafo obtenido. Probaremos que para una cierta elección de δ, el grafo G' es libre de triángulos. Supongamos por absurdo que G' contiene un triángulo. De este modo, sea $xyz = K_3$. Entonces existen partes X_i, X_j, X_l tal que $x \in X_i$, $y \in X_j$ y $z \in X_l$. Sabemos que los pares (X_i, X_j), (X_j, X_l) y (X_i, X_l) son $\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$-regulares. Para simplificar la notación asignamos $d_{i,j} := d(X_i, X_j)$, $d_{j,l} := d(X_j, X_l)$, $d_{i,l} := d(X_i, X_l)$. Por la condición (2) tenemos que $d_{i,j}, d_{j,l}, d_{i,l} \geq \frac{\epsilon}{2}$. Así, por el Lema 2.4.10,

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)\left(d_{i,j} - \frac{\epsilon}{4}\right)\left(d_{j,l} - \frac{\epsilon}{4}\right)\left(d_{i,l} - \frac{\epsilon}{4}\right)|X_i||X_j||X_l| &\geq \left(1 - \tfrac{\epsilon}{4}\right)\left(d - \tfrac{\epsilon}{4}\right)^3\left(\tfrac{n}{t}\right)^3 \\
&= \frac{\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)\left(d - \frac{\epsilon}{4}\right)^3}{t^3} \cdot n^3
\end{aligned}$$

donde $d = \text{mín}\{d_{i,j}, d_{j,l}, d_{i,l}\}$. Tomando $\delta > \frac{\left(1-\frac{\epsilon}{4}\right)\left(d-\frac{\epsilon}{4}\right)^3}{t^3}$ se obtiene que el número de triángulos es mayor que δn^3 lo que es una contradicción. □

A continuación veremos un lema, probado en[22], que utiliza el lema de remoción de triángulos y a su véz es clave en la obtención de la prueba del Teorema de Roth.

Lema 2.4.12. *Sea $\delta > 0$. Entonces existe un entero n_0 tal que si $n \geq n_0$ para todo subconjunto $A \subseteq [n]^2$ con al menos δn^2 elementos contiene un trío de la forma (x, y), $(x+d, y)$, $(x, y+d)$ con $d > 0$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $A + A := \{x + y | x, y \in A\}$ que está contenido en $[2n]^2$. Por lo tanto, debe existir un elemento z que es representado como $x + y$ de al menos

$$\frac{(\delta n^2)^2}{(2n)^2} = \frac{\delta^2 n^2}{4}$$

diferentes maneras. Escogiendo tal z y definiendo $A' := A \cap (z - A)$ y $\delta' = \frac{\delta^2}{4}$ entonces tenemos que $|A'| \geq \delta' n^2$, y si A' contiene un trío de la forma (x, y), $(x+d, y)$, $(x, y+d)$ para $d < 0$, también lo debe contener $z - A$. Por lo tanto, A debe contener tal trío con $d > 0$. Debemos olvidarnos entonces de la condición en que $d > 0$ y simplemente intentar encontar un trío no trivial con $d \neq 0$.

Consideremos el grafo tripartito G con conjunto de vértices X, Y y Z, donde $X = Y = [n]$ y $Z = [2n]$. X corresponde a las rectas vérticales a través de A, Y a las rectas horizontales y Z a las diagonales con valores constantes de $x + y$. Las aristas de G se obtienen uniendo $x \in X$ e $y \in Y$ si y solo si $(x, y) \in A$. También unimos $x \in X$ y $z \in Z$ si y solo si $(x, z - x) \in A$ y unimos $y \in Y$ y $z \in Z$ si y solo si $(z - y, y) \in A$.

Si existe un triángulo xyz en G, entonces el trío (x, y), $(x, y + (z - x - y))$, $(x + (z - y - x), y)$ deben pertenecer a A y luego tenemos el triple requerido salvo que $z = x + y$. Esto dice que existen a lo más $n^2 = \frac{1}{64n}(4n)^3$ triángulos en G. Luego por el Lema de Remoción de Triángulos (Lema 2.4.11), para n suficientemente grande, podemos remover $\frac{\delta}{2} n^2$ aristas y formar un grafo libre de triángulos. Pero cada punto (x, y) en A determina un triángulo de la forma xyz, donde para cada par $x, y \in [n]$ existe un $z \in [2n]$ de manera que $z = x + y$ y por esto, distintos puntos en A determinan triángulos disjuntos. Por lo tanto existen al menos δn^2 triángulos disjuntos, todos ellos disjuntos. No podemos, por lo tanto, removerlos por medio de la remoción de $\frac{\delta}{2} n^2$ aristas. Esta contradicción implica el resutlado requerido.

□

Teorema 2.4.13 (Teorema de Roth)**.** *Para todo $\delta > 0$ existe un entero n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces cualquier subconjunto $A \subseteq [n]$ con al menos δn elementos contiene una progresión aritmética de largo* 3.

Demostración. Consideremos el conjunto $B \subseteq [n]^2$ definido por $B := \{x - y | x, y \in A\}$. Luego tenemos que $|B| \sim |A|n \geq \delta n^2 = \frac{\delta}{4}(2n)^2$ y entonces por el Lema 2.4.12 el conjunto B contiene un trío de la forma (x, y), $(x+d, y)$, $(x, y+d)$ con $d > 0$. Esto implica que $(x-y)-d$, $(x-y)$ y $(x-y)+d$ pertenecen al conjunto A lo cual concluye la prueba. □

2.4.3. Teorema de Erdős-Stone via el Lema de regularidad

Para continuar ilustrando el uso del Lema de Regularidad de Szemerédi, en esta sección exponemos otra demostración del Teorema de Erdős-Stone, Teorema 2.3.1, que lo utiliza. Recordemos que el Teorema de Erdős-Stone dice que para cada grafo H y cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 = (H, \epsilon)$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\mathrm{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \epsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

El siguiente lema que presentamos, asegura que condiciones locales de densidad y regularidad de una partición de un grafo G son suficientes para encontrar una copia en G de cualquier grafo con grado máximo acotado.

Lema 2.4.14 (Lema de incrustación en grafos localmente densos y regulares)**.** *Sea $\epsilon > 0$ y sean $t, \Delta \in \mathbb{N}$. Sea G un grafo. Si $(V_1, \ldots, V_r)$ son subconjuntos de $V(G)$ tales que $|V_i| \geq 2\epsilon^{-\Delta} t$ para todo $i \in [r]$ y para $i, j \in [r]$ distintos la densidad entre V_i y V_j es $d(V_i, V_j) \geq 2\epsilon$ y (V_i, V_j) es $\left(\frac{1}{2}\epsilon^{\Delta}\Delta^{-1}\right)$-regular, entonces G contiene una copia de cualquier t-grafo H que sea r-partito y tenga grado máximo Δ.*

Demostración. Sea $(U_1, \ldots, U_r)$ una partición de $V(H)$ tal que U_i es un conjunto independiente para cada $i \in [r]$. Encontraremos una asignación inyectiva $f : V(H) \to V(G)$ donde $V(H) \subset V(G)$ y tal que si $uv \in E(H)$ entonces $f(u)f(v) \in E(G)$. A esta función f le llamaremos *incrustración* de H en G. Sean $u_1, \ldots, u_t$ los vértices de H. Para todo $h \in [t]$ definimos

$$L_h := \{u_1, \ldots, u_h\} = V(H) \setminus \{u_{h+1}, \ldots, u_t\}.$$

Para cada $y \in U_j \setminus L_h$, sea T_y^h el conjunto de vértices en V_j que son adyacentes a todos los vecinos incrustados de y. Esto es, siendo $N_h(y) = N(y) \cap L_h$, entonces T_y^h es el conjunto de vértices en V_j adyacentes a todos los elementos de $f(N_h(y))$. Encontraremos por inducción una incrustación de L_h tal que para todo $y \in V(H) \setminus L_h$ se tenga que

$$|T_y^h| \geq \epsilon^{|N_h(y)|}|V_j|.$$

Para $h = 0$ no hay nada que probar. Asumiremos que L_h tiene una incrustación que verifica la hipótesis de inducción e intentaremos incrustar $u = u_{h+1} \in U_k$ en un apropiado $v \in T_u^h$. Sea Y el conjunto de vecinos de u que no han sido incrustados. Debemos encontrar un elemento $v \in T_u^h \setminus f(L_h)$ tal que para todo $y \in Y$ se tenga que $|N(v) \cap T_y^h| \geq \epsilon |T_y^h|$. Si tal vértice existe, tomando $f(u) = v$ y $T_y^{h+1} = N(v) \cap T_y^h$ completamos la demostración.

Sea B_y el conjunto de todos los vértices de T_u^h que son “malos"para $y \in Y$, es decir, tal que $|N(v) \cap T_y^h| < \epsilon |T_y^h|$. Por inducción, si $y \in U_l$ entonces $|T_y^h| \geq \epsilon^{\Delta}|V_l|$. Por lo tanto, tenemos que

$$|B_y| > \frac{1}{2}\epsilon^{\Delta}\Delta^{-1}|V_k|,$$

en otro caso, la densidad entre B_y y T_y^h debe ser menor que ϵ contradiciendo la regularidad en G. Como $|V_k| \leq 2\epsilon^{-\Delta} t$ tenemos que

$$\left| T_u^h \setminus \bigcup_{y \in Y} B_y \right| > \epsilon^{\Delta}|V_k| - \Delta \frac{1}{2}\epsilon^{\Delta}\Delta^{-1}|V_k| \geq t.$$

Como a lo más $t-1$ vértices pueden ser incrustados, una apropiada elección de $f(u)$ existe. □

La demostración siguiente corresponde a una prueba del Teorema de Erdős-Stone utilizando el Lema de Regularidad.

Demostración del Teorema 2.3.1 via el Lema de Regularidad. El Teorema de Erdős-Stone afirma que para cada grafo H y cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 = (H, \epsilon)$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\mathrm{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \epsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

En efecto, sea H un grafo en t vértices, número cromático r y grado máximo Δ. Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que G es un n-grafo con al menos $\left(1 - \frac{1}{r-1} + \epsilon\right)\frac{n^2}{2}$ aristas y n

suficientemente grande. Mostraremos que G contiene una copia de H. Sea

$$\epsilon' := \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{8}\right)^{\Delta}\Delta^{-1},$$

y sea $(X_1, \dots, X_M)$ una partición ϵ'-regular de $V(G)$, la cual existe por el Lema de Regularidad. Ahora, vamos a remover una arista $xy \in E(G)$ si se cumple que:

(a) xy está entre un par que no es ϵ'-regular.

(b) xy está entre un par con densidad menor que $\frac{\epsilon}{4}$.

(c) xy se encuentra dentro de un parte de la partición.

De la condición (a) se borran a lo más $\frac{\epsilon}{16}n^2$ aristas, pues si I es el conjunto de elementos (i,j) correspondientes a los pares no regulares (X_i, X_j), tenemos por la Proposición 2.4.4 que

$$\sum_{(i,j)\in I} |X_i||X_j| \le \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{8}\right)^{\Delta}\Delta^{-1}n^2 \le \frac{\epsilon}{16}n^2. \tag{2.11}$$

El número total de aristas removidas por la condición (b) es a lo más $\frac{\epsilon}{4}n^2$ pues para un par (X_i, X_j) poco denso se tiene que

$$e(X_i, X_j) = d(X_i, X_j)|X_i||X_j| < \frac{\epsilon}{4}\cdot\frac{n^2}{M^2}$$

y así

$$e(X_i, X_j)\binom{M}{2} \le \frac{\epsilon}{4}n^2 \tag{2.12}$$

y el número total removido por la condición (3) es a lo más $\frac{\epsilon}{32}n^2$.

Entonces, por (2.11), (2.12) y la condición (3) hemos removido a lo más $\frac{7\epsilon}{16}n^2$ aristas. Por lo tanto, el grafo obtenido G' despues de remover todas estas aristas tiene densidad al menos $1 - \frac{1}{r-1} + \frac{\epsilon}{8}$. Así, por el Teorema de Turán, este grafo debería contener una copia de K_r. Por la condición (3) podemos suponer que K_r tiene un vértice en cada conjunto $V_1, \dots, V_r$. Luego, $|V_j| \ge \frac{n}{M(\epsilon)}$, el grafo entre V_i y V_j tiene densidad al menos $\frac{\epsilon}{4}$ y es $\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{8}\right)^{\Delta}\Delta^{-1}$-regular. Por lo tanto, si

$$\frac{n}{M(\epsilon)} \ge 2\left(\frac{\epsilon}{8}\right)^{-\Delta} t,$$

una aplicación del Lema 2.4.14 con $\frac{\epsilon}{8}$ implica que G contiene una copia de H. □

2.5. Estabilidad de grafos extremales

En esta sección hacemos un resumen del artículo de Z. Füredi [14] que se titula: “Una demostración de la estabilidad de grafos extremales, estabilidad de Simonovits de la regularidad de Szemerédi". La idea fundamental de esta sección la describimos a continuación. Sabemos, por el Teorema de Turán que si un n-grafo G tiene al menos $t_r(n)$ aristas, entonces contiene una copia del grafo K_{r+1}, excepto si $G = T_r(n)$. Por otro lado, si un n-grafo tiene a lo más $t_r(n)$ aristas, ¿qué sucede?. Si el n-grafo tiene exactamente $t_r(n)$ aristas, entonces es el grafo de Turán. Ahora, si un n-grafo G tiene “casi" $t_r(n)$ aristas, veremos que G es “casi” el grafo de Turán.

Dados dos conjuntos cualquiera A y B, denotaremos por $A \triangle B$ a la *diferencia simétrica* entre A y B. Ahora, si G y H son grafos con el mismo conjunto de vértices, definimos $|G \triangle H|$ como el mínimo $k \in \mathbb{Z}$ tal que G puede ser obtenido a partir de H por adición o sustracción de k aristas. Este número corresponde al cardinal de la diferencia simétrica entre los conjuntos de aristas del grafo G y del grafo H.

En esta sección mostramos el siguiente resultado, conocido como *Estabilidad de Simonovits.*

Teorema 2.5.1 (Estabilidad de Simonovits)**.** *Para cada $\epsilon > 0$ y cada grafo H, existe $\delta > 0$ y n_0 tal que lo siguiente ocurre. Si G es un n-grafo H-libre con $n > n_0$ y $r = \chi(H) - 1$, entonces*

$$e(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\binom{n}{2} - \delta n^2 \implies |G \triangle T_r(n)| \leq \epsilon n^2.$$

Es decir, G difiere de un grafo de Turán por a lo más ϵn^2 aristas. En otras palabras, si un n-grafo G que es H-libre es cuantitativamente casi extremal, entonces la estructura de G es similar a un grafo de Turán $(\chi(H) - 1)$-partito.

La demostración original del teorema de estabilidad de Simonovits se debe a Erdős y Simonovits [11], Erdős [9, 10], y Simonovits [21]. Una prueba alternativa se puede encontrar en [17]. En [14], Füredi utiliza el Lema de regularidad de Szemerédi para entregar la demostración más simple conocida del Teorema 2.5.1. La principal herramienta utilizada por Füredi es una nueva (y sencilla) demostración del caso $H = K_{r+1}$, lo cual corresponde al Teorema 2.5.2 de la siguiente sección.

2.5.1. Un grafo K_{r+1}-libre casi extremal es casi r-partito

Recordemos que un grafo grafo completo r-partito, que es denotado por $K(V_1,\dots,V_r)$, es un grafo en que su conjunto de vértices forma una partición de r partes, $(V_1,\dots,V_r)$, y todas sus aristas tienen los extremos en dos partes distintas.

Teorema 2.5.2 (Füredi)**.** *Sea G un n-grafo K_{r+1}-libre y sea $t \geq 0$ tal que $e(G) = t_r(n) - t$. Entonces existe un subgrafo H_0 de G que es r-cromático y satisface*

$$e(H_0) \geq e(G) - t.$$

Demostración. El objetivo de esta demostración es encontrar un subgrafo r-partito H_0 de G. De esta manera, nuestra entrada es un grafo G que es K_{r+1}-libre y haremos que nuestra salida sea una partición $(V_1,\dots,V_r)$ de $V(G)$ tal que

$$\sum_i e(V_i) \leq t. \tag{2.13}$$

Es decir, el número de aritas internas en cada una de las partes V_i será muy reducido. En efecto, sea $x_1 \in V(G)$ un vértice de grado máximo en G y definimos

$$V_1^+ := N_G(x_1) \text{ y } V_1 := V(G) \setminus N_G(x_1).$$

Notemos que $x_1 \in V_1$ y que $\deg_G(x) \leq |V_1^+|$ para todo $x \in V_1$. Por lo tanto

$$2e(V_1) + e(V_1, V_1^+) = \sum_{x \in V_1} \deg_G(x) \leq |V_1||V_1^+|.$$

En general, podemos definir $V_0^+ := V(G)$ y para $i \geq 1$, x_i es el vértice de grado máximo en el grafo inducido $G[V_{i-1}^+]$. Sean los conjuntos $V_i := V_{i-1}^+ \setminus N_G(x_i)$ y $V_i^+ := V_{i-1}^+ \cap N_G(x_i)$. Notemos que $V_0^+ \supset V_1^+ \supset V_2^+ \supset \dots$ y que $x_i \in V_i$ para todo i. Además, $\deg_{V_{i-1}}(x) \leq |V_i^+|$ para todo $x \in V_i$ y también

$$2e(V_i) + e(V_i, V_i^+) = \sum_{x \in V_i} \deg_{V_{i-1}^+}(x) \leq |V_i||V_i^+|. \tag{2.14}$$

Este procedimiento termina cuando ya no quedan más vértices por elegir, es decir, cuando $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s = V(G)$. Notemos que $s \leq r$ pues $G[\{x_1,\dots,x_s\}]$ es el grafo completo K_s. Si en el lado izquierdo de la ecuación 2.14 desarrollamos la suma con los términos con subindice $1 \le i \le s$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}\left(2e(V_i)+e(V_i,V_i^+)\right) &= \sum_{i=1}^{s}e(V_i)+\left(\sum_{i=1}^{s}e(V_i)+\sum_{i=1}^{s}e(V_i,V_i^+)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{s}e(V_i)+e(G).\end{aligned}$$

Del mismo modo, desarrollando la suma con términos con subindices $1 \le i \le s$ del lado derecho de la ecuación 2.14 resulta ser exactamente $e(K(V_1,\ldots,V_s))$. Así, obtenemos que

$$t_r(n)-t+\sum_i e(V_i) = e(G)+\sum_i e(g|V_i) \le e(K(V,\ldots,V_r)) \le t_r(n)$$

lo que es equivalente a (2.13). $\square$

Diremos que un grafo r-partito con partes $(V_1,\ldots,V_r)$ es *completo* si cada par de vértices en diferentes partes son adyacentes. Lo denotaremos por $K(V_1,\ldots,V_r)$.

Corolario 2.5.3 (Estabilidad de $\mathrm{ex}(n,K_{r+1})$)**.** Sea G un grafo K_{r+1}-libre tal que $e(G) \ge t_r(n)-t$ para algún $t \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|G \triangle K| \le 3t,$$

donde K es el grafo completo multipartito $K(V_1,\ldots,V_r)$ con $V(K)=V(G)$.

Demostración. Sea G un grafo K_{r+1}-libre con $e(G) \ge t_r(n)-t$. Por el Teorema 2.5.2 existe un subgrafo r-cromático H_0 con $E(H_0) \subset E(G)$ tal que

$$e(H_0) \ge e(G)-t.$$

Con esto último se sigue que

$$e(H_0) \ge t_r(n)-2t \ge e(K(V_1,\ldots,V_r))-2t = e(K)-2t$$

esto es, podemos agregar a lo más $2t$ aristas para obtener un grafo completo r-partito. Por lo tanto $|G\triangle K| \le 3t$. $\square$

La desigualdad en el Corolario 2.5.3 es simple pues para un grafo G estimamos $|G\triangle K|$ donde K es un grafo r-partito que no es necesariamente balanceado. Si estamos interesados en $|G\triangle T_r(n)|$ entonces podemos usar la siguiente desigualdad obtenida por un cálculo sencillo, Si $e(K(V_1,\dots,V_r)) \geq t_r(n)-2t$, entonces los tamaños de las partes V_i son aproximadamente n/r. Más exactamente, obtenemos que

$$4t \geq \sum_i (|V_i| - (n/p))^2.$$

Por lo tanto,

$$|K\triangle T_r(n)| \leq 2n\sqrt{t/r} \tag{2.15}$$

2.5.2. Una aplicación del Lema de Remoción

En la sección 2.4.2 en el Lema 2.4.11 vimos un lema de remoción de triángulos. Para comenzar esta parte necesitaremos una simple consecuencia del Lema de Regularidad de Szemerédi que es una generalización del lema de remoción de triángulos. Un grafo H contiene una imagen homomorfa de F si existe una función $\varphi : V(F) \to V(H)$ tal que la imagen de cada F-arista es una H-arista. De esto se tiene que existe un homomorfismo $\varphi : V(F) \to V(K_r)$ si y solo si $r \geq \chi(F)$. Si no existe un homomorfismo $\varphi : V(F) \to V(H)$ entonces H es llamado hom(F)-libre. La demostración del siguiente lema se puede encontrar en [7].

Lema 2.5.4 (Lema de Remoción)**.** *Para todo $\alpha > 0$ y todo grafo F existe un número $n_1 = n_1(\alpha, F)$ tal que si $n > n_1$ y G es un n-grafo F-libre entonces este contiene un subgrafo H hom(F)-libre con*

$$e(H) > e(G) - \alpha n^2.$$

Esto dice que H no contiene ninguna imagen homomorfa de F como subgrafo. En particular, si $\chi(F) = r+1$, entonces H es K_{r+1}-libre. Estamos ahora en condiciones de presentar la prueba del Teorema de Estabilidad de Szemerédi.

Demostración del Teorema 2.5.1. Sea F un grafo y supongamos que $\chi(F) = r+1$. Supongamos que G es un n-grafo F-libre en donde $n > n_1(F,\alpha)$ y $e(G) > t_r(n) - \alpha n^2$. Probaremos que la diferencia simétrica entre los conjuntos $E(G)$ y $E(T_r(n))$ es pequeña. Primero afirmamos que

$$|G\triangle K| \leq 7\alpha n^2$$

en donde K es un grafo completo r-partito. En efecto, usando el Lema 2.5.4 obtenemos un subgrafo H de G que es K_{r+1}-libre tal que

$$e(H) > e(G) - \alpha n^2 > t_r(n) - 2\alpha n^2.$$

Aplicando el Teorema 2.5.2 a H obtenemos un subgrafo H_0 r-partito con $e(H_0) > t_r(n) - 4\alpha n^2$. Entonces por el Corolario 2.5.3 existe $K := K(V_1, \dots, V_r)$ con $|K \triangle H| < 6\alpha n^2$ y así

$$|E(K)\Delta E(G)| \leq 7\alpha n^2.$$

Como $e(K) \leq e(H_0) > t_r(n) - 4\alpha n^2$, podemos utilizar la desigualdad (2.15) con $t = 2\alpha n^2$ para obtener que $|E(K)\Delta E(T_r(n))| \leq n^2\sqrt{8\alpha/r}$. Finalmente

$$|E(G)\Delta E(T_r(n))| \leq (7\alpha + \sqrt{8\alpha/r})n^2 < (8\sqrt{\alpha})n^2.$$

□

Capítulo 3

El problema de Erdős y Rothschild

En este capítulo revisaremos algunos de los resultados importantes relacionados al problema de Erdős y Rothschild. A continuación describiremos formalmente este problema. Sea $G = (V, E)$ un grafo y k un entero positivo. Una k-*arista-coloración* es una función que asigna a cada arista de G un elemento de $[k]$, a los que llamaremos *colores*. Erdős y Rothschild propusieron estudiar el número máximo de arista-coloraciones que admite un grafo sin contener un subgrafo completo K_r con todas sus aristas del mismo color. Cuando bajo una arista-coloración de un grafo, existe un subgrafo K_r en donde todas sus aristas obtienen el mismo color, decimos que dicha coloración de G contiene un K_r *monocromático*. Denotaremos por $F(G, k, r)$ al número de todas las k-aristas coloraciones de G que no contienen K_r monocromáticos. Naturalmente, podemos definir el siguiente número,

$$F(n, k, r) := \text{máx}\{F(G, k, r) | G \text{ es un } n\text{-grafo}\}.$$

Erdős y Rothschild plantean estudiar en términos cuantitaivos y cualitativos este número. Es decir, estudiar las preguntas: ¿cuál es el valor exacto de $F(n, k, r)$? y ¿cuáles son los grafos que alcanzan este valor?. Una cota inferior trivial para $F(n, k, r)$ está dada por los grafos sin copias de K_r. Más precisamente, si G es un grafo K_r-libre, entonces $F(G, k, r) = k^{e(G)}$ pues a cada arista de G le podemos asignar el color que queramos. En particular, para el grafo de Turán $T_{r-1}(n)$ se tiene que $F(T_{r-1}(n), k, r) = k^{t_{r-1}(n)}$ y así obtenemos la cota inferior

$$F(n, k, r) \geq k^{t_{r-1}(n)}. \tag{3.1}$$

Erdős y Rothschild conjeturaron que, para $k = 2$ y $r = 3$, esta cota inferior es también superior y que el único grafo que alcanza este valor es $T_2(n)$, el n-grafo bipartito, completo y balanceado. El primer resultado en relación al problema de Erdős y Rothschild, es el de Yuster [25], que demuestra que la conjetura recién mencionada es correcta. Más precisamente, Yuster establece que $F(n,2,3) = 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$ para todo $n \geq 6$. Este resultado lo estudiaremos en la Sección 3.1. Luego, para 2 colores y $r > 3$, Yuster demuestra que la cota inferior (3.1) es una cota superior asintóticamente correcta. Para demostrar esto, Yuster utiliza el Lema de Regularidad de Szemerédi. Revisaremos este resultado en la Sección 3.2. Además, en el mismo artículo, Yuster conjeturó que la igualdad $F(G,2,r) = 2^{t_{r-1}(n)}$ se tiene para todo $r > 3$. Esta conjetura, es luego confirmada por Alon et al. [1], quienes adicionalmente resolvieron (completamente) el problema de Erdős y Rothschild para 2 y 3 colores. Es decir, probaron que para $k \in \{2,3\}$ y $r \geq 3$, se tiene $F(G,k,r) = k^{t_{r-1}(n)}$ y que esta cota es alcanzada exclusivamente por $T_{r-1}(n)$. Este resultado utiliza, de manera no trivial, el Lema de Regularidad de Szemerédi (Teorema 2.4.5), el Teorema de Estabilidad de Simonovits (Teorema 2.5.1) y un Lema de incrustación (Lema 3.2.2), entre otros. Revisaremos este resultado en la Sección 3.3.

3.1. 2-coloraciones sin triángulos monocromáticos

En esta sección estudiaremos el número $F(n,2,3)$ que, como mencionamos anteriormente, es el número máximo de 2-arista-coloraciones que admite un n-grafo libre de triángulos monocromáticos. Erdős y Rothschild conjeturaron que $F(n,2,3) = 2^{\lfloor n^2/2 \rfloor}$ para todo n suficientemente grande. Yuster [25] probó esta conjetura y en esta sección presentamos su demostración. Los resultados de Yuster en cuanto a $F(n,2,3)$ los resumimos a continuación.

Proposición 3.1.1. *$F(1,2,3) = 1$, $F(2,2,3) = 2$, $F(3,2,3) = 6$, $F(4,2,3) = 18$, $F(5,2,3) = 82$ y $F(6,2,3) = 512$.*

Teorema 3.1.2. *Para todo $n \geq 6$ se tiene $F(n,2,3) = 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$.*

Describiremos la prueba del Teorema 3.1.2 e invitamos al lector a ver la demostración de la Proposición 3.1.1 en [25].

En esta sección a una 2-arista-coloración sin triángulos monocromáticos la llamaremos simplemente *coloración* y asumiremos que coloreamos con los colores rojo y azul.

Una definición escencial en la demostración del Teorema 3.1.2 es la de *extensión* de una coloración. Sea G un grafo, G' un subgrafo de G y f una coloración de G'. Una coloración $\hat{f}$ de G es una *extensión* de f a G si la imagen de $\hat{f}$ en G' es igual a f. Dada una coloración f de G', denotaremos por $E_G(f)$ al conjunto de todas las extensiones de f a G.

Antes de comenzar con los tecninismos propios de la demostración del Teorema 3.1.2 vamos a explicar a grandes razgos de que se trata esta prueba. Esta demostración es por inducción en n y el caso base, $F(6,2,3) = 512$, es un análisis de casos que puede leerse en el mismo paper de Yuster [25]. Para el paso inductivo se considera un vértice x de grado mínimo y una coloración f de $G' = G \setminus \{x\}$. Observamos que es suficiente probar que $|E_G(f)| \le 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ pues

$$F(G,2,3) \le |E_G(f)| \cdot F(G',2,3) = |E_G(f)| \cdot 2^{\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor}.$$

Luego, el Lema 3.1.3 entrega una buena cota superior para $|E_G(f)|$ que, en efecto, cubre la mayoria de los casos que aparecen en el análisis de casos del paso inductivo y es la principal herramienta utilizada. Los dejamos con la formalización de este lema y su demostración.

Lema 3.1.3. *Sea $G = (V,E)$ un grafo y sea $x \in V(G)$. Para cada $i \in [k]$ denotaremos por P_i a los caminos disjuntos en $G[N(x)]$. Para cada $j \in [l]$ denotaremos por T_j a los triángulos disjuntos en $G[N(x)]$ que son disjuntos dos a dos con los caminos definidos anteriormente. Sea $z_i := |P_i|$. Entonces para toda coloración f de $G' := G \setminus \{x\}$ se tiene que*

$$|E_G(f)| \le 2^{d(x)-3l-\sum_{i=1}^{k} z_i} \cdot 3^l \cdot \prod_{i=1}^{k} a_{z_i+2}$$

donde a_t es el t-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. En particular

$$F(G,2,3) \le F(G',2,3) \cdot 2^{d(x)-3l-\sum_{i=1}^{k} z_i} \cdot 3^l \cdot \prod_{i=1}^{k} a_{z_i+2}.$$

Demostración. Sea $H := G[N(x) \cup \{x\}]$ y sea $H' := G[N(x)]$. Notemos que H' es subgrafo de G'. Sea f una coloración de $G' = G \setminus \{x\}$ y sea $f' = f|_{H'}$. Entonces toda extensión de f a G determina una única extensión de f' a H, y si $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in E_G(f)$ son distintas entonces las extensiones de f' a H' que ellas determinan son también distintas. Dicho esto, es suficiente mostrar que

$$|E_H(f')| \leq 2^{d(x)-3l-\sum_{i=1}^{k} z_i} \cdot 3^l \cdot \prod_{i=1}^{k} a_{z_i+2}. \tag{3.2}$$

En efecto, sea f' una coloración arbitraria de H'. Sea $P_i = (v_1, \ldots, v_{z_i})$ un camino y sea H_t con $t \in \{0, 1, \ldots, z_i\}$ el grafo obtenido de H borrando todas las aristas adyacentes a x exceptuando $(x, v_1), \ldots, (x, v_t)$. Probaremos por inducción que $|E_{H_t}(f')| \leq a_{t+2}$. Asumimos que esto es verdadero para $t-2$ y $t-1$ y luego probaremos que es verdadero para t. Sea r_s el número de extensiones de $E_{H_s}(f')$ en que la arista (x, v_s) es coloreada roja (análogamente se define b_s para el caso que la arista (x, v_s) es coloreada azul). Por hipótesis, $r_{t-1} + b_{t-1} \leq a_{t-1}$. Claramente $r_{t-1} \leq |E_{H_{t-1}}(f')| \leq a_t$ y similarmente $b_{t-1} \leq a_t$. Supongamos, sin perdida de generalidad que (v_{t-1}, v_t) es azul. Entonces $b_t \leq r_{t-1}$ y $r_t \leq r_{t-1} + b_{t-1}$. Obtenemos

$$\begin{aligned} r_t + b_t &= 2r_{t-1} + b_{t-1} \\ &\leq a_{t-1} + r_{t-1} \\ &\leq a_{t-1} + a_t = a_{t+2}. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que $|E_{H_{z_i}}(f')| \leq a_{z_i+2}$. Se obtiene el mismo resultado si suponemos que (v_{t-1}, v_t) es roja.

Ahora consideremos los triángulos T_j. Dado que cada triángulo tiene dos aristas rojas y una azul o bien dos aristas azules y una roja, entonces existen exactamente 3 maneras de colorear las 3 aristas que conectan el triángulo con el vértice x para no obtener un triángulo monocromático.

Como los caminos P_i son vértice-disjuntos entre ellos, los triángulos T_j son vértice disjuntos entre ellos y los caminos P_i con los triángulos T_j son todos vértice-disjuntos entre ellos, dado que los vértices sobrantes son disjuntos a todos ellos y las aristas que conectan a x con ellos se pueden colorear de a lo más 2 maneras. Así se concluye (3.2). □

El siguiente lema establece una cota superior para $F(G, 2, 3)$ cuando el grafo G tiene una estructura particular. Se dice que un n-grafo G se llama *estrella* cuando existe un vértice c con $\deg(x) = n-1$ y el resto de los vértices son de grado 1.

Lema 3.1.4. *Sea G un n-grafo con $n \geq 7$. Supongamos que existe $c \in V(G)$ con* $\deg(c) =$

$n-1$ y que $G\setminus\{c\}$ es un grafo completo bipartito con partes de tamaño k y $l=n-1-k$ con $l\geq 3$. Entonces

$$F(G,2,3)\leq (2^l-2)\cdot(6\cdot 2^{l-3})^k+2\cdot(2^l+1)^k.$$

Demostración. Sean $x_1,\dots,x_k$ los vértices de una de las partes de $G\setminus\{c\}$ y sea H el conjunto de vecinos comunes. Notemos que H es una estrella con raiz c y l hojas, luego existen 2^l formas de colorear esta estrella H de las cuales 2^l-2 son no-monocromáticas (las otras dos son monocromáticas, una roja y otra azul). Ahora, sea $H_i:=G[H\cup\{x_i\}]$. Probaremos que:

(1) Para cualquier coloración no-monocromática f de H se tiene $|E_{H_i}(f)|\leq 6\cdot 2^{l-3}$.

(2) Para cualquier coloración monocromática b de H se tiene $|E_{H_i}(b)|=2^l+1$.

Esto porque

$$\begin{aligned} F(G,2,3) &\leq (2^l-2)\cdot|E_{H_i}(f)|^k+2\cdot|E_{H_i}(b)|^k\\ &\leq (2^l-2)\cdot(6\cdot 2^{l-3})^k+2\cdot(2^l+1)^k. \end{aligned}$$

En efecto, sea f una coloración no-mocromática de H, supongamos sin perdida de generalidad que existe una subestrella $H'\subseteq H$ de tres hojas con dos aristas azules y una roja. Luego, existen exactamente 6 maneras de colorear las cuatro aristas que unen x_i con la subestrella H_i sin hacer un triángulo monocromático en $H'\cup\{x_i\}$. Las restantes $l-3$ aristas de x_i pueden ser coloreadas en a lo más 2^{l-3} maneras. Por lo tanto $|E_{H_i}(f)|\leq 6\cdot 2^{l-3}$.

Ahora, sea b una coloración monocromática de H y supongamos que esta es azul, luego existe una única extensión de b que colorea la arista (x_i,c) azul, pues todas las otras aristas que inciden en x_i deben ser coloreadas rojas. Por otro lado, 2^l extensiones que colorean (x_i,c) roja son posibles. Por tanto $|E_{H_i}(b)|=2^l+1$ y se concluye (2) y así, el resultado del lema. □

El siguiente lema dice que todo grafo G contiene un subgrafo G' que es K_5-libre con $F(G,2,3)\leq F(G\setminus\{e\},2,3)$.

Lema 3.1.5. *Si e es una arista de un subgrafo K_5 de G, entonces $F(G,2,3)\leq F(G\setminus\{e\},2,3)$.*

Demostración. Cualquier coloración de K_5 contiene exactamente cinco aristas y azules y cinco rojas. Por lo tanto, si f' es cualquier coloración de $G\setminus\{e\}$, entonces podemos asumir que es extendible a G, el color de e es unicamente determinado en la extensión. Por lo tanto $|E_G(f')| \leq 1$. $\square$

Nos serán de gran utilidad los siguientes dos resultados clásicos.

Proposición 3.1.6. *Sea G un grafo y sea $\delta := \delta(G)$. Entonces G contiene un camino con $\delta + 1$ vértices.*

Demostración. Sea $v_1 v_2 \dots v_k$ el camino más largo en G. Entonces todos los vecinos de v_k deben pertenecer al camino (si existiera un vecino fuera de G, entonces habría un camino más largo). Por lo tanto $k - 1 \geq \deg_G(v_k) \geq \delta$ y así obtenemos $k \geq \delta + 1$. $\square$

Dado un grafo G. Diremos que un camino es *hamiltoniano* si este contiene a todos los vértices de G. De la misma manera, un ciclo es *hamiltoniano* si este contiene a todos los vértices de G.

Proposición 3.1.7. *Sea G un n-grafo y sea $\delta := \delta(G) \geq 3$. Si $n < 2\delta + 2$ entonces G contiene un camino hamiltoniano.*

Demostración. La desigualdad $n < 2\delta + 2$ equivale a $\delta \geq \frac{n}{2}$. Por esto, afirmamos que G es conexo pues en otro caso el grado de cualquier vértice de la componente conexa más pequeña C de G debería tener menos de $|C| \leq n/2$ vecinos. Sea $P := v_0 \dots v_k$ el camino más largo de G. Luego por la maximalidad de P todos los vecinos de v_0 y todos los vecinos de v_k pertenecen a P. Por lo tanto al menos $n/2$ de estos vértices $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ son adyacentes a v_k, y al menos $n/2$ de estos mismos $k < n$ vértices v_i son tales que $v_0 v_{i+1}$ es arista de G. Por el principio del palomar, existe un vértice v_i que tiene ambas propiedades, o sea, tenemos que $v_o v_{i+1} \in E(G)$ y $v_i v_k \in E(G)$ para algún $i < k$. Afirmamos que $C := v_0 v_{i+1} P v_k v_i P v_0$ es un ciclo hamiltoniano. En efecto, dado que G es conexo, si C no fuera hamiltoniano entonces debería tener una vecindad en $G \setminus C$ y esta podría ser combinada con un camino interno en C más largo que P. Por lo tanto P es hamiltoniano. $\square$

Lema 3.1.8. *Sea G un n-grafo y sea $\delta := \delta(G)$. Entonces se cumple que:*

1. *Si $n \geq 2\delta + 2$ entonces existen dos caminos disjuntos (por vértices) P_1 y P_2 tal que $|P_1| + |P_2| = 2\delta + 2$. Más aún, si $\delta \geq 3$ entonces $|P_1| \geq 4$ y $|P_2| \geq 4$.*

2. *Si $n < 2\delta$ y G no contiene copias de K_4, entonces $V(G)$ puede ser particionado en t triángulos y un camino con $n - 3t$ vértices donde $t \in \{1, \dots, 2\delta - n\}$.*

Demostración. Demostramos a continuación los dos items del lema.

1. Sea P el camino más largo en G. Si P tiene $2\delta+2$ vértices, entonces podemos hacer $P := P_1P_2$ en donde P_1 y P_2 son caminos con $\delta+1$ vértices cada uno y queda probado (1). Si P tiene a lo más 2δ vértices es sabido que existe un ciclo C con el mismo conjunto de vértices, luego por maximalidad de P, el subgrafo inducido por este conjunto de vértices es una componente conexa de G. Como este conjunto no es todo el grafo, se sigue de (1) que existe un camino de largo $\delta+1$ en G fuera de esta componente. Si $\delta \geq 3$ ambos caminos mencionados tienen largo al menos 4.

   Supongamos que P contiene exactamente $2\delta+1$ vértices. De esta forma, $P = (a_1, \ldots, a_{2\delta+1})$. Note que a_1 y $a_{2\delta+1}$ son adyacentes solamente a vértices dentro de P. Si el conjuto de vértices de P forman una componente conexa, entonces como antes obtenemos una camino de largo $\delta+1$ fuera de esta componente. En otro caso, existe $b \notin P$ tal que (b, a_j) es arista para $2 \leq j \leq 2\delta$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $j \leq \delta+1$. Definimos $P_1 := (a_1, \ldots, a_j, b)$ y $P_2 := (a_{j+1}, \ldots, a_{2\delta+1})$. Si $\delta \geq 3$ y $j > 2$ entonces ambos caminos tienen largo al menos 4. Si $j = 2$, notemos que b está conectado a al menos dos vértices más. Por lo tanto existe un vértice $c \neq a_{2\delta}$ tal que (b, c) es una arista. Si $c \in P$ deberiamos escoger c en vez de a_2. Si $c \notin P$ podemos redefinir $P_1 := (a_1, a_2, b, c)$ y obtenemos el resultado.

2. Consideremos una partición de $V(G)$ en t triángulos y un camino con $n-3t$ vértices donde t es maximal. Esta partición existe por el ítem 3. Sea H el subgrafo inducido en G por los $N = n-3t$ vértices que no están en los triángulos. Dado que un vértice del camino tiene a los sumo 2 vecinos en cada uno de los t triángulos, entonces tenemos que $\delta(H) \geq \delta - 2t$, esto por el motivo de que G no contiene copias de K_4. Por otro lado, por la maximalidad de t tenemos que $\delta(H) \leq \frac{N}{2}$. Para ver esto, notemos que si $\delta(H) > \frac{N}{2}$ entonces H contendría un triángulo, por lo que tendríamos $t+1$ triángulos en G, y para el grafo H' inducido por los $N-3$ vértices se tendría que

$$\delta(H') \geq \delta(H) - 2 > \frac{N-2}{2} - 1$$

   y por tanto H' contendría un camino hamiltoniano por el ítem 3. Esto contradice la maximalidad de t. Por lo tanto obtenemos que

$$2\delta - 2t \leq \delta(H) \leq \frac{N}{2} = \frac{n-3t}{2}$$

y de esta manera $t \geq 2\delta - n$ lo que concluye la prueba.

□

Lema 3.1.9. *Sea G un grafo y $x \in V(G)$. Sea $H := G[N(x)]$. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas para cualquier coloración f de $G \setminus \{x\}$.*

1. *Si H es un grafo en 7 vértices y $\delta(H) \geq 3$ entonces $|E_G(f)| \leq 32$.*
2. *Si H es un grafo en 6 vértices y $\delta(H) \geq 3$ entonces $|E_G(f)| \leq 16$.*
3. *Si H es un grafo en 10 vértices y $\delta(H) \geq 5$ entonces $|E_G(f)| \leq 128$.*
4. *Si H es un grafo en 5 vértices y $\delta(H) \geq 3$ entonces $|E_G(f)| \leq 8$.*

Demostración. Demostramos a continuación los cuatro items del lema.

1. Notemos que H verifica las hipótesis de la Proposición 3.1.7, luego H contiene un camino hamiltoniano. Así, teniendo un camino de largo 7 y considerando el Lema 3.1.3 entonces $|E_G(f)| \leq a_{7+2} = a_9 = 34$. Para disminuir este número tomemos una arista que no pertenece al camino, consideremos el subgrafo de H consisten en el camino hamiltoniano y esta arista. Luego existen a lo más 31 maneras de extender una coloración dada de este subgrafo a G.

2. En el caso de que $H = K_{3,3}$, tenemos entonces que $|E_G(f)| \leq 15$. De otra forma, H se puede particionar en un triangulo y un camino de 3 vértices. Luego por Lema 3.1.3 tenemos que $|E_G(f)| \leq 3 \cdot a_5 = 15$.

3. Si $H = K_{5,5}$ se puede chequear directamente que $|E_G(f)| \leq 128$ (Es suficiente considerar un ciclo Hamiltoniano con una cuerda entre los vértices antipodales, y verificar que cualquier coloración de este no puede extenderse en más de 123 maneras). En otro caso, existe una partición de H en un triángulo y un camino de 7 vértices. Por Lema 3.1.3, $|E_G(f)| \leq 3 \cdot a_9 = 102$.

4. En este caso H debe contener dos triángulos con un vértice en común. Escribimos estos triangulos por $\{a,b,c\}$ y $\{a,d,e\}$. Sea f una coloración de H, existen tres maneras de colorear las aristas (x,a), (x,b) y (x,c) sin crear un ciclo monocromático en $\{a,b,c,x\}$. Del mismo modo, existen 3 maneras de colorear las aristas (x,a), (x,d) y (x,e). La única manera en que los 9 pares de extensiones sean posibles, es cuando el color de (x,a) queda completamente determinado. En este caso, tomamos cualquier camino de largo 4 en que sus vértice son (b,c,d,e) (tal camino existe). Existen a lo más $a_6 = 8$ maneras de colorear las aristas (x,b), (x,c), (x,d) y (x,e). Como (x,a) es completamente determinado, entonces $|E_G(f)| \leq 8$.

□

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 3.1.2.

Demostración del Teorema 3.1.2. Sea G un n-grafo. Probaremos por inducción en n que

$$F(G,2,3) \leq 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor} \ \ \forall\ n \geq 6.$$

El caso base sigue de la Proposición 3.1.1. En nuestro paso inductivo asumiremos válido el teorema para $n-1$ y probaremos para n. En efecto, por el Lema 3.1.5 es suficiente probar para grafos K_5-libre, pues si G es un grafo que contiene a K_5 podriamos considerar una arista $e \in K_5 \subset G$ y tendriamos que

$$F(G,2,3) \leq F(G \setminus \{e\},2,3) \leq 2^{\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor} \leq 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}.$$

Sea $x \in V(G)$ de grado mínimo y sea $G' := G \setminus \{x\}$. Nuestro objetivo es probar que para toda coloración f de G' se tiene $|E_G(f)| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (en algunos casos mostraremos directamente que $F(G,2,3) \leq 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$). Esto es suficiente pues usando la hipótesis inductiva se obtiene que

$$F(G,2,3) \leq F(G',2,3) 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^{\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}.$$

Fijemos una coloración f de G'. Si $\deg(x) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces claramente $|E_G(f)| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Asumiremos entonces que $\deg(x) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + t$ para algún entero $t \geq 1$. Sea $H := G[N(x)]$, luego se cumple que

$$\delta(H) \geq 2t-1 \qquad \text{si } n \text{ es impar} \tag{3.3}$$

$$\delta(H) \geq 2t \qquad \text{si } n \text{ es par} \tag{3.4}$$

Sea P el camino más largo en H y sea $z := |P|$, entonces por el Lema 3.1.8 tenemos que $z \geq 2t$. Es conveniente distinguir en diferentes casos, algunos pueden ser reducidos a otros sin embargo todos los casos posibles quedan cubiertasen esta demostración.

Caso 1. $t = 1$ y $z \geq 4$

En este caso $\deg(x) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Por Lema 3.1.3 se sigue que

$$|E_G(f)| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1 - z} a_{z+2} = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot 2^{1-z} a_{z+2}$$

y como $2^{1-z} a_{z+2} \leq 1$ para todo $z \geq 4$ concluimos que $|E_G(f)| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Caso 2. $t = 1$, $z = 2$ y $n \geq 8$

Aquí H es un emparejamiento perfecto y como $n \geq 8$, entonces $|H| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \geq 5$ lo que implica que este emparejamiento contiene al menos 3 aristas. Por lo tanto, por el Lema 3.1.3

$$|E_G(f)| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1 - 6} a_4^3 < 2^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Caso 3. $t = 1$, $z = 2$ y $n = 7$

Igual que en el caso anterior, H es un emparejamineto perfecto. Sean (a, b) y (c, d) las aristas de este emparejamiento. Luego, los vértices a, b, c y d son también de grado 4 en G y así sus vecindades son

$$\begin{array}{ll} N(a) = \{b, x, u, v\} & N(b) = \{a, x, u, v\} \\ N(c) = \{d, x, u, v\} & N(d) = \{c, x, u, v\} \end{array}$$

$N(a)$ no es emparejamiento perfecto, pues (b, u), (b, v) y (b, x) son aristas. Similarmente $N(b)$, $N(c)$ y $N(d)$ no son emparejamientos perfectos. Si (u, v) es una arista, entonces el problema se reduce al caso 1 ($t = 1$ y $z = 4$) haciendo que a ocupe el rol de x. En otro caso, (u, v) no es una arista, y el grafo G está completamente determinado. Es un grafo completo bipartito con dos aristas adicionales, una parte es $\{x, u, v\}$ y la otra es $\{a, b, c, d\}$ y la arista adicionales son (a, b) y (c, d). Por lo tanto, podemos calcular manualmente que

$$|E_G(f)| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1 - 5} a_5 a_2 < 2^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Caso 4. $t = 1$, $z = 3$ y H no es una estrella.

Como $n \geq 7$ existe una arista e en H en que sus extremos no estan en P. Por Lema 3.1.3 tenemos que

$$|E_G(f)| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1 - 5} a_5 a_5 < 2^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Caso 5. $t = 1$, $z = 3$ y H es una estrella

Notemos que n debe ser impar, pues por (3.4) para n par el grado mínimo en H es al menos 2. Podemos asumir que para todo vértice de grado mínimo en G, su vecindad es una estrella (en otro caso, x podría ser elegido tal que alguno de los casos anteriores se aplicaría). Esto implica que G, de ser un único grafo en n vértices teniendo un vértice a con $\deg(a) = n-1$ y $G \setminus \{a\}$, es un grafo completo bipartito en que cada parte tiene $(n-1)/2$ vértices. Tenemos entonces por el Lema 3.1.4 que

$$F(G,2,3) \leq (2^{(n-1)/2} - 2)(6 \cdot 2^{(n-7)/2}) + 2(2^{(n-1)/2} + 1)^{(n-1)/2} \leq 2^{(n^2-1)/4} = 2^{\lfloor n^2/2 \rfloor}.$$

Caso 6. $t > 1$, $z \geq 4t$

Requeriremos la desigualdad

$$a_{j+2} \leq 2^{0{,}75j} \text{ para } j \not\in \{1,2,3\}. \tag{3.5}$$

Por el Lema 3.1.3 tenemos que $|E_G(f)| \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor + t - z} a_{z-2}$. Por tanto, debemos probar que $2^{t-z} a_{z+2} \leq 1$. En efecto, por (3.5)

$$2^{t-z} a_{z+2} \leq 2^{t-z} 2^{0{,}75z} \leq 2^{-0{,}75jz} 2^{0{,}75z} = 1$$

oteniendo el resultado deseado.

Caso 7. $t > 1$, $z < 4t$ y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq 3t$

En este caso las condiciones del ítem 2 del Lema 3.1.8 se satisfacen. El grado minimal de H es al menos 3 y $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + t \geq 2(2t-1) + 2$. Por lo tanto, H contiene dos caminos P_1 y P_2 con $z_1 = |P_1|$ y $z_2 = |P_2|$ tal que $z_1 + z_2 = 2(2t-1) + 2 = 4t$ y que además, $z_1 \geq 4$ y $z_2 \geq 4$. De esta forma, por el Lema 3.1.3 tenemos que

$$\begin{aligned} |E_G(f)| &\leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor + t - 4t} a_{z_1+2} a_{z_2+2} \\ &\leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor - 3t} 2^{0{,}75 \cdot 4t} \\ &\leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}. \end{aligned}$$

Caso 8. $t > 1$, $z < 4t$, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > 3t$ y n par

Notemos que las condiciones de ítem 2 del Lema 3.1.8 se satisfacen para el grafo H. En efecto, es claro que $H \not\supset K_4$ y también

$$|H| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + t < 3t + t = 2(2t) \leq 2 \cdot \delta(H)$$

De esta manera, podemos particionar $V(H)$ en $4t - \left(\frac{n}{2}+1\right) = 3t - \frac{n}{2}$ triángulos y un camino que contiene $2n-8t$ vértices. Luego

$$|E_G(f)| \leq 3^{3t-\frac{n}{2}} \cdot a_{2n-8t+2}$$

y como $2n-8t \not\in \{1,2,3\}$, por (3.5) tenemos que

$$3^{3t-\frac{n}{2}} \cdot 2^{0,75(2n-8t)} \leq 2^{\frac{n}{2}}.$$

Aplicando logaritmo en base 2 y reordenando los términos a esta ultima desigualdad, vemos que es equivalente a la inecuación

$$t\left(3\log 3 - 6\right) \leq n\left(\frac{\log 3}{2} - 1\right)$$

que es equivalente a $t \leq \frac{n}{6}$ pues $\frac{\log 3}{2} - 1 < 0$ lo que es consecuente con nuestra hipótesis.

Caso 9. $t > 1$, $z < 4t$ y $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \in \{3t-1, 3t-2\}$, n es impar.

Como $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = \dfrac{n-1}{2}$ vemos que si $\dfrac{n-1}{2} = 3t-1$ entonces $t = \dfrac{n-1}{6}$. De la misma forma, si $\dfrac{n-1}{2} = 3t-2$ entonces $t = \dfrac{n-1}{6}$. Notemos que H contiene un camino Hamiltoniano pues

$$|H| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + t < 3t + t = 2(2t-1) + 2 \leq 2 \cdot \delta(H) + 2$$

verificando el ítem 3 del Lema 3.1.8. Por lo tanto, tenemos que por el Lema 3.1.8

$$|E_G(f)| \leq a_{\frac{n-1}{2}+t+2}.$$

Así, nos queda probar que

$$a_{\frac{n-1}{2}+t+2} \leq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Si $t = \frac{n+1}{6}$ la última desigualdad es equivalente a probar que

$$a_{\frac{2n-1}{3}+2} \leq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Esto último es verdadero para $n \geq 17$. Notemos que en este caso n es congruente con -1 módulo 6 por lo que el único posible valor para el cual la última desigualdad no valdría es $n = 11$. Si $n = 11$ entonces $|H| = 7$ y $\delta(H) \geq 3$ y luego por el Lema 3.1.9 $|E_G(f)| \leq 32$. Si $t = \frac{n+3}{6}$ entonces debemos probar que

$$a_{\frac{2n}{3}+2} \leq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Esto último es verdadero para $n \geq 21$. Notemos que en este caso n es congruente con 3 módulo 6 por lo que los únicos posibles valores en que esta inecuación no valdría serían $n = 15$ y $n = 9$. Si $n = 15$ entonces $t = 3$, $|H| = 10$ y $\delta(H) \geq 5$ y de acuerdo al Lema 3.1.9, $|E_G(f)| \leq 128$. Si $n = 9$ entonces $t = 2$, $|H| = 6$ y $\delta(H) \geq 3$ y de acuerdo al Lema 3.1.9, $|E_G(f)| \leq 16$.

Caso 10. $t > 1$, $z < 4t$ y $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq 3t - 3$, n es impar.

Notemos que H verifica las hipótesis del ítem 2 del Lema 3.1.8. En efecto, $H \not\supset K_4$ y además tenemos que $|H| < 2 \cdot \delta(H)$, pues

$$|H| = \frac{n-1}{2} + t \leq \frac{3t-3}{2} + t = \frac{5t-3}{2} < \frac{6t-3}{2} = \frac{3}{2}(2t-1)$$

y por 3.3

$$\frac{3}{2}(2t-1) < 2(2t-1) \leq 2 \cdot \delta(H).$$

Por lo anterior, tenemos entonces una partición de $V(H)$ en $2(2t-1) - \left(\frac{n-1}{2} + t\right) = 3t - \frac{n}{2} - \frac{3}{2}$ triángulos y un camino con $2n + 4 - 8t$ vértices. Así, por el Lema 3.1.3

$$|E_G(f)| \leq 3^{3t - \frac{n}{2} - \frac{3}{2}} a_{2n-8t+6}.$$

Por esto, nos queda probar que

$$3^{\frac{n-3}{2}+3t} a_{2n-8t+6} \leq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Primero, asumiremos que $2n-8t+4 \geq 4$ y que $3t-3 > \frac{n-1}{2}$. Por (3.5) es suficiente probar que

$$3^{3t-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}2^{0,75(2n-8t+4)} \leq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Aplicando logaritmo en base 2 y reagrupando los términos, vemos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$t \geq \frac{n}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12 - 6\log 3}$$

y acorde acorde a nuestras hipótesis tenemos que $t \geq \frac{n}{6} + \frac{7}{6} \geq \frac{n}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12-6\log 3}$. Ahora, supongamos que $2n - 8t + 4 \geq 4$ y que $3t - 3 = \frac{n-1}{2}$. Esto implica que $t = \frac{n}{6} + \frac{5}{6}$ y que $n \geq 13$. Si $n = 13$ entonces $t = 3$ y tenemos un único triángulo y $\frac{2n-8}{3}$ vértices. Supongamos que $2n - 8t + 4 < 4$. Como n es impar entonces $2n - 8t + 4 = 2$. En este caso, el camino es simplemente una arista y existen $\frac{n-3}{4}$ triángulos. Debemos probar que

$$3^{\frac{n+1}{4}} \leq 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Esto es verdadero para $n \geq 11$ pues n es congruente con 3 módulo 4 y el único valor posible en que no valdría es $n = 7$. No obstante, si $n = 7$ entonces $|H| = 5$ y $\delta(H) \geq 3$, por lo que por el Lema 3.1.9 tenemos que $|E_G(f)| \leq 8$.

□

3.2. Resultado aproximado para 2-coloraciones sin cliques monocromáticos

En esta sección estudiaremos el comportamiento asintótico de $F(n,2,r)$ y para esto utilizaremos el Lema de Regularidad de Szemerédi. Formalmente, Yuster [25] probó lo siguiente.

Teorema 3.2.1. *Para todo $\epsilon > 0$ y $r \in \mathbb{N}$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que*

$$F(n,2,r) \leq 2^{t_{r-1}(n)+\epsilon n^2} \qquad \forall\ n \geq n_0.$$

En esta parte vamos a revisar la demostración de este teorema. Una noción que nos será muy útil en la demostración del Teorema 3.2.1 que está asociada a las particiones regulares es la de *grafo de pares densos* que se define como sigue: dado un grafo G, una partición ϵ-regular $(C_1, \ldots, C_r)$ de $V(G)$ y una constante fija δ, entonces el grafo de pares densos $D(\delta)$ es aquel en que su conjunto de vértices está definido por $\{1, \ldots, r\}$ y su conjunto de aristas es

$$\{(i,j)|d(C_i,C_j) > \delta \text{ y } (C_i,C_j)\ \epsilon\text{-regular}\}.$$

En el caso de una partición con parte excepcional nuestro conjunto de vértices para el grafo de pares densos seguirá siendo $\{1,\ldots,r\}$.

Para la demostración del Teorema 3.2.1 se utiliza el siguiente lema de incrustación. Por completitud presentamos su demostración.

Lema 3.2.2. *Sea $(C_1,\ldots,C_r)$ una partición con $|C_i| = m$ para todo $i \in [r]$. Supongamos que los pares (C_i,C_j) son ϵ-regulares y que $d(C_i,C_j) \geq \delta$ para todo $1 \leq i < j \leq r$. Si $(r-1)\epsilon < (\delta/2)^{r-1}m$ entonces existen vértices $v_1,\ldots,v_r$ con $v_i \in C_i$ tal que $(v_i,v_j) \in E(C_i,C_j)$ para $1 \leq i < j \leq r$.*

Demostración. Si $r = 1$ el resultado es trivial. Supongamos que $r \geq 2$. Afirmamos que para todo $p \in \{1,\ldots,r\}$ existen vértices $v_i \in C_i$ para todo $i < p$ y subconjuntos $B_i \subseteq C_i$, $|B_i| \geq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} m$ con la siguiente propiedad: cada v_i es adyacente a todos los vértices en

$$\{v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{p-1}\} \bigcup_{j=p}^{k} B_j.$$

El resultado de este lema se sigue de la afirmación para $p = r$. Probaremos la afirmación por inducción en p. Para $p = 1$ tomamos $B_i = C_i$ para todo i. Ahora, asumimos válido para p y probaremos para $p+1$. Consideremos B_p. Por hipótesis, $|B_j| \geq \epsilon m$ para cada $j \in \{p,\ldots,r\}$. Luego, sea D_j el conjunto de vértices en B_p que tiene menos de $(\delta-\epsilon)|B_j$ vecinos en B_j. Afirmamos que $|D_j| < \epsilon m$ para cada j, pues de los contrario, considerando $X = D_j$ e $Y = B_j$ se contradice la ϵ-regularidad del par (C_p,C_j), pues $d(D_j,B_j) < \delta-\epsilon$, mientras que $d(C_p,C_j) \geq \delta$. Luego, la cardinalidad del conjunto $B_p \setminus \bigcup_{j=p+1}^{r} D_j$ es al menos

$$|B_p| - (r-p)\epsilon m \geq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{p-1} m - (r-1)\epsilon m \geq \left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^{r-1} - (r-1)\epsilon\right) m > 0.$$

Podemos escoger arbitrariamente un vértice $v_p \in B_p \setminus \bigcup_{j=p+1}^{r} D_j$ y reemplazar cada B_j para $j \in \{p,\ldots,r\}$ por el conjunto de vecinos de v_p en B_j. Como $\delta-\epsilon > \delta/2$ entonces la cardinalidad de cada B_j no decrece por más de un factor de $\delta/2$, y por lo tanto la afirmación vale para $p+1$. $\square$

Antes de presentar la demostración del Teorema 3.2.1, haremos una observación acerca de la aproximación de Stirling. Para r y $n-r$, ambos mayores que 1, la aproximación de Stirling lleva a la siguiente aproximación asintótica

$$\log_2 \binom{n}{r} \sim nH(r/n) = n\log_2(n/r) + (n-r)\log_2(n/(n-r))$$

donde $H(\epsilon) = -\epsilon\log_2(\epsilon) - (1-\epsilon)\log_2(1-\epsilon)$ es la función de *entropía* de ϵ. Más precisamente, para enteros $n \geq r \geq 1$ con $\epsilon = r/n \leq 1/2$, podemos estimar la suma de los primeros $r+1$ coeficientes binarios como sigue:

$$\frac{1}{\sqrt{8n\epsilon(1-\epsilon)}} \cdot 2^{H(\epsilon)\cdot n} \leq \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i} \leq 2^{H(\epsilon)\cdot n}.$$

Demostración del Teorema 3.2.1. Sea $\epsilon > 0$. Probaremos que existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para cualquier n-grafo con $n \geq n_0$ se tiene que

$$F(G,2,r) \leq 2^{t_{r-1}(n)+\epsilon n^2}.$$

Sea γ un parámetro y pongamos $\delta := 2(\gamma(k-1))^{1/(k-1)}$. Hacemos $\gamma = \gamma(\epsilon)$ de tal manera que

$$2{,}5\gamma < \frac{\epsilon}{4} \tag{3.6}$$

y que

$$H(\delta) < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.7}$$

donde H es la función de entropía. Sea $t := \lceil 1/\gamma \rceil$ y sean $T = T(\gamma)$ y $N = N(\gamma)$ como en el Teorema 2.4.6. Finalmente sea $n_0 > N$ satisfaciendo que

$$T^2 + \log_2(n_0+1)! \leq \frac{\epsilon}{8} n_0^2. \tag{3.8}$$

Notemos que lo último es válido para n_0 y valores mayores. Ahora fijemos un n-grafo $G = (V,E)$ con $n \geq n_0$. Denotaremos por $\mathscr{F}$ al conjunto de todas las coloraciones rojo-azul de G tal que el número de aristas azules es mayor o igual que el número de aristas rojas. Es fácil notar que

$$2|\mathscr{F}| \geq F(G,2,r). \tag{3.9}$$

Toda coloración $f \in \mathscr{F}$ determina un único subgrafo $G_f = (V, E_f)$ generado por las aristas azules. Aplicando el Lema de Regularidad obtenemos una equipartición γ-regular* $(C_0, C_1, \ldots C_p)$ del subgrafo G_f con $p \leq T$. Ahora, sea D_f el grafo de los pares densos asociado a esta última partición (considerando densidad mayor que δ), podemos hacer la siguiente afirmación.
Afirmación: D_f contiene a lo más $t_{r-1}(p)$ aristas.

Demostración. Por el Teorema de Turán es suficiente probar que D_f no contiene un subgrafo K_r. Asumiendo por el contrario que D_f contiene un subgrafo K_r y suponiendo sin perdida de generalidad que los vértices de K_r son $\{1,\ldots,r\}$. Las condiciones del Lema 3.2.2 se satisfacen para $(C_1,\ldots,C_r)$. Esto pues $d(C_i,C_j) > \delta = 2((r-1)\gamma)^{1/(r-1)}$ y por lo tanto $(r-1)\gamma < (\delta/2)^{r-1}$. Entonces dicho lema implica la existencia de un K_r en G_f lo que es una contradicción. □

Considerando una coloración $f \in \mathscr{F}$ y una partición regular de G_f podemos asociarle una *configuración* que es la colección ordenada $(C_0, C_1, \ldots, C_p, D_f)$. Denominaremos a p como el *índice* de la configuración. Sea $\mathscr{C}$ el conjunto de todas estas configuraciones. Afirmamos que

$$|\mathscr{C}| \leq 2^{(\epsilon/8)n^2} \tag{3.10}$$

En efecto, notemos que existen a lo más $\gamma(n+1)$ posibles tamaños para la parte excepcional, y cada tamaño de la parte excepcional determina el tamaño de las otras partes. Por lo tanto existen a lo más $\gamma(n+1)\cdot n! = \gamma(n+1)!$ particiones γ-regulares con $p+1$ partes. Dada tal partición, existen a lo más $2^{\binom{p}{2}}$ posibles grafos en p vértices y así el número total de configuraciones con índice p es $\gamma(n+1)!2^{\binom{p}{2}}$. Usando el hecho que $p \leq T$ y la desigualdad 3.8 obtenemos

$$\begin{aligned}
|\mathscr{C}| &\leq T\gamma(n+1)!2^{\binom{T}{2}} \\
&\leq 2^{\log_2 T + \log_2(\gamma(n+1!))}2^{T^2/2} \\
&\leq 2^{T^2+\log(n!)} \\
&\leq 2^{(\epsilon/8)n^2}.
\end{aligned}$$

Ahora, daremos una cota superior en el número de coloraciones $f \in \mathscr{F}$ que estan asociadas a la misma configuración. Si fijamos una configuración $C = (C_0, C_1, \ldots, C_p, D)$, definimos $s(C)$ como el número de coloraciones de $\mathscr{F}$ en que su configuración es C. Afirmamos que

$$s(C) \leq 2^{\left(\frac{3}{4}\epsilon+\frac{r-2}{2r-2}\right)n^2} \tag{3.11}$$

Para ver esto, debemos considerar todos los posibles arreglos de aristas de G_f que pueden llevar a la configuración C. Esto se hace de la siguiente manera:

- Por cada vértice de la parte excepcional C_o existen a lo más n posibles vecinos. Como $|C_0| \leq \gamma n$ entonces existen a lo más γn^2 vertices adyacentes a C_0. Luego el número total de arreglos de estas aristas es a lo más

$$2^{\gamma n^2} \tag{3.12}$$

- Existen a lo más $\binom{C_1}{2} p \leq (n^2/2p) \leq (n^2/2)\gamma$ aristas en que sus extremos pertenecen a la misma parte. Luego, el total de arreglos de estas aristas es a lo más

$$2^{(\gamma/2)n^2} \tag{3.13}$$

- Existen a lo más γp^2 pares que no son γ-regulares. Por otra parte hay significativamente menos de $2^{\binom{p}{2}}$ posibles arreglos de estos pares. Ahora, dados estos pares no γ-regulares, existen a lo más $|C_1|^2\gamma p^2 \leq n^2\gamma$ aristas con sus extremos en pares no regulares. Como $2^{\binom{p}{2}}2^{\gamma n^2} < 2^{p^2/2}2^{\gamma n^2} < 2^{p^2+\gamma n^2}$ entonces el total de arreglos de aristas entre pares no γ-regulares es a lo más

$$2^{p^2+\gamma n^2} \tag{3.14}$$

- En cada par regular (C_i, C_j) con $(i, j) \not\in E(D)$ tenemos que $e(C_i, C_j) \leq |C_1|^2\delta$. Existen a lo más $2^{\binom{p}{2}}$ posibles arreglos de estos pares (notemos que dado C, sabemos que son las aristas que no pertenecen a D, pero algunas de estas corresponden a pares no γ-regulares mientras que otras correponden a pares γ-regulares con menos de δ aristas). Para cada uno de los pares mencionados, existen a lo más

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \delta |C_1|^2 \rfloor} \binom{|C_1|^2}{j} \leq 2^{H(\delta)|C_1|^2} \leq 2^{(\epsilon/2)n^2/p^2}$$

posibles arreglos de las aristas que viven en un par. Se sigue que para todos los pares en un conjunto dado de pares existen a lo más $2^{\binom{p}{2}(\epsilon/2)n^2/p^2} \leq 2^{(\epsilon/4)n^2}$ posibles arreglos de estas aristas. Por lo tanto, tomando todos los posibles arreglos en consideración, el número total de arreglos de estas aristas es a lo más

$$2^{\binom{p}{2}+(\epsilon/4)n^2} \tag{3.15}$$

- En cada par (C_i, C_j) con $(i,j) \in E(D)$ se cumple que $e(C_i, C_j) \leq |C_i|^2 \leq n^2/p^2$. Por lo tanto, sabemos cuales pares son estos, pues D viene dado, y además por la afirmación anterior existen a lo más $t_{r-1}(p) \sim ((r-2)/(2r-2))p^2$ aristas en D. Así, el número total de arreglos de estas aristas es a lo más

$$2^{(r-2)/(2r-2)n^2} \tag{3.16}$$

Multiplicando (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) y (3.16) tenemos que

$$\begin{aligned} s(C) &\leq 2^{\left(\gamma+\frac{\gamma}{2}+\frac{\epsilon}{2}+\gamma+\frac{r-2}{2r-2}\right)n^2+p^2+\binom{p}{2}} \\ &\leq 2^{\left(2{,}5\gamma+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{r-2}{2r-2}\right)n^2} \\ &\leq 2^{\left(\frac{3}{4}\epsilon+\frac{r-2}{2r-2}\right)n^2} \end{aligned}$$

Finalmente, considerando que $|\mathscr{F}| = \sum_{C\in\mathscr{C}} s(C)$ y por las desigualdades (3.9), (3.10) y (3.11) obtenemos que

$$\begin{aligned} F(G,2,r) &\leq 2|\mathscr{F}| \\ &= 2\sum_{c\in\mathscr{C}} s(C) \\ &\leq 2\cdot|\mathscr{C}|2^{\left(\frac{3}{4}\epsilon+\frac{r-2}{2r-2}\right)n^2} \\ &\leq 2\cdot 2^{\left(\frac{\epsilon}{8}+\frac{3}{4}\epsilon+\frac{r-2}{2r-2}\right)n^2} \\ &\leq 2^{\left(\frac{r-2}{2r-2}+\epsilon\right)n^2} \end{aligned}$$

□

3.3. Resultado exacto para 3-coloraciones sin cliques monocromáticos

En esta sección revisamos uno de los resultados del artículo “El número de arista-coloración sin cliques monocromáticos” de Alon et al. [1]. Este resultado resuelve completamente el problema de Erdős y Rothschild para 3 colores. Formalmente el resultado es el siguiente.

Teorema 3.3.1. *Sea $r \geq 2$ un entero. Entonces existe un entero $n_0 = n_0(r)$ tal que todo n-grafo G con $n > n_0$ tiene a lo más $3^{t_r(n)}$ 3-coloraciones sin copias monocromáticas de K_{r+1}. más aún, $F(G,3,r+1) = 3^{t_r(n)}$ si y solo si $G = T_r(n)$.*

La demostración de este teorema es también aplicable a $F(G,2,r+1)$, con lo cual tendriamos un fortalecimiento del resultado del Teorema 3.2.1 de Yuster [25] y la comprobación de la conjetura realizada por Yuster en el mismo artículo, resolviendo completamente el problema de Erdős y Rothschild para 2 colores.

La demostración del Teorema 3.3.1 se divide en dos partes. En la primera parte se demuestra que cualquier potencial contraejemplo al Teorema 3.3.1, es decir un grafo con al menos $3^{t_r(n)}$ 3-coloraciones sin copias monocromáticas de K_{r+1}, es un grafo casi r-partito. Formalmente tenemos el siguiente lema y su demostración se encuentra en la Sección 3.3.1.

Lema 3.3.2. *Sea r un entero. Entonces para todo $\delta > 0$ existe n_0 tal que si G es grafo con $n > n_0$ vértices con al menos $3^{t_{r-1}(n)}$ 3-arista-coloraciones K_{r+1}-libres entonces existe una partición $(V_1, \ldots, V_r)$ de $V(G)$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{r} e(V_i) < \delta n^2.$$

En la segunda parte de la demostración , Sección 3.3.2, se prueba que el grafo de Turán admite más coloraciones que cualquier potencial contraejemplo al Teorema 3.3.1.

Cabe recordar que en [1], Alon et al. observan que el fenómeno que se tiene para 2 y 3 colores, es decir que $F(n,2,r) = 2^{t_r(n)}$ y $F(n,3,r) = 3^{t_r(n)}$, no persiste para más colores.

3.3.1. Estructura de cualquier potencial contraejemplo

Para la demostración del Lema 3.3.2 usaremos dos herramientas de la combinatoria extremal, la primera el Teorema de Estabilidad de Simonovits, Teorema 2.5.1 y la segunda, el Lema de Regularidad de Szemerédi (Teorema 2.4.5). Usaremos la siguiente versión simplificada del Teorema de Estabilidad de Simonovits (caso $H = K_{r+1}$).

Teorema 3.3.3. *Para todo $\alpha > 0$ existe $\beta > 0$ tal que para cualquier m-grafo K_{r+1}-libre* *con al menos* $\left(1-\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{m^2}{2}-\beta m^2$ *aristas tiene una partición de vértices* $(V_1,\dots,V_r)$ *con* $\sum_i e(V_i) < \alpha m^2$.

Para demostrar Lema 3.3.2 utilizamos la siguiente versión coloreada del Lema de Regularidad de Szemerédi (Teorema 2.4.5). La demostración de esta versión se puede obtener modificando directammente la demostración del resultado original (presentado en la Sección 2.4, para más detalles ver [16]).

Lema 3.3.4. *Para todo* $\epsilon > 0$ *y* $r \in \mathbb{Z}$, *existe* $M(\epsilon, r)$ *tal que si las aristas de un* n*-grafo* G *con* $n > M$ *son* k*-coloreadas (es decir, podemos particionar el conjunto de aristas como* $E(G) = E_1 \cup \ldots \cup E_k$*), entonces existe una partición* $V_1 \cup \ldots \cup V_m = V(G)$ *con* $1/\epsilon \leq m \leq M$, *que es* ϵ*-regular simultaneamente con respecto a todos los grafos* $G_i := (V, E_i)$, *para todo* $i \in [k]$.

Por último, para la demostración del Lema 3.3.2 necesitamos un lema de incrustación. El siguiente resultado se obtiene a partir del Lema 3.2.2.

Lema 3.3.5. *Para todo* $\eta > 0$ *y entero positivo* r *existe* $\epsilon = \epsilon(\eta, r)$, $n_0 = n_0(\eta, r)$ *y* $M(\epsilon)$ *con la siguiente propiedad: Supongamos que G es un* n*-grafo con* $n > n_0$ *y que tiene una partición* ϵ*-regular* $(V_1,\dots,V_m)$ *de* $V(G)$ *donde* $m \leq M(\epsilon)$. *Sea* $H(\eta)$ *el grafo de los pares densos de la partición. Si* $H(\eta) \supseteq K_{r+1}$, *entonces* $G \supseteq K_{r+1}$.

Demostración del Lema 3.3.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo en n vértices. Supongamos que G tiene al menos $3^{t_r(n)}$ 3-arista-coloraciones K_{r+1}-libres. Fijemos algún $\eta > 0$ (que posteriormente escogeremos apropiadamente pequeño) y sea ϵ tal que satisface las condiciones del Lema 3.3.5. Podemos también escorger $\epsilon < \eta$.

Consideremos alguna 3-coloración fija de G sin K_{r+1} monocromático. Por el Lema 3.3.4 obtenemos una partición $V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$ que es ϵ-regular con respecto a cada uno de los tres colores. Sean D_1, D_2 y D_3 los correspondientes grafos de pares densos en los vértices $\{1,\dots,m\}$ (por simplicidad suprimiremos la dependencia de η en el resto de la demostración). Por el Lema 3.3.5 cada grafo de pares densos es K_{r+1}-libre y por Teorema de Turán tienen a lo más $t_r(m)$ aristas.

Primero acotaremos el número de 3-arista-coloraciones de G que deberían dar a lugar a una partición particular y a estos grafos de pares densos. Notemos primero que existen a lo más $4\epsilon\binom{n}{2}$ aristas en que sus extremos pertenecen a una misma parte ó que unen pares que no son regulares con respecto al mismo color, esto pues, sumando las aristas mencionadas obtenemos que

$$\begin{aligned}\binom{|V_i|}{2}m+\epsilon\binom{m}{2}|V_i|^2 &\leq m\cdot\frac{(n/m)^2}{2}+\epsilon\frac{m^2}{2}\cdot(n/m)^2\\ &= \frac{1}{m}\cdot\frac{n^2}{2}+\epsilon\frac{n^2}{2}\\ &\leq 2\epsilon\binom{n}{2}+2\epsilon\binom{n}{2}=4\epsilon\binom{n}{2}\end{aligned}$$

También notemos que existen a lo más $3\eta\binom{n}{2}$ aristas que conectan un par de partes en que la densidad de aristas es menor que η con respecto a un color. Por lo anterior, esto no da más que $7\eta\binom{n}{2}<4\eta n^2$ aristas. Por tanto, existen a lo más $\binom{n^2/2}{4\eta n^2}$ maneras de escoger este conjunto de aristas y ellas pueden ser coloreadas en a lo más $3^{4\eta n^2}$ diferentes maneras.

Ahora, para cualquier par $i,j\in[m]$ con $i\neq j$ consideremos las restantes aristas entre V_i y V_j. Si ij es una arista en exactamente s de los grafos de pares densos, donde $s\in\{0,1,2,3\}$, entonces toda arista restante entre V_i y V_j tiene solo s posibles colores. Claramente $e(V_i,V_j)\leq(n/m)^2$, por lo que existen a lo más $s^{(n/m)^2}$ maneras de colorear estas aristas. Ahora, sea e_s el número de pares (i,j), $i<j$ que son aristas en exactamente s de los grafos de pares densos y sea $p_s:=(2e_s)/(m^2)$. Por lo anterior, el número de potenciales 3-coloraciones de G que pueden dar lugar a esta partición de vértices y estos grafos de pares densos es a lo más

$$\begin{aligned}\binom{n^2/2}{4\eta n^2}\cdot 3^{4\eta n^2}(1^{e_1}2^{e_2}\cdot 3^{e_3})^{n^2/m^2} &\leq 2^{H(8\eta)n^2/2}3^{4\eta n^2}(2^{p_2}3^{p_3})^{n^2/2}\\ &< 3^{(H(8\eta)+8\eta)n^2/2}(2^{p_2}3^{p_3})^{n^2/2}.\end{aligned}$$

En lo anterior hacemos uso de la desigualdad $\binom{a}{xa}\leq 2^{H(x)a}$ con $0<x<1$ donde H es la función de entropía. Ahora, dado que $e(D_i)\leq t_{r-1}(m)$ tenemos que

$$p_1+2p_2+3p_3=\frac{e_1+2e_2+3e_3}{m^2/2}=\frac{e(D_1)+e(D_2)+e(D_3)}{m^2/2}\leq 3\cdot\frac{r-1}{r}$$

Por otro lado, como $2<3^{7/11}$ tenemos que $2^{p_2}3^{p_3}\leq 3^{7p_2/11+p_3}\leq 3^{\frac{21}{22}\left(\frac{r-1}{r}\right)+\frac{1}{22}p_3}$. Afirmamos que debe existir una selección de nuestra coloración inicial para la cual

$$p_3\geq\frac{r-1}{r}-200\eta-22H(8\eta).$$

En efecto, suponiendo que $p_3 < \frac{r-1}{r} - 200\eta - 22H(8\eta)$ para toda 3-arista-coloración K_{r+1}-libre de G, entonces $2^{p_2}3^{p_3} \leq 3^{\frac{r-1}{r}-9\eta-H(8\eta)}$. Notemos que M es una constante y que existen a lo más M^n particiones de $V(G)$ con a lo más M partes. Para toda partición existe a lo más $2^{3M^2/2}$ elecciones para los grafos de pares densos D_1, D_2 y D_3. Esto implica que para n suficientemente grande el número total de 3-arista coloraciones K_{r+1}-libres es a lo más

$$\begin{aligned} M^n \cdot 2^{3M^2/2} \cdot 3^{(H(8\eta)+8\eta)n^2/2} \cdot (2^{p_2}3^{p_3})^{n^2/2} &< M^n \cdot 2^{3M^2/2} \cdot 3^{(H(8\eta)+8\eta)n^2/2} \cdot (3^{\frac{r-1}{r}-9\eta-H(8\eta)})^{n^2/2} \\ &< 3^{t_r(n)} \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Supongamos entonces que $p_3 \geq \frac{r-1}{r} - 200\eta - 22H(8\eta)$ para alguna elección inicial de coloración. Fijamos entonces una partición $(V_1, \ldots, V_m)$ de $V(G)$ junto con los grafos de pares densos correspondientes H_i. Tenemos que

$$e_1 + e_2 = (p_1 + p_2)\frac{m^2}{2} \leq (p_1 + 2p_2)\frac{m^2}{2} \leq \left(3\frac{k-1}{k} - 3p_3\right)\frac{m^2}{2} \leq 300\eta m^2 + 33H(8\eta)m^2.$$

Si D es el grafo de aristas al que pertenecen a todos los grafos de pares densos, por definición H es K_{r+1}-libre con e_3 aristas en los vértices $\{1, \ldots, m\}$, es decir

$$e_3 = \frac{p_3 m^2}{2} \geq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{m^2}{2} - (100\eta + 11H(8\eta))m^2$$

aristas. Supongamos que $\delta > 0$ esta dado. Como $H(8\eta)$ tiende a cero junto con η, por el Teorema 3.3.3 podemos tener una elección de η suficientemente pequeña por lo que existe una partición $(U_1, \ldots, U_r)$ de $\{1, \ldots, m\}$ que satisface

$$\sum_i e_D(U_i) < (\delta - 304\eta - 33H(8\eta))m^2.$$

Sea $W_i := \bigcup_{j \in U_i} V_j$ con $i \in [r]$ entonces

$$\sum_{i=1}^{r} e_G(W_i) \leq 4\eta n^2 + (n/m)^2\left(\sum_{i=1}^{r} e_H(U_i) + e_1 + e_2\right) < \delta n^2$$

y así hemos encontrado la partición que satisface el lema. □

3.3.2. Parte exacta

Antes de presentar la prueba del Teorema 3.3.1, necesitamos el siguiente lema de incrustación.

Lema 3.3.6. *Sea G un grafo y sean $V_1, \dots, V_r$ subconjuntos de $V(G)$ con la siguiente propiedad: Todos los subconjuntos $X_i \subset V_i$ y $X_j \subset V_j$ que verifican respectivamente que $|X_i| \geq 10^{-r}|V_i|$ y $|X_j| \geq 10^{-r}|V_j|$ tienen al menos $\frac{1}{10}|X_i||X_j|$ aristas entre ellos. Entonces G contiene un grafo K_r con vértices $x_1, \dots, x_r$ con $x_i \in V_i$ para todo $i \in [r]$.*

Demostración. Procederemos por inducción en r. Para $r = 1$ y $r = 2$ el lema es obvio. Supondremos el lema para $r-1$ y probaremos para r. Sean $W_1, \dots, W_r$ los subconjuntos de $V(G)$ que satisfacen las condiciones de lema.

Para cada $i \in [r-1]$ denotamos por W_r^i al subconjunto de W_r que tiene menos de $|W_i|/r$ vecinos en W_i. Por definición, tenemos que $e(W_r^i, W_i) < \frac{1}{10}|W_r^i||W_i|$ y por lo tanto $|W_r^i| < 10^{-r}|W_r|$. De esta manera deducimos que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{r-1} W_r^i\right| < (r-1)10^{-r}|W_r| < |W_r|/2,$$

en particular existe un vértice $v \in W_r$ que no pertenece a $\bigcup_{i=1}^{r-1} W_r^i$. Para todo $i \in [r-1]$ definimos W_i' como el conjunto de vecinos de v en W_i. Por definición, el tamaño de W_i' no excede $|W_i|/10$. Notemos que para todo par de suconjuntos $X_i \subseteq W_i'$ y $X_j \subseteq W_j'$ con tamaños

$$|X_i| \geq 10^{-(r-1)}|W_i'| \geq 10^{-r}|W_i| \text{ y } |X_j| \geq 10^{-(r-1)}|W_j'| \geq 10^{-r}|W_j|,$$

G contiene al menos $\frac{1}{10}|X_i||X_j|$ aristas entre X_i y X_j. Por hipótesis de inducción existe un subgrafo K_{r-1} con un vértice en cada W_i', para todo $i \in [r-1]$. Este subgrafo, junto con el vértice v, forma el grafo completo K_r con un vértice en cada W_i. $\square$

Hacemos las siguientes observaciones. Denotaremos por $\delta_k(n)$ al grado mínimo del grafo de Turán $T_r(n)$.

Observación 3.3.7. Notemos que $\delta_r(n) = n - \lceil n/r \rceil$ y que $t_r(n) = t_r(n-1) + \delta_r(n)$.

Observación 3.3.8. Son cotas para el número de Turán

$$\frac{r-1}{r} \cdot \frac{n^2}{2} - r < t_r(n) \leq \frac{r-1}{r} \cdot \frac{n^2}{2}.$$

Demostración del Teorema 3.3.1. Sea n_0 un entero suficientemente grande de manera que podamos garantizar el Lema 3.3.2 con $\delta = 10^{-8r}$. Supongamos que G es un n-grafo con $n > n_0^2$ y que tiene al menos $3^{t_r(n)+m}$ 3-arista-coloraciones K_{r+1}-libres, con $m \geq 0$.

Nuestro argumento es por inducción con una mejora en cada paso. más precisamente, nuestro objetivo es demostrar que si G no es el correspondiente grafo de Turán, entonces este grafo contiene un vértice x tal que $G \setminus \{x\}$ tiene al menos $3^{t_r(n-1)+m+1}$ 3-arista-coloraciones K_{r+1}-libres. Despues de una cierta cantidad de iteraciones, obtendremos un n_0-grafo con al menos

$$3^{t_r(n-(n-n_0))+m+(n-n_0)} = 3^{t_r(n_0)+m+n-n_0} > 3^{n_0^2}$$

3-arista-coloraciones K_{r+1}-libres. Pero cualquier n_0-grafo tiene a lo más $n_0^2/2$ aristas y admite a lo más $3^{n_0^2/2}$ 3-arista-coloraciones. Esta contradicción prueba el teorema para $n > n_0^2$. Nuestra prueba la estructuraremos por casos.

Caso 1. Existe un vértice $x \in V(G)$ con $\deg_G(x) < \delta_r(n)$.

Las aristas incidentes con x tienen a lo más $3^{\delta_r(n)-1}$ coloraciones. Luego el número mínimo de 3-arista-coloraciones K_{r+1}-libres, del grafo $G \setminus \{x\}x$, es al menos

$$\begin{aligned} 3^{t_r(n)+m} \cdot 3^{-(\delta_r(n)-1)} &= 3^{t_r(n)-\delta_r(n)+m+1} \\ &= 3^{t_r(n-1)+m+1} \end{aligned}$$

y así terminariamos la prueba.

Caso 2. Cuando se tiene que $\deg_G(v) \geq \delta_r(n)$ para todo $v \in V(G)$.

Consideremos un partición $(V_1, \ldots, V_r)$ de $V(G)$ dada por el Lema 3.3.2 que minimiza $\sum_i e(V_i)$. Para nuestra elección de n_0, tenemos que $\sum_j e(V_j) < 10^{-8r} n^2$. Notemos que si $|V_i| > \left(\frac{1}{r} + 10^{-6r}\right) n$ para algún $i \in [r]$, entonces para todo $v \in V_i$ se tiene que

$$\begin{aligned} \deg_{V_i}(v) &\geq \delta_r(n) - \left(n - \left(\frac{1}{r} + 10^{-6r}\right) n\right) \\ &= \delta_r(n) - \left((r-1)\frac{n}{r} - 10^{-6r} n\right) \\ &\geq 10^{-6r} n - 1. \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que

$$\sum_j e(V_j) \geq e(V_i) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V_i} \deg_{V_i}(v) > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + 10^{-6r}\right) n \cdot (10^{-6r} n - 1) > 10^{-8r} n^2$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto debemos tener que

$$|V_i| - n/r \leq 10^{-6r} n \tag{3.17}$$

para todo $i \in [r]$. Haciendo uso de esto último podemos notar que

$$|V_i| = n - \sum_{j \neq i} |V_j| \geq n - (r-1)\left(n/r + 10^{-6r} n\right) = n/r - (r-1)10^{-6r} n \tag{3.18}$$

para todo $i \in [r]$. Luego de (3.17) y (3.18) podemos concluir que

$$||V_i| - n/r| < 10^{-5r} n.$$

Ahora sea $\mathscr{C}$ el conjunto de todas las 3-coloraciones de G que son K_{r+1}-libres. Para nosotros nuestros tres colores serán rojo, verde y azul. Haremos distinción entre dos subcasos; cuando existe un vértice con muchos vécinos en la parte de la partición a la cual pertenece (superior a un número determinado de vértices) y cuando todos los vértices tienen pocos vecinos en su propia parte de la partición. Sin perdida de generalidad estudiaremos los vértices en V_1.

Subcaso (1): Existe $x \in V_1$ tal que $\deg_{V_1}(x) > n/(300r)$.

Por nuestra elección de partición garantizamos que en este caso $|N(x) \cap V_i| > n/(300r)$ para todo $2 \leq i \leq r$, pues si movieramos x a cualquier otra parte reduciriamos $\sum_i e(V_i)$ contradiciendo así la minimalidad de este número. Sea $\mathscr{C}_1$ el subconjunto de $\mathscr{C}$ en que para todo $i \in [r]$ existe un subconjunto $W_i \subset N(x) \cap V_i$ con $|W_i| \geq n/(10^3 r)$ tal que todas las aristas de x a $\bigcup_i W_i$ tienen el mismo color. Sea $\mathscr{C}_2 := \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1$.

Consideremos una coloración perteneciente a $\mathscr{C}_1$ y supongamos sin pérdida de generalidad que el color de las aristas es rojo. Luego, no existe un K_{r+1} rojo, lo que por el Lema 3.3.6 existe un par (i, j) y subconjuntos respectivos $X_i \subset W_i$ y $X_j \subset W_j$ con $|X_i| \geq 10^{-r}|W_i|$ y $|X_j| \geq 10^{-r}|W_j|$ con a lo más $\frac{1}{10}|X_i||X_j|$ aristas rojas entre X_i y X_j.

Ahora acotaremos el número de coloraciones de $\mathscr{C}_1$ haciendo las siguientes observaciones:

- Dado que $e(X_i, X_j) \leq |X_i||X_j|$ entonces hay a lo más $2^{|X_i||X_j|}$ maneras de colorear las aristas restantes entre X_i y X_j usando los colores azul y verde.
- Existen a lo más
$$\binom{r}{2} n^2 \binom{|V_i|}{|X_i|} \binom{|V_j|}{|X_j|} < 2^{2n}$$
maneras de escoger X_i y X_j.
- Existen a lo más
$$\binom{|X_i||X_j|}{\frac{1}{10}|X_i||X_j|} \leq 2^{H(1/10)|X_i||X_j|}$$
maneras de escoger las aristas rojas entre X_i y X_j.
- Además, por la estructura de G, existen a lo más $t_r(n) + 10^{-8k} n^2 - |X_i||X_j|$ aristas restantes.

Así, de las observaciones anteriores tenemos que

$$\begin{aligned}
|\mathscr{C}_1| &\leq 3^{t_r(n)+10^{-8r}n^2-|X_i||X_j|} \cdot 2^{2n} \cdot 2^{H(0,1)|X_i||X_j|} \cdot 2^{|X_i||X_j|} \\
&\leq 3^{t_r(n)+10^{-8r}n^2-|X_i||X_j|} \cdot 2^{2n} \cdot 2^{(3/2)|X_i||X_j|} \\
&= 3^{t_r(n)+10^{-8r}n^2} \cdot 2^{2n} \cdot \left(\sqrt{8}/3\right)^{|X_i||X_j|} \\
&\leq 3^{t_r(n)+10^{-8r}n^2} \cdot 2^{2n} \cdot (\sqrt{8}/3)^{10^{-2r-6}r^{-2}n^2} \\
&< 3^{t_r(n)+10^{-8r}n^2} \cdot 2^{2n} \cdot (3^{-0,01})^{10^{-2r-6}r^{-2}n^2} \\
&= 3^{t_r(n)} \cdot 2^{2n} \cdot 3^{-(10^{-2r-8}r^{-2}-10^{-8r})n^2} n^2 \leq 3^{t_r(n)-1}.
\end{aligned}$$

En las desigualdades anteriores hicimos uso de los siguientes hechos: $H(1/10) < 1/2$; $|X_i|, |X_j| \geq n/(r10^{r+3})$; $\sqrt{8}/3 < 3^{-0,01}$ y $10^{-2r-8}r^{-2} - 10^{-8r} > 0$ para todo $r \geq 2$.

Por esto, $|\mathscr{C}_2|$ contiene al menos $|\mathscr{C}| - |\mathscr{C}_1| \geq 3^{t_r(n)+m-1}$ coloraciones de G. Ahora consideremos una de estas. Por definición, existen partes V_i, V_j y V_l, que tienen a lo más $n/(10^3 r)$ aristas rojas de x a V_i, a lo más $n/(10^3 r)$ aristas verdes de x a V_j y a lo más $n/(10^3 r)$ aristas azules de x a V_l. Dado que $|N(x) \cap V_i| > n/(300r)$ para todo $1 \leq i \leq r$ entonces no podemos tener que $i = j = l$. Supongamos primero que i, j y l son todos distintos. Como el tamaño de V_i es a lo más $\left(\frac{1}{r}+10^{-5r}\right)n$, existen a lo más

$$\binom{(1/r+10^{-5})n}{n/(10^3 r)}$$

maneras de escorger aristas rojas entre x y V_i. Como las restantes aristas pueden solamente tener color azul o verde obtenemos que el número de coloraciones de aristas entre x y V_i está acotado por

$$\begin{aligned}\binom{(1/r+10^{-5r})n}{n/(10^3 r)}2^{(1/r+10^{-5r})n} &\leq 2^{(H(0,001)+1)(1/r+10^{5r}n)}\\ &\leq 2^{1,02(1/r+10^{-5r})n}\end{aligned}$$

pues $H(0,001)<0,02$. Esta estimación también es válida para el número de coloraciones entre x y V_j, y entre x y V_l. Notemos que x es incidente con a lo más $n-|V_i|-|V_j|-|V_l|\leq\left((r-3)/r+3\cdot 10^{-5r}\right)n$ otras aristas. Utilizando las anteriores desigualdades, junto con los hechos que $2^{3,06}<3^{1,95}$ y que $4/(100r)>5\cdot 10^{-5r}$ para todo $r\geq 2$. Para n suficientemente grande tenemos que el número de coloraciones de aristas incidentes en x es a lo más

$$\begin{aligned}\binom{r}{3}\cdot\left(2^{1,02(1/r+10^{-5})n}\right)^3\cdot 3^{((r-3)/r+3\cdot 10^{-5})n} &< 3^{\left(2/r-5/(100r)+2\cdot 10^{-5r}\right)n}\cdot 3^{\left((r-2)/r+2\cdot 10^{-5r}\right)n}\\ &\leq 3^{((r-1)/r-1/(100r))n}.\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $i=j\neq l$. Entonces existen a lo más $2^{1,02(1/r+10^{-5r})n}$ coloraciones de aristas entre x y V_i y existen a lo más

$$\begin{aligned}\binom{\left(1/r+10^{-5r}\right)n}{n/(10^3 r)}^2 &\leq 2^{2H(0,001)(1/r+10^{-5r})n}\\ &\leq 2^{0,04(1/r+10^{-5r})n}\end{aligned}$$

maneras de escoger las aristas rojas y verdes de x a V_i. En total, existen a lo más $2^{1,06(1/r+10^{-5r})n}$ coloraciones de aristas entre x y $V_i\cup V_j$. También, x es incidente con a lo más $n-|V_i|-|V_j|\leq\left(\frac{r-2}{r}+2\cdot 10^{-5r}\right)n$ otras aristas que pueden ser coloreadas arbitrariamente. Por lo tanto, como $2^{1,06}<3^{0,95}$ podemos acotar el número de aristas incidentes a x de nuevo por

$$\begin{aligned} r(r-1)2^{1{,}06(1/r+10^{-5r})n}\cdot 3^{\left((r-2)/r+2\cdot 10^{-5r}\right)n} &< 3^{\left(1/r-5/(100r)+10^{-5r}\right)n}\cdot 3^{\left((r-2)/r+2\cdot 10^{-5r}\right)n} \\ &< 3^{((r-1)/r-1/(100r))n}. \end{aligned}$$

Así, como sabemos que $|\mathscr{C}_2| \geq 3^{t_r(n)+m-1}$ entonces el número de 3-arista-coloraciones K_{r+1}-libres en $G-x$ son al menos

$$3^{t_r(n)+m-1-((r-1)/r-1/(100r))n} \geq 3^{t_r(n-1)+m+1}.$$

Esto completa el paso inductivo en el primer subcaso.

Subcaso (II)*:* Para todo $v \in V(G)$ y para todo $i \in [r]$, $|N(v) \cap V_i| \leq n/(300r)$.

Supongamos que G no es r-partito, sino por el Teorema de Turán $e(G) \leq t_r(n)$ y por lo tanto tendriamos que $|\mathscr{C}| \leq 3^{t_r(n)}$ y la igualdad vale si $G = T_r(n)$. Así, sin perdida de generalidad supondremos que G contiene un a arista xy con $x, y \in V_1$. Sea $\mathscr{C}_1$ el conjunto de todas las 3-coloraciones k_{r+1}-libres de G en que existen subconjuntos $W_i \subset V_i$ con $|W_i| \geq n/(10^3 r)$ para todo $2 \leq i \leq r$ tal que las aristas de x e y a $\bigcup\limits_i W_i$ y la arista xy tienen el mismo color. Sea $\mathscr{C}_2 := \mathscr{C} - \mathscr{C}_1$.

Consideremos una coloración de $\mathscr{C}_1$ y asumamos sin pérdida de generalidad que xy es coloreada roja. Entonces, por definición, existen subcojuntos $W_i \subset V_i$ con $|W_i| \geq n/(10^3 r)$ para cada $2 \leq i \leq r$ tal que todas las aristas de x e y a $\bigcup_i W_i$ son rojas. No existe un K_{r+1} rojo en esta coloración y por lo tanto no existe un K_{r-1} rojo con un vértice en cada W_i. Luego, por el lema 3.3.6, existe un par (i, j) y subconjuntos respectivos $X_i \subset W_i$ y $X_j \subset W_j$ con $|X_i| \geq 10^{-(r-1)}|W_i|$ y $|X_j| \geq 10^{-(r-1)}|W_j|$ con a lo más $\frac{1}{10}|X_i||X_j|$ aristas rojas entre X_i y X_j. Argumentando excatamente como se hizo en el primer subcaso podemos probar que $|\mathscr{C}_1| < 3^{t_r(n)-1}$ y luego $|\mathscr{C}_2| \geq 3^{t_r(n)+m-1}$.

Ahora consideremos una coloración de G perteneciente a $\mathscr{C}_2$ y supongamos de nuevo que xy es coloreada roja. Entonces existe una parte V_i con $2 \leq i \leq r$ y que x e y tiene a lo más $n/(10^3 r)$ vecinos comunes en que ellos son unidos por aristas rojas. Notemos que para cualquier otro vértice z en V_i, no podemos colorear las aristas xz e yz con color rojo. Por lo tanto tenemos a lo más ocho posibilidades para colorear estas aristas. Como hay a lo más $\left(1/r + 10^{-5r}\right) n$ vértices en V_i, tenemos a lo más $8^{\left(1/r+10^{-5r}\right)n}$

maneras de colorear aristas y a lo más

$$\begin{aligned} \binom{\left(\frac{1}{r}+10^{-5r}\right)n}{n/(10^3 r)} &\leq 2^{H(0{,}001)\left(\frac{1}{r}+10^{-5r}\right)n} \\ &\leq 2^{0{,}002\left(\frac{1}{r}+10^{-5r}\right)n} \end{aligned}$$

posibilidades de escoger un conjunto de vecindad común coloreada roja de x e y en V_i. Usando el hecho que $2^{3{,}02} < 3^{1{,}96}$ obtenemos que existen a lo más

$$\begin{aligned} 2^{0{,}02(1/r+10^{-5r})n} \cdot 8^{(1/r+10^{-5r})n} &= 2^{3{,}02(1/r+10^{-5r})n} \\ &< 3^{2(1/r-2/(200r)+10^{-5r})n} \end{aligned}$$

maneras de colorear aristas de x e y a V_i. Notemos que, ya que los grados de x e y en V_i son a lo más $n/(300r)$, el número de aristas de x e y a $\bigcup_{j\neq i} V_i$ es acotado por

$$2\left(\frac{r-2}{r}+2\cdot 10^{-5r}\right)+\frac{2n}{300r}.$$

Incluso si todas estas aristas pueden ser coloreadas arbitrariamente, como $1/(300r) > 3\cdot 10^{-5r}$ y tenemos que $r-1$ elecciones para el índice i, podemos acotar el número de coloraciones de las aristas incidentes a x e y por

$$(r-1)3^{2\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{100r}+10^{-5r}\right)n}\cdot 3^{2\left(\frac{r-2}{r}+\frac{1}{300r}+2\cdot 10^{-5r}\right)n} < 3^{2\left(\frac{r-1}{r}-\frac{1}{100r}\right)n}.$$

Por lo tanto, sabemos que $|\mathscr{C}_2| \geq 3^{t_r(n)+m-1}$. Luego el número de 3-coloraciones K_{r+1}-libres de $G\setminus\{x,y\}$ es al menos

$$3^{t_r(n)+m-1-2\left(\frac{r-1}{r}-\frac{1}{100r}\right)n} \geq 3^{t_r(n-2)+m+2}.$$

Esto completa los dos pasos inductivos para el segundo caso y prueba el teorema.

$\square$

Bibliografía

[1] Alon, N., Balogh, J., Keevash, P., and Sudakov, B. The number of edge colorings with no monochromatic cliques. *Journal of the London Mathematical Society (2) 70*, 2 (2004), 273–288.

[2] Balogh, J., Morris, R., and Samotij, W. Independent sets in hypergraphs. *J. Amer. Math. Soc. 28*, 3 (2015), 669–709.

[3] Bollobás, B. *Modern graph theory*, vol. 184 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] Bollobás, B. *Extremal graph theory*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004. Reprint of the 1978 original.

[5] Botler, F., Corsten, J., Dankovics, A., Frankl, N., Hàn, H., Jiménez, A., and Skokan, J. Maximum number of triangle-free edge colourings with five and six colours. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae 88*, 3 (2019), 495–499.

[6] Brown, W. G. On Graphs that do not Contain a Thomsen Graph. *Canadian Mathematical Bulletin 9*, 3 (1966), 281–285.

[7] Conlon, D., and Fox, J. Graph removal lemmas. In *Surveys in combinatorics 2013*, vol. 409 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013, pp. 1–49.

[8] Diestel, R. *Graph theory*, fifth ed., vol. 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Berlin, 2018.

[9] Erdős, P. Some recent results on extremal problems in graph theory. In *Theory of Graphs (International Symposium, Rome, 1966)*. Gordon and Breach, New York; Dunod, Paris, 1967, pp. 117–123 (English); pp. 124–130 (French).

[10] ERDŐS, P. On some new inequalities concerning extremal properties of graphs. In *Theory of Graphs (Proceedings of the Colloquium hield at Tihany, Hungary, 1966)* (1968), Academic Press, New York, pp. 77–81.

[11] ERDŐS, P., AND SIMONOVITS, M. A limit theorem in graph theory. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. A Quarterly of the Hungarian Academy of Sciences 1* (1966), 51–57.

[12] ERDÖS, P., AND TURÁN, P. On Some Sequences of Integers. *J. London Math. Soc. 11*, 4 (1936), 261–264.

[13] FÜREDI, Z. New Asymptotics for Bipartite Turán Numbers. *Journal of Combinatorial Theory, Series A 75*, 1 (1996), 141–144.

[14] FÜREDI, Z. A proof of the stability of extremal graphs, Simonovits' stability from Szemerédi's regularity. *Journal of Combinatorial Theory. Series B 115* (2015), 66–71.

[15] HÀN, H., AND JIMÉNEZ, A. Improved bound on the maximum number of clique-free colorings with two and three colors. *SIAM Journal on Discrete Mathematics 32*, 2 (2018), 1364–1368.

[16] KOMLÓS, J., AND SIMONOVITS, M. Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory. In *Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993)*, vol. 2 of *Bolyai Soc. Math. Stud.* János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, pp. 295–352.

[17] LOVÁSZ, L., AND SIMONOVITS, M. On the number of complete subgraphs of a graph. II. In *Studies in pure mathematics*. Birkhäuser, Basel, 1983, pp. 459–495.

[18] PIKHURKO, O., AND YILMA, Z. B. The maximum number of k3-free and k4-free edge 4-colorings. *Journal of the London Mathematical Society 85*, 3 (2012), 593–615.

[19] ROTH, K. F. On certain sets of integers. *Journal of the London Mathematical Society s1-28*, 1 (1953), 104–109.

[20] SAXTON, D., AND THOMASON, A. Hypergraph containers. *Inventiones mathematicae 201*, 3 (Sep 2015), 925–992.

[21] SIMONOVITS, M. A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems. In *Theory of Graphs (Proceedings of the Colloquium hield at Tihany, Hungary, 1966)* (1968), Academic Press, New York, pp. 279–319.

[22] SOLYMOSI, J. Note on a generalization of Roth's theorem. In *Discrete and computational geometry*, vol. 25 of *Algorithms Combin.* Springer, Berlin, 2003, pp. 825–827.

[23] SZEMERÉDI, E. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith. 27* (1975), 199–245.

[24] SZEMERÉDI, E. Regular partitions of graphs. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)*, vol. 260 of *Colloq. Internat. CNRS*. CNRS, Paris, 1978, pp. 399–401.

[25] YUSTER, R. The number of edge colorings with no monochromatic triangle. *Journal of Graph Theory 21*, 4 (1996), 441–452.