



Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Una Invariante de Links Singulares en el Toro Sólido

*Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas*

Presentada por:
VICTOR PAÚL CONDEMAITA IZA

Profesor Guía: Dr. Marcelo Flores.

VALPARAÍSO
MARZO 2025

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi gratitud al profesor Marcelo Flores, por considerarme como candidato para formar parte del programa de Magíster en Matemáticas de la Universidad de Valparaíso y, por supuesto, por ser mi profesor guía en este trabajo de investigación. Sus observaciones y correcciones no solo enriquecieron este trabajo, sino que también fortalecieron mi formación académica.

Extiendo mi agradecimiento a todo el cuerpo académico del IMUV. Mi estadía en esta casa de estudios ha sido una experiencia enriquecedora en todos los sentidos, siempre encontré confianza, apoyo y empatía, lo que hizo de este camino una etapa llena de aprendizaje.

Al profesor Leónidas de la carrera de Matemática de la ESPOCH, por motivarme a seguir con mis estudios de postgrado en Chile, y por mantenerse atento a mis avances.

A mis amigos más cercanos en Ecuador: Chrisby, David y Cristian les agradezco por su apoyo que a pesar de la distancia, ha sido verdaderamente valioso en este proceso. De igual manera, agradezco a las grandes amistades que he encontrado aquí en Chile: Sergio, Luis, Bladimir, y Gerardo.

Por último, quiero agradecer a la familia Valenzuela Astorga, fueron un reflejo de la amabilidad que define a la sociedad chilena. Su hospitalidad y apoyo hicieron que este tiempo lejos de casa se sintiera más acogedor.

VIC CONDEMAITA.
Chile, 17/10/2025

Dedicatoria

Este trabajo, cuyos resultados representan para mí un motivo de profundo orgullo tanto en lo profesional como en lo personal, lo dedico con gratitud y afecto a mi querida familia en Ecuador.

A mis padres, CÉSAR CONDEMAITA y MARÍA IZA, por siempre confiar en mí incluso cuando todo el camino se ponía cuesta arriba. A mis hermanos LUIS, HUGO, NELLY, LUISA Y NATY, por su cercanía y por hacerme sentir siempre acompañado; a mis sobrinos, en especial a JAVI y STEV, su buen ánimo me recordaron, la importancia de la alegría; y a mis cuñados, por su compañía sincera.

Cada uno de ustedes es parte esencial de este logro. Si este Magíster simboliza una meta alcanzada, es porque detrás estuvo su cariño de principio a fin.

VIC CONDEMAITA.
Chile, 17/10/2025

Índice general

Agradecimientos	I
Dedicatoria	II
Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1. Teoría de Nudos	4
1.1.1. Conceptos Elementales	4
1.2. Grupo de Trenzas	8
1.2.1. Conceptos Elementales	9
1.2.2. Teorema de Alexander y Markov	12
1.3. El método de Jones	14
1.3.1. Álgebra de Hecke de tipo A	14
1.3.2. La traza de Ocneanu	15
1.4. Grupos de Coxeter	19
2. La bt – álgebra de tipo A	23
2.1. Monoide de particiones	23
2.2. El monoide de trenzas ligadas	25
2.3. La bt – álgebra	27
2.3.1. Invariante derivado del álgebra $\mathcal{E}_n(q)$	29
3. Invariantes de links en el toro sólido	31
3.1. Nudos y trenzas en el toro sólido	31
3.1.1. Teorema de Alexander y Markov para links en el toro sólido	34
3.1.2. Álgebra de Hecke de tipo B	35

3.1.3. La invariante de Sofía Lambropoulou	36
3.2. La bt – álgebra de tipo B	39
3.2.1. The tied braid monoid de tipo B	40
3.2.2. Generalización del polinomio Δ	42
4. Invariante de links singulares	45
4.1. Nudos y trenzas singulares	45
4.1.1. Teorema de Alexander y Markov para links singulares	48
4.1.2. La invariante de Aicardi – Juyumaya	49
5. Invariante de links singulares en el toro sólido	52
5.1. Nudos y trenzas singulares en el toro sólido	52
5.1.1. Teorema de Alexander y Markov para links singulares en el toro sólido	55
5.2. Nuevo invariante de links singulares en ST	57
5.3. Conclusión	62

Introducción

Comenzaremos estableciendo la terminología que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Optamos por conservar algunos términos en inglés en lugar de su traducción al español; en particular, emplearemos link en lugar de enlace y tied braid monoid en lugar de monoide de trenzas ligadas.

Intuitivamente, un nudo puede pensarse como una cuerda enredada cuyos extremos han sido unidos. Más formalmente, en matemáticas un nudo se define como una curva cerrada sin autointersecciones. Generalizando esta idea, un link se define como la unión finita de n -nudos.

La teoría de nudos se centra en el estudio de nudos y links, y suele considerarse una rama de la topología. No obstante, debido a la naturaleza de los nudos, su análisis también puede abordarse desde el punto de vista del álgebra, la combinatoria y otras áreas de las matemáticas.

Uno de los problemas fundamentales dentro de la Teoría de nudos, es clasificar las clases de isotopía de estos, dos nudos son isotópicos o equivalentes si uno de ellos es una deformación continua del otro. Luego es común la construcción de invariantes de nudos para responder en parte esta pregunta. Un conjunto notable dentro de los invariantes de nudos conocidas son los polinomiales, dentro de los cuales se encuentran algunas de las invariantes más famosas, como lo son el polinomio de Kauffman, el polinomio de Jones y el polinomio de HOMFLY-PT.

La primera invariante polinomial para nudos fue desarrollado por J. W. Alexander en 1928 en su artículo *Topological Invariants of Knots and Links* [2]. Sin embargo, un avance revolucionario en el área ocurrió en 1984, cuando V. F. R. Jones introdujo su polino-

mio homónimo, combinando de manera adecuada los teoremas de Alexander y Markov.

El descubrimiento del polinomio de Jones, y en particular su método de construcción, abrió un nuevo y amplio campo de investigación en la teoría de nudos. Esta contribución, que le valió la Medalla Fields en 1990, dio lugar a lo que posteriormente se conoció como la receta de Jones (o método de Jones) [23].

El objetivo de este trabajo es construir una nueva invariante polinomial para links singulares en el toro sólido, siguiendo la filosofía subyacente del método de Jones. En particular, se extienden los resultados desarrollados por F. Aicardi y J. Juyumaya [6].

Un nudo singular se define como una curva cerrada simple que permite autointersecciones. En este sentido, todo nudo clásico es un caso particular de un nudo singular sin autointersecciones, lo que implica que los nudos singulares constituyen una generalización de los nudos clásicos.

En el *Capítulo 1*, se ofrece una introducción formal a los conceptos fundamentales de la teoría de nudos, links, trenzas y el grupo de trenzas. Además, se abordan los teoremas de Alexander y Markov, así como la conocida receta de Jones, en la que se exploran sus componentes clave, como el álgebra correspondiente para el fin, el álgebra de Hecke de tipo A, las trazas asociadas y el polinomio de HOMFLY-PT. Finalmente, se introduce el concepto de grupos de Coxeter.

En el *Capítulo 2*, estudiamos el monoide de particiones, el tied braid monoid y la bt-álgebra de tipo A. Además, introducimos el invariante de nudos derivado de la bt-álgebra conocido como Δ . Cabe destacar que en los dos primeros capítulos nos enfocamos en nudos y trenzas clásicas, junto con sus respectivas álgebras de tipo A. En el siguiente capítulo, extendemos estos resultados.

En el *Capítulo 3*, se introducen los conceptos fundamentales de nudos y links en el toro sólido, junto con el grupo de trenzas de tipo B. Además, se presentan los teoremas de Alexander y Markov en este contexto, así como el álgebra de Hecke y la bt-álgebra de tipo B. Finalmente, se abordan los invariantes asociados a estas álgebras, en particular,

el invariante de Lambropoulou y la generalización del polinomio Δ .

Por otro lado, en el *Capítulo 4*, exploraremos los conceptos relacionados con nudos, links, trenzas singulares y el monoide de trenzas singulares denotado por SB_n . Como era de esperarse, revisaremos los teoremas de Alexander y Markov en este contexto. Finalmente, cerraremos el capítulo analizando los invariantes para links singulares obtenidos por Juyumaya y Aicardi.

Finalmente, en el *Capítulo 5*, abordamos el objetivo principal de este trabajo: la construcción de un nuevo invariante de links singulares en el toro sólido, el cual denotamos por $\overline{\Lambda}_{x,y}$ y $\overline{\Gamma}_{x,y}$. Este resultado se establece en el Teorema 5.4 de este trabajo. Antes de presentar estos resultados, introducimos las definiciones fundamentales sobre nudos, links y trenzas singulares en el toro sólido, así como el moniide de trenzas singulares de tipo B, que denotamos por SB_n^B . Análogamente a los casos clásicos, existen versiones de los teoremas de Alexander y Markov para links singulares en el toro sólido, resultados que fueron demostrados recientemente por Diamantis [12].

Otro aporte de este trabajo es la construcción de representaciones de SB_n^B en $\mathcal{E}_n^B(q, Q)$, las cuales denotamos por $\Lambda_{w,x,y}$ y $\Gamma_{w,x,y}$. Para más detalles sobre su demostración, remitimos a la Proposición 5.2 de este trabajo.

A continuación, presentamos una introducción detallada a los conceptos fundamentales que sustentan esta investigación, estableciendo el marco teórico necesario para comprender este campo de estudio.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, revisaremos la teoría de nudos, y sus conceptos fundamentales, como por ejemplo: equivalencia de nudos, diagrama de un nudo, invariantes de nudos. Además nos adentraremos en el grupo de trenzas, sus conceptos asociados, representación gráfica entre otros aspectos relevantes.

1.1. Teoría de Nudos

1.1.1. Conceptos Elementales

Definición 1.1. Se dice que $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3$ es un nudo, si existe un homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya imagen es $\mathcal{K}$.

Ejemplo 1.

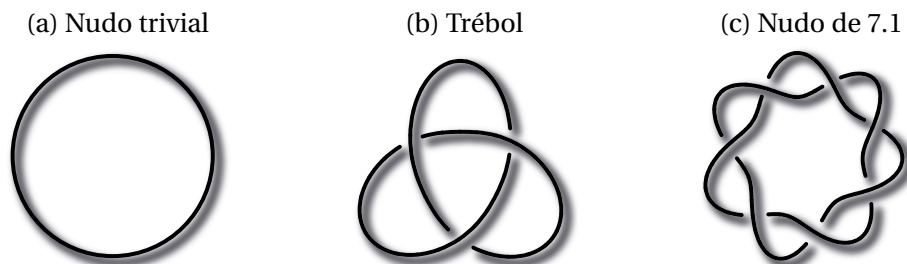


Figura 1.1: Nudos clásicos.

Definición 1.2. Un link L de n componentes es la unión disjunta de n nudos.

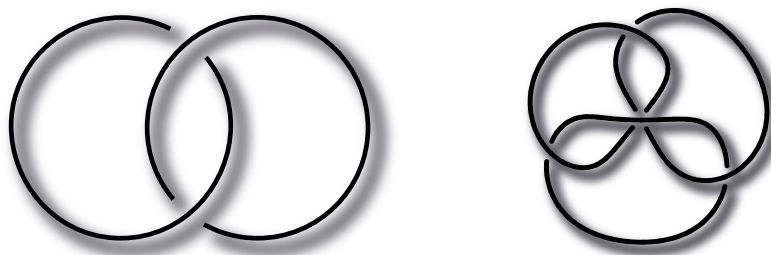


Figura 1.2: Links de dos y tres componentes respectivamente.

Observación 1. En particular, un nudo es un link de una componente.

Definición 1.3. Un nudo $\mathcal{K}$ se dice orientado si cada una de sus componentes tiene asignada una orientación, en caso contrario es un nudo no orientado.

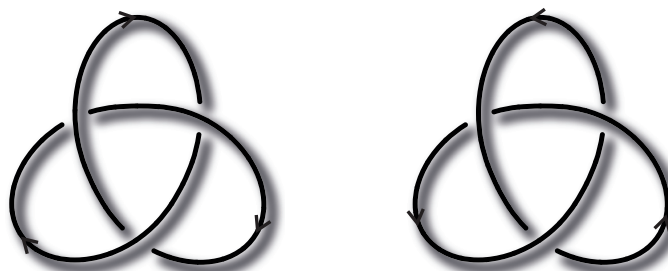


Figura 1.3: Las posibles orientaciones del trébol.

Definición 1.4. Sea L un link. Definimos L^* el reflejado de L como el link que se obtiene de cambiar todos los cruces de L .

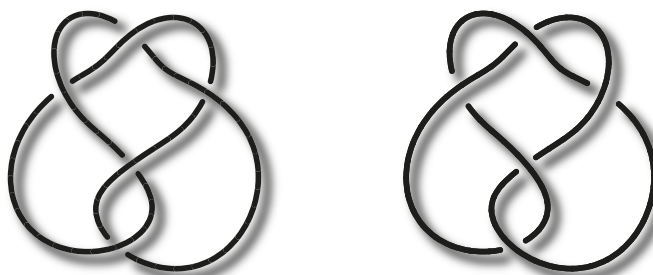


Figura 1.4: El nudo 8 y su reflejado.

Definición 1.5. Una isotopía en $\mathbb{R}^3$ es una familia de homeomorfismos $\{F_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ con $s \in I = [0, 1]$.

Definición 1.6. Dos links L y L' se dicen equivalentes si, y sólo si, existe una isotopía $\{F_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\}_{s \in I}$, continua y que preserva la orientación, tal que

1. $F_0(L) = L$

2. $F_1(L) = L'$

Dos links L y L' que satisfacen la definición anterior se denota como $L \sim L'$.

Definición 1.7. La proyección de un link se denomina proyección regular si admite como máximo puntos dobles y que la intersección sea transversal.

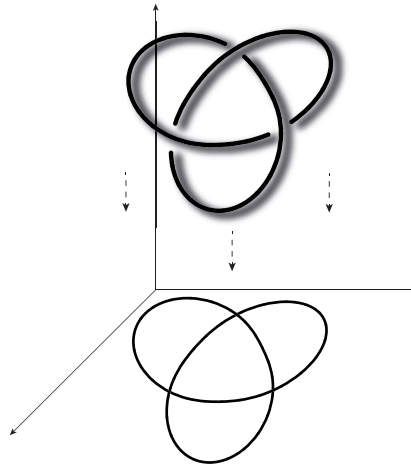
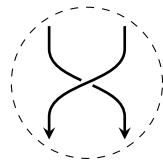
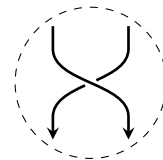


Figura 1.5: Proyección del Trébol en $\mathbb{R}^2$.

Para obtener un diagrama de un link L reemplazamos los cruces en la proyección por una de las siguientes opciones.



Cruce Positivo



Cruce Negativo

Figura 1.6: Cruces.

En la imagen anterior, se presentan dos tipos de cruces que se interpretan de la siguiente manera:

1. Un cruce positivo señala que en el link original, la curva continua de la derecha representa la curva que pasa por encima en $\mathbb{R}^3$.
2. Un cruce negativo señala que en el link original, la curva continua de la izquierda representa la curva que pasa por encima en $\mathbb{R}^3$.

En consecuencia, el diagrama del link de trébol que se muestra en la figura (1.4) es el siguiente.

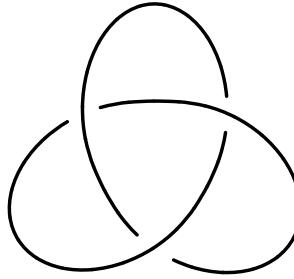


Figura 1.7: Diagrama del link Trébol.

Definición 1.8. Definimos los movimientos de Reidemeister (ver [33]), denotados por R_1 , R_2 y R_3 , como los movimientos locales en un diagrama descritos en la siguiente figura

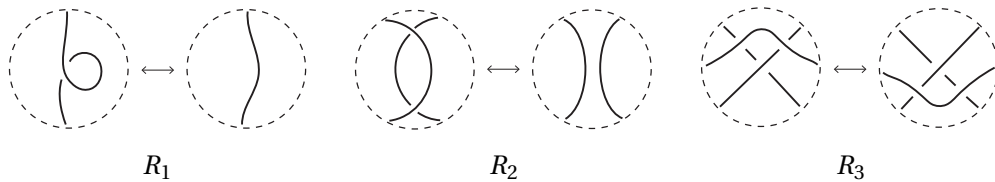
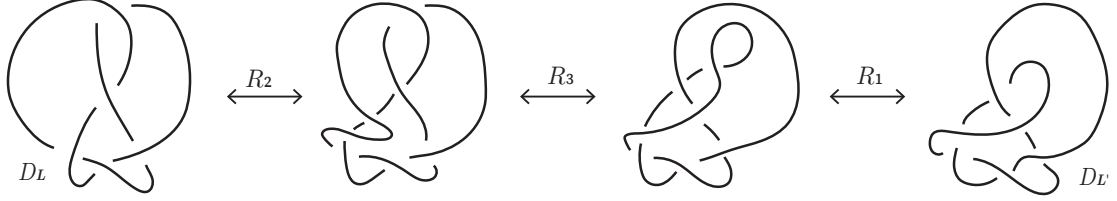


Figura 1.8: Movimientos de Reidemeister.

Definición 1.9. Sean D_L y $D_{L'}$ diagramas de L y L' respectivamente. Decimos que D_L y $D_{L'}$ son R -equivalentes si y sólo si D_L puede obtenerse con una sucesión finita de movimientos de Reidemeister de $D_{L'}$.

Si D_L y $D_{L'}$ son R -equivalentes se denota por $D_L \sim_R D_{L'}$.

Ejemplo 2.Figura 1.9: Movimientos de Reidemeister que relaciona los diagramas D_L y $D_{L'}$.

Teorema 1.1. Si D_L y $D_{L'}$ son diagramas de L y L' respectivamente, entonces

$$L \sim L' \iff D_L \sim_R D_{L'}.$$

Es decir, existe una biyección entre clases de isotopía de links y clases de diagramas R -equivalentes [33, Capítulo 3].

Definición 1.10. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de todos los links. Una invariante de links es una función, $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ que cumple:

$$L \sim L' \implies \varphi(L) = \varphi(L'),$$

con $\mathcal{C}$ un conjunto de objetos conocido (polinomios, anillos, grupos, etc).

Observación 2. Usualmente, las invariantes de links se usan para probar que dos links no son equivalentes, por medio del contrarecíproco de la condición anterior, es decir;

$$\varphi(L) \neq \varphi(L') \implies L \not\sim L'.$$

1.2. Grupo de Trenzas

Según [27, Prefacio] una forma alternativa de abordar el estudio de la teoría de nudos es mediante el uso del grupo de trenzas. Esta conexión es posible gracias a dos importantes teoremas que establecen una relación entre los nudos y las trenzas: el teorema de Alexander y el teorema de Markov.

1.2.1. Conceptos Elementales

Definición 1.11. Sea $P_i = (i, 0, 1)$ y $Q_i = (i, 0, 0)$ en $\mathbb{R}^3$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Una n -trenza es un conjunto de n arcos (hebras) $\{a_1, \dots, a_n\}$, que conecta Q_i con $P_{\sigma(i)}$, para algún $\sigma \in S_n$, tal que se cumple las siguientes condiciones:

1. Cada trenza es monótona, es decir; la trenza al ser cortada por un plano en $z = t$ con $t \in (0, 1)$, se tiene que cada cuerda intersecta al plano en un único punto.
2. Los arcos no se intersectan.

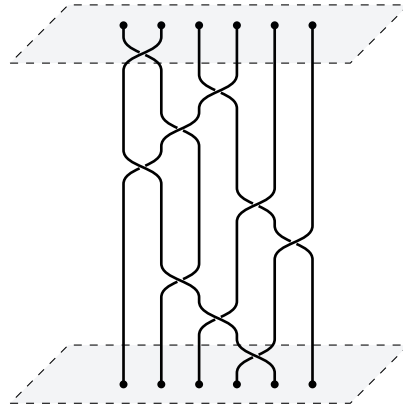


Figura 1.10: Una 6-trenza en $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.12. Sean α y β dos trenzas. Decimos que α y β son equivalentes si existe una isotopía entre ellas y que deje fijo los extremos de las hebras.

Observación 3. Análogamente a los nudos, el diagrama de una n -trenza se obtiene proyectando la trenza y luego interpretando los cruces que se ilustran en la figura (1.6).

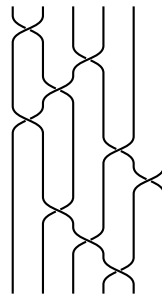


Figura 1.11: Diagrama de una 6-trenza.

Similarmente a la definición (1.8), podemos definir los movimientos de Reidemeister para trenzas. La única diferencia es que, en el caso de las trenzas, solo se utilizan los movimientos R_2 y R_3 .

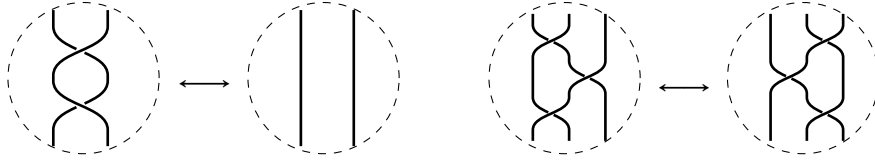


Figura 1.12: Movimientos de Reidemeister en Trenzas.

Definición 1.13. Definamos B_n como el conjunto formado por las clases de equivalencia de n -trenzas mediante isotopía.

Definición 1.14. Sean α y β elementos de B_n . Definimos el producto por concatenación entre las n -trenzas $\alpha * \beta \in B_n$ de la siguiente manera:

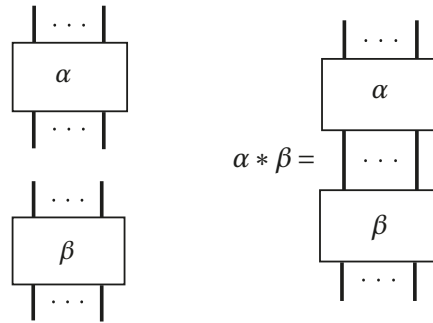


Figura 1.13: Producto concatenación de n -trenzas.

Es decir, identificando los puntos finales de la trenza α , con los puntos iniciales de la trenza β . En 1925, el matemático Emil Artin postuló que el conjunto B_n , junto con el producto por concatenación, forma un grupo, conocido como el grupo de trenzas de Artin más detalles en (ver [8, 31]).

Proposición 1.1. El conjunto B_n junto con el producto concatenación forman un grupo, el cual es conocido como grupo de trenzas de Artin. Y tiene la siguiente presentación:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, & |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, & |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle.$$

1.2.2. Teorema de Alexander y Markov

Definición 1.15. Sea $\alpha \in B_n$. La clausura de la trenza α es el link clásico que se obtiene al conectar los puntos iniciales y finales de α mediante arcos. Denotaremos dicha clausura por $\hat{\alpha}$.

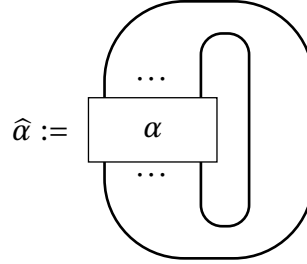


Figura 1.16: Clausura de la trenza α .

Luego, se tiene la siguiente función $\varphi: B_\infty \longrightarrow \mathcal{L}$, definida por $\alpha \longmapsto \hat{\alpha}$.

En este punto, surgen preguntas naturales sobre la función φ , tales como si es inyectiva o epiyectiva. Primero, φ es epiyectiva, lo cual está garantizado por el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Alexander). *Para todo link orientado L , existe $\alpha \in B_\infty$ tal que $\hat{\alpha} \sim L$.*

La demostración de este hecho se realiza mediante un enfoque algorítmico. Se recomienda consultar [27, Teorema 2.3] para una explicación detallada.

Notemos que en la siguiente figura $\sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \neq \sigma_1^3$ son elementos distintos. Sin embargo, sus clausuras representan el mismo link, este hecho contradice la inyectividad de φ .

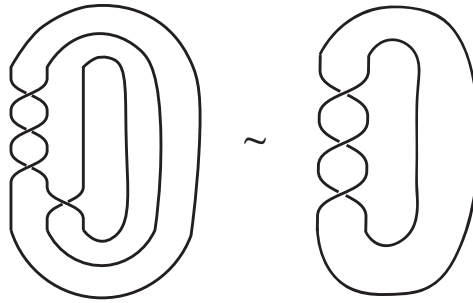


Figura 1.17: Trenzas equivalentes $\sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \sim \sigma_1^3$.

El problema de determinar cuándo dos trenzas tienen la misma clausura fue resuelto por el matemático ruso Alexander Markov en 1935. Markov demostró que dos trenzas tienen la misma clausura si y solo si se pueden transformar una en la otra mediante una serie de movimientos elementales conocidos como movimientos de Markov.

Definición 1.16. Sean $\alpha, \beta \in B_n$. Definimos los movimientos de Markov como sigue:

M1. $\alpha\beta \rightleftharpoons \beta\alpha$,

M2. $\alpha \rightleftharpoons \alpha\sigma_n^{\pm 1}$.

Definición 1.17. Sean $\alpha, \beta \in B_n$. Decimos que α y β son Markov equivalentes si es posible obtener β a partir de α mediante una sucesión finita de movimientos de Markov. En tal caso, lo denotamos por $\alpha \sim_M \beta$.

Ejemplo 4. Sea $\alpha = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2 \in B_4$.

$$\alpha = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3\sigma_2) \xrightarrow{\text{M1}} (\sigma_2\sigma_3\sigma_2)\sigma_1 \xrightarrow{\text{M1}} (\sigma_2\sigma_1)(\sigma_2\sigma_3) \xrightarrow{\text{M2}} \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = \beta.$$

Entonces, $\alpha \sim_M \beta$.

Observación 5. Notar que la $\sim_M$ es una relación de equivalencia.

Teorema 1.3 (Markov). Sean $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ dos trenzas clausuradas obtenidas de α y β respectivamente entonces:

$$\alpha \sim_M \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \hat{\alpha} \sim \hat{\beta}.$$

Una demostración rigurosa y detallada del teorema presentado se puede consultar en [27, Teorema 2.8].

En conclusión el teorema 1.3 establece que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de clases de isotopía de links y clases de trenzas Markov equivalentes, es decir:

$$\mathcal{L} / \sim \longleftrightarrow B_\infty / \sim_M.$$

Así, para construir un invariante de links basta definir una función

$$\varphi: B_\infty \longrightarrow \mathcal{C},$$

tal que:

$$\alpha \sim_M \beta, \quad \text{entonces} \quad \varphi(\alpha) = \varphi(\beta).$$

Luego podemos definir

$$\phi: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{C},$$

definida por $\phi(L) = \varphi(\alpha)$, donde $L = \hat{\alpha}$, es un invariante para links.

1.3. El método de Jones

Para un análisis más detallado del caso clásico, se recomienda consultar la referencia (ver [23]), donde Jones presenta por primera vez la aplicación del método en el contexto del álgebra de Temperley-Lieb. El descubrimiento del polinomio de Jones, y en particular su método de construcción, abrió un nuevo y extenso campo de investigación en la teoría de nudos. Esta idea, que le valió a su autor la Medalla Fields en 1990, se basa en la aplicación de una función traza. Los resultados que se presentan a continuación fueron extraídos principalmente de (ver [24]).

1.3.1. Álgebra de Hecke de tipo A

Definición 1.18. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $n \geq 1$ y sea q un parámetro cualquiera. Definimos el álgebra de Hecke de tipo A, denotada por $H_n(q)$, como la $\mathbb{K}(q)$ -álgebra generada por $g_1, \dots, g_{n-1}$ y las siguientes relaciones:

1. $g_i g_j = g_j g_i$, si $|i - j| > 1$.
2. $g_i g_j g_i = g_j g_i g_j$, si $|i - j| = 1$.
3. $g_i^2 = q + (q - 1) g_i$.

Observación 6.

1. La tercera relación, conocida como relación cuadrática, nos permite observar que, cuando $q = 1$, se cumple que $g_i^2 = 1$, lo que implica que $H_n(1) = \mathbb{K}[S_n]$. De este modo, se puede interpretar que el álgebra de Hecke es una q -deformación del álgebra de grupo $\mathbb{K}[S_n]$.
2. Existe una representación (homomorfismo) natural $\pi : B_n \longrightarrow H_n(q)$, definido por $\sigma_i \longmapsto g_i$.
3. $H_n(q) \cong \mathbb{K}[B_n] / I$, donde I es el ideal generado por los elementos

$$g_i^2 - q - (q - 1) g_i, \quad 1 \leq i \leq n - 1.$$

4. Se tiene la siguiente cadena $H_1(q) \hookrightarrow H_2(q) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow H_n(q) \hookrightarrow H_{n+1}(q)$, por lo tanto, podemos definir el límite inductivo:

$$H_\infty(q) := \coprod_{n \in \mathbb{N}} H_n(q).$$

5. A partir de la relación cuadrática, se puede concluir que los elementos g_i 's son invertibles. En efecto,

$$g_i^2 = q + (q-1)g_i \Rightarrow g_i^2 - (q-1)g_i = q \Rightarrow g_i(q^{-1}g_i + q^{-1} - 1) = 1,$$

$$\text{luego, } g_i^{-1} = q^{-1}g_i + q^{-1} - 1.$$

1.3.2. La traza de Ocneanu

La traza de Markov sobre $H_n(q)$ recibe el nombre de traza de Markov o simplemente Ocneanu y constituye una función $\mathbb{C}$ -lineal sobre el conjunto $H_\infty(q)$.

Lema 1.1. (Ver [22]). Para $n > 1$, todo monomio en $H_n(q)$ se puede escribir como combinación lineal de monomios en donde el elemento g_{n-1} aparece a lo más una vez.

Definición 1.19. Definimos el siguiente conjunto de manera inductiva como sigue:

$$T_1 = \{1\}$$

$$T_i = \{g_{i-1}x \mid x \in T_{i-1}\} \cup \{1\}, \quad \text{para todo } 2 \leq i \leq n.$$

Ejemplo 5. Calcular T_5 .

$$T_1 = \{1\},$$

$$T_2 = \{1, g_1\},$$

$$T_3 = \{1, g_2, g_2g_1\},$$

$$T_4 = \{1, g_3, g_3g_2, g_3g_2g_1\},$$

$$T_5 = \{1, g_4, g_4g_3, g_4g_3g_2, g_4g_3g_2g_1\}$$

1. Notar que $T_i = \{1\} \cup \{g_{i-1}g_{i-2} \cdots g_j\}$, $1 \leq j \leq i-1$.
2. Además, $|T_i| = i$, para todo i .

Definición 1.20. Definimos el siguiente conjunto en términos de los T_i 's como sigue

$$J_n = \{m_1 \cdots m_n \mid m_i \in T_i\}.$$

Se sabe que J_n es una base lineal para $H_n(q)$, para mas detalles se puede consultar en [24, 13] donde se expone la demostración del siguiente teorema.

Teorema 1.4. (Ver [13]) El conjunto J_n es una base lineal de $H_n(q)$.

Teorema 1.5. (Ver [24]). Sea a en $\mathbb{C}$ un parámetro. Para todo $n > 1$ existe una familia de funciones lineales

$$\text{tr}_n : H_n(q) \longrightarrow \mathbb{C}(a),$$

llamada traza de Markov, que cumple la siguientes propiedades:

1. $\text{tr}_n(1) = 1$,
2. $\text{tr}_n(AB) = \text{tr}_n(BA)$, para todo $A, B \in H_n(q)$,
3. $\text{tr}_{n+1}(Bg_n) = a \text{tr}_n(B)$, para todo $B \in H_n(q)$.

Ejemplo 6. A continuación calculamos $\text{tr}(g_1^3)$ y $\text{tr}(g_1^2)$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(g_1^3) &= \text{tr}(g_1 g_1^2) & \text{tr}(g_1^2) &= \text{tr}(q + (q-1)g_1) \\ &= \text{tr}(g_1[q + (q-1)g_1]) & &= q \text{tr}(1) + (q-1) \text{tr}(g_1) \\ &= \text{tr}(q g_1 + (q-1)g_1^2) & &= q + (q-1)a. \\ &= \text{tr}(q g_1 + (q-1)[q + (q-1)g_1]) \\ &= \text{tr}(q g_1 + (q-1)q + (q-1)^2 g_1) \\ &= q a + q(q-1) + (q-1)^2 a. \end{aligned}$$

Así, se tiene el siguiente diagrama de funciones

$$B_n \xrightarrow{\pi} H_n(q) \xrightarrow{\text{tr}_n} \mathbb{C}(q, a),$$

donde π es una representación y tr_n son funciones $\mathbb{C}$ -lineales. La composición $(\text{tr} \circ \pi)$ es un invariante de nudos salvo un proceso de reescalamiento y normalización. Verificaremos su cumplimiento bajo los movimientos de Markov.

Sean $\alpha, \beta \in B_n$, entonces:

$$(\text{tr} \circ \pi)(\alpha\beta) = \text{tr}(\pi(\alpha\beta)) = \text{tr}(\pi(\alpha)\pi(\beta)) = \text{tr}(\pi(\beta)\pi(\alpha)) = \text{tr}(\pi(\beta\alpha)) = (\text{tr} \circ \pi)(\beta\alpha).$$

Así, $(\text{tr} \circ \pi)$ respeta M1. Sin embargo, $(\text{tr} \circ \pi)$ no respeta M2, pues:

$$(\text{tr} \circ \pi)(\alpha\sigma_n) = \text{tr}(\alpha g_n) = a \text{tr}(\alpha).$$

Por simplicidad en el cálculo anterior hemos denotado $\pi(\alpha) = \alpha$. Luego se tiene, $(\text{tr} \circ \pi)(\alpha) \neq a(\text{tr} \circ \pi)(\alpha)$. Para obtener el resultado deseado debemos rescalar y normalizar el homomorfismo π .

Sea

$$\begin{aligned}\pi_w : B_n &\longrightarrow H_n(q) \\ \sigma_i &\longmapsto w g_i,\end{aligned}$$

donde w es un parámetro en $\mathbb{C}$. Queremos que se cumpla:

$$(\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha \sigma_n) = (\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha \sigma_n^{-1}).$$

Luego se tiene,

$$\begin{aligned}\text{tr}(\pi_w(\alpha) \pi_w(\sigma_n)) &= \text{tr}(\pi_w(\alpha) \pi_w(\sigma_n^{-1})) \\ \text{tr}(\pi_w(\alpha) w g_n) &= \text{tr}(\pi_w(\alpha) w^{-1} g_n^{-1}) \\ w a \text{tr}(\pi_w(\alpha)) &= w^{-1} ((q^{-1} - 1) + q^{-1} a) \text{tr}(\pi_w(\alpha)) \\ w a &= w^{-1} ((q^{-1} - 1) + q^{-1} a) \\ w^2 &= \frac{1 - q + a}{q a} \\ w &= \sqrt{\lambda}.\end{aligned}$$

Donde, $\lambda = \frac{1 - q + a}{q a}$. Además, note que $a = \frac{1 - q}{q \lambda - 1}$.

Así, luego de la re-escalación anterior la función $(\text{tr} \circ \pi_w)$ respeta los movimientos de Markov, es decir:

1. $(\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha \beta) = (\text{tr} \circ \pi_w)(\beta \alpha)$.
2. $(\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha) = (\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha \sigma_n^{\pm 1})$.

Definición 1.21. Sea L un link definimos:

$$P_L(\lambda, q) := \frac{(\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha)}{(\text{tr} \circ \pi_w)(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})},$$

para $L = \hat{\alpha}$ con $\alpha \in B_n$.

Sea $e : B_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ el homomorfismo definido por $\sigma_i \longmapsto 1$. Es decir $e(\alpha)$ es la suma de los

exponentes de los generadores que aparecen en la expresión de α . Luego,

$$\begin{aligned} (\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha) &= \text{tr}(w^{e(\alpha)} \pi(\alpha)) \\ &= w^{e(\alpha)} (\text{tr} \circ \pi)(\alpha). \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} (\text{tr} \circ \pi_w)(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) &= w^{n-1} (\text{tr} \circ \pi)(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) \\ &= w^{n-1} (\text{tr}(g_1) \cdots \text{tr}(g_{n-1})) \\ &= w^{n-1} a^{n-1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\lambda} (1-q)}{q\lambda-1} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos reescribir la definición 1.21 y obtener el polinomio de HOMFLY-PT de la siguiente forma:

Definición 1.22. (Polinomio de HOMFLY-PT)

$$P_L(\lambda, q) = \left(\frac{q\lambda-1}{\sqrt{\lambda}(1-q)} \right)^{n-1} \left(\sqrt{\lambda} \right)^{e(\alpha)} (\text{tr} \circ \pi)(\alpha),$$

para $L = \widehat{\alpha}$ con $\alpha \in B_n$.

El polinomio $P_L(\lambda, q)$ resulta ser una invariante para links orientados, el cual es llamado polinomio de HOMFLY-PT. Fue descubierto en 1985 como una generalización de otros invariantes importantes, como el polinomio de Alexander y el polinomio de Jones. Su nombre proviene de las iniciales de los matemáticos que lo desarrollaron simultáneamente: Hoste, Ocneanu, Millet, Freyd, Lickorish, Yetter, y paralelamente Przytycki y Traczyk.

Ejemplo 7.

1. Calcular el polinomio de HOMFLY-PT del trébol $T = \widehat{\sigma_1^3}$.

$$\begin{aligned} P_T(\lambda, q) &= \left(\frac{q\lambda-1}{\sqrt{\lambda}(1-q)} \right)^{2-1} \left(\sqrt{\lambda} \right)^3 (\text{tr} \circ \pi)(\sigma_1^3) = \left(\frac{q\lambda-1}{\sqrt{\lambda}(1-q)} \right) \left(\sqrt{\lambda} \right)^3 \text{tr}(g_1^3) \\ &= -\lambda^2 q^2 + q^2 \lambda + \lambda. \end{aligned}$$

2. Calcular el polinomio de HOMFLY-PT del Hopf Link $H = \widehat{\sigma_1^2}$.

$$\begin{aligned}
 P_H(\lambda, q) &= \left(\frac{q\lambda - 1}{\sqrt{\lambda}(1-q)} \right)^{2-1} (\sqrt{\lambda})^2 (\text{tr} \circ \pi)(\sigma_1^2) \\
 &= \left(\frac{q\lambda - 1}{\sqrt{\lambda}(1-q)} \right) \lambda \text{tr}(g_1^2) \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{a} [q + (q-1)a] \\
 &= \sqrt{\lambda} \left(\frac{\lambda q^2 - q}{1-q} + q - 1 \right) \\
 &= \sqrt{\lambda} \left(\frac{\lambda q^2 - q^2 + q - 1}{1-q} \right).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.4. Grupos de Coxeter

La motivación para estudiar los grupos de Coxeter en este trabajo surge del hecho de que el grupo simétrico S_n es un ejemplo de grupo de Coxeter. Además, existe una relación estrecha entre los grupos de Coxeter y los grupo de trenzas (o de Artin). En particular presentaremos el grupo de Coxeter de tipo B el cual se utilizará más adelante.

Una matriz $M : S \times S \longrightarrow \{1, 2, \dots, \infty\}$ que es simétrica, y con unos en su diagonal es llamada matriz de Coxeter si satisface:

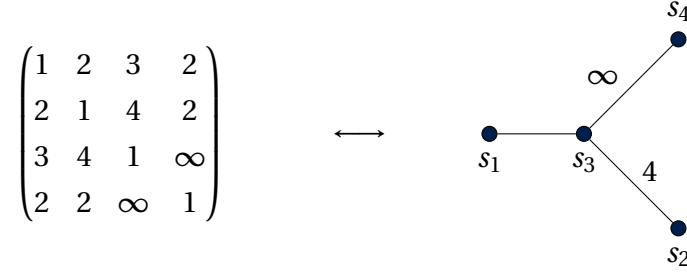
$$\begin{aligned}
 M(s, s') &= M(s', s), \\
 M(s, s') &= 1 \iff s = s'.
 \end{aligned}$$

Notemos que, por la definición de M , esta puede contener entradas iguales a ∞ .

Definición 1.23. Un grupo de Coxeter W es un grupo con presentación $W = \langle S | R \rangle$, donde las relaciones en R son de la siguiente forma: $(s_i s_j)^{m_{i,j}} = e$, donde $M = (m_{i,j})$ es la matriz de Coxeter para todo $s_i, s_j \in S$.

Además, M puede representarse de manera diagramática mediante un *grafo de Coxeter*, cuyo conjunto de vértices es S y cuyas aristas corresponden a los pares ordenados (s, s') tales que $M(s, s') \geq 3$. En el caso que $M(s, s') \geq 4$, la arista se etiqueta con el valor

numérico de la entrada $m_{i,j}$. Así por ejemplo



Observación 7.

1. Como $m_{i,i} = 1$, para todo $i \in |S|$ entonces se tiene

$$s_i s_j = s_i^2 = e.$$

2. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$, notar que la relación $(s_i s_j)^k = \underbrace{(s_i s_j)(s_i s_j) \cdots (s_i s_j)}_{k\text{-veces}}$, se puede reescribir como sigue:

$$s_i s_j \cdots s_x = s_j s_i \cdots s_y,$$

con

$$x = \begin{cases} j, & \text{si } k \text{ es par,} \\ i, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases} \quad y = \begin{cases} i, & \text{si } k \text{ es par,} \\ j, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ejemplo 8. Si $k = 3$, entonces

$$(s_i s_j)^3 = e \implies (s_i s_j)(s_i s_j)(s_i s_j) = e \implies s_i s_j s_i s_j s_i = s_j \implies s_i s_j s_i = s_j s_i s_j.$$

En particular el grupo simétrico S_n es un grupo de Coxeter ya que:

$$S_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{l} s_i^2 = e \\ s_i s_j = s_j s_i, \quad |i - j| > 1 \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j, \quad |i - j| = 1 \end{array} \right. \right\rangle \cong \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{l} s_i^2 = e \\ (s_i s_j)^2 = e \\ (s_i s_j s_i)^3 = e \end{array} \right. \right\rangle$$

Luego, la matriz y el grafo de Coxeter de S_n son los siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 2 \\ 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \dots & 3 & 1 \end{pmatrix}_{n-1 \times n-1} \longleftrightarrow \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \bullet \\ s_1 & s_2 & & & & s_{n-2} & s_{n-1} \end{array}$$

Recordar, que el grupo cíclico de orden 2, denotado por C_2 , es isomorfo al grupo definido por la presentación:

$$C_2 \cong \langle t \mid t^2 = e \rangle.$$

Ahora, consideremos el grupo $C_2^n := \underbrace{C_2 \times C_2 \times \dots \times C_2}_{n \text{ veces}}$, es decir; el producto directo de n -copias del grupo cíclico de orden 2.

Definición 1.24. Consideremos el grupo $C_2^n \rtimes_{\varphi} S_n$, donde;

$$\begin{aligned} \varphi: S_n &\longrightarrow \text{Aut}(C_2^n) \\ \sigma &\longmapsto \varphi_{\sigma}: C_2^n \longrightarrow C_2^n \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \sigma \cdot (a_1, \dots, a_n) = a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Los generadores de $C_2^n \rtimes_{\varphi} S_n$, son; $s_1, \dots, s_n, b_1, \dots, b_n$ y relaciones;

1. $s_i^2 = e$,
2. $s_i s_j = s_j s_i$, para todo $|i - j| > 1$,
3. $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$, para todo $|i - j| = 1$,
4. $b_i^2 = e$,
5. $b_i b_j = b_j b_i$, para todo i ,
6. $s_j b_i s_j = b_{s_j(i)}$, para todo i .

Donde $b_i = (e, \dots, t, \dots, e, e)$, con t en i -ésima posición donde $1 \leq i \leq n$.

Notar que $s_1 b_1 s_1^{-1} = s_1 b_1 = s_1(t, e, \dots, e) = (e, t, \dots, e) = b_2$. Más generalmente, se tiene que $b_i = s_{i-1} \dots s_1 b_1 s_1 \dots s_{i-1}$. Luego se puede probar que $C_2^n \rtimes_{\varphi} S_n$, es isomorfo a el grupo generado por $b_1, s_1, \dots, s_{n-1}$ con las siguientes relaciones;

1. $(b_1 s_i)^4 = e$,
2. $s_i^2 = e$,
3. $b_1^2 = e$,
4. $b_1 s_i = s_i b_1$, $i \geq 2$,
5. $s_i s_j = s_j s_i$, para todo $|i - j| > 1$,
6. $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$, para todo $|i - j| = 1$.

Luego, tenemos la siguiente matriz y grafo de Coxeter.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & \dots & 2 \\ 4 & 1 & 3 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{ccccccc} & 4 & & & & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \\ b_1 & s_1 & s_2 & & s_{n-2} & s_{n-1} \end{array}$$

Sea S_n^B el grupo de permutaciones signadas, es decir el subgrupo de S_{2n} formado por todas las permutaciones signadas de todas las biyecciones ω del conjunto $[\pm n] = \{-n, \dots, n\}$ tal que

$$\omega(-a) = -\omega(a), \quad \text{para todo } a \in [\pm n].$$

Note que $\omega \in S_n^B$ queda completamente definido por las imágenes de $\{\omega(n), \dots, \omega(1)\}$. Luego un elemento $\omega \in S_n^B$ puede pensarse como una n -tupla $(\omega(1), \omega(2), \dots, \omega(n))$, luego $|S_n^B| = 2^n n!$. Además, se puede probar que S_n^B es isomorfo a $C_2^n \rtimes_\varphi S_n$.

Capítulo 2

La bt – álgebra de tipo A

En [5], Aicardi y Juyumaya introducen el álgebra de trenzas y ties (o bt-álgebra), denotada por $\mathcal{E}_n := \mathcal{E}_n(q)$. Su nombre se debe a la representación diagramática de ésta, la cual detallaremos más adelante. Esta álgebra fue definida en ([25, Definición 1]), y emerge como una subálgebra de el álgebra de Yokonuma-Hecke.

2.1. Monoide de particiones

Definición 2.1. Sea $[n] := \{1, \dots, n\}$. Una partición del conjunto $[n]$ es una familia $(I_1, \dots, I_k)$ con $I_j \subseteq [n]$ tal que:

1. $I_j \neq \emptyset$, para todo $j = 1, \dots, k$.
2. $I_i \cap I_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$.
3. $\bigcup_{j=1}^k I_j = [n]$.

Denotaremos por P_n al conjunto de todas las particiones de $[n]$.

- Los conjuntos $I_1, \dots, I_k$ se denominarán bloques de I .
- El cardinal de P_n esta dado por el n -ésimo número de Bell, denotado por b_n .
- Notar que el grupo simétrico actúa de manera natural en P_n , es decir; dado $\sigma \in S_n$ y $I \in P_n$ se tiene la acción

$$\sigma \cdot I = (\sigma\{I_1\}, \dots, \sigma\{I_k\}). \quad (2.1)$$

Ejemplo 9. Para $n = 3$, se tiene que

$$P_3 = \{(\{1\}, \{2\}, \{3\}), (\{1\}, \{2, 3\}), (\{2\}, \{1, 3\}), (\{3\}, \{1, 2\}), (\{1, 2, 3\})\}.$$

Los elementos de P_n pueden representarse mediante un gráfico lineal. Por ejemplo, si $I = (\{1, 3\}, \{4\}, \{2, 5\})$, su representación gráfica es la siguiente:

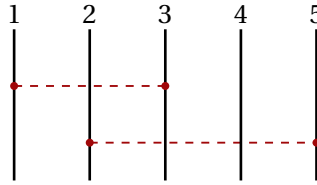
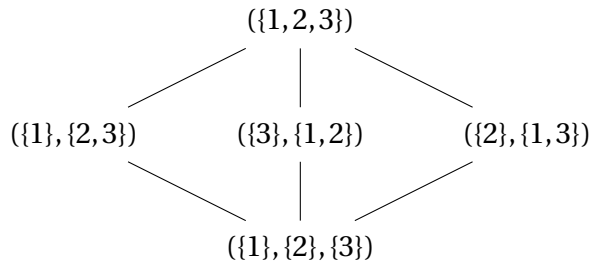


Figura 2.1: Representación del bloque I .

Observemos que, a partir de este ejemplo, podemos concluir que los bloques solo nos proporcionan información sobre que hebras están relacionadas entre sí.

Sean $I = (I_1, \dots, I_k)$ y $J = (J_1, \dots, J_\ell)$ particiones de P_n . Decimos que $I \preceq J$ si todo bloque de J , es una unión de bloques de I .

Notar que $\preceq$ define un orden parcial. Por ejemplo, el diagrama de Hasse de P_3 es el siguiente.



Definición 2.2. Sean I, J dos particiones definimos la operación $*$ en P_n como sigue:

$$I * J := \min\{K \mid I \preceq K \wedge J \preceq K\}.$$

Así, el conjunto P_n , junto con el producto $*$, posee una estructura de monoide.

Ejemplo 10. Sean $I = (\{1, 4\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5\})$ y $J = (\{1, 2, 4\}, \{3, 6\}, \{5\})$.

$$I * J = (\{1, 2, 3, 4, 6\}, \{5\}).$$

En adelante no escribiremos los bloques de cardinalidad 1, es decir, escribiremos $(\{3, 4, 6\})$ en lugar de $(\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 6\}, \{5\})$ en P_6 .

Definición 2.3. Para todo $1 \leq i < j \leq n$, definimos la partición $\mu_{i,j} = (\{i, j\}) \in P_n$ como aquella partición donde el único bloque no trivial es el $\{i, j\}$.

Además,

$$\mu_{i,j} * \mu_{k,\ell} = \begin{cases} (\{i, j\}, \{k, \ell\}), & \text{si } \{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \emptyset, \\ (\{i, j, k, \ell\}), & \text{si } \{i, j\} \cap \{k, \ell\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Por simplicidad en adelante escribiremos $\mu_{i,j}\mu_{k,\ell}$ en lugar de $\mu_{i,j} * \mu_{k,\ell}$. Además, se tiene la siguiente proposición.

Teorema 2.1. (Ver [14]) Para todo $1 \leq i < j \leq n$ el monoide P_n puede ser presentado por los generadores $\mu_{i,j}$ y las siguientes relaciones:

1. $\mu_{i,j}^2 = \mu_{i,j}$, para todo $i < j$,
2. $\mu_{i,j}\mu_{k,\ell} = \mu_{k,\ell}\mu_{i,j}$, para todo $i < j$ y $k < \ell$,
3. $\mu_{i,j}\mu_{j,k} = \mu_{i,k}\mu_{j,k} = \mu_{i,j}\mu_{i,k}$, para todo $i < j < k$.

Definición 2.4. Definimos P_∞ como el monoide obtenido a partir del límite inductivo de la familia $\{(P_n, \tau_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde cada τ_n es un monomorfismo del monoide P_n en P_{n+1} . Para $I \in P_n$, la imagen $\tau_n(I)$ en P_{n+1} es la partición que se obtiene de agregar el bloque $n+1$ a I .

2.2. El monoide de trenzas ligadas

Dado que S_n actúa sobre P_n , se tiene un homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : S_n &\longrightarrow \text{Aut}(P_n) \\ \sigma &\longmapsto \psi_\sigma : P_n \longrightarrow P_n \\ I &\longmapsto \sigma \cdot I. \end{aligned}$$

Así, podemos definir $TB_n := P_n \rtimes_\psi B_n$, donde

$$\begin{aligned} \psi : B_n &\longrightarrow \text{Aut}(P_n) \\ \alpha &\longmapsto \psi_\alpha : P_n \longrightarrow P_n \\ I &\longmapsto \sigma_\alpha \cdot I. \end{aligned}$$

Donde $\sigma_\alpha = \pi(\alpha)$ y π es la proyección de B_n en S_n definida la observación en 6. Como se conoce la presentación de P_n y B_n , se tiene que TB_n es el monoide generado por $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\} \cup \{\mu_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\}$ sujeta a las siguientes relaciones:

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, si $|i - j| > 1$,
2. $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$, si $|i - j| = 1$,
3. $\mu_{i,j}^2 = \mu_{i,j}$, para todo $i < j$,
4. $\mu_{i,j} \mu_{k,\ell} = \mu_{k,\ell} \mu_{k,\ell}$, para todo $i < j$ y $k < \ell$,
5. $\mu_{i,j} \mu_{j,k} = \mu_{i,k} \mu_{j,k} = \mu_{i,j} \mu_{i,k}$, para todo $i < j < k$,
6. $\sigma_k \mu_{i,j} \sigma_k^{-1} = \mu_{s_k(i), s_k(j)}$, para todo $i < j$ y $1 \leq k \leq n - 1$.

Equivalentemente podemos presentar TB_n con generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-1}$ y las relaciones:

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, si $|i - j| > 1$,
2. $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$, si $|i - j| = 1$,
3. $e_i^2 = e_i$, para todo $1 \leq i \leq n - 1$,
4. $e_i e_j = e_j e_i$, para todo $1 \leq i, j \leq n - 1$,
5. $\sigma_i e_j = e_i \sigma_i$, para todo $1 \leq i, j \leq n - 1$,
6. $e_i \sigma_j = \sigma_j e_i$, si $|i - j| > 1$,
7. $e_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i e_j$, si $|i - j| = 1$,
8. $e_i e_j \sigma_i = e_j \sigma_i e_j = \sigma_i e_i e_j$, si $|i - j| = 1$,
9. $e_i \sigma_j \sigma_i^{-1} = \sigma_j \sigma_i^{-1} e_j$, si $|i - j| = 1$.

El monoide TB_n se puede ser representado de manera diagramática vía sus generadores como sigue:

Figura 2.2: Generadores de TB_n .

Al igual que los generadores, las relaciones también pueden interpretarse mediante diagramas.

Figura 2.3: Relación $e_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i e_j$.

La definición original del monoide TB_n surge del álgebra de braids and ties, motivada por su representación diagramática. Posteriormente, se demostró que esta estructura es isomorfa al producto semidirecto presentado en esta sección, para los detalles se remite a [6, Teorema 10].

2.3. La bt – álgebra

En [5], Aicardi y Juyumaya introducen el álgebra de trenzas y ligas, conocida también como bt-álgebra y denotada por $\mathcal{E}_n(q)$. Esta se define de manera abstracta como una subálgebra del álgebra de Yokonuma-Hecke $Y_{d,n}(q)$. Más tarde, en [4, Teorema 3], se construye una traza de Markov sobre $\mathcal{E}_n(q)$. Luego, utilizando el método desarrollado por Jones (ver [24]), esta traza permite construir invariantes tanto para nudos clásicos como para nudos singulares.

Definición 2.5. Definimos la bt-álgebra como el álgebra de monoide $\mathbb{C}[q][TB_n]$ co-cientado por el ideal generado por los elementos $\sigma_i^2 - (q-1)e_i\sigma_i - (q-1)e_i - 1$, para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Denotamos esta álgebra como $\mathcal{E}_n(q) := \mathbb{C}[q][TB_n]/I$ donde T_i y E_i son las clases de σ_i y e_i respectivamente.

Además, el álgebra $\mathcal{E}_n(q)$ puede ser vista como el álgebra generada por $T_1, \dots, T_{n-1}$ generadores de trenzas y $E_1, \dots, E_{n-1}$ generadores tied, sujeta a las siguientes relaciones:

1. $T_i T_j = T_j T_i$, si $|i - j| > 1$,
2. $T_i T_j T_i = T_j T_i T_j$, si $|i - j| = 1$,
3. $E_i^2 = E_i$, para todo $1 \leq i \leq n - 1$,
4. $E_i E_j = E_j E_i$, para todo $1 \leq i, j \leq n - 1$,
5. $T_i E_j = E_i T_i$, para todo $1 \leq i, j \leq n - 1$,
6. $E_i T_j = T_j E_i$, si $|i - j| > 1$,
7. $E_i T_j T_i = T_j T_i E_j$, si $|i - j| = 1$,
8. $E_i E_j T_i = E_j T_i E_j = T_i E_i E_j$, si $|i - j| = 1$,
9. $T_i^2 = 1 + (q - 1) E_i + (q - 1) E_i T_i$.

Observación 8.

1. A partir de la relación cuadrática, se puede concluir que los elementos T_i' s son invertibles, es decir, se verifica:

$$T_i'^{-1} = T_i + (q^{-1} - 1) E_i + (q^{-1} - 1) E_i T_i.$$

2. Si en las relaciones sustituimos T_i por V_i donde $V_i = T_i \left(\frac{1}{\sqrt{q}} - 1 \right) E_i T_i$, obtenemos una representación alternativa de $\mathcal{E}_n(q)$. En este caso, la relación cuadrática asociada está dada por:

$$V_i^2 = 1 + \left(\sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}} \right) E_i V_i.$$

3. Además, se tiene la cadena $\mathcal{E}_1(q) \hookrightarrow \mathcal{E}_2(q) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{E}_n(q) \hookrightarrow \mathcal{E}_{n+1}(q)$, por lo tanto podemos definir el siguiente límite inductivo:

$$\mathcal{E}_\infty(q) := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n(q).$$

2.3.1. Invariante derivado del álgebra $\mathcal{E}_n(q)$

En [5] y [34] se prueba que $\mathcal{E}_n(q)$ tiene dimensión finita, dada por $b_n n!$, donde b_n es el n -ésimo número de Bell. Adicionalmente, se prueba la existencia de una traza de Markov sobre $\mathcal{E}_n(q)$.

Teorema 2.2. ([4, Teorema 3]). Sean a y b dos parámetros en $\mathbb{C}$. Para todo $n > 1$ existe una familia de funciones $\mathbb{C}$ -lineales $\text{tr}_n : \mathcal{E}_n(q) \rightarrow \mathbb{C}(a, b)$, llamada traza de Markov, que cumple la siguientes propiedades:

1. $\text{tr}_n(1) = 1$,
2. $\text{tr}_n(AB) = \text{tr}_n(BA)$, para todo $A, B \in \mathcal{E}_n(q)$,
3. $\text{tr}_{n+1}(BT_n) = \text{tr}_{n+1}(BE_n T_n) = a \text{tr}_n(B)$, para todo $B \in \mathcal{E}_n(q)$,
4. $\text{tr}_{n+1}(BE_n) = b \text{tr}_n(B)$, para todo $B \in \mathcal{E}_n(q)$.

Como los generadores T_i 's de $\mathcal{E}_n$ cumplen las relaciones de trenzas se tiene que la función $\sigma_i \mapsto T_i$ define un homomorfismo $\pi : B_n \rightarrow \mathcal{E}_n(q)$. Luego, se tiene

$$B_n \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}_n(q) \xrightarrow{\text{tr}_n} \mathbb{C}(a, b).$$

Así, $(\text{tr} \circ \pi)$ constituye es una invariante de nudos, salvo un proceso de reescalamiento y normalización. Para ello se define:

$$\begin{aligned} \pi_w : B_n &\longrightarrow \mathcal{E}_n(q) \\ \sigma_i &\longmapsto w T_i \end{aligned}$$

donde w es un parámetro en $\mathbb{C}$. Veamos que se cumpla: $(\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha \sigma_n) = (\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha \sigma_n^{-1})$. En efecto,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\pi_w(\alpha) \pi_w(\sigma_n)) &= \text{tr}(\pi_w(\alpha) \pi_w(\sigma_n^{-1})) \\ \text{tr}(\pi_w(\alpha) w T_n) &= \text{tr}((\pi_w(\alpha) w^{-1} T_n^{-1}) \\ w a \text{tr}(\pi_w(\alpha)) &= w^{-1} \text{tr}(\pi_w(\alpha) (T_n + (q^{-1} - 1) E_n + (q^{-1} - 1) E_n T_n)) \\ w^2 a \text{tr}(\pi_w(\alpha)) &= a \text{tr}(\pi_w(\alpha)) + b (q^{-1} - 1) \text{tr}(\pi_w(\alpha)) + a (q^{-1} - 1) \text{tr}(\pi_w(\alpha)) \\ w^2 a &= a + b (q^{-1} - 1) + a q^{-1} - a \\ w^2 &= \frac{b(1 - q) + a}{q a} \implies w = \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Donde, $\lambda = \frac{b(1-q) + a}{qa}$. Luego, $a = \frac{b(1-q)}{\lambda q - 1}$.

Observación 9. Cuando $b = 1$, se obtiene el mismo factor de reescalamiento que en el caso HOMFLY–PT.

Definición 2.6. Sea L un link, definimos

$$\Delta(L) := \frac{(\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha)}{(\text{tr} \circ \pi_w)(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})},$$

para $L = \hat{\alpha}$ con $\alpha \in B_n$.

Como antes notemos que

$$(\text{tr} \circ \pi_w)(\alpha) = W^{e(\alpha)}(\text{tr} \circ \pi)(\alpha),$$

y

$$\begin{aligned} (\text{tr} \circ \pi_w)(\sigma \cdots \sigma_{n-1}) &= w^{n-1}(\text{tr} \circ \pi)(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) \\ &= w^{n-1}(\text{tr}(T_1) \cdots \text{tr}(T_{n-1})) \\ &= w^{n-1} a^{n-1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\lambda} (b(1-q))}{\lambda q - 1} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos reescribir la definición 2.6 como sigue:

Definición 2.7. (Polinomio Δ)

$$\Delta(L) = \left(\frac{\sqrt{\lambda} (1-q) b}{\lambda q - 1} \right)^{n-1} \left(\sqrt{\lambda} \right)^{e(\alpha)} (\text{tr} \circ \pi)(\alpha).$$

Teorema 2.3. ([4, Teorema 4]) La función Δ es un invariante para links clásicos.

Observación 10. Si consideramos la bt–álgebra con su presentación alternativa, es decir, con los generadores $V_1, \dots, V_i, E_1, \dots, E_n$, podemos definir el invariante Θ de manera analoga, salvo por un procedimiento de reescalado y normalización.

Cabe destacar que los invariantes Δ y Θ son equivalentes al polinomio HOMFLY–PT para nudos, pero tienen la capacidad de distinguir pares de links que el polinomio HOMFLY–PT no distingue. Por lo tanto, los invariantes Δ y Θ son más fuertes que el polinomio HOMFLY–PT (ver [11, Teorema 9.2]).

Capítulo 3

Invariantes de links en el toro sólido

En este capítulo, se introducen las definiciones de links y trenzas en el toro sólido, así como las álgebras de Hecke y la bt-álgebra de tipo B (ver [17, 28, 29]). Posteriormente, se estudiarán los teoremas análogos de Alexander y Markov en este contexto. Además, se analizará la existencia de las trazas de Markov correspondientes, esenciales para la construcción de invariantes. Por último, se presentarán los invariantes obtenidos en cada caso.

3.1. Nudos y trenzas en el toro sólido

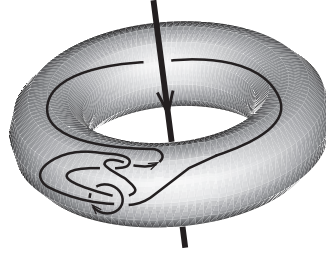
Es un hecho bien conocido que S^3 puede ser interpretado como la unión de dos toros sólidos que se encuentran pegados a lo largo de su frontera. Formalmente, esto se expresa como $S^3 = M_1 \cup M_2$, donde los M_i 's son 3-bolas unidas a lo largo de sus fronteras. A continuación, definimos $D_1 = M_1 \setminus \text{int}(V(\gamma))$ y $D_2 = M_2 \cup V(\gamma)$, donde γ es un arco no anudado incrustado en M_1 , y $V(\gamma)$ es una vecindad regular de γ .

Así, el toro sólido, denotado por ST , puede ser interpretado como el complemento de otro toro sólido D_1 en S^3 , es decir, $ST = S^3 \setminus D_1$.

Definición 3.1. Un nudo $\mathcal{K}$ en ST , se define como un nudo clásico que está completamente contenido en el interior del toro sólido. Además, un link L en ST de n componentes es la unión disjunta de n nudos en ST .

Además, denotaremos por $\mathcal{L}_{ST}$ al conjunto de todos los links en ST .

Nota 1. Un link L en ST se llama afín si está contenido en una 3-bola dentro de ST . Por lo tanto, los links clásicos en S^3 pueden considerarse como links afines en ST .

Figura 3.1: Nudo en ST .

Cabe destacar que cualquier link L en ST puede describirse como la proyección de un link estándar en S^3 , que interactúa con una componente fija no anudada. Esta componente representa el toro sólido complementario a ST en S^3 y, en conjunto, conforman lo que se denomina un mixed-link.

Figura 3.2: Link en ST visto como mixed-link.

Definición 3.2. Dos links L y L' en ST son isotópicos si y sólo si sus correspondientes mixed-link en S^3 lo son.

De forma análoga al caso clásico, es posible definir un grupo conocido como el grupo de trenzas de tipo B. Este grupo, junto con su presentación, los correspondientes teoremas de Markov y Alexander, y las trazas asociadas, permite construir invariantes de links en este contexto.

Definición 3.3. Una trenza de tipo B se define como una trenza clásica, compuestas por $n + 1$ cuerdas, donde la primera cuerda permanece fija. Las cuerdas restantes, desde la segunda hasta la $(n + 1)$ -ésima, se denominan cuerdas móviles.

Definición 3.4. Sean α y β dos trenzas de tipo B consideradas como trenzas clásicas de $n + 1$ cuerdas. Decimos que α y β son equivalentes si existe una isotopía entre ellas.

El diagrama de una n -trenza de tipo B se puede obtener proyectando la trenza como se ilustra a continuación.

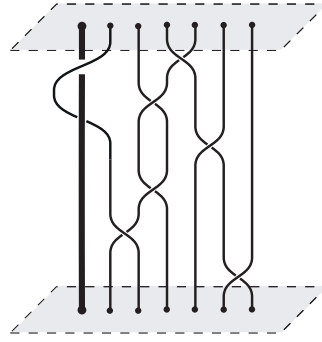


Figura 3.3: Una 6-trenza de tipo B.

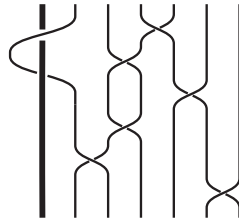


Figura 3.4: Diagrama de una 6-trenza de tipo B.

Note que en la figura (3.4) la cuerda más gruesa representa la cuerda fija. Además, denotaremos por $\widetilde{W}_n$ al conjunto de clases de equivalencia de n -trenzas de tipo B bajo isotopía. De forma análoga a lo desarrollado en la sección 1.2, se puede definir producto concatenación (*) entre trenzas de tipo B.

Proposición 3.1. (Ver [28]). *El conjunto de trenzas de tipo B junto con el producto concatenación forman un grupo denotado por el cual es conocido como grupo de trenzas de tipo B. Y tiene la siguiente presentación, con generadores $r, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ y relaciones:*

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, para $|i - j| > 1$,
2. $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$, para $|i - j| = 1$,
3. $r \sigma_i = \sigma_i r$, para $i > 1$,
4. $r \sigma_1 r \sigma_1 = \sigma_1 r \sigma_1 r$.

Los elementos σ'_i s y r se pueden representar mediante los siguientes diagramas.



Figura 3.5: Generadores de $\widetilde{W}_n$.

Observación 11.

1. Existe un epimorfismo natural $\phi: \widetilde{W}_n \longrightarrow S_n$, definido por $r \longmapsto 1$ y $\sigma_i \longmapsto s_i$.
2. Además, note que $\widetilde{W}_\infty := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{W}_{n+1}$.

3.1.1. Teorema de Alexander y Markov para links en el toro sólido

Los teoremas de Alexander y Markov, en el contexto de links en el toro sólido, fueron establecidos por Sofía Lambropoulou en el año 1993 (ver [28, 29]). De manera análoga a la definición de la clausura de una trenza clásica, se introduce la siguiente definición.

Definición 3.5. Sea α una trenza de tipo B. La clausura de la trenza α es un link en ST que se obtiene al conectar los puntos iniciales y finales de α mediante arcos. Denotaremos dicha clausura por $\widehat{\alpha}$.

Teorema 3.1 (Alexander para links en el toro sólido). *Para todo link orientado L en ST , existe $\alpha \in \widetilde{W}_\infty$ tal que $\widehat{\alpha} \sim L$.*

La demostración de este hecho se realiza mediante un enfoque algorítmico usando el teorema de Alexander clásico. Se recomienda consultar [29, Teorema 1] para detalles.

Definición 3.6. Sean $\alpha, \beta \in \widetilde{W}_n$. Definimos los movimientos de Markov como sigue:

M1. $\alpha\beta \rightleftharpoons \beta\alpha$,

M2. $\alpha \rightleftharpoons \alpha\sigma_n^{\pm 1}$.

Además, decimos que α y β son Markov equivalentes si es posible obtener β a partir de α mediante una sucesión finita de movimientos de Markov. En tal caso, lo denotamos por $\alpha \sim_{M_{ST}} \beta$.

Teorema 3.2 (Markov para links en el toro sólido). *Sean $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ dos trenzas de tipo B clausuradas obtenidas de α y β respectivamente, entonces:*

$$\alpha \sim_{M_{ST}} \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \hat{\alpha} \sim \hat{\beta}.$$

Una demostración rigurosa y detallada del teorema presentado se puede consultar en [29, Teorema 2].

Luego, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de clases de isotopía de links en ST y la clases de trenza de tipo B Markov equivalentes, es decir:

$$\mathcal{L}_{ST} / \sim \quad \text{si y sólo si} \quad \widetilde{W}_{\infty} / \sim_{M_{ST}}.$$

3.1.2. Álgebra de Hecke de tipo B

Definición 3.7. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $n \geq 1$ y sean q, Q dos parámetros en $\mathbb{C}$. Definimos el álgebra de Hecke de tipo B denotado por $H_n(q, Q)$ como la $\mathbb{K}(q, Q)$ -álgebra generada por $b_1, g_1, \dots, g_{n-1}$ y las siguientes relaciones:

1. $g_i g_j = g_j g_i$, si $|i - j| > 1$,
2. $g_i g_j g_i = g_j g_i g_j$, si $|i - j| = 1$,
3. $g_i^2 = q + (q - 1)g_i$,
4. $b_1^2 = Q + (Q - 1)b_1$,
5. $b_1 g_1 b_1 g_1 = g_1 b_1 g_1 b_1$,
6. $b_1 g_i = g_i b_1$, para todo $i > 1$.

1. La tercera y cuarta relación, conocida como relación cuadrática, nos permite observar que, cuando $q = Q = 1$, se cumple que $g_i^2 = 1$ y $b_1^2 = 1$, lo que implica que $H_n(q, Q) = \mathbb{K}[W_n]$. De este modo, se puede interpretar que el álgebra de Hecke de tipo B es una deformación de la $\mathbb{K}$ -álgebra del grupo de Coxeter W_n .
2. Existe una representación (homomorfismo) natural $\rho : \widetilde{W}_n \longrightarrow H_n(q, Q)$, definido por $\sigma_i \longmapsto g_i$ y $r \longmapsto b_1$.

3. $H_n(q, Q) \cong \mathbb{K}[\widetilde{W}_n] / I$, donde I es el ideal generado por los elementos

$$g_i^2 - q - (q-1)g_i \quad \text{y} \quad b_1^2 - Q - (Q-1)b_1, \quad \text{si } 1 \leq i \leq n-1.$$

4. Además, se tiene $H_1(q, Q) \hookrightarrow H_2(q, Q) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow H_n(q, Q) \hookrightarrow H_{n+1}(q, Q)$, por lo tanto podemos definir el siguiente límite inductivo:

$$H_\infty(q, Q) := \coprod_{n \in \mathbb{N}} H_n(q, Q).$$

5. A partir de la relación cuadrática, se puede concluir que los elementos g_i 's son invertibles, es decir; $g_i^{-1} = q^{-1}g_i + q^{-1} - 1$ y $b_1^{-1} = Q^{-1}b_1 + Q^{-1} - 1$.

3.1.3. La invariante de Sofía Lambropoulou

En esta sección se propone generalizar el polinomio 1.22 estudiado en el capítulo anterior. La filosofía subyacente para construir este invariante generalizado es la misma: se emplea una representación del grupo de trenzas de tipo B junto con una función traza como herramientas fundamentales.

Lema 3.1. *Para $n > 1$, todo monomio en $H_n(q, Q)$ se puede escribir como combinación lineal de monomios en donde los elementos g_{n-1} ó b_{n-1} aparece a lo más una vez.*

Definición 3.8. Definimos el siguiente conjunto de manera inductiva como sigue:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{1, b_1\} \\ T_i &= \{1, b_{i-1}\} \cup \{g_{i-1}x \mid x \in T_{i-1}\}, \quad \text{para todo } 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Donde $b_k := g_{k-1} \cdots g_1 b_1 g_1^{-1} \cdots g_{k-1}^{-1}$, para todo $k \geq 2$. Por convención fijamos $b_1 = b_1$.

Definición 3.9. Definimos el siguiente conjunto en términos de los T'_i 's como sigue

$$J_n = \{m_1 \cdots m_n \mid m_i \in T_i\}.$$

Teorema 3.3. *El conjunto J_n es una base lineal de $H_n(q, Q)$.*

La demostración del resultado anterior se puede ver en la conclusión de la página 11 de [29]. Usando la base J_n es posible construir una traza de Markov para el álgebra $H_n(q, Q)$.

Teorema 3.4. (Ver [28, Teorema 12]). Sea a, b y c tres parámetros en $\mathbb{C}$. Para todo $n > 1$ existe una familia de funciones $\mathbb{C}$ -lineales

$$\mathrm{tr}_n : H_n(q, Q) \longrightarrow \mathbb{C}(a, b, c),$$

llamada traza de Markov, que cumple la siguientes propiedades:

1. $\mathrm{tr}_n(1) = 1$,
2. $\mathrm{tr}_n(AB) = \mathrm{tr}_n(BA)$, para todo $A, B \in H_n(q, Q)$,
3. $\mathrm{tr}_{n+1}(Bg_n) = a \mathrm{tr}_n(B)$, para todo $B \in H_n(q, Q)$,
4. $\mathrm{tr}_{n+1}(Ab_{n+1}) = c \mathrm{tr}_n(A)$, para todo $A \in H_n(q, Q)$.

Ejemplo 11. Calcular $\mathrm{tr}(b_1^3)$ y $\mathrm{tr}(b_1 g_1^2)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(b_1^3) &= \mathrm{tr}(b_1 b_1^2) & \mathrm{tr}(b_1 g_1^2) &= \mathrm{tr}(b_1 [q + (q-1) g_1]) \\ &= \mathrm{tr}(g_1 (Q + (Q-1) b_1)) & &= \mathrm{tr}(q b_1 + (q-1) b_1 g_1) \\ &= \mathrm{tr}(Q b_1 + (Q-1) b_1^2) & &= q \mathrm{tr}(b_1) + (q-1) \mathrm{tr}(b_1 g_1) \\ &= \mathrm{tr}(Q b_1 + (Q-1)[Q + (Q-1) b_1]) & &= qc + (q-1) a \mathrm{tr}(b_1) \\ &= \mathrm{tr}(Q b_1 + (Q-1)Q + (Q-1)^2 b_1) & &= qc + (q-1) ac. \\ &= Qc + Q(Q-1) + (Q-1)^2 c. \end{aligned}$$

Así, se tiene el siguiente diagrama de funciones

$$\widetilde{W}_n \xrightarrow{\rho} H_n(q, Q) \xrightarrow{\mathrm{tr}_n} \mathbb{C}(a, b, c),$$

donde $\rho(\sigma_i) = g_i$ y $\rho(r) = b_1$ son representaciones y tr_n son funciones $\mathbb{C}$ -lineales. Luego, dado que ρ es un homomorfismo y $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ se sigue que $(\mathrm{tr} \circ \rho)$ respeta (M1), es decir; se cumple $(\mathrm{tr} \circ \rho)(\alpha\beta) = (\mathrm{tr} \circ \rho)(\beta\alpha)$.

Sin embargo, no se cumple (M2), para ello como antes necesitamos rescalar y normalizar el homomorfismo ρ .

Sea

$$\begin{aligned} \rho_w : \widetilde{W}_n &\longrightarrow H_n(q, Q) \\ \sigma_i &\longmapsto w g_i \\ r &\longmapsto b_1 \end{aligned}$$

donde w es un parámetro en $\mathbb{C}$. Queremos que se cumpla:

$$(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\alpha \sigma_n) = (\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\alpha \sigma_n^{-1}),$$

luego se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\rho_w(\alpha) \rho_w(\sigma_n)) &= \mathrm{tr}(\rho_w(\alpha) \rho_w(\sigma_n^{-1})) \\ \mathrm{tr}(\rho_w(\alpha) w g_n) &= \mathrm{tr}((\rho_w(\alpha) w^{-1} g_n^{-1})) \\ w a &= w^{-1} ((q^{-1} - 1) + q^{-1} a) \\ w^2 &= \frac{1 - q + a}{q a} \\ w &= \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

donde, $\lambda = \frac{1 - q + a}{q a}$ y $a = \frac{1 - q}{q \lambda - 1}$.

De lo anterior se concluye $(\mathrm{tr} \circ \rho_w)$ respeta los movimientos de Markov.

Definición 3.10. Sea L un link de tipo B definimos:

$$\mathbf{X}_L(q, Q, \lambda) := \frac{(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\alpha)}{(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})}$$

para $L = \hat{\alpha}$ con $\alpha \in \widetilde{W}_n$.

Además al igual que en la sección (1.3.2) se tiene

$$(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\alpha) = w^{e(\alpha)} (\mathrm{tr} \circ \rho)(\alpha),$$

donde, $e: \widetilde{W}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ es el homomorfismo definido por $\sigma_i \mapsto 1$ y $r \mapsto 0$.

Por consiguiente

$$(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) = w^{n-1} (\mathrm{tr}(g_1) \cdots \mathrm{tr}(g_{n-1})) = \left(\frac{\sqrt{\lambda} (1 - q)}{q \lambda - 1} \right)^{n-1}.$$

Por lo tanto, podemos reescribir la definición 3.10 y obtener el siguiente polinomio generalizado de HOMFLY-PT de la siguiente forma:

Definición 3.11. (Polinomio de Lambropoulou)

$$\mathbf{X}_L(q, Q, \lambda) = \left(\frac{q\lambda - 1}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{e(\alpha)} (\text{tr} \circ \rho)(\alpha).$$

para $L = \widehat{\alpha}$ con $\alpha \in \widetilde{W}_n$.

Teorema 3.5. ([28, Definición 19]) La función $\mathbf{X}_L$ es un invariante para links en ST.

Ejemplo 12. Calcular el polinomio generalizado de HOMFLY-PT del link $H = \widehat{r\sigma_1^2}$.

$$\begin{aligned} P_H(\lambda, q) &= \left(\frac{q\lambda - 1}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right)^{2-1} (\sqrt{\lambda})^2 (\text{tr} \circ \pi)(r\sigma_1^2) \\ &= \left(\frac{q\lambda - 1}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right) \lambda \text{tr}(\pi(r\sigma_1^2)) \\ &= \left(\frac{q\lambda - 1}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right) \lambda \text{tr}(b_1 g_1^2) \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{a} [qc + (q - 1)ac] \\ &= \sqrt{\lambda} \left(\frac{\lambda q^2 c - qc}{1 - q} + (q - 1)c \right) \\ &= \sqrt{\lambda} \left(\frac{\lambda q^2 c - q^2 c + qc - c}{1 - q} \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Observación 12. Notemos que el polinomio obtenido en el ejemplo 12 generaliza al calculado en el ejemplo 7. En efecto, al establecer $c = 1$ en el polinomio de 3.1, recuperamos exactamente el polinomio de HOMFLY-PT presentado en 1.1.

3.2. La bt – álgebra de tipo B

En [16], se introduce la definición del monoide de trenzas ligadas de tipo B . La construcción se fundamenta en los resultados previamente establecidos para la bt-álgebra de tipo A . Aquí $P_{\mathbf{n}+1}$ son las particiones del conjunto $[\mathbf{n} + 1] := \{1, \dots, n + 1\}$, lo vamos a

considerar por simplicidad como $[\mathbf{n} + \mathbf{1}] = \{0, \dots, n\}$, de modo que una permutación en S_n se puede ver dentro como una permutación de S_{n+1} que deja fija el 0.

3.2.1. The tied braid monoid de tipo B

La idea subyacente proviene del caso clásico: dado que S_n actúa sobre $P_{\mathbf{n}}$, resulta natural considerar que $\widetilde{W}_n$ también actúe sobre $P_{\mathbf{n}+1}$. Esto conduce a la construcción del siguiente homomorfismo. Así, podemos construir el producto semidirecto $P_{\mathbf{n}+1} \rtimes_{\psi} \widetilde{W}_n$, donde

$$\begin{aligned} \psi: \widetilde{W}_n &\longrightarrow \text{Aut}(P_{\mathbf{n}+1}) \\ \alpha &\longmapsto \psi_{\alpha}: P_{\mathbf{n}+1} \longrightarrow P_{\mathbf{n}+1} \\ I &\longmapsto \sigma(\alpha) \cdot I, \end{aligned}$$

donde ψ es la proyección definida en la observación 11.

Luego podemos definir, $TB_n^B := P_{\mathbf{n}+1} \rtimes_{\psi} \widetilde{W}_n$ a partir de lo cual obtenemos la siguiente presentación.

Definición 3.12. (Ver [17, Definición 5.1]) El monoide de trenzas ligadas de tipo B, denotado por TB_n^B es el monoide generado por $r, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ los generadores de trenza de tipo B y los generadores $\phi_1, e_1, \dots, e_{n-1}$ llamados tied, que satisfacen las relaciones (3.1) de $\widetilde{W}_n$ junto con las siguientes relaciones:

1. $e_i e_j = e_j e_i$, para todo i, j ,
2. $e_i \sigma_i = \sigma_i e_i$, para todo $1 \leq i \leq n-1$,
3. $e_i \sigma_j = \sigma_j e_i$, para todo $|i - j| > 1$,
4. $e_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i e_j$, para todo $|i - j| = 1$,
5. $e_i \sigma_j \sigma_i^{-1} = \sigma_j \sigma_i^{-1} e_j$, para todo $|i - j| = 1$,
6. $e_i e_j \sigma_i = \sigma_i e_i e_j = e_j \sigma_i e_j$, para todo $|i - j| = 1$,
7. $e_i^2 = e_i$, para todo i ,
8. $\phi_1^2 = \phi_1$,
9. $r e_i = e_i r$, para todo i ,

10. $r\phi_1 = \phi_1 r$,
11. $\phi_1 e_i = e_i \phi_1$, para todo i ,
12. $\phi_1 \sigma_i = \sigma_i \phi_1$, para todo $2 \leq i \leq n-1$,
13. $\sigma_{i-1} \dots \sigma_1 \phi_1 \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{i-1}^{-1} = \sigma_{i-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} \phi_1 \sigma_1 \dots \sigma_i$, para todo $2 \leq i \leq n$,
14. $\phi_1 e_1 = \phi_1 \sigma_1 \phi_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \phi_1 \sigma_1^{-1} e_1$.

Definición 3.13. Definimos la bt-álgebra de tipo B como el álgebra de monoide $\mathbb{C}[q, Q] [TB_n^B]$ cocientado por el ideal I generado por los elementos

$$\sigma_i^2 - 1 - (q - q^{-1})e_i \sigma_i, \quad \text{y} \quad r^2 - 1 - (q - q^{-1})\phi_1 r \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n-1.$$

Denotamos esta álgebra como $\mathcal{E}_n^B = \mathcal{E}_n^B(q, Q) := \mathbb{C}[q, Q] [TB_n^B] / I$ donde T_i, E_i, F_i y B_1 , son las clases de σ_i, e_i, ϕ y r respectivamente.

Además, la bt-álgebra de tipo B puede ser vista como el álgebra generada por $B_1, T_1, \dots, T_{n-1}$ generadores de trenzas y $F_1, \dots, F_n, E_1, \dots, E_{n-1}$ generadores tied, sujeta a las siguientes relaciones:

1. $T_i T_j = T_j T_i$, para todo $|i - j| > 1$,
2. $T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$, para todo $1 \leq i \leq n-2$,
3. $T_i^2 = 1 + (q - q^{-1})E_i T_i$, para todo $1 \leq i \leq n-1$,
4. $E_i^2 = E_i$, para todo i ,
5. $E_i E_j = E_j E_i$, para todo i, j ,
6. $E_i T_i = T_i E_i$, para todo $1 \leq i \leq n-1$,
7. $E_i T_j = T_j E_i$, para todo $|i - j| > 1$,
8. $E_i E_j T_i = T_i E_i E_j = E_j T_i E_j$, para todo $|i - j| = 1$,
9. $E_i T_j T_i = T_j T_i E_j$, para todo $|i - j| = 1$,
10. $B_1 T_1 B_1 T_1 = T_1 B_1 T_1 B_1$,
11. $B_1 T_i = T_i B_1$, para todo $i > 1$,

12. $B_1^2 = 1 + (Q - Q^{-1})F_1B_1$,
13. $B_1E_i = E_iB_1$, para todo i ,
14. $F_i^2 = F_i$, para todo i ,
15. $B_1F_j = F_jB_1$, para todo j ,
16. $F_iE_j = E_jF_i$, para todo i, j ,
17. $F_jT_i = T_iF_{s_i(j)}$ cuando $s_i = (i, i+1)$,
18. $E_iF_i = F_iF_{i+1} = E_iF_{i+1}$, para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Observación 13.

1. A partir de las relaciones cuadráticas, se puede concluir que los elementos T_i 's y B_1 son invertibles, es decir;

$$T_i^{-1} = Ti - (q - q^{-1})E_i \quad \text{y} \quad B_1^{-1} = B_1 - (Q - Q^{-1})F_i.$$

2. Notar que la presentación de la bt-álgebra de tipo B incluye un mayor número de relaciones en comparación con la definición 3.12. Esta diferencia se debe, principalmente, a la implicación de la relación 13 de la definición 3.12.
3. Además, se tiene la siguiente cadena $\mathcal{E}_1^B \hookrightarrow \mathcal{E}_2^B \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{E}_n^B \hookrightarrow \mathcal{E}_{n+1}^B$, por lo tanto podemos definir el límite inductivo:

$$\mathcal{E}_\infty^B := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n^B.$$

4. Nótese que los elementos F_j son conjugados de F_1 .

$$F_j = T_{j-1} \cdots T_1 F_1 T_1^{-1} \cdots T_{j-1}^{-1} = T_1^{-1} \cdots T_{j-1}^{-1} F_1 T_{j-1} \cdots T_1.$$

3.2.2. Generalización del polinomio Δ

La filosofía subyacente se conserva en la construcción del polinomio Δ . En otras palabras, seguimos utilizando receta de Jones. Los teoremas de Alexander y Markov en este contexto se puede consultar en [3, Teorema 3.5] y [3, Teorema 3.7] respectivamente.

En [34, Teorema 3] se demuestra que $\mathcal{E}_n^B(q, Q)$ tiene dimensión finita, dada por $b_{n+1} 2^n n!$, donde b_{n+1} es el $n + 1$ -ésimo número de Bell. Adicionalmente, se prueba la existencia de una traza de Markov sobre $\mathcal{E}_n^B(q, Q)$.

Teorema 3.6. *Sea a, b, c y d parámetros en $\mathbb{C}$. Para todo $n > 1$ existe una familia de funciones $\mathbb{C}$ -lineales*

$$\mathrm{tr}_n : \mathcal{E}_n^B(q, Q) \longrightarrow \mathbb{C}(a, b, c, d),$$

llamada traza de Markov, que cumple la siguientes propiedades:

1. $\mathrm{tr}_n(1) = 1$,
2. $\mathrm{tr}_n(AB) = \mathrm{tr}_n(BA)$, para todo $A, B \in \mathcal{E}_n^B$,
3. $\mathrm{tr}_{n+1}(BT_n) = \mathrm{tr}_{n+1}(BE_nT_n) = a\mathrm{tr}_n(B)$, para todo $B \in \mathcal{E}_n^B$,
4. $\mathrm{tr}_{n+1}(BE_n) = \mathrm{tr}_{n+1}(BF_{n+1}) = b\mathrm{tr}_n(B)$, para todo $B \in \mathcal{E}_n^B$,
5. $\mathrm{tr}_{n+1}(AB_n) = c\mathrm{tr}_n(A)$, para todo $A \in \mathcal{E}_n^B$,
6. $\mathrm{tr}_{n+1}(AB_{n+1}E_n) = \mathrm{tr}_{n+1}(AB_{n+1}F_{n+1}) = d\mathrm{tr}_n(A)$, para todo $A \in \mathcal{E}_n^B$.

donde $B_k := T_{k-1} \cdots T_1 T_1^{-1} \cdots T_{k-1}^{-1}$, para todo $k \geq 2$. Por convención fijamos $B_1 = B_1$.

Para detalles del teorema anterior ver [16, Teorema 3]. Al igual que en secciones anteriores, se tiene el siguiente diagrama de funciones

$$\widetilde{W}_n \xrightarrow{\rho} \mathcal{E}_n^B(q, Q) \xrightarrow{\mathrm{tr}_n} \mathbb{C}(a, b, c, d).$$

Luego $(\mathrm{tr} \circ \rho)$ constituye un invariante de nudos, salvo un proceso de reescalamiento y normalización. Para ello se define:

$$\begin{aligned} \rho_w : \widetilde{W}_n &\longrightarrow \mathcal{E}_n^B(q, Q) \\ \sigma_i &\longmapsto wT_i \\ r &\longmapsto B_1, \end{aligned}$$

donde w es un parámetro en $\mathbb{C}$. Queremos que se cumpla:

$$(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\alpha \sigma_n) = (\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\alpha \sigma_n^{-1}),$$

luego, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\rho_w(\alpha)\rho_w(\sigma_n)) &= \mathrm{tr}(\rho_w(\alpha)\rho_w(\sigma_n^{-1})) \\
\mathrm{tr}(\rho_w(\alpha)wT_n) &= \mathrm{tr}((\rho_w(\alpha)w^{-1}T_n^{-1}) \\
wa\mathrm{tr}(\rho_w(\alpha)) &= w^{-1}\mathrm{tr}(\rho_w(\alpha)(T_n - (q - q^{-1})E_n)) \\
w^2a\mathrm{tr}(\rho_w(\alpha)) &= a\mathrm{tr}(\rho_w(\alpha)) - b(q - q^{-1})\mathrm{tr}(\rho_w(\alpha)) \\
w^2a &= a - (q - q^{-1})b \\
w^2 &= \frac{a - (q - q^{-1})b}{a} = \sqrt{\lambda}.
\end{aligned}$$

donde, $\lambda = \frac{a - (q - q^{-1})b}{a}$ y además $a = \frac{(q^{-1} - q)b}{\lambda - 1}$.

Así, $(\mathrm{tr} \circ \rho_w)$ respeta los movimientos de Markov.

Definición 3.14. Sea L un link de tipo B definimos

$$\Delta_B(L) := \frac{(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\alpha)}{(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})},$$

para $L = \widehat{\alpha}$ con $\alpha \in \widetilde{W}_n$.

Lo cual es una normalización para que en el no nudo el polinomio valga 1. Luego

$$(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\alpha) = w^{e(\alpha)}(\mathrm{tr} \circ \rho)(\alpha),$$

y

$$\begin{aligned}
(\mathrm{tr} \circ \rho_w)(\sigma \cdots \sigma_{n-1}) &= w^{n-1}(\mathrm{tr} \circ \rho)(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}) \\
&= w^{n-1}(\mathrm{tr}(T_1) \cdots \mathrm{tr}(T_{n-1})) \\
&= w^{n-1}a^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{\lambda}(q^{-1} - q)b}{\lambda - 1} \right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos reescribir la definición 3.14 y obtener la generalización polinomio delta (Δ) como sigue:

Definición 3.15. (Polinomio generalizado Δ)

$$\Delta_B(L) = \left(\frac{\sqrt{\lambda}(q^{-1} - q)b}{\lambda - 1} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{e(\alpha)} (\mathrm{tr} \circ \rho)(\alpha).$$

Teorema 3.7. ([16, Teorema 4]) La función Δ_B es un invariante para tied links en ST.

Capítulo 4

Invariante de links singulares

En este capítulo se presentan las definiciones de links y trenzas singulares [26, 19, 20, 9]. Posteriormente, se analizan los teoremas análogos a los de Alexander y Markov en este contexto, lo cual permite definir invariantes para links singulares usando la receta de Jones. Finalmente, se presentan los distintos invariantes obtenidos por Aicardi y Juyumaya a partir de usar la bt -álgebra [2.3].

4.1. Nudos y trenzas singulares

Definición 4.1. Un nudo singular $\mathcal{K}$ se define como un nudo clásico, el cual presenta un número finito de autointersecciones a lo más con dos puntos dobles y de forma transversal, que son llamados cruces singulares.

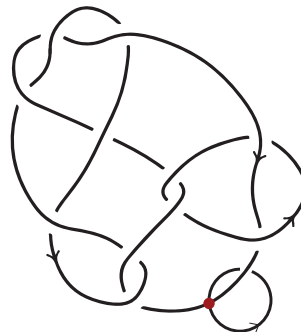


Figura 4.1: Nudo singular con un cruce.

Definición 4.2. Un link singular L de n componentes es la unión disjunta de n nudos singulares.

Nota 2. Note que si $\mathcal{K}$ no tiene cruces singulares, se tiene que $\mathcal{K}$ es un nudo clásico. Por lo tanto, los links singulares generalizan los links clásicos en S^3 . Además, denotaremos por $\mathcal{L}_S$ al conjunto de todos los links singulares.

Definición 4.3. Dos links singulares L y L' son equivalentes, si existe un homeomorfismo de S^3 en S^3 que preserve la orientación, llevando uno al otro, de modo que conserve un pequeño disco rígido alrededor de cada cruce singular.

Además, como era de esperarse, es posible dotar de una orientación a un link L singular. Sin embargo, para lograrlo, se debe seguir los siguientes pasos:

1. Se reemplazan los cruces singulares por cruces clásicos, ya sea positivos o negativos, obteniendo así un link clásico.
2. Al link resultante se le asigna una orientación.
3. Finalmente, se deshacen las modificaciones realizadas, recuperando el link singular orientado.

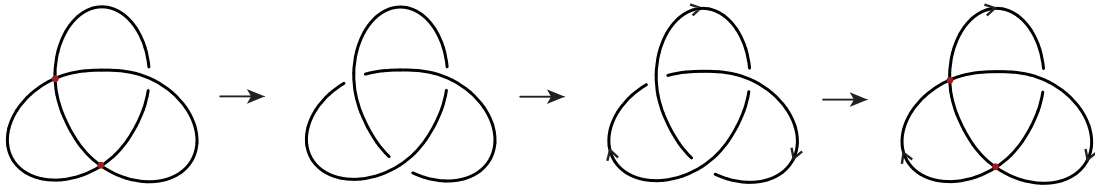


Figura 4.2: Proceso de orientación de un link singular.

Además, análogamente al caso de un link clásico, es posible obtener el diagrama de un link singular a través de una proyección regular. En consecuencia, cualquier link singular L puede describirse como la proyección de un link estándar en S^3 , el cual tiene cruces singulares.

Definición 4.4. Una trenza singular de n -cuerdas se define como una trenza clásica, que tiene una cantidad finita de autointersecciones llamadas cruces singulares.

Además, una trenza clásica puede ser considerado como una trenza singular sin cruces singulares.

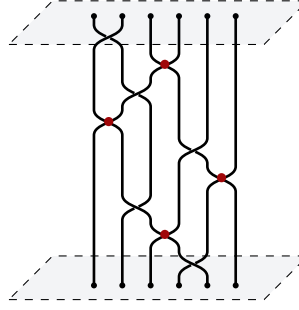


Figura 4.3: Una 6-trenza singular.

Definición 4.5. Dos trenzas singulares α y β son equivalentes, si existe un homeomorfismo de S^3 en S^3 que preserve la orientación tal que mapea uno con el otro, que fija un pequeño disco rígido alrededor de cada cruce singular.

El diagrama de una n -trenza singular se puede obtener proyectando la trenza como se ilustra a continuación.

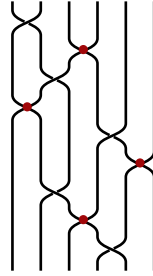


Figura 4.4: Diagrama de una 6-trenza singular.

Además, denotaremos SB_n como el conjunto de clases de equivalencia de n -trenzas singulares bajo isotopía. De forma análoga a lo desarrollado en la sección 1.2, se puede definir el producto por concatenación (*) entre trenzas singulares.

Proposición 4.1. (Ver [9, Lema 3]) El conjunto de trenzas singulares junto con el producto concatenación forman un monoide denotado por SB_n el cual es conocido como monoide de trenzas singulares. Y tiene la siguiente presentación, con $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ generadores y sujeta a las siguientes relaciones:

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, si $|i - j| > 1$,
2. $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$, si $|i - j| = 1$,

3. $\sigma_i \tau_j = \tau_j \sigma_i$, si $|i - j| \neq 1$,
4. $\sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j$, si $|i - j| > 1$,
5. $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$, si $|i - j| > 1$.

Los elementos σ_i y τ_i se pueden ver diagramaticamente como sigue.



Figura 4.5: Generadores de SB_n .

Observación 14.

Además, se tiene la siguiente cadena de inclusión $SB_1 \hookrightarrow SB_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow SB_n \hookrightarrow SB_{n+1}$, por lo tanto podemos definir el limite inductivo: $SB_\infty := \coprod_{n \in \mathbb{N}} SB_n$.

4.1.1. Teorema de Alexander y Markov para links singulares

Los teoremas de Alexander y Markov, en el contexto de links singulares, fueron establecidos por Johan Birman en 1997 (ver [20, 10]). De manera análoga a la definición de la clausura de una trenza clásica, se introduce la siguiente definición.

Definición 4.6. Sea α una trenza singular. La clausura de la trenza singular α se obtiene al conectar los puntos iniciales y finales de α mediante arcos. Denotaremos dicha clausura por $\hat{\alpha}$.

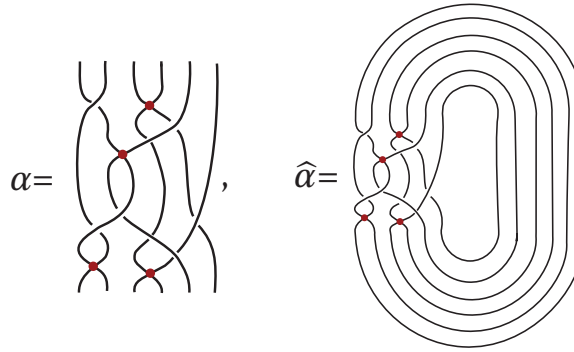


Figura 4.6: Clausura de la trenza singular α .

Teorema 4.1. [20, Teorema 11](Alexander para links singulares). Para todo link singular orientado L , existe $\alpha \in \text{SB}_\infty$ tal que $\hat{\alpha} \sim L$.

Definición 4.7. Sean $\alpha, \beta \in \text{SB}_n$. Definimos los movimientos de Markov como sigue:

M1. $\alpha\beta \rightleftharpoons \beta\alpha$,

M2. $\alpha \rightleftharpoons \alpha\sigma_n^{\pm 1}$.

Además, decimos que α y β son Markov equivalentes si es posible obtener β a partir de α mediante una sucesión finita de movimientos de Markov. En tal caso, lo denotamos por $\alpha \sim_{M_S} \beta$.

Teorema 4.2. [20, Teorema 12](Markov para links singulares). Sean $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ dos trenzas singulares clausuradas obtenidas de α y β respectivamente entonces:

$$\alpha \sim_{M_S} \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \hat{\alpha} \sim \hat{\beta}.$$

Luego, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de clases de isotopía de links singulares y la clase de trenzas singulares Markov equivalentes, es decir:

$$\mathcal{L}_S / \sim \quad \text{si y sólo si} \quad \text{SB}_\infty / \sim_{M_S}.$$

4.1.2. La invariante de Aicardi – Juyumaya

En [6], Aicardi y Juyumaya definen cuatro invariantes para links singulares, denotados por $\Psi_{x,y}$, $\Phi_{x,y}$, $\Psi'_{x,y}$ y $\Phi'_{x,y}$. Estos invariantes se construyen aplicando el método de Jones sobre la traza de Markov en la bt – álgebra de tipo A [2.5], utilizando diferentes homomorfismos (representaciones) del monoide SB_n en $\mathcal{E}_n(q)$ en cada caso.

Previamente en el capítulo 2 en [5] y [34] se demuestra la existencia trazas de Markov para la $\mathcal{E}_n(q)$ ver Teorema 2.2.

De este modo, y al igual que en las secciones anteriores, se tiene el siguiente diagrama de funciones

$$\text{SB}_n \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}_n(q) \xrightarrow{\text{tr}_n} \mathbb{C}(a, b).$$

A continuación definimos los invariantes de links singulares utilizando la receta de Jones aplicada a la bt-álgebra.

Proposición 4.2. ([6, Proposición 6]) Sean x, y y w parámetros en $\mathbb{C}$ que conmutan con a y b . Entonces, se definen las siguientes representaciones:

1. $\psi_{w,x,y} : \text{SB}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n(q)$ que asigna $\sigma_i \mapsto w T_i$ y $\tau_i \mapsto x + wy T_i$,
2. $\phi_{w,x,y} : \text{SB}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n(q)$ que asigna $\sigma_i \mapsto w T_i$ y $\tau_i \mapsto x E_i + wy E_i T_i$.

Observación 15. Además, los mapeos resultantes de reemplazar T_i por V_i también inducen dos representaciones de SB_n en $\mathcal{E}_n(q)$, las cuales se denotan como $\psi'_{w,x,y}$ y $\phi'_{w,x,y}$.

Luego, las composiciones $(\text{tr} \circ \psi_{w,x,y})$, $(\text{tr} \circ \phi_{w,x,y})$, $(\text{tr} \circ \psi'_{w,x,y})$ y $(\text{tr} \circ \phi'_{w,x,y})$, constituyen invariantes de nudos singulares, salvo un proceso de normalización. Realizaremos dicho proceso únicamente para el primer invariante, ya que los tres restantes son análogos.

Por simplicidad denotemos a $\psi_{w,x,y}$ por π_1 y $\phi_{w,x,y}$ por π_2 . Dado que π_1 es un homomorfismo y que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ se sigue que $(\text{tr} \circ \pi_1)$ respeta (M1), es decir; $(\text{tr} \circ \pi_1)(\alpha\beta) = (\text{tr} \circ \pi_1)(\beta\alpha)$.

Ahora procedamos a verificar que $(\text{tr} \circ \pi_1)$ cumple (M2). Veamos que:

$$(\text{tr} \circ \pi_1)(\alpha\sigma_n) = (\text{tr} \circ \pi_1)(\alpha\sigma_n^{-1}),$$

luego, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \text{tr}(\pi_1(\alpha)\pi_1(\sigma_n)) &= \text{tr}(\pi_1(\alpha)\pi_1(\sigma_n^{-1})) \\ \text{tr}(\pi_1(\alpha)wT_n) &= \text{tr}((\pi_1(\alpha)w^{-1}T_n^{-1}) \\ w \text{tr}(\pi_1(\alpha)) &= w^{-1}(\text{tr}(\pi_1(\alpha)T_n + \pi_1(\alpha)(q^{-1} - 1)E_n + \pi_1(q^{-1} - 1)E_nT_n)) \\ w \text{tr}(\pi_1(\alpha)) &= w^{-1}(a + (q^{-1} - 1)b + (q^{-1} - 1)a)\text{tr}(\pi_1(\alpha)) \\ w^2 &= \frac{(1 - q)b + a}{qa} \\ w &= \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

$$\text{donde, } \lambda = \frac{(1 - q)b + a}{qa} \text{ y } a = \frac{(1 - q)b}{w^2 q - 1}.$$

De lo anterior se concluye $(\text{tr} \circ \pi_1)$ respeta los movimientos de Markov para links singulares.

Definición 4.8. (Polinomio de Juyumaya y Aicardi). Para cualquier link singular L , obtenido como la clausura de una trenza singulares $\alpha \in SB_n$, definimos:

$$\Psi_{x,y}(L) := \left(\frac{1}{a\sqrt{\lambda}} \right)^{n-1} (\text{tr} \circ \pi_1)(\alpha),$$

y

$$\Phi_{x,y}(L) := \left(\frac{1}{a\sqrt{\lambda}} \right)^{n-1} (\text{tr} \circ \pi_2)(\alpha).$$

Teorema 4.3. ([6, Teorema 7]) *La funciones $\Psi_{x,y}$ y $\Phi_{x,y}$ son invariantes de isotopía para links singulares.*

Además, un procedimiento análogo al descrito previamente nos permite obtener los invariantes para links singulares $\Psi'_{x,y}$ y $\Phi'_{x,y}$.

Observación 16.

- En [6, Observación 5] se establece que para un link clásico L , se cumple que $\Psi_{x,y} = \Phi_{x,y} = \Delta$ y $\Psi'_{x,y} = \Phi'_{x,y} = \Theta$, donde Δ y Θ son invariantes para links clásicos derivados de las álgebras $\mathcal{E}_n(q)$ y $\mathcal{E}_n(\sqrt{q})$, respectivamente.
- Del mismo modo, existen pares de links singulares que se distinguen por $\Psi_{x,y}$ y $\Phi_{x,y}$ pero no por $\Psi'_{x,y}$ y $\Phi'_{x,y}$. Además, en [6, proposición 10] se prueba que $\Psi_{x,y}$ es más potente que $\Phi_{x,y}$.
- En [32, Sección 3], Paris y Rabenda introducen la álgebra de Hecke singular, denotada por $H(SB_n)$, la cual constituye una generalización natural del álgebra de Hecke de tipo A. Posteriormente, empleando la receta de Jones, definieron el invariante de links singulares de Paris–Rabenda, denotado por $\hat{I}$. Luego, en [6, proposición 11] se demuestra que los invariantes $\Psi_{x,y}$, $\Phi_{x,y}$, $\Psi'_{x,y}$ y $\Phi'_{x,y}$ son capaces de distinguir pares de nudos que $\hat{I}$ no logra diferenciar.

Capítulo 5

Invariante de links singulares en el toro sólido

En este capítulo, se introducen las definiciones fundamentales de links y trenzas singulares en el toro sólido. A continuación, se analizarán los teoremas análogos a los de Alexander y Markov en este contexto, tal como se establece en (ver [12]). Finalmente, utilizando estos resultados, junto con la traza definida en la bt-álgebra de tipo B (ver 3.2) y las representaciones que van de SB_n^B en $\mathcal{E}_n^B$, que constituyen el objetivo principal de este trabajo, se definirá un nuevo invariante para los links singulares en el toro sólido.

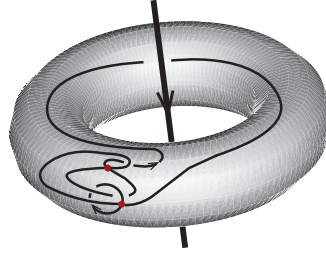
5.1. Nudos y trenzas singulares en el toro sólido

Empecemos recordando, que el toro sólido denotado por ST , puede ser interpretado como el complemento de otro toro sólido D_1 en S^3 , es decir, $ST = S^3 \setminus D_1$. Además, en [12] se introducen los siguientes resultados.

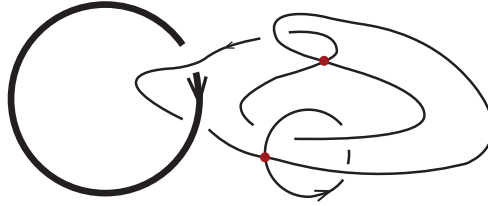
Definición 5.1. Un nudo singular $\mathcal{K}$ en ST , se define como un nudo singular que está completamente contenido en el interior del toro sólido. Además, un link singular L en ST de n componentes es la unión disjunta de n nudos singulares en ST .

Además, denotaremos por $\mathcal{L}_{ST}$ al conjunto de todos los links singulares en ST .

Nota 3. Un link singular L en ST se llama afín si está contenido en una 3-bola dentro de ST . Por lo tanto, los links singulares en S^3 pueden considerarse como links afines en ST .

Figura 5.1: Nudo singular en ST .

Cabe destacar que cualquier link singular L en ST puede describirse como la proyección de un link singular en S^3 , que interactúa con una componente fija no anudada. Esta componente representa el toro sólido complementario a ST en S^3 y, en conjunto, conforman lo que se denomina un mixed – singular link.

Figura 5.2: Link en ST visto como mixed – singular link.

Definición 5.2. Dos links singulares L y L' en ST son isotópicos si y sólo si sus correspondientes mixed – singular link en S^3 lo son.

Definición 5.3. Una trenza singular de tipo B se define como una extensión de las trenzas singulares, compuestas por $n + 1$ cuerdas, donde la primera cuerda permanece fija. Las cuerdas restantes, desde la segunda hasta la $(n + 1)$ -ésima, se denominan cuerdas móviles.

Definición 5.4. Dos trenzas singulares α y β en ST se dice que son equivalentes si existe una isotopía entre ellas.

El diagrama de una n -trenza singular de tipo B se puede obtener proyectando la trenza como se ilustra a continuación.

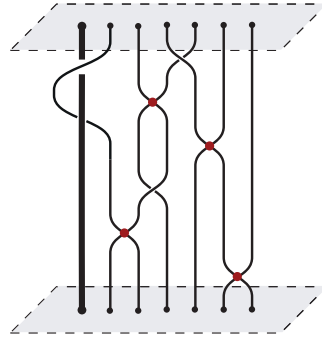


Figura 5.3: Una 6-trenza singular de tipo B.

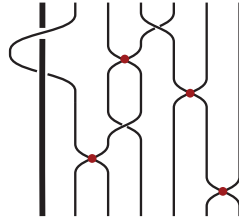


Figura 5.4: Diagrama de una 6-trenza singular de tipo B.

En la figura (5.4) la cuerda más gruesa representa la cuerda fija. Además, denotaremos SB_n^B como el conjunto de clases de equivalencia de n -trenzas singulares de tipo B bajo isotopía. De forma análoga a lo desarrollado en la sección 1.2, se puede definir el producto concatenación (*) entre trenzas singulares de tipo B.

Proposición 5.1. (Ver [12, Definición 3.7]) *El conjunto de trenzas singulares de tipo B junto con el producto concatenación forman un monoide denotado por SB_n^B el cual es conocido como monoide de trenzas singulares de tipo B. Este monoide tiene la siguiente presentación, con generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, r , $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ y sujetos a las siguientes relaciones:*

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, para $|i - j| > 1$,
2. $\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$, para $|i - j| = 1$,
3. $r \sigma_i = \sigma_i r$, para $i > 1$,
4. $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$, para $|i - j| > 1$,
5. $\sigma_i \tau_j = \tau_i \sigma_j$, para $|i - j| \neq 1$,

6. $\sigma_i \sigma_j \tau_i = \tau_j \sigma_i \sigma_j$, para $|i - j| > 1$,
7. $r \tau_i = \tau_i r$, para $i > 1$,
8. $r \sigma_1 r \sigma_1 = \sigma_1 r \sigma_1 r$,
9. $r \sigma_1 r \tau_1 = \tau_1 r \sigma_1 r$.

Los elementos σ'_i s, r y τ'_i s se pueden ver diagramáticamente como sigue.

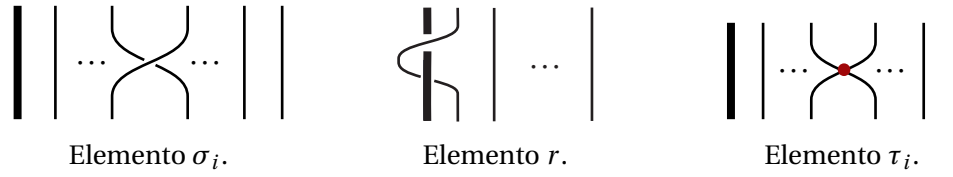


Figura 5.5: Generadores de SB_n^B .

Observación 17.

- Existe un homomorfismo $\varphi : SB_n^B \longrightarrow SB_n$ que asigna $\sigma_i \mapsto \sigma_i$, $\tau_i \mapsto \tau_i$ y $r \mapsto 1$.
- Además, se tiene la cadena de inclusión $SB_1^B \hookrightarrow SB_2^B \hookrightarrow \dots \hookrightarrow SB_n^B \hookrightarrow SB_{n+1}^B$, por lo tanto, podemos definir el siguiente límite inductivo:

$$SB_\infty^B := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} SB_n^B.$$

5.1.1. Teorema de Alexander y Markov para links singulares en el toro sólido

Los teoremas de Alexander y Markov, en el contexto de links singulares en el toro sólido, fueron establecidos por Ioannis Diamantis tal como se expone en [12].

De manera análoga a la definición de la clausura de una trenza clásica o singular, se introduce la siguiente definición.

Definición 5.5. Sea α una trenza singular de tipo B. La clausura de la trenza α es un link singular en ST que se obtiene al conectar los puntos iniciales y finales de α mediante arcos. Denotaremos dicha clausura por $\hat{\alpha}$.

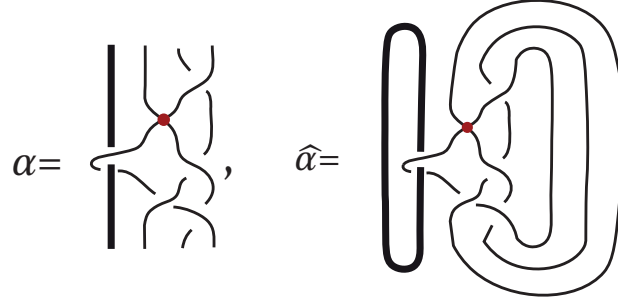


Figura 5.6: Clausura de una trenza singular de tipo B.

Teorema 5.1 (Alexander para links singulares en el toro sólido). *Para todo link singular orientado L en ST , existe $\alpha \in SB_{\infty}^B$ tal que $\hat{\alpha} \sim L$.*

La demostración de este hecho se realiza mediante un enfoque algorítmico usando el teorema de Alexander clásico. Se recomienda consultar [12, Teorema 3.5] para detalles.

Definición 5.6. Sean $\alpha, \beta \in SB_n^B$. Definimos los movimientos de Markov como sigue:

MST1. $\alpha\beta \rightleftharpoons \beta\alpha$,

MST2. $\alpha \rightleftharpoons \alpha\sigma_n^{\pm 1}$.

Además, decimos que α y β son Markov equivalentes si es posible obtener β a partir de α mediante una sucesión finita de movimientos de Markov. En tal caso, lo denotamos por $\alpha \sim_{MST} \beta$.

Teorema 5.2 (Markov para links singulares en el toro sólido). *Sean $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ dos trenzas singulares de tipo B clausuradas obtenidas de α y β respectivamente entonces:*

$$\alpha \sim_{MST} \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \hat{\alpha} \sim \hat{\beta}.$$

Para detalles del teorema presentado se puede consultar en [12, Teorema 3.13].

Luego, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de clases de isotopía de links singulares en ST y las clases de trenzas singulares de tipo B Markov equivalentes, es decir:

$$\mathcal{L}_{LST} / \sim \quad \text{si y sólo si} \quad SB_{\infty}^B / \sim_{MST}.$$

5.2. Nuevo invariante de links singulares en ST

En esta sección se propone la definición de un nuevo invariante para links singulares en ST , el cual constituye el objetivo principal de este trabajo de investigación. La filosofía subyacente para la construcción de este invariante se basará en la receta de Jones. Se considerará la presentación de SB_n^B , la álgebra correspondiente, que en este caso será la bt -álgebra de tipo B, y los teoremas de Alexander y Markov en el contexto de link singulares en el toro sólido.

Recordemos que en el capítulo 3, y de acuerdo con [16] y [18], se demuestra que el álgebra $\mathcal{E}_n^B$ admite una traza de Markov, la cual recordamos a continuación.

Teorema 5.3. *Sea a, b, c y d parámetros en $\mathbb{C}$. Para todo $n > 1$ existe una familia de funciones $\mathbb{C}$ -lineales*

$$\mathrm{tr}_n : \mathcal{E}_n^B(q, Q) \longrightarrow \mathbb{C}(a, b, c, d),$$

llamada traza de Markov, que cumple la siguientes propiedades:

1. $\mathrm{tr}_n(1) = 1$,
2. $\mathrm{tr}_n(AB) = \mathrm{tr}_n(BA)$, para todo $A, B \in \mathcal{E}_n^B$,
3. $\mathrm{tr}_{n+1}(BT_n) = \mathrm{tr}_{n+1}(BE_nT_n) = a\mathrm{tr}_n(B)$, para todo $B \in \mathcal{E}_n^B$,
4. $\mathrm{tr}_{n+1}(BE_n) = \mathrm{tr}_{n+1}(BF_{n+1}) = b\mathrm{tr}_n(B)$, para todo $B \in \mathcal{E}_n^B$,
5. $\mathrm{tr}_{n+1}(AB_n) = c\mathrm{tr}_n(A)$, para todo $A \in \mathcal{E}_n^B$,
6. $\mathrm{tr}_{n+1}(AB_{n+1}E_n) = \mathrm{tr}_{n+1}(AB_{n+1}F_{n+1}) = d\mathrm{tr}_n(A)$, para todo $A \in \mathcal{E}_n^B$.

Para definir el nuevo invariante de links singulares en ST , es suficiente establecer las representaciones que se presentan en el siguiente resultado.

Proposición 5.2. *Sean x, y y w parámetros en $\mathbb{C}$ que conmutan con a y b . Entonces, se definen las siguientes representaciones:*

1. $\Lambda_{w,x,y} : SB_n^B \longrightarrow \mathcal{E}_n^B(q, Q)$ que asigna $\sigma_i \mapsto wT_i$, $\tau_i \mapsto x + wyT_i$ y $r \mapsto B_1$,
2. $\Gamma_{w,x,y} : SB_n^B \longrightarrow \mathcal{E}_n^B(q, Q)$ que asigna $\sigma_i \mapsto wT_i$, $\tau_i \mapsto xE_i + wyE_iT_i$ y $r \mapsto B_1$.

Demostración. La prueba se reduce a verificar que las imágenes de σ_i, τ_i y r , (en cada caso) satisfacen las relaciones de SB_n^B . No es difícil comprobar que (1)–(2)–(3)–(7) y (8) se cumplen. Probemos (4)–(5)–(6) y (9).

$$\begin{aligned}\tau_i \tau_j &= (x + yw T_i) (x + yw T_j) = x^2 + xyw T_j + ywx T_i + y^2 w^2 T_i T_j \\ &\stackrel{(1)}{=} x^2 + ywx T_i + xyw T_j + y^2 w^2 T_j T_i \\ &= (x + yw T_j) (x + yw T_i).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_i \tau_i &= (w T_i) (x + yw T_i) = wx T_i + w^2 y T_i^2 \\ &\stackrel{(3)}{=} wx T_i + w^2 y [1 + (q - q^{-1}) E_i T_i] \\ &\stackrel{(6)}{=} wx T_i + w^2 y [1 + (q - q^{-1}) T_i E_i] \\ &= (x + yw T_i) (w T_i).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j \tau_i &= (w T_i) (w T_j) (x + yw T_i) = w^2 x T_i T_j + w^3 y T_i T_j T_i \\ &\stackrel{(1)}{=} w^2 x T_j T_i + w^3 y T_i T_j T_i \\ &\stackrel{(2)}{=} w^2 x T_j T_i + w^3 y T_j T_i T_j \\ &= (x + yw T_j) (w T_i) (w T_j).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r \sigma_1 r \tau_1 &= (B_1 w T_1 B_1) (x + yw T_1) = wx B_1 T_1 B_1 + w^2 y B_1 T_1 B_1 T_1 \\ &\stackrel{(10)}{=} wx B_1 T_1 B_1 + w^2 y T_1 B_1 T_1 B_1 \\ &= (x + yw T_1) (B_1 w T_1 B_1).\end{aligned}$$

Siguiendo un argumento análogo, se verifica que $\Gamma_{x,y,w}$ define una representación. $\square$

Observación 18. Los mapeos resultantes de reemplazar T_i por V_i también inducen dos representaciones de SB_n^B en $\mathcal{E}_n^B(q, Q)$, las cuales se denotan como $\Lambda'_{w,x,y}$ y $\Gamma'_{w,x,y}$.

De este modo, y al igual que en los capítulos anteriores, se tiene el siguiente diagrama

$$SB_n^B \xrightarrow{\Lambda_{w,x,y}} \mathcal{E}_n^B(q, Q) \xrightarrow{\text{tr}_n} \mathbb{C}(a, b, c, d).$$

Luego, las composiciones $(\text{tr} \circ \Lambda_{w,x,y})$, $(\text{tr} \circ \Gamma_{w,x,y})$, $(\text{tr} \circ \Lambda'_{w,x,y})$ y $(\text{tr} \circ \Gamma'_{w,x,y})$, consti-

tuyen invariantes de nudos singulares en ST , salvo un proceso de normalización. Realizaremos dicho proceso únicamente para $(\text{tr} \circ \Lambda_{w,x,y})$, ya que los tres restantes son análogos.

Por simplicidad denotaremos a las representaciones $\Lambda_{w,x,y}$ y $\Gamma_{w,x,y}$ por Λ y Γ respectivamente. Usamos estos homomorfismos para derivar invariantes de links singulares en ST . Es decir, queremos que $(\text{tr} \circ \Lambda)$ y $(\text{tr} \circ \Gamma)$ definan invariantes de links singulares en ST , por lo tanto, necesitamos que respeten los movimientos de Markov (MST1) y (MST2). A continuación, establecemos

$$w^2 = \frac{(1-q)b+a}{qa}, \quad y \quad a = \frac{(1-q)b}{w^2 q - 1}. \quad (5.1)$$

Además, $w = \sqrt{\lambda}$ donde $\lambda = \frac{(1-q)b+a}{qa}$.

Definición 5.7. Sea L un link singular en ST . Definimos:

$$\bar{\Lambda}_{x,y}(L) := \left(\frac{1}{aw} \right)^{n-1} (\text{tr} \circ \Lambda)(\alpha), \quad (5.2)$$

y

$$\bar{\Gamma}_{x,y}(L) := \left(\frac{1}{aw} \right)^{n-1} (\text{tr} \circ \Gamma)(\alpha). \quad (5.3)$$

donde $L = \hat{\alpha}$ con $\alpha \in \text{SB}_n^B$.

Teorema 5.4. Las funciones $\bar{\Lambda}_{x,y}$ y $\bar{\Gamma}_{x,y}$ son invariantes isotópicos para links singulares en ST .

Demostración. Veamos que $\bar{\Lambda}_{x,y}$ y $\bar{\Gamma}_{x,y}$ respetan los movimientos (MST1) y (MST2). Es evidente que de manera inmediata que ambas funciones cumplen con el movimiento (MST1) por la propiedad (2) de la traza. Luego, basta verificar que $\bar{\Lambda}_{x,y}$ y $\bar{\Gamma}_{x,y}$ respeta el movimiento (MST2). Sólo verifiquemos para $\bar{\Lambda}_{x,y}$. Sea $\alpha \in \text{SB}_n^B$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} (\text{tr} \circ \Lambda)(\alpha \sigma_n^{-1}) &= \text{tr}(\Lambda(\alpha) \Lambda(\sigma_n^{-1})) \\ &= \text{tr}(\Lambda(\alpha) (w^{-1} T_n^{-1})) \\ &= w^{-1} (\text{tr}(\Lambda(\alpha) T_n + \Lambda(\alpha) (q^{-1} - 1) E_n + \Lambda(\alpha) (q^{-1} - 1) E_n T_n)) \\ &= \text{tr}(\Lambda(\alpha)) w^{-1} (a + (q^{-1} - 1)b + (q^{-1} - 1)a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathrm{tr} \circ \Lambda)(\alpha) w^{-1} \left(\frac{(1-q)b+a}{q} \right) \\
&\stackrel{(5,1)}{=} (\mathrm{tr} \circ \Lambda)(\alpha) w^{-1} w^2 a \\
&= a w (\mathrm{tr} \circ \Lambda)(\alpha).
\end{aligned}$$

De este modo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda}_{x,y}(\widehat{\alpha\sigma_n^{-1}}) &= \left(\frac{1}{aw} \right)^n (\mathrm{tr} \circ \Lambda)(\alpha\sigma_n^{-1}) \\
&= \left(\frac{1}{aw} \right)^n a w (\mathrm{tr} \circ \Lambda)(\alpha) \\
&= \left(\frac{1}{aw} \right)^{n-1} (\mathrm{tr} \circ \Lambda)(\alpha) \\
&= \overline{\Lambda}_{x,y}(\widehat{\alpha}).
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene

$$(\mathrm{tr} \circ \Lambda)(\alpha\sigma_n) = \mathrm{tr}(\Lambda(\alpha)\Lambda(\sigma_n)) = \mathrm{tr}(\Lambda(\alpha)wT_n) = aw(\mathrm{tr} \circ \Lambda)(\alpha),$$

de donde, obtenemos

$$\overline{\Lambda}_{x,y}(\widehat{\alpha\sigma_n}) = \overline{\Lambda}_{x,y}(\widehat{\alpha}).$$

Análogamente se prueba para $\overline{\Gamma}_{x,y}$. □

Así, podemos reescribir la definición 5.7 y obtener el siguiente polinomio.

Definición 5.8. (Polinomio para links singulares en ST).

$$\overline{\Lambda}_{x,y}(L) = \left(\frac{\sqrt{\lambda}(1-a)b}{q\lambda-1} \right)^{n-1} (\mathrm{tr} \circ \Lambda)(\alpha),$$

para $L = \widehat{\alpha}$ con $\alpha \in \mathrm{SB}_n^B$.

Un procedimiento análogo al descrito previamente nos permite obtener los invariantes para links singulares en ST : $\overline{\Gamma}_{x,y}$, $\overline{\Lambda}'_{x,y}$ y $\overline{\Gamma}'_{x,y}$.

Ejemplo 13. Calculemos la invariante $\overline{\Lambda}_{x,y}(L)$ para link singular $L = \widehat{r \tau_1 \sigma_1^2}$ en ST .

$$\begin{aligned}
 \overline{\Lambda}_{x,y}(L) &= \left(\frac{\sqrt{\lambda} (1-a) b}{q \lambda - 1} \right)^{n-1} (\text{tr} \circ \Lambda) (r \tau_1 \sigma_1^2) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{\lambda} (1-a) b}{q \lambda - 1} \right) \text{tr} (\Lambda (r \tau_1 \sigma_1^2)) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{\lambda} (1-a) b}{q \lambda - 1} \right) \text{tr} [B_1 (x + wy T_1) (w^2 T_1^2)] \\
 &= \left(\frac{\sqrt{\lambda} (1-a) b}{q \lambda - 1} \right) \text{tr} [(xB_1 + xwy B_1 T_1) (w^2 + w^2 (q - q^{-1}) E_1 T_1)] \\
 &= \left(\frac{\sqrt{\lambda} (1-a) b}{q \lambda - 1} \right) [w^2 xb + w^3 yac + (w^2 xac + w^3 ybc + w^3 yac(q - q^{-1}))(q - q^{-1})].
 \end{aligned}$$

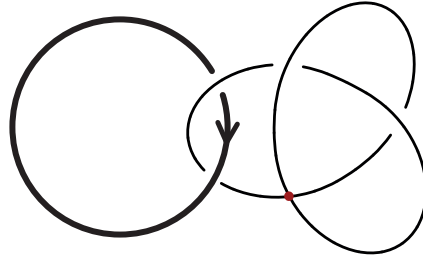


Figura 5.7: Mixed – Singular Link $L = \widehat{r \tau_1 \sigma_1^2}$.

5.3. Conclusión

1. Este trabajo introduce un nuevo invariante para links singulares en el toro sólido, denotado por $\overline{\Lambda}_{x,y}(L)$, que generaliza y unifica varios polinomios previamente estudiados. En particular, extiende el polinomio HOMFLY-PT (ver 1.22), el polinomio delta (ver 2.7), así como invariantes en el toro sólido como los de Lambropoulou (ver 3.11) y el delta de tipo B (ver 3.15), además de relacionarse con trabajos de Juyumaya y Aicardi (ver 4.3). La clave de esta generalización radica en interpretar links clásicos y singulares como links afines en el toro sólido (ver 3), es decir, aquellos que no interactúan con su complemento.
2. Como perspectivas futuras, se propone investigar que tan fuerte es el invariante $\overline{\Lambda}_{x,y}(L)$ en comparación con los ya existentes, así como desarrollar un algoritmo computacional para su cálculo eficiente.

Bibliografía

- [1] ALEXANDER, J. (1923). *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 9, 93–95.
- [2] ALEXANDER, J. (1928). Topological Invariants of Knots and Links, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 30, No. 2 (Apr., 1928), pp. 275–306
- [3] AICARDI, F. & JUYUMAYA, J. (2016). Tied links. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 25(9), 1–2.
- [4] AICARDI, F. & JUYUMAYA, J. (2016). Markov trace on the algebra of braids and ties. *Moscow Mathematical Journal*, 16, 1–35.
- [5] AICARDI, F. & JUYUMAYA, J. (2000). An algebra involving braids and ties. Preprint ICTP IC/2000/179, Trieste.
- [6] AICARDI, F. & JUYUMAYA, J. (2021). Tied links and invariants for singular links. *Advances in Mathematics*, 107629.
- [7] ARCIS, D. & JUYUMAYA, J. (2021). Tied Monoids. *Semigroup Forum*, 103, 356–394. New York: Springer US.
- [8] ARTIN, E. (1947). Theory of braids. *Annals of Mathematics*, 48(1), 101–126.
- [9] BIRMAN, J. (1993). New points of view in knot theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 253–287.
- [10] BIRMAN, J. (2001). Representations of the singular braid monoid and group invariants of singular knots. *Topology and its Application*, 117–140.

-
- [11] CHLOUBERAKI, M., JUYUMAYA, J., KARVOUNIS, K. & LAMBROPOULOU, S. (2020). Identifying the invariants for classical knots and links from the Yokonuma–Hecke algebras. *International Mathematics Research Notices*, 2020(1), 214–286.
- [12] DIAMANTIS, I. (2023). Pseudo links and singular links in the Solid Torus. *Communications in Mathematics*, 31.
- [13] ESPINOZA, J. (2010). Grupos de Trenzas e Invariantes Polinomiales de Nudos. Tesis.
- [14] FITZGERALD, D. G. (2003). A presentation for the monoid of uniform block permutations. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 68, 317–324.
- [15] FEMM, R., KEYMAN, E. & ROURKE, C. (1997). The singular braid monoid embeds in a group. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*.
- [16] FLORES, M. (2020). A braid and ties algebra of type B. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 30, 1–32.
- [17] FLORES, M. (2021). Tied links in the solid torus. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 30.
- [18] FLORES, M., JUYUMAYA, J. & LAMBROPOULOU, S. (2018). A framization of the Hecke algebra of type B. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 778–806.
- [19] FLORES, M. & ROQUE-MÁRQUEZ, C. (2024). Invariants for singular links via the two parameter bt-algebra. *Preprint*, 2405.06496.
- [20] GEMEIN, B. (1997). Singular Braids and Markov’s Theorem. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 441–454.
- [21] GECK, M. & LAMBROPOULOU, S. (1997). Markov traces and knot invariants related to Iwahori Hecke algebras of type B. *J. Reine Angew. Math.*, 482, 199–213.
- [22] IWAHORI, N. & MATSUMOTO, H. (1965). On some bruhat decomposition and the structure of the hecke rings of p-adic chevalley groups. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 25, 5–48.
- [23] JONES, V. F. (1985). A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1), 103–111.

-
- [24] JONES, V. F. (1987). Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. In *New Developments In The Theory Of Knots*, World Scientific, 335–385.
- [25] JUYUMAYA, J. (1999). Another algebra from the Yokonuma-Hecke algebra. *Associateship Scheme of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics*, IC-99-160.
- [26] JUYUMAYA, J. & LAMBROPOULOU, S. (2009). An invariant for singular knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 825–840.
- [27] KASSEL, C. & TURAEV, V. (2008). *Braid Groups*. Alemania: Springer New York.
- [28] LAMBROPOULOU, S. (1993). A study of braids in 3-manifolds. PhD thesis, University of Warwick.
- [29] LAMBROPOULOU, S. (1994). Solid torus links and Hecke algebras of B-type. *Proc. Conf. Quantum Topology*, ed. D. N. Yetter, World Scientific Press, 225–245.
- [30] MARKOV, A. (1936). Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe. *Recueil Mathématique Moscou*, 1(43), 73–78.
- [31] MURASUGI, K. (2008). *Knot Theory and Its Applications*. Ucraina: Birkhäuser Boston.
- [32] PARIS, L. & RABENDA, L. (2008). Singular Hecke algebras, Markov traces, and HOMFLY-type invariants. *Annales de l'institut Fourier*, 58(7), 2413–2443.
- [33] REIDEMEISTER, K. (1983). *Knot Theory*. Rusia: BCS Associates.
- [34] RYOM, H. (2011). On the representation theory of an algebra of braids and ties. *Journal Algebraic Combin.*, 33(1), 57–79.