Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Teoría de Punto Fijo y Propiedad de Condensación en Espacios Uniformes

Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas

Presentada por:
Sergio Ignacio Pizarro Pizarro

Profesor Guía: Raúl Fierro Pradenas

Valparaíso
Diciembre de 2024

Agradecimientos

Quiero agradecer enormemente al cuerpo académico del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valparaíso por la formación brindada en estos 6 años desde mi ingreso. En especial destaco al profesor Raúl Fierro, quien con su tutela y espíritu de curiosidad matemática, me ha impulsado a desarrollar esta tesis en su estado actual.

También he de agradecer profundamente el apoyo recibido por mis seres cercanos y familia, en especial mi madre, cuyo apoyo ha sido fundamental en este proceso.

Resumen

Esta tesis tiene como objetivo desarrollar la propiedad de condensación en multifunciones definidas sobre un espacio uniforme, lo que permite establecer resultados de punto fijo, con lo que se generalizan y obtienen variantes condensantes de teoremas clásicos existentes en la literatura. Este estudio, cuyos resultados se establecen en el contexto de espacios uniformes, busca unificar la teoría métrica y topológica de punto fijo.

Además de la Introducción, esta tesis está organizada en los siguientes cuatro capítulos:

1. Capítulo 1: Contiene preliminares sobre multifunciones y espacios vectoriales topológicos.

2. Capítulo 2: Se establecen definiciones y propiedades elementales de los espacios uniformes.

3. Capítulo 3: El concepto de medida de no-compacidad en espacios uniformes, que aquí se presenta, es una extensión natural de aquél definido en espacios métricos y seudo-métricos.

4. Capítulo 4: Se presentan en este capítulo los principales aportes de la tesis. Estos consisten en nuevos resultados de punto fijo multivaluado, mediante adaptaciones de la condición orbital de Banach y la propiedad condensante.

Índice general

Introducción

La propiedad de condensación es un concepto existente en la teoría de medidas de no compacidad, la cual tiene implicaciones significativas en la teoría del punto fijo. Una medida de no compacidad cuantifica la diferencia entre un conjunto acotado y uno precompacto y nos permite definir una propiedad de condensación, tanto para funciones como para correspondencias. En consecuencia, cuando la compacidad no está presente, en la definición de algunos operadores, esta debilidad puede a menudo eliminarse mediante una propiedad de condensación adecuada. Kuratowski en [25] introdujo el concepto de medida de no compacidad para caracterizar la compacidad relativa en espacios métricos completos. Sadowskii en [31] definió la función de condensación en un espacio de Banach, generalizando el conocido teorema del punto fijo de Schauder [33]. Al extender esta definición a espacios localmente convexos, Himmelberg *et al.* en [21] demostraron un teorema de punto fijo en este contexto más amplio, generalizando incluso el correspondiente resultado de Tychonov [35]. Aparte de los precursores del concepto, mencionamos además a Banás y Goebl [5], Furi y Vignoli [16, 18], Mönch [27], y Rakocević [30], entre otros.

La teoría del punto fijo ha tenido un desarrollo paralelo en dos contextos. A saber, la teoría métrica, basada en el teorema del punto fijo de Banach [4], para contracciones definidas en espacios métricos, y la teoría topológica, que se apoya en el teorema de punto fijo de Brouwer [8]. Varios resultados que involucran funciones unidimensionales y de conjunto, definidas en espacios vectoriales topológicos, utilizan este teorema. Dado que, en general, los espacios vectoriales topológicos no son metrizables y los espacios métricos no requieren de una estructura algebraica o vectorial, la teoría del punto fijo adolece de una falta de unidad, en este sentido. Sin embargo, ambos tipos de espacios admiten una estructura uniforme. Es la razón principal por la que en esta tesis los resultados se enuncian en el contexto de espacios uniformes.

De acuerdo a lo existente en la literatura, la condición orbital de Banach y la propiedad de condensación, para funciones y correspondencias, son importantes instrumentos en la teoría del punto fijo. Por esta razón y por la necesidad de avanzar hacia una unificación de la teoría del punto fijo, nuestros resultados y conceptos requeridos se establecen en espacios uniformes. Es así como definiciones clásicas de contracciones en espacios métricos, para funciones y multifunciones, admiten extensiones a espacios uniformes. Del mismo modo, el concepto de contracción de Banach, existente en espacios métricos, se extiende a espacios uniformes. Este hecho, nos permite demostrar, en este nuevo escenario, resultados de punto fijo para funciones y multifunciones. Un avance parcial de esta unificación se desarrolló en [29], y sus principales resultados aparecieron en [14].

Como en el caso métrico, mediante una adecuada definición de medida de no compacidad en espacios uniformes, definimos condensación para funciones y multifunciones. Además, para familias de éstas, definimos condensación uniforme, lo cual nos permite generalizar el teorema Mönch, presentado en [12] y derivar algunos teoremas de punto fijo que generalizan resultados existentes en la literatura, tales como los teoremas de punto fijo de Kakutani-Fan-Glicksberg [11, 19], Kakutani [23] y Markov-Kakutani [23, 26]. Una síntesis de estos resultados se encuentra bajo revisión en [15].

Aparte de la presente introducción, esta tesis contiene cuatro capítulos, que describimos a continuación. En el capítulo 1, se presentan algunas notaciones y hechos que se utilizarán más adelante, respecto a multifunciones y espacios vectoriales topológicos. En el capítulo 2, se abordan los elementos principales de espacios uniformes, tales como su caracterización, conceptos de acotamiento, completitud, precompacidad, entre otros. En el capítulo 3, se define el concepto de medida de no-compacidad abstracta, primero en espacios seudo-métricos, y luego en espacios uniformes, junto con aquellas medidas de no compacidad clásicas existentes en la literatura, las cuales también admiten la correspondiente extensión a espacios uniformes, como es el caso de las medidas de no compacidad de Hausdorff y Kuratowski. Finalmente, en el capítulo 4, se aborda, primero, el concepto de condición orbital de Banach estándar y fuerte para multifunciones, y se presentan extensiones de algunas contracciones existentes en el contexto de espacios métricos. La existencia de punto fijo común, para familias de funciones y multifunciones, es estudiada mediante la propiedad de condensación uniforme. Adicionalmente, en este capítulo se presenta una versión del teorema de Mönch y algunas de sus aplicaciones.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Correspondencias

Comenzamos esta sección con definiciones y propiedades elementales, que serán de utilidad para el desarrollo de esta tesis.

Definición 1.1.1. Sean X, Y conjuntos. Una *correspondencia* (también llamada *multifunción*) de X en Y, es una función $T : X \to \mathscr{P}(Y)$, donde $\mathscr{P}(Y)$ denota el conjunto potencia de Y. Se le suele denotar $T : X \rightrightarrows Y$, y dado $x \in X$, denotamos $Tx = T(x)$.

Observación 1.1.1. Sean $T : X \rightrightarrows Y$, $A \subseteq X$, y $B \subseteq Y$, denotamos:

- $T(A) = \bigcup\limits_{x \in A} Tx$,
- $T^{-1}(B) = \{x \in X \mid Tx \cap B \neq \emptyset\}$, y
- $T^u(B) = (T^{-1}(B^c))^c$.

En el desarrollo de esta tesis, salvo este capítulo, consideraremos correspondencias $T : X \to \mathscr{H}(X)$, donde X es un espacio topológico, y $\mathscr{H}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Algunas notables son

- $\mathscr{C}(X) = \{A \in \mathscr{P}(X) \mid A \text{ es cerrado }\}$,
- $\mathscr{K}(X) = \{A \in \mathscr{P}(X) \mid A \text{ es compacto}\}$.

Si $T : X \to \mathscr{C}(X)$, diremos que T tiene *imágenes cerradas*, y si $T : X \to \mathscr{K}(X)$, diremos que T tiene *imágenes compactas*.

Definición 1.1.2. Sean X, Y espacios topológicos y $T : X \rightrightarrows Y$. Diremos que

- T es *semicontinua inferior*, si y solo si, para cada G abierto en Y, $T^{-1}(G)$ es abierto en X,
- T es *semicontinua superior*, si y solo si, para cada F cerrado en Y, $T^{-1}(F)$ es cerrado en X, y
- T es *continua*, si T es semicontinua superior e inferior.

Observación 1.1.2. La semicontinuidad superior de T equivale a las siguientes condiciones:

1. $T^u(B)$ es abierto, para todo abierto B de Y, y
2. para todo $x \in X$ y toda vecindad U de Tx, existe vecindad V de x tal que $z \in V$ implica $Tz \subseteq U$.

Y la semicontinuidad inferior de T equivale a las siguientes condiciones:

1. $T^u(B)$ es cerrado, para todo $B \subseteq Y$ cerrado, y
2. para todo $x \in X$ y todo abierto U en Y tal que $U \cap Tx \neq \emptyset$, existe V vecindad de x tal que $z \in V$ implica $Tz \cap U \neq \emptyset$.

Lema 1.1.1. *(Teorema 17.10 en [1]) Si $T : X \rightrightarrows Y$ es una correspondencia semicontinua superior con imágenes cerradas, e Y es regular, entonces el conjunto*

$$Gr(T) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in Tx\}$$

es cerrado con la topología producto.

Demostración. Supongamos que $(x, y) \notin Gr(T)$, es decir, $y \notin Tx$. Como Tx es cerrado e Y es regular, existen vecindades abiertas de V y W Tx e y respectivamente, tales que $V \cap W = \emptyset$. Así, $U = T^{-1}(V)$ es abierto, y $U \times W$ es una vecindad de (x, y) disjunta de $Gr(T)$, lo que prueba que su complemento es abierto. $\square$

Lema 1.1.2. *(Teorema 17.25.2 en [1]) Sean $T, S : X \rightrightarrows Y$ correspondencias tales que S es semicontinua superior con valores compactos, y $Gr(T)$ del lema anterior es cerrado. Entonces, la correspondencia $R : X \rightrightarrows Y$ dada por $Rx = Tx \cap Sx$, es semicontinua superior.*

Demostración. Sea $x \in X$ y W vecindad de Rx en Y. Notemos que $K = Sx \setminus W$ es compacto, y eventualmente vacío. Si $K = \emptyset$, entonces $N = S^u(W)$ es vecindad de x que satisface $R(N) \subseteq W$. Si $K \neq \emptyset$, sea $y \in K$, luego $y \notin Tx$, de modo que $(x, y) \notin Gr(T)$. Como $Gr(T)$ es cerrado, para cada $y \in K$, existen vecindades U_y de x y V_y de y tales que $U_y \times V_y \cap Gr(T) = \emptyset$. Así, existe $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq K$ finito tal que $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$ recubre K. Sean $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$, $U = S^u(W \cup V)$ y $N = U \cap (\bigcup_{i_1}^{n} U_{y_i})$. Notemos que

$$\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}\right) \times V\right) \cap Gr(T) = \emptyset.$$

Ahora, como $Sx \subseteq (Sx \setminus W) \cup W \subseteq V \cup W$, y S es semicontinua superior, entonces N es vecindad de x. De este modo, se obtiene $R(N) \subseteq W$. Esto completa la demostración. □

Teorema 1.1.1. *Sean $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de correspondencias entre dos espacios topológicos X e Y con imágenes cerradas ($T_\lambda x$ es cerrado, para cada $x \in X$), y $T : X \rightrightarrows Y$ la correspondencia definida por*

$$Tx := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda x.$$

Si cada correspondencia T_λ es semicontinua superior, además, existe $\nu \in \Lambda$ tal que $T_\nu x$ es compacto, para cada $x \in X$, e Y es regular, entonces T es semicontinua superior.

Demostración. Sea T_ν la correspondencia con imágenes compactas. Como Y es regular y cada T_λ tiene imágenes cerradas, entonces

$$Gr(T_\lambda) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in T_\lambda x\}$$

es cerrado, para cada $\lambda \in \Lambda$. Se tiene entonces que

$$Gr(T) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Gr(T_\lambda),$$

el cual es cerrado. Además, para cada $x \in X$, $Tx = Tx \cap T_\nu x$, la cual, por Lema 1.1.2, es semicontinua superior. Esto completa la demostración. □

Teorema 1.1.2. *Sea $T : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia semicontinua superior tal que Tx es compacto, para cada $x \in X$. Si X es compacto, entonces $T(X)$ es compacto en Y.*

Demostración. Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de $T(X)$. Como cada Tx es compacto, con $x \in X$, entonces existe un subcubrimiento finito $U_{\lambda_{1,x}}, \ldots, U_{\lambda_{n(x),x}}$. Sea $V_x =$

$U_{\lambda_{1,x}} \cup \cdots \cup U_{\lambda_{n(x),x}}$. Entonces, $W_x = T^{-1}(V_x)$ es una vecindad de x, de modo que $\{W_x\}_{x \in X}$ es cubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existe un subcubrimiento finito $W_{x_1}, \ldots, W_{x_r}$. De esto, se obtiene que los abiertos $\{U_{\lambda_{i,x_j}} \mid j = 1, \ldots, r, i = 1, \ldots, n(x_j)\}$ son un subcubrimiento finito de $T(X)$. Esto concluye la demostración. □

Teorema 1.1.3. *Sea $\{T_\lambda : X \rightrightarrows Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de correspondencias sobre espacios topológicos, y denotemos T la correspondencia de X en Y definida por*

$$Tx := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda x.$$

Si cada correspondencia T_λ es semicontinua inferior, entonces T es semicontinua superior.

Demostración. Sea G un abierto en Y. Se tiene

$$\begin{aligned} T^{-1}(G) &= \left\{ x \in X \mid \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda x \right) \cap G \neq \emptyset \right\} \\ &= \left\{ x \in X \mid \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (T_\lambda x \cap G) \neq \emptyset \right\} \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda^{-1}(G), \end{aligned}$$

el cual es abierto en X. Esto completa la demostración.

□

1.2. Espacios vectoriales topológicos

Definición 1.2.1. Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$). Diremos que V es un *espacio vectorial topológico* (EVT), si y solo si, existe una topología en V, llamada topología vectorial, tal que:

1. Para todo $x \in V$, $\{x\}$ es cerrado, es decir, V es T_1, y
2. las funciones suma y producto por escalar, dadas por $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, son continuas en $V \times V$ y $\mathbb{K} \times V$, respectivamente.

Definición 1.2.2. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $A \subseteq V$. Diremos que

- A es *convexo*, si y solo si, para todo $t \in [0,1]$, $tA + (1-t)A \subseteq A$,
- A es *balanceado*, si y solo si, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$, se tiene $\lambda A \subseteq A$, y
- la *envoltura convexa* (o cáscara convexa) de A es el conjunto

  $$\mathrm{co}(A) = \bigcap \{C \mid A \subseteq C,\ C \text{ convexo}\}.$$

  Denotaremos además $\overline{\mathrm{co}}(A) = \overline{\mathrm{co}(A)}$.

Definición 1.2.3. Sea V un espacio vectorial topológico. Diremos que V es *localmente convexo*, si y solo si, para todo $x \in V$ y U vecindad de x, existe W vecindad convexa de x tal que $W \subseteq U$.

Definición 1.2.4. Sean X un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$. Diremos que A es *acotado* en el sentido de Von Neumann, si y solo si, para toda vecindad V de 0, existe $t > 0$ tal que $A \subseteq tV$.

Capítulo 2

Elementos de espacios uniformes

2.1. Definiciones y caracterización

Los espacios uniformes se desarrollan con el objetivo de extender y generalizar conceptos y propiedades conocidas sobre los espacios métricos, tales como completitud, precompacticidad y continuidad uniforme. Varios de los resultados que exponemos se presentan en [24] y [7].

Definición 2.1.1. Sean X un conjunto no vacío y $\mathscr{B}, \mathscr{F}$ dos colecciones de subconjuntos de X. Diremos que $\mathscr{F}$ es un *filtro* en X, si y solo si:

1. $\emptyset \notin \mathscr{F}$,
2. si $A, B \in \mathscr{F}$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}$, y
3. si $A \in \mathscr{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathscr{F}$.

Y diremos que $\mathscr{B}$ es una *base de filtro* en X si:

1. $\emptyset \notin \mathscr{B}$, y
2. si $A, B \in \mathscr{B}$, existe $C \in \mathscr{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Definición 2.1.2. Sea X un conjunto no vacío. Diremos que una colección $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X \times X)$ es una *uniformidad* (o *estructura uniforme*) en X, si las siguientes condiciones se satisfacen:

1. $\mathscr{U}$ es un filtro en $X \times X$,
2. para cada $U \in \mathscr{U}$, $U^{-1} \in \mathscr{U}$, donde $U^{-1} = \{(x, y) \in X \times X \,|\, (y, x) \in U\}$,
3. para cada $U \in \mathscr{U}$, $\Delta \subseteq U$, donde $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \,|\, x = y\}$, y
4. para cada $U \in \mathscr{U}$, existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$, con

$$V \circ V = \{(x, y) \in X \times X \,|\, (\exists z \in X)(\,(x, z), (z, y) \in V)\}.$$

Diremos que el par $(X, \mathscr{U})$ es un *espacio uniforme*. Los elementos de $\mathscr{U}$ los llamaremos *entourages* de la uniformidad $\mathscr{U}$.

Ejemplo 2.1.1. Sea (E, d) un espacio métrico. Es directo que E es un espacio uniforme, pues la colección $\mathscr{B} = \{U_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, con

$$U_\epsilon = \{(x, y) \in E \times E \,|\, d(x, y) < \epsilon\}$$

verifica que su filtro generado:

$$\mathscr{F}(\mathscr{B}) = \{A \in \mathscr{P}(X \times X) \,|\, (\exists \epsilon > 0)(U_\epsilon \subseteq A)\}$$

es una uniformidad en E.

Ejemplo 2.1.2. Sea X un espacio vectorial topológico (real o complejo). La topología vectorial de X induce una estructura uniforme. En efecto, consideremos, para cada V vecindad de 0, el conjunto $U_V = \{x, y) \in X \times X \,|\, x - y \in V\}$. La colección $\mathscr{B} = \{U_V\}_V$ sobre todas las vecindades de 0 es una base de filtro en X, y su filtro generado

$$\mathscr{F}(\mathscr{B}) = \{A \in \mathscr{P}(X \times X) \,|\, (\exists U_V \in \mathscr{B})(U_V \subseteq A)\},$$

es una uniformidad en X.

Ejemplo 2.1.3. Como un caso más general que el ejemplo anterior, consideremos $(G,\cdot)$ un grupo topológico, y e neutro. Para cada V vecindad de e, consideremos los conjuntos

$$U_V = \{(x,y)\in G\times G \,|\, x^{-1}\cdot y \in V\},\ U^V = \{(x,y)\in G\times G \,|\, x\cdot y^{-1}\in V\}.$$

Las colecciones $\mathscr{B}_1 = \{U_V\}_V$, $\mathscr{B}_2 = \{U^V\}_V$ sobre todas las vecindades de e, son bases de filtro, y sus filtros generados

$$\mathscr{F}(\mathscr{B}_1) = \{A\in\mathscr{P}(G\times G)\,|\,(\exists U_V\in\mathscr{B}_1)(U_V\subseteq A)\},$$

$$\mathscr{F}(\mathscr{B}_2) = \{A\in\mathscr{P}(G\times G)\,|\,(\exists U^V\in\mathscr{B}_2)(U^V\subseteq A)\},$$

son uniformidades en G, llamadas uniformidad izquierda y derecha de G, respectivamente.

Definición 2.1.3. Un subconjunto no vacío $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}$ es una *base* de la uniformidad $\mathscr{U}$, si y solo si, para todo $U\in\mathscr{U}$, existe $V\in\mathscr{B}$ tal que $V\subseteq U$.

Definición 2.1.4. Una función entre espacios uniformes $F:(X,\mathscr{U})\to(Y,\mathscr{V})$ es *uniformemente continua*, si y solo si, para todo $V\in\mathscr{V}$, $(f\times f)^{-1}(V)\in\mathscr{U}$, donde $f\times f: X\times X\to Y\times Y$ está dada por $(f\times f)(x,y) = (f(x),f(y))$.

Sean $(X,\mathscr{U})$ un espacio uniforme, $a\in X$, A un subconjunto no vacío de X y $U\in\mathscr{U}$. Denotaremos

$$U[a] = \{x\in X\,|\,(a,x)\in U\},\ \text{y}\ U[A] = \bigcup_{a\in A} U[a].$$

Consideraremos a X dotado de la siguiente topología, llamada *topología uniforme*:

$$\tau = \{A\in\mathscr{P}(X)\,|\,(\forall x\in A)(\exists U\in\mathscr{U})(U[x]\subseteq A)\}.$$

Es bien sabido (ver [24]) que la uniformidad $\mathscr{U}$ es generada por una familia saturada y separadora de seudo-métricas uniformemente continuas $\{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X, es decir, satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para cada λ y μ en Λ, existe $\nu\in\Lambda$ tal que $\text{máx}\{d_\lambda(x,y), d_\mu(x,y)\}\le d_\nu(x,y)$, para todo x e y en X, y

2. para cada x e y en X distintos, existe $\lambda\in\Lambda$ tal que $d_\lambda(x,y)>0$.

Denotaremos por $\{U_{\lambda,\epsilon}\}_{\lambda\in\Lambda,\epsilon>0}$ el sistema fundamental de entourages de $\mathscr{U}$, donde

$$U_{\lambda,\epsilon} = \{(x,y) \in X \times X \mid d_\lambda(x,y) < \epsilon\}.$$

2.2. Acotamiento

A continuación, presentaremos el concepto de acotamiento en espacios uniformes, introducido por Atkin y Hejcman en [3] y [20], respectivamente.

En un conjunto arbitrario X, denotamos por $\langle X\rangle$ la colección de todos los subconjuntos finitos de X.

Definición 2.2.1. Sean $(X,\mathscr{U})$ un espacio uniforme y $A \subseteq X$. Diremos que

- A es *acotado* (o también *acotado* en X), si y solo si, para cada $U \in \mathscr{U}$, existen $F \in \langle X\rangle$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq U^m[F]$, donde $U^m = U \circ \cdots \circ U$ (m-veces),
- A es *acotado en sí mismo* si A es acotado en $(A,\mathscr{U}_A)$, donde $\mathscr{U}_A$ denota la uniformidad subespacio
$$\mathscr{U}_A = \{U \cap (A \times A) \mid U \in \mathscr{U}\},$$
- A es *precompacto* (o *totalmente acotado*) si A es acotado en X con $m = 1$.

En un espacio uniforme $(X,\mathscr{U})$, denotamos los siguientes conjuntos de interés:

- $\mathscr{B}(X) = \{A \in \mathscr{P}(X) \mid A \text{ es acotado}\}$.
- $\mathscr{C}(X) = \{A \in \mathscr{P}(X) \mid A \text{ es cerrado}\}$.
- $\mathscr{C}\mathscr{B}(X) = \mathscr{C}(X) \cap \mathscr{B}(X)$.
- $\mathscr{T}\mathscr{B}(X) = \{A \in \mathscr{P}(X) \mid A \text{ es precompacto }\}$.

Observación 2.2.1. La condición de acotamiento es suficiente para los entourage de alguna base de $\mathscr{U}$, e incluso para entourage simétricos.

Para la condición de acotamiento, es suficiente considerar el conjunto F de la definición 2.2.1 contenido en A, como vemos a continuación.

Proposición 2.2.1. *Sean $(X,\mathscr{U})$ un espacio uniforme y $A \subseteq X$. Entonces, A es acotado, si y solo si, para cada $U \in \mathscr{U}$, existen $F \in \langle A\rangle$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $A \subseteq U^m[F]$.*

Demostración. La condición necesaria es un caso particular de la definición. Ahora, sean $U \in \mathscr{U}$ y $V \in \mathscr{U}$ entourage simétrico tal que $V \circ V \subseteq U$. Existen $x_1, \dots, x_n$ en X y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$A \subseteq V^m[x_1, \dots, x_n] = \bigcup_{i=1}^{n} V^m[x_i].$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $A \cap V^m[x_i] \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $y_i \in A \cap V^m[x_i]$, luego,

$$V^m[x_i] \subseteq V^m[(V^{-1})^m[y_i]] = V^m \circ V^m[y_i] = U^m[y_i].$$

En consecuencia,

$$A \subseteq V^m[x_1, \dots, x_n] \subseteq U^m[y_1, \dots, y_n].$$

$\square$

Lema 2.2.1. *Sean $(X, \mathscr{U})$ e $(Y, \mathscr{V})$ espacios uniformes, $A \subseteq X$ y $f : (X, \mathscr{U}) \to (Y, \mathscr{V})$ uniformemente continua. Si A es acotado, entonces $\overline{f(A)}$ es acotado en Y (y en consecuencia, $f(A)$ también). Más aún, si A es acotado en sí mismo, entonces $f(A)$ y $\overline{f(A)}$ son acotados en sí mismos.*

Demostración. Sea $W \in \mathscr{V}$, luego, $(f \times f)^{-1}(W) \in \mathscr{U}$, y como A es acotado, existen $F \in \langle X \rangle$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$A \subseteq \left((f \times f)^{-1}(W)\right)^m [F].$$

Por otro lado, tenemos que

$$f\left[\left((f \times f)^{-1}(W)\right)^m [F]\right] \subseteq W^m\left[f(F)\right].$$

En efecto, dado $x \in \left((f \times f)^{-1}(W)\right)^m [F]$, existen $y \in F$ y $z_1, \dots, z_{m-1}$ en X tales que $(y, z_1), \dots, (z_{m-1}, x) \in (f \times f)^{-1}(W)$. En consecuencia, $(f(y), f(z_1)), \dots, (f(z_{m-1}), f(x)) \in W$, de modo que $f(x) \in W^m[f(y)]$, y $f(x) \in W^m[f(F)]$. Así, $f(A) \subseteq W^m\left[f(F)\right]$, y entonces

$$\overline{f(A)} \subseteq W^{m+1}\left[f(F)\right],$$

pues si $y \in \overline{f(A)}$, entonces para $W \in \mathscr{V}$, existe $a \in A$ tal que $(f(a), y) \in W$. Por lo anterior, existen $w_1, \dots, w_{m-1}$ en Y y $z \in F$ tales que $(f(z), w_1), \dots, (w_{m-1}, f(a)), (f(a), y) \in W$. De este modo, $y \in W^{m+1}[f(F)]$. Como $\overline{f(A)} \subseteq W^{m+1}\left[f(F)\right]$ y F es finito, entonces $\overline{f(A)}$ es acotado.

Para la última aserción, hay que notar que las funciones

$$f|_A : (A, \mathscr{U}_A) \longrightarrow \big(f(A), \mathscr{V}_{f(A)}\big), \quad \iota : \big(f(A), \mathscr{V}_{f(A)}\big) \longrightarrow \Big(\overline{f(A)}, \mathscr{V}_{\overline{f(A)}}\Big),$$

con ι la inclusión, son funciones uniformemente continuas. Si A es acotado en sí mismo, entonces $f(A)$ es acotado en sí mismo por $f|_A$, y en consecuencia, $\overline{f(A)}$ también lo es por ι. □

Proposición 2.2.2. *Sean $(X, \mathscr{U})$ un espacio uniforme y $A, B \subseteq X$.*

1. *Si A es acotado en X y $B \subseteq A$, entonces B es acotado en X. Más aún, si A y B son acotados, entonces $A \cup B$ también es acotado en X.*

2. *Si A es acotado en sí mismo, entonces es acotado en X.*

3. *Si A y B son acotados en sí mismos, entonces son acotados en $(A \cup B, \mathscr{U}_{A\cup B})$. Además, $A \cup B$ es acotado en sí mismo.*

Demostración. 1. Supongamos que A es acotado y $B \subseteq A$. Dado $U \in \mathscr{U}$, existen $m \in \mathbb{N}$ y $F \in \langle X \rangle$ tales que $B \subseteq A \subseteq U^m[F]$, de modo que B es acotado.

   Ahora, si A y B fueran acotados, sea $U \in \mathscr{U}$. Existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $F_1 \in \langle A \rangle$ y $F_2 \in \langle B \rangle$, tales que

$$A \subseteq U^{n_1}[F_1], \ B \subseteq U^{n_2}[F_2].$$

   Si $n = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, y $F = F_1 \cup F_2$, entonces $F \in \langle A \cup B \rangle$ y $A, B \subseteq U^n[F]$, de modo que $A \cup B \subseteq U^n[F]$. Así, $A \cup B$ es acotado.

2. Consideremos la inclusión

$$\iota : (A, \mathscr{U}_A) \to (X, \mathscr{U}).$$

   Como ι es uniformemente continua, entonces si A es acotado en sí mismo, $A = \iota(A)$ lo es en X.

3. Supongamos que A y B son acotados en sí mismos. Las inclusiones

$$\iota : (A, \mathscr{U}_A) \to (A \cup B, \mathscr{U}_{A\cup B}), \ \jmath : (B, \mathscr{U}_B) \to (A \cup B, \mathscr{U}_{A\cup B}),$$

son uniformemente continuas. En efecto, si $V \in \mathscr{U}_{A\cup B}$, entonces $V = W \cap [(A \cup B) \times (A \cup B)]$, para algún $W \in \mathscr{U}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} (\iota \times \iota)^{-1}(V) &= \{(x, y) \in A \times A \,|\, (x, y) \in V\} \\ &= \{(x, y) \in A \times A \,|\, (x, y) \in W\} \\ &= W \cap (A \times A), \end{aligned}$$

que es un entourage en $\mathscr{U}_A$. Análogamente, $\jmath$ es uniformemente continua. En consecuencia, si A y B son acotados, entonces $\iota(A) = A$ y $\jmath(B) = B$ son acotados en $A \cup B$.

Finalmente, sea $U \in \mathscr{U}$. Como A y B son acotados en sí mismos, existen $m \in \mathbb{N}$ y $F \in \langle A \cup B \rangle$ tales que

$$A \subseteq V \cap (A \times A)^m[F],\ B \subseteq V \cap (B \times B)^m[F].$$

En consecuencia, $A \cup B \subseteq V \cap [(A \cup B \times (A \cup B)]^m[F]$. Por tanto, $A \cup B$ es acotado en sí mismo.

□

Proposición 2.2.3. *Sean $(X, \mathscr{U})$ un espacio uniforme y $A \subseteq X$.*

1. *Si A es compacto, entonces es acotado.*

2. *A es precompacto, si y solo si, A es precompacto en $(A, \mathscr{U}_A)$.*

Demostración.

1. Supongamos que A es compacto. Luego, dado $U \in \mathscr{U}$, $\{\mathrm{Int}(U[x]) \,|\, x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de A, de modo que existen $x_1, \ldots, x_n$ en X tales que

$$A \subseteq \mathrm{Int}(U[x_1]) \cup \cdots \cup \mathrm{Int}(U[x_n]) \subseteq U[x_1, \ldots, x_n],$$

de modo que A es precompacto, y por tanto acotado.

2. Supongamos que A es precompacto. Sea $U \in \mathscr{U}$. Existe $F \in \langle A \rangle$ tal que $A \subseteq U[F]$. Ahora, sea $x \in A$, luego existe $y \in F$ tal que $(y, x) \in U$. Como $x, y \in A$, entonces $(y, x) \in U \cap (A \times A)$, que es un entourage arbitrario de la uniformidad subespacio. Esto prueba que $A \subseteq U \cap (A \times A)[F]$, de modo que A es precompacto en $\mathscr{U}_A$.

El recíproco es directo, pues si A es precompacto, entonces para $U \in \mathscr{U}$, existe $F \in \langle A \rangle$ tal que $A \subseteq U \cap (A \times A)[F] \subseteq U[F]$. En consecuencia, A es precompacto en sí mismo.

$\square$

Definición 2.2.2. Sea $\{(X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios uniformes, y $\pi_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\mu$ la proyección canónica, para cada $\mu \in \Lambda$. La *uniformidad producto* definida sobre $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es la uniformidad cuya base es formada por conjuntos de la forma

$$\bigcap_{\lambda \in \Gamma} (\pi_\lambda \times \pi_\lambda)^{-1}(U_\lambda),$$

con $\Gamma \subseteq \Lambda$ finito y $U_\lambda \in \mathscr{U}_\lambda$.

Es directo que con la uniformidad producto, las proyecciones π_λ son uniformemente continuas.
La siguiente proposición caracteriza los subconjuntos acotados en la uniformidad producto.

Proposición 2.2.4. *Sean $\{(X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios uniformes, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ dotado de la uniformidad producto $\mathscr{U}$, y $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ las proyecciones canónicas, para $\lambda \in \Lambda$. Entonces, $A \subseteq X$ es acotado en la uniformidad producto, si y sólo si, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\pi_\lambda(A)$ es acotado en X_λ.*

Demostración. Como $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ es uniformemente continua, para cada $\lambda \in \Lambda$, entonces por Lema 2.2.1, se sigue que si A es acotado, $\pi_\lambda(A)$ lo es en X_λ. Recíprocamente, supongamos que dado $A \subseteq X$, $\pi_\lambda(A)$ es acotado en X, para cada $\lambda \in \Lambda$. Una base de $\mathscr{U}$ consiste en elementos de la forma

$$V = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (\pi_\alpha \times \pi_\alpha)^{-1}(U_\alpha),$$

con $\Gamma \subseteq \Lambda$ finito y $U_\alpha \in \mathscr{U}_\alpha$, para cada $\alpha \in \Gamma$. Como $\pi_\alpha(A)$ es acotado, existen $F_\alpha \in \langle X_\alpha \rangle$ y $m(\alpha) \in \mathbb{N}$ tales que

$$\pi_\alpha(A) \subseteq U_\alpha^{m(\alpha)}[F_\alpha].$$

Sean $n = \max\{m(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$, $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in X$ y

$$F = \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Gamma} \{\{w_\alpha\}\} \times \prod_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma.$$

Veamos que $A \subseteq V^m[F]$. En efecto, primero observemos que

$$A \subseteq \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(A)),$$

para todo $\alpha \in \Lambda$, de modo que $A \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Gamma} \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(A))$.

Ahora, sea $x \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(A))$. Luego, para todo $\alpha \in \Gamma$, $x_\alpha \in \pi_\alpha(A)$, y

$$\pi_\alpha(A) \subseteq U_\alpha^{m(\alpha)}[F_\alpha] = \bigcup_{f\in F_\alpha} U^{m(\alpha)}[f],$$

de modo que $x_\alpha \in U^{m(\alpha)}[\tilde{f}_\alpha]$, para algún $\tilde{f}_\alpha \in F_\alpha$. Sea $f = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ dada por $f_\lambda = \tilde{f}_\lambda$ si $\lambda \in \Gamma$, y $f_\lambda = w_\lambda$ si $\lambda \notin \Gamma$. Notemos que $f \in F$. Veamos ahora que $x \in V^m[f]$.

Observemos que para todo $m \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(\pi_\alpha \times \pi_\alpha)^{-1}(U_\alpha^m) \subseteq V^m$. Además, como

$$(\pi_\alpha \times \pi_\alpha)(x, f) = (x_\alpha, \tilde{f}_\alpha) \in U_\alpha^m,$$

para todo $\alpha \in \Gamma$, entonces $x \in V^m[f]$. Esto prueba que A es acotado. □

Observación 2.2.2. Se sigue de la proposición anterior que $A \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es precompacto, si y solo si, $\pi_\lambda(A)$ es precompacto en X_λ, para cada $\lambda \in \Lambda$.

A continuación, caracterizaremos el acotamiento en espacios uniformes mediante la familia separadora de seudo-métricas que generan dicha uniformidad. Para ello, abordaremos el concepto de V-componente.

Definición 2.2.3. Sean $(X, \mathscr{U})$ un espacio uniforme y $V \in \mathscr{U}$ un entourage simétrico. Definimos las siguientes relaciones en X:

- Diremos que $x \sim_V y$, si y solo si, $x \in V^m[y]$, para algún $m \in \mathbb{N}$, y
- diremos que $x \sim y$, si y solo si, $x \sim_V y$, para todo entourage simétrico $V \in \mathscr{U}$.

Proposición 2.2.5. *Sea $V \in \mathscr{U}$ un entourage simétrico. Entonces, $\sim_V$ y $\sim$ son relaciones de equivalencia en X.*

Demostración. Basta probar que $\sim_V$ lo es. En efecto, como $\Delta \subseteq V$, entonces para cada $x \in V$, $(x, x) \in V$ implica $x \in V[x]$, de modo que $\sim_V$ es refleja.

Supongamos que $x \sim_V y$, y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V^n[y]$. Existen $z_1, \ldots, z_{n-1}$ en X tales $(x, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_{n-1}, y) \in V$. Como V es simétrico, entonces $(y, z_{n-1}), \ldots, (z_1, x) \in V$, de modo que $y \in V^n[x]$, e $y \sim_V x$.

Finalmente, supongamos que $x \sim_V y$ e $y \sim_V z$. Existen n y m en $\mathbb{N}$ tales que $x \in V^m[y]$ e $y \in V^m[z]$. Tenemos entonces que $x \in V^{n+m}[z]$, pues existen $z_1, \ldots, z_{n-1}$, $w_1, \ldots, w_{m-1}$ en X tales que

$$(x, z_1), \ldots, (z_{n-1}, y), (y, w_1), \ldots, (w_{m-1}, z) \in V,$$

lo que prueba $x \sim_V z$. □

Observación 2.2.3. 1. Las clases de equivalencia bajo $\sim_V$ y $\sim$ se denominan *V-componentes* y *seudo-componentes* de X, respectivamente.

2. Si X es acotado, toda V-componente es acotada en sí misma.

Lema 2.2.2. *Sea $(X, \mathscr{U})$ un espacio uniforme. Entonces, $A \subseteq X$ es acotado, si y solo si, para cada entourage simétrico $V \in \mathscr{U}$, A intersecta una cantidad finita de V-componentes distintas, y para cada V-componente W, existen $w \in W$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $A \cap W \subseteq V^m[w]$. Más aún, si A es acotado y W es una V-componente de X, entonces para cada $v \in W$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap W \subseteq V^m[v]$.*

Demostración. Supongamos que A es acotado en X y sea $V \in \mathscr{U}$. Existen $F = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \langle X \rangle$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$A \subseteq V^n[x_1] \cup \cdots \cup V^n[x_r].$$

Como la V-componente de $w \in X$ es $\overline{w} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V^k[w]$, entonces $A \subseteq \overline{x_1} \cup \cdots \cup \overline{x_r}$, de modo que A intersecta a lo más r V-componentes distintas.

Ahora, sea $W = \overline{x_i}$ una V-componente de X que intersecta a A. Observemos que

$$A \cap W \subseteq \overline{x_i} \cap \bigcup_{j=1}^{r} V^n[x_j] = \overline{x_i} \cap V^n[x_i] = V^n[x_i].$$

Sea $v \in W$. Existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $v \in V^{m_i}[x_i]$ y $x_i \in V^{m_i}[v]$. Sea

$$m = \text{máx}\{m_k : 1 \leq k \leq r\}.$$

Tenemos que $x_i \in V^m[v]$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. En consecuencia,

$$A \cap W \subseteq V^n[V^m[F \cap W])) = V^{n+m}[v].$$

Recíprocamente, supongamos que A intersecta un número finito de V-componentes, y que para cada V-componente, W, existen $w \in W$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $A \cap W \subseteq V^n[w]$.

De lo primero, tenemos que existe un conjunto minimal $F = \{x_1, \dots, x_r\} \in \langle X \rangle$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V^m[x_1] \cup \cdots \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V^m[x_r].$$

Para cada componente $\overline{x_i}$, existe $w_i \in \overline{x_i}$ y $n_i \in \mathbb{N}$ tales que $A \cap \overline{x_i} \subseteq V^{n_i}[w_i]$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. Para $k = \text{máx}\{n_j \mid 1 \leq j \leq r\}$, tenemos que

$$A \subseteq V^k[w_1] \cup \cdots \cup V^k[w_r] = V^k[w_1, \dots, w_r].$$

Esto prueba que A es acotado, lo que concluye la demostración. $\square$

Teorema 2.2.1. *Sean $(X, \mathscr{U})$ un espacio uniforme y $A \subseteq X$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *A es acotado en X,*
2. *si $f : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces $f|_A$ es acotada, y*
3. *A es acotado en el sentido seudo-métrico, es decir, para cada seudo-métrica uniformemente continua d en X, se tiene para todo $a \in A$, $\sup_{x\in A} d(x, a) < \infty$.*

Demostración. 1 implica 2 es directo de Lema 2.2.1. Para probar 2 implica 3, sea d una seudo-métrica uniformemente continua en X, y dado $a \in X$, definamos $f : X \to \mathbb{R}$ como $f(x) = d(x, a)$. Como d es uniformemente continua, entonces f también lo es, y de 2. se sigue que f es acotada en A, de modo que A es acotado en el sentido seudo-métrico.

Finalmente, probaremos 3 implica 1 vía contrarrecíproco. Supongamos que A no es acotado. Sean V un entourage simétrico, y $\{W_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de V-componentes distintas, salvo un número finito, que intersectan a A. Definamos $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} n, & \text{si} \quad x \in W_n, \\ 0, & \text{si} \quad x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n. \end{cases}$$

Se tiene que φ es uniformemente continua. En efecto, para $0 < \epsilon < 1$ y un entourage basal

$$U_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| < \epsilon\}$$

en la uniformidad de $\mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned}(\varphi\times\varphi)^{-1}(U_\epsilon) &= \{(x,y)\in X\times X : (\varphi(x),\varphi(y))\in U_\epsilon\}\\ &= \{(x,y)\in X\times X \mid |\varphi(x)-\varphi(y)|<\epsilon\}\\ &= \{(x,y)\in X\times X \mid \varphi(x)=\varphi(y)\}\\ &= \{(x,y)\in X\times X \mid x\sim_V y\}\\ &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V^m\in\mathscr{U}.\end{aligned}$$

Además, la seudo-métrica en X definida por

$$d(x,y)=|\varphi(x)-\varphi(y)|$$

es uniformemente continua, pero d no es acotada en A, ya que para cada $m\in\mathbb{N}$, existen x e y en A tales que $d(x,y)=m$. Esto concluye la demostración. □

Veremos a continuación que el concepto de acotamiento en espacios uniformes coincide con el acotamiento en espacios métricos, y en espacios vectoriales topológicos.

Corolario 2.2.1. *Sean (E,d) un espacio métrico y $A\subseteq E$. Entonces, A es acotado en el sentido métrico, si y sólo si, A es acotado en $(E,\mathscr{U}_d)$, con $\mathscr{U}_d$ la uniformidad generada por la métrica d.*

Demostración. Si $\mathscr{U}_d$ es la uniformidad generada por d, entonces el acotamiento métrico de A coincide con la condición 3 del Teorema 2.2.1. □

Corolario 2.2.2. *Sean V un espacio vectorial topológico localmente convexo y $A\subseteq V$. Entonces, A es acotado (en el sentido de Von Neumann), si y solo si, A es acotado en la uniformidad de V.*

Demostración. Supongamos primero que A es acotado en la uniformidad de V. Sea U una vecindad convexa y balanceada de $0\in V$. Tenemos que

$$V_U=\{(x,y)\in V\times V \mid y-x\in U\}$$

es un entourage de la uniformidad de V. Luego, existen $F\in\langle V\rangle$ y $m\in\mathbb{N}$ tales que

$$A\subseteq V_U^m[F]=F+U+\cdots+U=F+mU.$$

Como F es finito, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $F \subseteq \alpha U$, de modo que $A \subseteq (m+\alpha)U$. Esto prueba que A es acotado en el sentido de Von Neumann.

Recíprocamente, supongamos que A es Von Neumann-acotado y sea U una vecindad convexa y balanceada de $0 \in V$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq mU = V_U^m[0]$, de modo que A es acotado en la uniformidad. Esto concluye la demostración. □

2.3. Completitud

Ya abordado el concepto de acotamiento y precompacticidad, veremos en esta sección el concepto de completitud y resultados que relacionan los conceptos indicados.

Definición 2.3.1. Sean X un espacio topológico y $\mathscr{B}$ una base de filtro en X. Diremos que $\mathscr{B}$ *converge* a $x_0 \in X$, si y solo si, para toda V vecindad de x_0, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subseteq V$.

Definición 2.3.2. Sean $(X,\mathscr{U})$ un espacio uniforme y $\mathscr{B}$ una base de filtro en X. Diremos que $\mathscr{B}$ es una *base de filtro de Cauchy* (o *fundamental*), si y solo si, para cada $U \in \mathscr{U}$, existe $A \in \mathscr{B}$ tal que $A \times A \subseteq U$.

Proposición 2.3.1. *Si $\mathscr{B}$ es una base de filtro en $(X,\mathscr{U})$ convergente hacia $x \in X$, entonces $\mathscr{B}$ es una base de filtro de Cauchy.*

Notemos que si $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son bases de filtro en X, $\mathscr{B}$ está subordinada a $\mathscr{C}$ y esta es de Cauchy, entonces $\mathscr{B}$ también es de Cauchy.

Definición 2.3.3. Diremos que un espacio uniforme $(X,\mathscr{U})$ es *completo*, si y solo si, toda base de filtro de Cauchy, en X, es convergente.

Los siguientes resultados, cuyas demostraciones se encuentran en [24] y las cuales omitiremos, permiten probar para espacios uniformes una caracterización útil de la compacidad en términos de precompacidad y completitud. Junto a esto, serán de importancia para enunciados del Capítulo 4.

Proposición 2.3.2. *Sea $(X,\mathscr{U})$ un espacio uniforme completo y $F \subseteq X$ cerrado. Entonces, $(F,\mathscr{U}_F)$ es completo.*

Proposición 2.3.3. *Sea $(X,\mathscr{U})$ un espacio uniforme Hausdorff con la topología uniforme. Si $F \subseteq X$ es tal que $(F,\mathscr{U}_F)$ es completo, entonces F es cerrado en X.*

Lema 2.3.1. *Sea $(X,\mathscr{U})$ un espacio uniforme. Entonces, X es precompacto, si y solo si, todo ultrafiltro en X es de Cauchy.*

Teorema 2.3.1. *Sea $(X,\mathscr{U})$ un espacio uniforme. Entonces, X es compacto, si y solo si, X es precompacto y completo.*

Demostración. Supongamos que X es compacto. Como $\{\mathrm{Int}(U[x])\}_{x\in X}$ es un cubrimiento abierto de X, existen $x_1,\dots,x_r$ en X que cubren X. De este modo, tenemos que

$$X = \mathrm{Int}(U[x_1]) \cup \cdots \cup \mathrm{Int}(U[x_r]) \subseteq U[x_1,\dots,x_n].$$

Así, X es precompacto. Para demostrar la completitud, sea $\mathscr{B}$ una base de filtro de Cauchy. Como X es compacto, entonces $\mathscr{B}$ posee al menos un punto de acumulación, $x \in X$, es decir, $x \in \bigcap_{B\in\mathscr{B}} \overline{B}$. Veamos que $\mathscr{B}$ converge hacia x. Sea V una vecindad de x, luego, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $U[x] \subseteq V$, con U cerrado en $X \times X$. Como $\mathscr{B}$ es de Cauchy, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \times B \subseteq U$ y, como x es punto de acumulación de $\mathscr{B}$, entonces $x \in \overline{B}$. Por consiguiente:

$$\overline{B} \times B \subseteq \overline{B \times B} \subseteq \overline{U} = U,$$

de modo que $\{x\} \times B \subseteq U$ y entonces $B \subseteq U[x] \subseteq V$. Esto implica que $\mathscr{B}$ converge hacia x.

Recíprocamente, supongamos que X es precompacto y completo. Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro en X. Como X es precompacto, por Lema 2.3.1, $\mathscr{F}$ es de Cauchy, por lo que converge en X, pues X es completo. Por lo tanto, X es compacto, con lo que se completa la demostración. □

La completitud de un espacio uniforme también se puede abordar vía redes.

Definición 2.3.4. Un *conjunto dirigido* es un par $(D,\preceq)$, donde $\preceq$ es una relación en D que es transitiva, refleja, y para todo $n, m \in D$, existe $d \in D$ tal que $n \preceq d$ y $m \preceq d$.

Definición 2.3.5. Sea D un conjunto dirigido y $(X,\mathscr{U})$ un espacio uniforme.

- Una *red* en X es una función $\psi : D \to X$. Para cada $\alpha \in D$, denotamos $\psi(\alpha) = x_\alpha$, y $\psi(D) = \{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$.

- Una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es *de Cauchy* (o fundamental), si para todo $U \in \mathscr{U}$, existe $d \in D$ tal que si $d \preceq n$ y $d \preceq m$, entonces $(x_n, x_m) \in U$.

- Una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es *eventual* en $A \subseteq X$, si existe $d \in D$ tal que para todo $d \preceq n$, se tiene $x_n \in A$.
- Una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ *converge* a $x \in X$, si y solo si, para toda V vecindad de X, existe $d \in D$ tal que para todo $d \preceq n$, $x_n \in V$.

Notemos que una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es eventual en $A \subseteq X$ si A contiene una cola T_d de la red, donde

$$T_d = \{x_\alpha \mid d \preceq \alpha\}.$$

Proposición 2.3.4. *Si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es una red convergente en X, entonces es una red de Cauchy.*

Proposición 2.3.5. *Una red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es de Cauchy en X, si y solo si, para todo $\lambda \in \Lambda$ y todo $\epsilon > 0$, existe $d \in D$ tal que $d \preceq n, m$ implica $d_\lambda(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Demostración. Es directo del hecho que $\{U_{\lambda,\epsilon}\}_{\lambda\in\Lambda,\epsilon<0}$ es una base de $\mathscr{U}$, y $U_{\lambda,\epsilon} \in \mathscr{U}$, para todo $\lambda \in \Lambda$ y $\epsilon > 0$. □

Observación 2.3.1. Todo filtro induce una red, y viceversa. En efecto:

- Sea $\mathscr{F}$ un filtro en X, definimos en $\mathscr{F}$ el orden $\leq$ dado por $F_1 \leq F_2$, si y solo si, $F_2 \subseteq F_1$. Se tiene que $(\mathscr{F}, \leq)$ es un conjunto dirigido. Una red derivada de $\mathscr{F}$ es una función $\omega : (\mathscr{F}, \leq) \to X$ tal que $\omega(F) \in F$, para todo $F \in \mathscr{F}$. De esto, se tiene que la red derivada de un filtro no es única.
- Sea $\psi : D \to X$ una red en X. Definimos

  $$\mathscr{F}_\psi = \{F \subseteq X \mid \psi \text{ está eventualmente en } F\}.$$

  $\mathscr{F}_\psi$ es un filtro en X, se le llama filtro derivado de ψ.

La convergencia entre redes y filtros está relacionada de la siguiente forma.

Lema 2.3.2. *Sean $(X, \mathscr{U})$ un espacio uniforme, y $x \in X$.*

1. *Una red ψ converge a x, si y solo si, el filtro derivado $\mathscr{F}_\psi$ converge a x.*
2. *Un filtro $\mathscr{F}$ en X (resp. base de filtro) converge a x, si y solo si, toda red derivada de $\mathscr{F}$ (resp. toda red derivada del filtro generado) converge a x.*

Demostración.

1. ψ converge a x, si y solo si, para toda V vecindad de x, existe $d \in D$ tal que $d \preceq n$ implica $\psi(n) \in V$, es decir, ψ es eventual en cada vecindad de x. Esta es justamente la convergencia del filtro derivado de ψ.

2. Sean $\mathscr{F}$ un filtro, $\omega : \mathscr{F} \to X$ alguna red derivada, y supongamos que $\mathscr{F}$ converge a $x \in X$. Sea V vecindad de x, luego, $V \in \mathscr{F}$. Notemos que la cola T_V satisface $T_V \subseteq V$. En efecto, dado $U \in \mathscr{F}$ tal que $V \leq U$, se tiene $U \subseteq V$, y entonces $\omega(U) \in U \subseteq V$. Esto implica que ω converge a x.

   Finalmente, supongamos que toda red derivada $\omega : \mathscr{F} \to X$ de $\mathscr{F}$ converge a $x \in X$, y que $\mathscr{F}$ no converge a x. Existe $A \subseteq X$ que contiene una vecindad U de x, pero con $A \notin \mathscr{F}$. En particular, $U \notin \mathscr{F}$, o bien, $F \neq U$, para todo $F \in \mathscr{F}$. Sea ω una red derivada de $\mathscr{F}$ tal que $\omega(V) \in V \setminus U$, para todo $V \in \mathscr{F}$. Luego, como ninguna cola de ω está contenida en U, y esta es vecindad de x, se tiene que ω no converge a x, lo que es una contradicción. Esto concluye la demostración.

□

Teorema 2.3.2. *Un espacio uniforme $(X, \mathscr{U})$ es completo, si y solo si, toda red de Cauchy en X es convergente.*

Demostración. Por el lema, basta probar que

1. Si ψ es una red de Cauchy en X, su filtro derivado es un filtro de Cauchy, y

2. si $\mathscr{B}$ es una base de filtro de Cauchy en X, toda red derivada $\omega : \mathscr{F}(\mathscr{B}) \to X$ es de Cauchy.

En efecto. Sea $\psi : D \to X$ una red de Cauchy en X, y $\mathscr{F}_\psi$ su filtro derivado. Sea $U \in \mathscr{U}$. Luego, existe $d \in D$ tal que $d \preceq n, m$ implica $(\psi(n), \psi(m)) \in U$. Tenemos que $T_d \in \mathscr{F}_\psi$, y además, $T_d \times T_d \subseteq U$. En consecuencia, $\mathscr{F}_\psi$ es filtro de Cauchy.

Ahora, sean $\mathscr{B}$ una base de filtro de Cauchy, $\mathscr{F}$ su filtro generado y $\omega : \mathscr{F} \to X$ una red derivada. Sea $U \in \mathscr{U}$. Existe $A \in \mathscr{B}$ tal que $A \times A \subseteq U$. Así, para todo $C, D \geq A$, se tiene $C, D \subseteq A$, y entonces

$$(\omega(C), \omega(D)) \in C \times D \subseteq A \times A \subseteq U.$$

En consecuencia, ω es una red de Cauchy. Finalmente, si $(X, \mathscr{U})$ es completo, entonces dada una red de Cauchy, su filtro derivado también es de Cauchy, y converge. Por lema, la red es convergente. Recíprocamente, si toda red de Cauchy converge, y $\mathscr{B}$ es una base de filtro de Cauchy, entonces toda red derivada es de Cauchy, y por ende, convergente. Por el lema, $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ es convergente, y en consecuencia, $\mathscr{B}$ converge. Esto completa la demostración.

□

2.4. Uniformización de cerrados y acotados

Como se ha visto en el Teorema 2.2.1, los conjuntos acotados también lo son en el sentido seudo-métrico, para las seudo-métricas que generan la uniformidad. Este hecho permite enunciar el siguiente lema,

Lema 2.4.1. *Para cada $\lambda \in \Lambda$, la función $h_\lambda : \mathscr{B}(X) \times \mathscr{B}(x) \to [0,\infty)$ definida por*

$$h_\lambda(A,B) = \sup_{a\in A} d_\lambda(a,B),$$

con $d_\lambda(a,B) = \operatorname{ínf}_{b\in B} d_\lambda(a,b)$, satisface las siguientes condiciones:

1. $h_\lambda(A,B) = 0$*, si y solo si,* $A \subseteq \overline{B}$*, y*

2. $h_\lambda(A,B) \le h_\lambda(A,C) + h_\lambda(C,B)$.

Demostración.

1. Sean A y B en $\mathscr{B}(X)$ tales que $h_\lambda(A,B) = 0$, entonces, para todo $x \in A$, $d_\lambda(x,B) \le h_\lambda(A,B) = 0$, por lo que $d_\lambda(x,B) = 0$, lo que implica $x \in \overline{B}$. Esto demuestra que $A \subseteq \overline{B}$.

   Recíprocamente, supongamos que $A \subseteq \overline{B}$, luego, para todo $x \in A$, $x \in \overline{B}$, de modo que $d_\lambda(x,B) = d_\lambda(x,\overline{B}) = 0$, lo que demuestra que $h_\lambda(A,B) = 0$.

2. Sean $a \in A$ y $c \in C$. Tenemos que $d_\lambda(a,B) \le d_\lambda(a,c) + d_\lambda(c,B)$. Luego,

   $$d_\lambda(a,B) \le d_\lambda(a,c) + \sup_{c\in C} d_\lambda(c,B),$$

   por lo que

   $$d_\lambda(a,B) - h_\lambda(C,B) \le d_\lambda(a,c),$$

   para todo $c \in C$. Así,

   $$d_\lambda(a,B) - h_\lambda(C,B) \le d_\lambda(a,C),$$

y en consecuencia, $\sup_{a\in A} d_\lambda(a,B) - h_\lambda(C,B) \leq \sup_{a\in A} d_\lambda(a,C)$. Es decir, $h_\lambda(A,B) \leq h_\lambda(A,C) + h_\lambda(C,B)$, lo que concluye la demostración.

□

Con esto, se puede notar que para cada $\lambda \in \Lambda$, la función $H^\lambda : \mathscr{C}\mathscr{B}(X) \times \mathscr{C}\mathscr{B}(X) \to [0,\infty)$ dada por

$$H^\lambda(A,B) = \text{máx}\{h_\lambda(A,B), h_\lambda(B,A)\}$$

es una seudo métrica sobre $\mathscr{C}\mathscr{B}(X)$. Además, la familia $\{H^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es separadora. En efecto, si $A, B \in \mathscr{C}\mathscr{B}(X)$ son diferentes, entonces existe $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $x \in A$. Como $\{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es separadora y B es cerrado, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $d_\lambda(x,B) > 0$. Luego,

$$0 < d_\lambda(x,B) \leq H^\lambda(A,B),$$

lo cual demuestra que $\{H^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es separadora.

Sobre $(\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\})$, la familia $\mathscr{H}(X) = \{H_U\}_{U\in\mathscr{U}}$, donde

$$H_U = \{(A,B) \in (\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \mid A \subseteq U[B] \text{ y } B \subseteq U[A]\},$$

es base de alguna uniformidad sobre $\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Llamamos $\mathscr{H}(X)$-*topología* a la topología uniforme sobre $\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ que esta base genera.

Capítulo 3

Medidas de no-compacidad en espacios seudo-métricos y uniformes

3.1. Medidas de no-compacidad sobre espacios seudo-métricos

En esta sección, abordamos el concepto de medida de no-compacidad, definida sobre espacios seudo-métricos. Además, se definirán algunas de estas, tales como la medida de Hausdorff, Kuratowski. Se verificarán sus propiedades y la relación existente entre estas.

Durante esta sección, (X, d) denota un espacio seudo-métrico. Si $x \in X$ y $r > 0$, $B(x, r)$ y $B[x, r]$ denotan, respectivamente, la bola abierta de centro x y radio r, y el conjunto

$$B[x, r] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Observemos que $\overline{B(x, r)} \subseteq B[x, r]$.

Definición 3.1.1. Sea (X, d) un espacio seudo-métrico. Una *medida de no-compacidad* definida sobre X es una función $\psi : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ que cumple las siguientes propiedades, para todo $A, B \subseteq X$:

1. $\psi(A) = \infty$, si y solo si, A es no-acotado.

2. $\psi(A) = 0$, si y solo si, A es precompacto.

3. Si $A \subseteq B$, entonces $\psi(A) \leq \psi(B)$.

4. $\psi(\overline{A}) = \psi(A)$.

5. Si (X,d) es completo, y $(F_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión decreciente de subconjuntos acotados, cerrados y no vacíos de X, tales que $\lim_{n\to\infty} \psi(F_n) = 0$, entonces $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y compacto.

La condición que distingue una métrica de una seudo-métrica es superflua al momento de considerar una medida de no-compacidad. Precisamos esto a continuación.

Proposición 3.1.1. *Sean (X,d) un espacio seudo-métrico, $\widetilde{X}$ la metrización canónica de X, y para cada $A \subseteq X$, $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{X}$ la imagen de A en $\widetilde{X}$. Una función $\psi : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ es una medida de no-compacidad, si y solo si, la función $\overline{\psi} : \widetilde{X} \to [0,\infty]$ dada por*

$$\overline{\psi}(\widetilde{A}) = \psi(A),$$

es una medida de no-compacidad en $\widetilde{X}$.

Demostración. $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\widetilde{A})$ implica la condición 1. Un subconjunto F de X es cerrado (resp. precompacto), si y solo si, $\widetilde{F}$ es cerrado (resp. precompacto) en $\widetilde{X}$, lo que implica las condiciones 2 y 3. La condición 4 se sigue de que $A \subseteq B$ en X, si y solo si, $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ en $\widetilde{X}$.

Finalmente, sea (X,d) un espacio seudo-métrico completo, $(F_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de X tales que $\lim_{n\to\infty} \psi(F_n) = 0$. Luego, $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ es un espacio métrico completo, $(\widetilde{F_n} : n \in \mathbb{N})$ satisface las mismas condiciones que $(F_n : n \in \mathbb{N})$, y $\lim_{n\to\infty} \overline{\psi}(\widetilde{F_n}) = 0$. Tenemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y compacto, si y solo si, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{F_n}$ lo es. Esto concluye la demostración. □

Definición 3.1.2. La *medida de no-compacidad de Kuratowski* es la función $\alpha : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ definida por

$$\alpha(A) = \inf\left\{ \epsilon > 0 \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} S_i,\ S_i \subseteq X,\ \operatorname{diam}(S_i) < \epsilon,\ i = 1,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

donde para $S \subseteq X$, el *diámetro* de S es

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in S\}.$$

Por convención, $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$.

Antes de enunciar y demostrar las principales propiedades de la medida de no-compacidad de Kuratowski (también llamada medida de no-compacidad usual), observemos lo siguiente: si $C \subseteq X$, y

$$\Gamma_1(C) = \left\{ \epsilon > 0 \,|\, C \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} S_i,\, S_i \subseteq X,\, \operatorname{diam}(S_i) < \epsilon,\, i = 1, \ldots, n,\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

entonces se cumple lo siguiente:

- Si $A \subseteq B$, entonces $\Gamma_1(B) \subseteq \Gamma_1(A)$,
- si $\Gamma_1(C) \neq \emptyset$, $r \in \Gamma_1(C)$ y $r < s$, entonces $s \in \Gamma_1(C)$. Es decir, $\Gamma_1(C) \subseteq (0, \infty]$ es un intervalo no acotado, y
- $\alpha(A) \leq \alpha(B)$, si y solo si, $\Gamma_1(B) \subseteq \Gamma_1(A)$.

En efecto: Si $A \subseteq B$, entonces dado $r \in \Gamma_1(B)$, existen $S_1, \ldots, S_n$ tales que $\operatorname{diam}(S_i) < r$, y

$$A \subseteq B \subseteq S_1 \cup \cdots \cup S_n,$$

de modo que $r \in \Gamma_1(A)$.

Ahora, si $\Gamma_1(C) \neq \emptyset$, $r \in \Gamma_1(C)$ y $r < s$, entonces existen $S_1, \ldots, S_n$ tales que $\operatorname{diam}(S_i) < r < s$ y $C \subseteq S_1 \cup \cdots \cup S_n$. Así, $s \in \Gamma_1(C)$.

Finalmente, si $\Gamma_1(B) \subseteq \Gamma_1(A)$, entonces $\alpha(A) \leq \alpha(B)$. Recíprocamente, si $\alpha(A) \leq \alpha(B)$, entonces $\alpha(A) \leq r$, para todo $r \in \Gamma_1(B)$, por lo que existe $s \in \Gamma_1(A)$ tal que $s \leq r$. En consecuencia, $r \in \Gamma_1(A)$.

Proposición 3.1.2. *Sean A y B subconjuntos no vacíos de X. Se verifica lo siguiente:*

1. $\alpha(A) = 0$, *si y solo si, A es precompacto.*
2. *Si $A \subseteq B$, entonces $\alpha(A) \leq \alpha(B)$.*
3. $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$.
4. $\alpha(A \cup B) = \text{máx}\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.
5. $\alpha(A \cap B) \leq \text{mín}\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

Demostración. 1. Si $\alpha(A) = 0$, entonces para todo $\epsilon > 0$, A se cubre con conjuntos $S_1, \ldots, S_r$ tales que $\operatorname{diam}(S_i) < \epsilon$. Como cada S_i es acotado, se puede cubrir con una bola $B(x_i, \epsilon)$, $x_i \in S_i$, para cada $i = 1, \ldots, r$. Así,

$$A \subseteq B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_r, \epsilon).$$

Esto prueba que A es precompacto. Para el recíproco, supongamos que A es precompacto. Luego, para cada $\epsilon > 0$, existen $x_1, \ldots, x_n$ en X tales que

$$A \subseteq B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon).$$

Como $\operatorname{diam}(B(x_i, \epsilon)) \leq 2\epsilon$, para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $\alpha(A) \leq 2\epsilon$, para todo $\epsilon > 0$.

2. Es consecuencia de la observación previa, pues si $A \subseteq B$, entonces $\Gamma_1(B) \subseteq \Gamma_1(A)$, y por ende $\alpha(A) \leq \alpha(B)$.

3. Por 2, solo basta probar $\alpha(\overline{A}) \leq \alpha(A)$. Para ello, notemos que $\Gamma_1(A) = \Gamma_1(\overline{A})$. En efecto, si $r \in \Gamma_1(A)$, entonces existen $S_1, \ldots, S_n$ subconjuntos de X, tales que $\operatorname{diam}(S_i) < \epsilon$, para cada $i = 1, \ldots, n$, y $A \subseteq S_1 \cup \cdots \cup S_n$. Luego, tenemos

$$A \subseteq \overline{S_1} \cup \cdots \cup \overline{S_n},$$

de modo que $\overline{A} \subseteq \overline{S_1} \cup \cdots \cup \overline{S_n}$, y $\operatorname{diam}(\overline{S_i}) < r$. Así, $r \in \Gamma_1(\overline{A})$, y $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$.

4. Por 2, solo resta probar que $\alpha(A \cup B) \leq \text{máx}\{\alpha(A), \alpha(B)\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha(B) \leq \alpha(A)$. Sea $r \in \Gamma_1(A)$. Como $r \in \Gamma_1(B)$, entonces existen $S_1, \ldots, S_n$, $S_{n+1}, \ldots, S_{n+m}$ tales que $\operatorname{diam}(S_i) < r$, para cada $i = 1, \ldots, n+m$, y

$$A \subseteq S_1 \cup \cdots \cup S_n, \ B \subseteq S_{n+1} \cup \cdots \cup S_{n+m}.$$

Por lo que $A \cup B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+m} S_i$. Por ende, $r \in \Gamma_1(A \cup B)$, lo que demuestra $\alpha(A \cup B) \leq \alpha(A)$.

5. Se sigue del hecho que $\alpha(A \cap B) \leq \alpha(A)$ y $\alpha(A \cap B) \leq \alpha(B)$.

$\square$

El siguiente lema, enunciado por Kuratowski y que generaliza el teorema de intersección de Cantor, tendrá utilidad en demostrar la condición de intersección no vacía, en la definición de medida de no-compacidad.

Lema 3.1.1. *(Kuratowski, [25]) Sea (X,d) un espacio métrico completo. Supongamos que $(F_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos, y $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de números reales positivos que cumplen la siguiente propiedad: Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $F_1^n, ..., F_{m_n}^n$ subconjuntos de X tales que*

$$F_n = F_1^n \cup \cdots \cup F_{m_n}^n,$$

diam$(F_i^n) < \alpha_n$, para cada $i = 1, \ldots, m_n$, y $\alpha_n \to 0$ si $n \to \infty$. Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, y es compacto.

Demostración. Sea $(x_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión en X tal que $x_n \in F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $k_1 = 1$. Como $F_1 = F_1^1 \cup \cdots \cup F_{m_1}^1$, existe al menos un conjunto F_i^1 que contiene una subsucesión de $(x_n : n \in \mathbb{N})$. Supongamos sin pérdida de generalidad que F_1^1 contiene una subsucesión $(x_{r_n} : n \in \mathbb{N})$, tal que $k_1 < r_n$, para todo n. Sea $k_2 = r_1$. Como $r_n \geq 2$, entonces $x_{r_n} \in F_{r_n} \subseteq F_2$, para todo $n \geq 1$. Así, la subsucesión se encuentra contenida en F_2. De misma forma, y sin pérdida de generalidad, existe una subsucesión $(x_{s_n} : n \in \mathbb{N})$ de $(x_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en F_1^2. Fijando $k_3 = s_1$, y de forma recursiva, obtenemos la subsucesión $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, que satisface $x_{k_n} \in F_1^n$. Tenemos además que dados $n, p \in \mathbb{N}$, $x_{k_n}, x_{k_{n+p}} \in F_{n-1}$, por lo que

$$d(x_{k_n}, x_{k_{n+p}}) \leq \text{diam}(F_{n-1}) < \alpha_{n-1}.$$

Por lo que la sucesión es de Cauchy. Sea $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x$. Tenemos que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, pues los conjuntos F_n son cerrados. Esto completa la demostración. □

Teorema 3.1.1. *(Kuratowski, [25]) Sea (X,d) un espacio métrico completo. Si $(F_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados de X tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(F_n) = 0,$$

entonces $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y es compacto.

Demostración. Si para algún $m \in \mathbb{N}$, $\alpha(F_m) = 0$, entonces F_n es compacto para cada $n \geq m$, pues son precompactos y completos, al ser cerrados. De esto se tiene $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Supongamos que $\alpha(F_n) > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\alpha_n = 2\alpha(F_n)$. Como $\alpha(F_n) < \alpha_n$, existen $F_1^n, \dots, F_{m_n}^n \subseteq X$ tales que

$$F_n \subseteq F_1^n \cup \cdots \cup F_{m_n}^n,$$

y $\operatorname{diam}(F_i^n) < \alpha_n$, para $i = 1, \dots, m_n$. Como $\alpha_n \to 0$ si $n \to \infty$, por lema 3.1.1, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, y por la completitud de X es que dicha intersección es compacta. Esto concluye la demostración. □

Definición 3.1.3. Sea (X, d) un espacio seudo-métrico. La *medida de no-compacidad de Hausdorff*, es la función $\chi : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ dada por

$$\chi(A) = \text{ínf}\left\{\epsilon > 0 \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B(x_i, r_i),\, x_i \in X,\, r_i < \epsilon,\, i = 1, \dots, r,\, r \in \mathbb{N}\right\}.$$

Para enunciar y demostrar las propiedades de la medida de no-compacidad de Hausdorff, denotamos, para cada $C \subseteq X$, el conjunto

$$\Gamma_2(C) = \left\{\epsilon > 0 \mid C \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B(x_i, r_i),\; x_i \in X, r_i < \epsilon,\, i = 1, \dots, n,\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Análogo a $\Gamma_1(C)$, se satisfacen las siguientes propiedades:

- Si $A \subseteq B$, entonces $\Gamma_2(B) \subseteq \Gamma_2(A)$,
- si $\Gamma_2(C) \neq \emptyset$, $r \in \Gamma_2(C)$ y $r < s$, entonces $\Gamma_2(C)$. Es decir, $\Gamma_2(C)$ es un intervalo no acotado,
- $\chi(A) \leq \chi(B)$, si y solo si, $\Gamma_2(B) \subseteq \Gamma_2(A)$, y
- $\Gamma_1(C) \subseteq \Gamma_2(C)$.

Verificaremos la última condición. Si $r \in \Gamma_1(C)$, existen $S_1, \dots, S_n \subseteq X$ con $\operatorname{diam}(S_i) < r$, y

$$C \subseteq S_1 \cup \cdots \cup S_n.$$

Sean $x_i \in S_i$, y $s > 0$ tales que $\operatorname{diam}(S_i) < s < r$, para cada $i = 1, \dots, n$. Tenemos que $S_i \subseteq B(x_i, s)$. Luego,

$$C \subseteq B(x_1, s) \cup \cdots \cup B(x_n, s),$$

por lo que $r \in \Gamma_2(C)$.

Proposición 3.1.3. *Sean A y B subconjuntos no vacíos de X. Se verifica lo siguiente:*

1. $\chi(A) = 0$, *si y solo si, A es precompacto.*
2. *Si $A \subseteq B$, entonces $\chi(A) \leq \chi(B)$.*
3. $\chi(A) = \chi(\overline{A})$.
4. $\chi(A \cup B) = \text{máx}\{\chi(A), \chi(B)\}$.
5. $\chi(A \cap B) \leq \text{mín}\{\chi(A), \chi(B)\}$.

Demostración.

1. Si $\chi(A) = 0$, es directo que A es precompacto. Ahora, si A es precompacto, entonces para todo $\epsilon > 0$ y todo $r < \epsilon$, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$A \subseteq B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r),$$

de modo que $\text{ínf}\,\Gamma_2(A) \leq \epsilon$. Por tanto, $\chi(A) = 0$.

2. Se sigue de lo observado anteriormente, pues si $A \subseteq B$, entonces $\Gamma_2(B) \subseteq \Gamma_2(A)$.

3. Sabemos que $\chi(A) \leq \chi(\overline{A})$, por lo que basta probar que $\chi(\overline{A}) \leq \chi(A)$, o bien que $\Gamma_2(A) \subseteq \Gamma_2(\overline{A})$. Sea $r \in \Gamma_2(A)$. Luego, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $r_1, \ldots, r_n < r$ tales que

$$A \subseteq B(x_1, r_1) \cup \cdots \cup B(x_n, r_n).$$

Por lo que $\overline{A} \subseteq \overline{B(x_1, r_1)} \cup \cdots \cup \overline{B(x_n, r_n)}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, sea $s_i > 0$ tal que $r_i < s_i < r$. Luego, tenemos que $\overline{B(x_i, r_i)} \subseteq B(x_i, s_i)$, pues se tiene

$$\overline{B(x_i, r_i)} \subseteq B[x_i, r_i] \subseteq B(x_i, s).$$

De este modo, tenemos que

$$\overline{A} \subseteq B(x_1, s_1) \cup \cdots \cup B(x_n, s_n),$$

por lo que $r \in \Gamma_2(\overline{A})$.

4. Solo resta probar que $\chi(A \cup B) \leq \text{máx}\{\chi(A), \chi(B)\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\chi(B) \leq \chi(A)$. Sea $r \in \Gamma_2(A)$, luego, existen $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \in$

X y $r_1, \ldots, r_{n+m} < r$ tales que

$$A \subseteq B(x_1, r_1) \cup \cdots \cup B(x_n, r_n), \ B \subseteq B(x_{n+1}, r_{n+1}) \cup \cdots \cup B(x_{n+m}, r_{n+m}).$$

Así, se tiene

$$A \cup B \subseteq B(x_1, r_1) \cup \cdots \cup B(x_{n+m}, r_{n+m}).$$

Por ende, $r \in \Gamma_2(A \cup B)$.

5. Es directo de la monotonicidad de χ.

$\square$

Las medidas de no-compacidad de Hausdorff y Kuratowski están fuertemente relacionadas por la siguiente desigualdad.

Teorema 3.1.2. *Sea $A \subseteq X$. Entonces*

$$\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A).$$

Demostración. Como $\Gamma_1(A) \subseteq \Gamma_2(A)$, entonces $\chi(A) \leq \alpha(A)$. Ahora, notemos que si $r \in \Gamma_2(A)$, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $s < r$ tales que

$$A \subseteq B(x_1, s) \cup \cdots \cup B(x_n, s),$$

y $\operatorname{diam}(B(x_i, s)) < 2r$, de modo que $2r \in \Gamma_1(A)$. En consecuencia, $\alpha(A) \leq 2\chi(A)$. Esto completa la demostración. $\square$

Los siguientes resultados tienen como objetivo demostrar que, sobre la clase de espacios vectoriales de dimensión infinita, las desigualdades del teorema anterior no se pueden mejorar.

Lema 3.1.2. *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces, para todo $x \in V$, $t > 0$ y $A \subseteq V$, se satisfacen las siguientes igualdades:*

1. *$\chi(A) = \chi(A + x)$, $\alpha(A) = \alpha(A + x)$, y*

2. *$\chi(tA) = t\chi(A)$, $\alpha(tA) = t\alpha(A)$.*

Demostración. Se sigue del hecho que $\Gamma_i(A) = \Gamma_i(A + x)$, para $i = 1, 2$. Análogamente, $\Gamma_i(tA) = t\Gamma_i(A)$. $\square$

Proposición 3.1.4. *(Furi-Vignoli,[17]) Sean* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $B = B(0,1)$ *la bola unitaria centrada en* 0 *en* V*. Si* V *es de dimensión finita, se tiene* $\alpha(B) = \chi(B) = 0$*. En caso contrario, se cumple* $\alpha(B) = 2$ *y* $\chi(B) = 1$*.*

Demostración. Si V tiene dimensión finita, entonces $\overline{B}$ es completo, luego precompacto, de modo que $\alpha(B) = \alpha(\overline{B}) = 0$, análogamente $\chi(B) = 0$.

Ahora, si V es de dimensión infinita, notemos que $\chi(B) \leq 1$. Supongamos que $\chi(B) = q < 1$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $q + \epsilon < 1$. Sean $x_1, \dots, x_n \in V$ tales que

$$B \subseteq B(x_1, q+\epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, q+\epsilon).$$

Del lema anterior, se sigue que

$$q = \chi(B) \leq (q+\epsilon)\chi(B) = q(q+\epsilon),$$

lo que implica $q = 0$. Así, B es precompacto, lo que es una contradicción con el hecho que V es de dimensión infinita.

Para el caso de α, notemos primero que $\alpha(B) \leq 2$. Supongamos que $\alpha(B) < 2$. Luego, existen $S_1, \dots, S_n$ tales que $\operatorname{diam}(S_i) < 2$, y

$$B \subseteq S_1 \cup \cdots \cup S_n.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los conjuntos S_i son cerrados. Sea E_n un subespacio vectorial de V de dimensión n, y fijemos $A_i = S_i \cap E_n$. Así, tenemos que la frontera de $B \cap E_n$, la esfera unitaria en E_n, se recubre con los conjuntos A_i, y $\operatorname{diam}(A_i) < \operatorname{diam}(\partial(B \cap E_n))$. Esto contradice el teorema de antípodas de Borsuk (ver A.0.4). Esto concluye la demostración. □

Observación 3.1.1. La proposición anterior muestra un caso donde se cumple una igualdad en el teorema 3.1.2. Para la otra, podemos considerar el espacio de sucesiones reales convergentes a 0, c_0, con la norma

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

Dada $A = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la base usual de c_0. Como para todo $X \subseteq c_0$ con más de un elemento, $\operatorname{diam}(X) = 1$, entonces $\alpha(A) = 1$. Además, como A es infinito, entonces para todo $x \in c_0$, $\|x - A\| \geq 1$, por lo que $\chi(A) = 1$.

La medida de no-compacidad de Hausdorff satisface el mismo resultado que la medida α por el teorema de Kuratowski. Enunciamos este a continuación.

Teorema 3.1.3. *Sean (X,d) un espacio métrico completo, $(F_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados de X tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \chi(F_n) = 0.$$

Entonces, $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y es compacto.

Demostración. El caso $\chi(F_n) = 0$, para algún $n \in \mathbb{N}$ es directo por la completitud de X.

Definamos la sucesión $\alpha_n = 4\chi(F_n)$, para $n \in \mathbb{N}$. Como $\chi(F_n) < \alpha_n/2$, existen $x_1^n, \ldots, x_{m_n}^n \in X$ y $r_1^n, \ldots, r_{m_n}^n < \alpha_n/2$ tales que

$$F_n \subseteq B(x_1^n, r_1^n) \cup \cdots \cup B(x_{m_n}^n, r_{m_n}^n),$$

de modo que

$$F_n \subseteq B(x_1^n, \alpha_n/2) \cup \cdots \cup B(x_{m_n}^n, \alpha_n/2).$$

Así, $\mathrm{diam}(B(x_i^n, \alpha_n/2)) \leq \alpha_n$. Esta última sucesión converge a 0, y por lema 3.1.1, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y compacto. Esto concluye la demostración.

□

A continuación, presentamos una nueva medida de no-compacidad, la que será menos estricta de calcular respecto a las medidas de Hausdorff y Kuratowski. Junto a esto, veremos la relación que cumple esta nueva medida con las ya indicadas.

Definición 3.1.4. Sea (X,d) un espacio seudo-métrico. Definimos la *medida gamma* como la función $\gamma : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ dada por

$$\gamma(A) = \inf\left\{\epsilon > 0 \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B(x_i,\epsilon),\ x_i \in X,\ r \in \mathbb{N}\right\}.$$

De misma forma que las medidas anteriores, si consideramos, para cada $C \subseteq X$,

$$\Gamma_3(C) = \left\{\epsilon > 0 \mid C \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B(x_i,\epsilon),\ x_i \in X,\ r \in \mathbb{N}\right\},$$

entonces, se cumplen las siguientes condiciones:

- Si $A \subseteq B$, entonces $\Gamma_3(B) \subseteq \Gamma_3(A)$,
- si $\Gamma_3(C) \neq \emptyset$, $r \in \Gamma_3(C)$ y $r < s$, entonces $s \in \Gamma_3(C)$. Es decir, $\Gamma_3(C)$ es un intervalo no acotado superiormente,
- $\gamma(A) \leq \gamma(B)$, si y solo si, $\Gamma_3(B) \subseteq \Gamma_3(A)$, y
- $\Gamma_2(C) \subseteq \Gamma_3(C)$.

De la última parte, se sigue que

$$\gamma(A) \leq \chi(A) \leq \alpha(A),$$

para todo $A \subseteq X$.

Proposición 3.1.5. *Sean A y B subconjuntos no vacíos de X. Se verifica lo siguiente:*

1. $\gamma(A) = 0$*, si y solo si, A es precompacto.*
2. *Si $A \subseteq B$, entonces* $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.
3. $\gamma(A) = \gamma(\overline{A})$.
4. $\gamma(A \cup B) = \max\{\gamma(A), \gamma(B)\}$.
5. $\gamma(A \cap B) \leq \min\{\gamma(A), \gamma(B)\}$.

Demostración. Las condiciones 1, 2 y 5 se siguen directamente de lo observado anteriormente, y la definición de conjunto totalmente acotado. Para 3, veamos que $\Gamma_3(A) \subseteq \Gamma_3(\overline{A})$. Sea $r \in \Gamma_3(A)$, luego, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que

$$A \subseteq B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r),$$

de modo que $\overline{A} \subseteq B[x_1, r] \cup \cdots \cup B[x_n, r]$. Para todo $\eta > 0$, se tiene

$$\overline{A} \subseteq B(x_1, r+\eta) \cup \cdots \cup B(x_n, r+\eta).$$

En consecuencia, $r + \eta \in \Gamma_3(\overline{A})$, para todo $\eta > 0$. Así, $\gamma(\overline{A}) \leq \gamma(A)$.

Para demostrar 4, supongamos sin pérdida de generalidad que $\gamma(B) \le \gamma(A)$. Veamos que $\Gamma_3(A) \subseteq \Gamma_3(A \cup B)$. Sea $r \in \Gamma_3(A)$. Luego, existen $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \in X$ tales que

$$A \subseteq B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r), \; B \subseteq B(x_{n+1}, r) \cup \cdots \cup B(x_{n+m}, r).$$

De modo que $A \cup B \subseteq B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_{n+m}, r)$, y entonces $r \in \Gamma_3(A \cup B)$. Esto concluye la demostración.

□

El siguiente teorema verifica que la medida γ satisface las condiciones del teorema de intersección de Kuratowski.

Teorema 3.1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Supongamos que $(F_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos, acotados y cerrados de X, tales que*

$$\lim_{n \to \infty} \gamma(F_n) = 0.$$

Entonces, $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y es compacto.

Demostración. El caso $\gamma(F_n) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$ es directo por la completitud de X.

Definamos la sucesión $\alpha_n = 4\gamma(F_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\gamma(F_n) < \alpha_n/2$, existen $x_1^n, \dots, x_{m_n}^n \in X$ tales que

$$F_n \subseteq B(x_1^n, \alpha_n/2) \cup \cdots \cup B(x_{m_n}^n, \alpha_n/2).$$

Luego, $\operatorname{diam}(B(x_i^n, \alpha_n/2)) \le \alpha_n$. Esta última sucesión converge a 0, y por lema 3.1.1, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y compacto. Esto concluye la demostración. □

Como parte de los aportes originales de esta tesis, presentamos una construcción que permite obtener distintas familias de medidas de no-compacidad, dadas por cubrimientos acotados. Estas medidas logran generalizar la medida de Kuratowski, como veremos a continuación.

Definición 3.1.5. Sea $\mathscr{B}$ un cubrimiento de X. Diremos que $\mathscr{B}$ es un *cubrimiento acotado* de X si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para todo $B \in \mathscr{B}$, B es acotado, y

2. para todo A acotado y $r > 0$ tal que $\operatorname{diam}(A) < r$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $\overline{A} \subseteq B$ y $\operatorname{diam}(B) < r$.

Notemos que $\mathscr{B}(X)$ y $\{B(x,r) \mid x \in X,\ r > 0\}$ son cubrimientos acotados de X. Además, si $\mathscr{B}$ es cubrimiento tal que $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}(X)$, y $\overline{A} \in \mathscr{B}$ para todo $A \in \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{B}$ es un cubrimiento acotado.

Definición 3.1.6. Sea $\mathscr{B}$ un cubrimiento acotado de X. Dado $A \subseteq X$, definimos el conjunto

$$\Gamma_{\mathscr{B}}(A) := \left\{ \epsilon > 0 \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} Q_i,\ Q_i \in \mathscr{B},\ \operatorname{diam}(Q_i) < \epsilon,\ i = 1, \dots, r,\ r \in \mathbb{N} \right\}.$$

Y definimos la función $\alpha_{\mathscr{B}} : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ dada por $\alpha_{\mathscr{B}}(A) := \inf \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$.

Proposición 3.1.6. *Sean $\mathscr{B}$ un cubrimiento acotado de X, A y B subconjuntos de X. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $\Gamma_{\mathscr{B}}(B) \subseteq \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$.*

2. *Si $\Gamma_{\mathscr{B}}(A) \neq \emptyset$, $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$ y $r < s$, entonces $s \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$.*

3. *$\alpha_{\mathscr{B}}(A) \leq \alpha_{\mathscr{B}}(B)$, si y solo si, $\Gamma_{\mathscr{B}}(B) \subseteq \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$.*

Demostración.

1. Supongamos que $A \subseteq B$, y sea $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(B)$. Luego, existen $Q_1, \dots, Q_n \in \mathscr{B}$ tales que $\operatorname{diam}(Q_i) < r$, y

$$A \subseteq B \subseteq Q_1 \cup \dots \cup Q_n,$$

de modo que $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$.

2. Sean $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$ y $r < s$. Luego, existen $Q_1, \dots, Q_n \in \mathscr{B}$ tales que $\operatorname{diam}(Q_i) < r < s$, y $A \subseteq Q_1 \cup \dots \cup Q_n$. Así, $s \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$.

3. Una de las implicancias es directa. Supongamos que $\alpha_{\mathscr{B}}(A) \leq \alpha_{\mathscr{B}}(B)$. Sea $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(B)$. Como $\alpha_{\mathscr{B}}(A) \leq r$, existe $s \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$ tal que $s \leq r$, y entonces $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$. Esto concluye la demostración.

$\square$

En las dos proposiciones siguientes, verificaremos que la función $\alpha_{\mathscr{B}}$ es una medida de no-compacidad.

Proposición 3.1.7. *Sea $\mathscr{B}$ un cubrimiento acotado de X. Entonces, $\alpha_{\mathscr{B}}$ satisface las siguientes propiedades, para todo $A, B \subseteq X$:*

1. *Si $A \subseteq B$, entonces $\alpha_{\mathscr{B}}(A) \leq \alpha_{\mathscr{B}}(B)$.*
2. *$\alpha_{\mathscr{B}}(A) = 0$, si y solo si, A es precompacto.*
3. *$\alpha_{\mathscr{B}}(A \cup B) = \text{máx}\{\alpha_{\mathscr{B}}(A), \alpha_{\mathscr{B}}(B)\}$.*
4. *$\alpha_{\mathscr{B}}(A) = \alpha_{\mathscr{B}}(\overline{A})$.*

Demostración.

1. Es directo de los puntos 1 y 3 de la proposición anterior.
2. Supongamos que $\alpha_{\mathscr{B}}(A) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, existen $Q_1, ..., Q_n \in \mathscr{B}$ tales que $\text{diam}(Q_i) < \epsilon$, y $A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n$. Como $Q_i \in \mathscr{B}(X)$, entonces $\epsilon \in \Gamma_1(A)$, para todo $\epsilon > 0$, por lo que $\alpha(A) = 0$, y A es precompacto. Recíprocamente, supongamos que A es precompacto, y sea $\epsilon > 0$. Existen $Q_1, ..., Q_n$ acotados tales que $\text{diam}(Q_i) < \epsilon$, y $A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n$. Como $\mathscr{B}$ es cubrimiento acotado, existen $S_1, ..., S_n$ en $\mathscr{B}$ tales que $\overline{Q_i} \subseteq S_i$, y $\text{diam}(S_i) < \epsilon$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Así,

   $$A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n \subseteq S_1 \cup \cdots \cup S_n.$$

   En consecuencia, $\epsilon \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$, para todo $\epsilon > 0$, y entonces $\alpha_{\mathscr{B}}(A) = 0$.
3. Basta ver que $\alpha_{\mathscr{B}}(A \cup B) \leq \text{máx}\{\alpha_{\mathscr{B}}(A), \alpha_{\mathscr{B}}(B)\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha_{\mathscr{B}}(B) \leq \alpha_{\mathscr{B}}(A)$. Luego, dado $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$, se tiene que existen $Q_1, \ldots, Q_{n+m} \in \mathscr{B}$ de diámetro menor que r, y

   $$A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n, \; B \subseteq Q_{n+1} \cup \cdots \cup Q_{n+m}.$$

   Por ende, $A \cup B \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_{n+m}$. Así, $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A \cup B)$. En consecuencia, $\alpha_{\mathscr{B}}(A \cup B) \leq \alpha_{\mathscr{B}}(A)$.
4. Basta ver que $\Gamma_{\mathscr{B}}(A) \subseteq \Gamma_{\mathscr{B}}(\overline{A})$. Sea $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(A)$. Existen $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathscr{B}$ tales que $\text{diam}(Q_i) < r$, y

   $$A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n.$$

   Ahora, como $Q_i \in \mathscr{B}$, para cada $i = 1, \ldots, n$, existen $S_1, ..., S_n \in \mathscr{B}$ tales que $\overline{Q_i} \subseteq S_i$, y $\text{diam}(S_i) < r$. Así,

   $$\overline{A} \subseteq \overline{Q_1} \cup \cdots \cup \overline{Q_n} \subseteq S_1 \cup \cdots \cup S_n,$$

lo que implica $r \in \Gamma_{\mathscr{B}}(\overline{A})$. Esto concluye la demostración.

□

Proposición 3.1.8. *Sean (X, d) un espacio métrico completo $\mathscr{B}$ un cubrimiento acotado de X, y $(F_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de X, tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{\mathscr{B}}(F_n) = 0,$$

entonces, $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y compacto.

Demostración. El caso $\alpha_{\mathscr{B}}(F_n) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$ es directo por la completitud de X.

Definamos la sucesión $\alpha_n = 2\alpha_{\mathscr{B}}(F_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\alpha_{\mathscr{B}}(F_n) < \alpha_n$, entonces existen $Q_1^n, \ldots, Q_{m_n}^n \in \mathscr{B}$ tales que $\operatorname{diam}(Q_i^n) < \alpha_n$, para $i = 1, \ldots, m_n$, y

$$F_n \subseteq Q_1^n \cup \cdots \cup Q_{m_n}^n.$$

Por lema 3.1.1, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y compacto. Esto concluye la demostración. □

Observación 3.1.2. Si $\mathscr{B}$ y $\mathscr{D}$ son cubrimientos acotados de X que satisfacen la siguiente condición: Para cada $B \in \mathscr{B}$, existe $D \in \mathscr{D}$ tal que $B \subseteq D$ y $\operatorname{diam}(B) = \operatorname{diam}(D)$. Entonces, $\alpha_{\mathscr{D}} \leq \alpha_{\mathscr{B}}$. En particular, si $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{D}$, entonces $\alpha_{\mathscr{D}} \leq \alpha_{\mathscr{B}}$. Esto es directo, ya que en tales casos, $\Gamma_{\mathscr{B}}(C) \subseteq \Gamma_{\mathscr{D}}(C)$, para cada $C \subseteq X$.

Además, podemos recuperar la medida de Kuratowski mediante estas medidas. En efecto, tenemos que $\alpha_{\mathscr{B}(X)} = \alpha$. De esta última aserción, obtenemos que para cualquier cubrimiento acotado $\mathscr{B}$, se tiene que $\alpha \leq \alpha_{\mathscr{B}}$, y la relación entre las medidas de no-compacidad vistas es

$$\gamma \leq \chi \leq \alpha \leq 2\chi, \; \alpha \leq \alpha_{\mathscr{B}}.$$

3.2. Medidas de no-compacidad en espacios uniformes

A continuación, veremos una extensión del concepto de medida de no-compacidad hacia espacios uniformes. Muchos de los resultados expuestos son, en particular, válidos para espacios métricos. Fue Horvath en [22] quien abordó resultados en espacios métricos completos, y Arandelović en [2] lo logra extender para espacios uniformes.

En esta sección, X denota un espacio uniforme, cuya uniformidad (y topología uniforme) es generada por la familia de seudo-métricas $\mathscr{D} = \{d_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ separadoras y saturadas.

Definición 3.2.1. Una *medida de no-compacidad* definida sobre un espacio uniforme X, es una función $\Phi : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ que satisface las siguientes condiciones, para todo $A, B \subseteq X$:

1. $\Phi(A) = \infty$, si y solo si, A es no-acotado.

2. $\Phi(A) = 0$, si y solo si, A es precompacto.

3. $\Phi(A) = \Phi(\overline{A})$.

4. Si $A \subseteq B$, entonces $\Phi(A) \leq \Phi(B)$.

5. Si X es completo, y $(F_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión decreciente de subconjuntos acotados, cerrados y no vacíos de X tales que $\lim_{n\to\infty} \Phi(F_n) = 0$, entonces $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y es compacto.

Definición 3.2.2. Sea Z un conjunto no vacío. Una familia de subconjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ de Z satisface la *propiedad de la intersección finita*, si y solo si, para todo $J \subseteq I$ finito, se cumple $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$.

Teorema 3.2.1. *Sean X un espacio uniforme completo, Φ una medida de no-compacidad sobre X y $\{G_j\}_{j\in I} \subseteq \mathscr{C}(X)$ una familia que satisface la propiedad de la intersección finita, y tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $J \subseteq I$ finito tal que*

$$\Phi\left(\bigcap_{j\in J} G_i\right) < \epsilon,$$

entonces, $\bigcap_{i\in I} G_i \neq \emptyset$ y compacto.

Demostración. Supongamos que $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados que satisface las condiciones anteriores. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $F(n) \subseteq I$ finito tal que

$$\Phi\left(\bigcap_{i\in F(n)} G_i\right) < 1/n.$$

Definamos la sucesión de conjuntos $(B_n : n \in \mathbb{N})$ de manera recursiva:

$$B_1 := \bigcap_{i\in F(1)} G_i,\ B_{n+1} := B_n \cap \left(\bigcap_{i\in F(n+1)} G_i\right).$$

Tenemos entonces que B_n es cerrado y $B_{n+1} \subseteq B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\{G_i\}_{i\in I}$ satisface la propiedad de la intersección finita, tenemos que $B_n \neq \emptyset$, y $\Phi(B_n) < 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ende, $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.

Dado $F \subseteq I$ finito y $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$C_{F,n} := \bigcap_{i\in F} (G_i \cap B_n).$$

La sucesión $(C_{F,n} : n \in \mathbb{N})$ es decreciente, de conjuntos cerrados, acotados y no vacíos. En consecuencia,

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{F,n} \subseteq K,$$

por lo que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{F,n} \cap K \neq \emptyset$, para todo F finito. Esto prueba que $\{G_i \cap K\}_{i\in I}$ satisface la propiedad de la intersección finita, y como K es compacto, entonces

$$\bigcap_{i\in I} (G_i \cap K) \neq \emptyset.$$

Por tanto, $\bigcap_{i\in I} G_i \neq \emptyset$ y compacto. Esto completa la demostración. $\square$

El siguiente teorema nos permite extender las medidas de no-compacidad conocidas en espacios seudo-métricos a espacios uniformes. Precisamos a continuación.

Teorema 3.2.2. *Sea X un espacio uniforme, y supongamos que para cada $\lambda \in \Lambda$, ϕ_λ es una medida de no-compacidad arbitraria sobre el espacio seudo-métrico (X, d_λ). Entonces, la función $\Phi^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ dada por*

$$\Phi^*(A) := \sup_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(A),$$

es una medida de no-compacidad en X como espacio uniforme.

Demostración. Por teorema 2.2.1, A es no-acotado, si y solo si, $\sup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{diam}_\lambda(A) = \infty$. Esto implica la condición 1. Como $\phi_\lambda(A) = \phi_\lambda(\overline{A})$, esto implica 3. Para demostrar 2, notemos que de 3, $\Phi^*(A) = 0$ implica $\Phi^*(\overline{A}) = 0$, y entonces $\phi_\lambda(\overline{A}) = 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Esto implica que $\overline{A}$ es compacto en (X, d_λ), para todo $\lambda \in \Lambda$, pues $\overline{A}$ es cerrado y acotado. Así, $\overline{A}$ es compacto, y por ende A es precompacto. Para demostrar 4, notemos que si $A \subseteq B$, entonces $\phi_\lambda(A) \leq \phi_\lambda(B)$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Para probar 5, basta notar que si X es completo (como espacio uniforme), entonces (X, d_λ) lo es, para todo $\lambda \in \Lambda$. Luego, si $(B_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos tales que $\lim_{n\to\infty}\Phi^*(F_n) = 0$, tenemos que $\lim_{n\to\infty}\phi_\lambda(F_n) = 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$. En consecuencia, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ y compacto en (X, d_λ). Así, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es compacto con la topología uniforme. Esto completa la demostración. □

Antes de describir las medidas de no-compacidad construidas, ahora en espacios uniformes, demostraremos un lema de utilidad.

Lema 3.2.1. *Sean $\{I_i\}_{i\in J}$ una sucesión de intervalos no-acotados superiormente. Entonces,*

$$\sup_{i\in J} \inf I_i = \inf \bigcap_{i\in J} I_i.$$

Demostración. Como $\bigcap_{i\in J} I_i \subseteq I_j$, para todo $j \in J$, entonces $\inf I_j \leq \inf \bigcap_{i\in J} I_i$, y por ende, $\sup_{i\in J} \inf I_i \leq \inf \bigcap_{i\in J} I_i$.

Para la otra desigualdad, supongamos que $\sup_{i\in J} \inf I_i < \inf \bigcap_{i\in J} I_i$. Sea $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{i\in J} \inf I_i < \beta < \inf \bigcap_{i\in I} I_i.$$

Luego, para cada $j \in J$, existe $r_j \in I_j$ tal que $r_j < \beta < \inf \bigcap_{i\in J} I_i$. Sea $r = \sup_{j\in J} r_j$. Tenemos entonces que $r_j \leq r$, para todo $j \in J$, por lo que $r \in I_j$, y en consecuencia, $r \in \bigcap_{i\in J} I_i$. Por ende,

$$r \leq \beta < \inf \bigcap_{i\in J} I_i,$$

lo que es una contradicción. Esto concluye la demostración. □

Corolario 3.2.1. *Sea X un espacio uniforme. Para cada $\lambda \in \Lambda$, denotemos α_λ, χ_λ y γ_λ las medidas de no-compacidad de Kuratowski, Hausdorff, y γ sobre (X, d_λ), respectivamente. Entonces, las siguientes funciones son medidas de compacidad:*

1. $\alpha(A) = \inf\big\{\epsilon > 0 \mid (\forall\lambda \in \Lambda)(\exists Q_1, \ldots, Q_n \subseteq X)(A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n,\ \mathit{diam}_\lambda(Q_i) < \epsilon)\big\}$,
2. $\chi(A) = \inf\{\epsilon > 0 \mid (\forall\lambda \in \Lambda)(\exists x_1, \ldots, x_n \in X)\ (A \subseteq U_{\lambda,r_1}[x_1] \cup \cdots \cup U_{\lambda,r_n}[x_n],\ r_i < \epsilon)\}$, *y*
3. $\gamma(A) = \inf \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_{F\in\langle X\rangle} \{\epsilon > 0 \mid A \subseteq U_{\lambda,\epsilon}[F]\}$,

donde $\mathit{diam}_\lambda(C)$ denota el diámetro de C con la seudo-métrica d_λ.

Demostración. 1. Denotemos, para $A \subseteq X$ y $\lambda \in \Lambda$, los conjuntos

- $\Gamma^1_\lambda(A) = \{\epsilon > 0 \mid A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n, \operatorname{diam}_\lambda(Q_i) < \epsilon, n \in \mathbb{N}\}$,
- $\Gamma^1(A) = \left\{\epsilon > 0 \mid (\forall \lambda \in \Lambda)(\exists Q_1, \ldots, Q_n \subseteq X)(A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n, \operatorname{diam}_\lambda(Q_i) < \epsilon)\right\}$.

Tenemos entonces que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Gamma^1_\lambda(A) = \Gamma^1(A)$. Por teorema 3.2.2, tenemos que

$$\alpha^*(A) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda(A) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{ínf} \Gamma^1_\lambda(A)$$

es una medida de no-compacidad en X. Como $\alpha(A) = \operatorname{ínf} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Gamma^1_\lambda(A)$, entonces por lema anterior, $\alpha(A) = \alpha^*(A)$.

2. Análogo a 1, denotemos los conjuntos

- $\Gamma^2_\lambda(A) = \{\epsilon > 0 \mid A \subseteq U_{\lambda,r_1}[x_1] \cup \cdots \cup U_{\lambda,r_n}[x_n], x_i \in X, r_i < \epsilon, n \in \mathbb{N}\}$,
- $\Gamma^2(A) = \{\epsilon > 0 \mid (\forall \lambda \in \Lambda)(\exists x_1, \ldots, x_n \in X)\,(A \subseteq U_{\lambda,r_1}[x_1] \cup \cdots \cup U_{\lambda,r_n}[x_n],\ r_i < \epsilon)\}$.

Es directo que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Gamma^2_\lambda(A) = \Gamma^2(A)$. Tenemos entonces que

$$\chi^*(A) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \chi_\lambda(A) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{ínf} \Gamma^2(A)$$

es una medida de no-compacidad en X. Así, $\chi(A) = \operatorname{ínf} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Gamma^2_\lambda(A)$, y por el lema, $\chi^*(A) = \chi(A)$.

3. Denotemos los conjuntos

- $\Gamma_\lambda(A) = \{\epsilon > 0 \mid A \subseteq U_{\lambda,\epsilon}[x_1] \cup \cdots \cup U_{\lambda,\epsilon}[x_n], x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$,
- $\Gamma(A) = \{\epsilon > 0 \mid (\forall \lambda \in \Lambda)(\exists x_1, \ldots, x_n \in X)(A \subseteq U_{\lambda,\epsilon}[x_1] \cup \cdots \cup\ U_{\lambda,\epsilon}[x_n], n \in \mathbb{N})\}$.

Se tiene que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Gamma_\lambda(A) = \Gamma(A) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_{F\in\langle X\rangle} \{\epsilon > 0 \mid A \subseteq U_{\lambda,\epsilon}[F]\}$. Así, la función

$$\gamma^*(A) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda(A) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{ínf} \Gamma_\lambda(A)$$

es una medida de no-compacidad. En consecuencia, $\gamma(A) = \operatorname{ínf} \Gamma(A) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \gamma_\lambda(A)$. Esto concluye la demostración.

□

Definición 3.2.3. Un cubrimiento $\mathscr{B}$ de un espacio uniforme X es un *cubrimiento acotado*, si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para todo $A \in \mathscr{B}$ y todo $\lambda \in \Lambda$, $\mathrm{diam}_\lambda(A) < \infty$, y

2. para todo A acotado y $r > 0$ tal que $\mathrm{diam}_\lambda(A) < r$, para todo $\lambda \in \Lambda$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $\overline{A} \subseteq B$ y $\mathrm{diam}_\lambda(B) < r$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Corolario 3.2.2. *Sea $\mathscr{B}$ un cubrimiento acotado de un espacio uniforme X. Entonces, la función*

$$\alpha_{\mathscr{B}}(A) = \text{ínf}\left\{\epsilon > 0 \mid (\forall \lambda \in \Lambda)(\exists Q_1, \dots, Q_n \in \mathscr{B})(A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n,\ diam_\lambda(Q_i) < \epsilon)\right\}$$

es una medida de no-compacidad en X.

Demostración. Para $A \subseteq X$ y $\lambda \in \Lambda$, denotemos

- $\Gamma^3_\lambda(A) = \{\epsilon > 0 \mid (\exists Q_1, \dots, Q_n \in \mathscr{B})(A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n,\ \mathrm{diam}_\lambda(Q_i) < \epsilon)\}$,
- $\Gamma^3(A) = \left\{\epsilon > 0 \mid (\forall \lambda \in \Lambda)(\exists Q_1, \dots, Q_n \in \mathscr{B})(A \subseteq Q_1 \cup \cdots \cup Q_n,\ \mathrm{diam}_\lambda(Q_i) < \epsilon)\right\}$.

Se tiene que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \Gamma^3_\lambda(A) = \Gamma^3(A)$. Si $\alpha^\lambda_{\mathscr{B}}(A) = \text{ínf}\, \Gamma^3_\lambda(A)$, entonces $\alpha^\lambda_{\mathscr{B}}$ y

$$\alpha^*_{\mathscr{B}}(A) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \alpha^\lambda_{\mathscr{B}}(A)$$

son medidas de no-compacidad en X (como espacio seudo-métrico y uniforme, respectivamente). Así, se tiene que

$$\alpha_{\mathscr{B}}(A) = \text{ínf} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \Gamma^3_\lambda(A) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \alpha^\lambda_{\mathscr{B}}(A).$$

Por tanto, $\alpha_{\mathscr{B}}(A) = \alpha^*_{\mathscr{B}}(A)$. Esto completa la demostración. □

Observación 3.2.1. Análogo al caso seudo-métrico, las medidas de no-compacidad de los corolarios anteriores satisfacen las siguientes desigualdades:

1. $\gamma(A) \leq \chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A)$, y

2. $\alpha(A) \leq \alpha_{\mathscr{B}}(A)$,

para todo $A \subseteq X$ y todo cubrimiento acotado $\mathscr{B}$ de X.

El siguiente resultado demuestra el recíproco del teorema 3.2.1. De este modo, se caracteriza la completitud de un espacio uniforme vía medidas de no-compacidad. Antes, enunciamos el siguiente lema.

Lema 3.2.2. *Sea (X,d) un espacio seudo-métrico, y tal que para toda sucesión $(F_n : n \in \mathbb{N})$ decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0,$$

implica $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Entonces, (X,d) es completo.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $F_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}}$. Sean $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$, si $n \geq N$ y $p \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\operatorname{diam}(F_n) \leq \epsilon$, si $n \geq N$, con lo cual se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Tenemos así que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy con un punto de acumulación. Por lo tanto, esta sucesión es convergente. Esto concluye la demostración. □

Teorema 3.2.3. *Un espacio uniforme X es completo, si y solo si,*

$$\bigcap_{i\in J} G_i \neq \emptyset,$$

para toda familia de conjuntos cerrados, $\{G_i\}_{i\in J}$, tal que:

1. *$\{G_i\}_{i\in J}$ tiene la propiedad de la intersección finita,*
2. $\inf_{I\in\langle J\rangle} \Phi^*(\bigcap_{i\in I} G_i) = 0$.

Demostración. La implicancia directa es el Teorema 3.2.1. Para demostrar el recíproco, sea $\{B_i\}_{i\in J}$ una base de filtro de Cauchy en X. Luego, $\{\overline{B}_i\}_{i\in J}$ es también una base de filtro en X y, por consiguiente, tiene la propiedad de la intersección finita. Verifiquemos que

2'. $\inf_{I\in\langle J\rangle} \Phi^*\left(\bigcap_{i\in I} \overline{B}_i\right) = 0$.

Sea $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $i_n = i_{\lambda,n} \in J$ tal que $B_{i_n} \times B_{i_n} \subset \mathcal{U}_{\lambda,1/n}$. Luego, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}_\lambda(\overline{B}_{i_n}) = 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Esto implica que, $\alpha_\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \overline{B}_{i_n}\right) = 0$, con lo cual se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \overline{B}_{i_n}$ es d_λ-precompacto. Por consiguiente, $\phi_\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \overline{B}_{i_n}\right) = 0$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces,

$$\inf_{I\in\langle J\rangle} \Phi^*\left(\bigcap_{i\in I} \overline{B}_i\right) \leq \Phi^*\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \overline{B}_{i_n}\right) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \overline{B}_{i_n}\right) = 0.$$

Luego, la hipótesis implica que $\bigcap_{i\in J} \overline{B}_i \neq \emptyset$ y, como $\{B_i\}_{i\in J}$ es de Cauchy, entonces esta base de filtro es convergente. Esto completa la demostración. □

Capítulo 4

Dos condiciones para la existencia de puntos fijos

En este capítulo, presentaremos esencialmente dos condiciones que con frecuencia se requieren para asegurar existencia de puntos fijos en funciones, principalmente contracciones. A saber, la condición orbital de Banach y la propiedad condensante. Ambos conceptos se encuentran en la literatura, para funciones definidas en espacios métricos. Presentamos aquí extensiones de estas definiciones para correspondencias definidas en espacios uniformes. Además, la definición de familia uniformemente condensante, la cual introducimos en la sección 4.3, nos permite obtener resultados de existencia de puntos fijos comunes para una familia de correspondencias.

4.1. Condiciones orbitales de Banach

Comenzamos esta sección con la definición de condición orbital.

Definición 4.1.1. Sea $T : X \to \mathscr{C}\mathscr{B}(X)$ una correspondencia. Diremos que

- T satisface la *condición orbital de Banach* (COB), si existe una familia $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $[0,1)$ tal que

$$d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, y), \text{ para todo } \lambda \in \Lambda,\ x \in X,\ y \in Tx;$$

- T satisface la *condición orbital de Banach fuerte* (COBF), si existe una familia

$\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $[0,1)$ tal que

$$d_\lambda(y,Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x,Tx), \text{ para todo } \lambda\in\Lambda,\ x\in X,\ y\in Tx; \text{ y}$$

- T es *débilmente semicontinua superior*, si la función $h_\lambda : X \to [0,\infty)$ dada por $h_\lambda(x) = d_\lambda(x,Tx)$ es semicontinua superior, para todo $\lambda\in\Lambda$.

Observación 4.1.1. Si $T : X \to \mathscr{C}(X)$ es semicontinua superior, entonces T es débilmente semicontinua superior. En efecto, sea $\lambda\in\Lambda$, $\alpha>0$,

$$U_{\lambda,\alpha} = \{(x,y)\in X\times X \mid d_\lambda(x,y) > \alpha\},$$

y $G : X \to \mathscr{C}(X\times X)$ la correspondencia definida por $G(x) = \{x\}\times Tx$. Como G es semicontinua superior (pues T lo es), entonces

$$\{x\in X \mid d_\lambda(x,Tx) > \alpha\} = \{x\in X \mid G(x)\cap \overline{U_{\lambda,\alpha}} = \emptyset\}$$

es abierto en X.

A continuación, vemos ciertos tipos de correspondencias que satisfacen la condición orbital de Banach y la condición orbital fuerte.

Proposición 4.1.1. *Sea $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ una correspondencia que satisface alguna de las siguientes condiciones, para cada $\lambda\in\Lambda$:*

1. *(Nadler) Existe $k_\lambda\in[0,1)$ tal que*

$$H^\lambda(Tx,Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x,y), \text{ para todo } x,y\in X.$$

2. *(Kannan) Existe $k_\lambda\in[0,1/2)$ tal que*

$$H^\lambda(Tx,Ty) \leq k_\lambda(d_\lambda(x,Tx)+d_\lambda(y,Ty)), \text{ para todo } x,y\in X.$$

3. *(Kannan generalizada) Existe $k_\lambda\in[0,1/2)$ tal que*

$$H^\lambda(Tx,Ty) \leq k_\lambda \max\{d_\lambda(x,Tx), d_\lambda(y,Ty)\}, \text{ para todo } x,y\in X.$$

4. *(Chatterjea) Existe* $k_\lambda \in [0,1/2)$ *tal que*

$$H^\lambda(Tx,Ty) \le k_\lambda(d_\lambda(x,Ty)+d_\lambda(y,Tx)),\ \textit{para todo } x,y\in X.$$

5. *(Chatterjea generalizada) Existe* $k_\lambda \in [0,1/2)$ *tal que*

$$H^\lambda(Tx,Ty) \le k_\lambda \max\{d_\lambda(x,Ty),d_\lambda(y,Tx)\},\ \textit{para todo } x,y\in X.$$

6. *(Berinde) Existen* $k_\lambda \in [0,1/2)$ *y* $L \ge 0$ *tales que*

$$H^\lambda(Tx,Ty) \le k_\lambda d_\lambda(x,y)+Ld_\lambda(y,Tx),\ \textit{para todo } x,y\in X.$$

7. *(Reich) Existen* $\alpha_\lambda,\beta_\lambda,\gamma_\lambda \in [0,1]$ *tales que* $\alpha_\lambda+\beta_\lambda+\gamma_\lambda<1$, *y*

$$H^\lambda(Tx,Ty) \le \alpha_\lambda d_\lambda(x,y)+\beta_\lambda d_\lambda(x,Tx)+\gamma_\lambda d_\lambda(y,Ty),\ \textit{para todo } x,y\in X.$$

8. *(Ciric) Existe* $\alpha_\lambda \in [0,1/2)$ *tal que*

$$H^\lambda(Tx,Ty) \le \alpha_\lambda \max\{d_\lambda(x,y),d_\lambda(x,Tx),d_\lambda(y,Ty),d_\lambda(x,Ty),d_\lambda(y,Tx)\},$$

para todo $x,y\in X$.

Entonces, T *satisface la condición orbital de Banach. Aun más, las contracciones Kannan, Kannan generalizada y Chatterjea generalizada satisfacen la COBF.*

Demostración. 1. Sean $\lambda\in\Lambda$, $x\in X$ e $y\in Tx$. Luego,

$$d_\lambda(y,Ty) \le \sup_{z\in Tx} d_\lambda(z,Ty) \le H^\lambda(Tx,Ty) \le k_\lambda d_\lambda(x,y),$$

de modo que T satisface la COB.

2. Si T es Kannan, tenemos, dados $\lambda\in\Lambda$, $x\in X$ e $y\in Tx$,

$$d_\lambda(y,Ty) \le H^\lambda(Tx,Ty) \le k_\lambda(d_\lambda(x,Tx)+d_\lambda(y,Ty)),$$

y entonces $(1-k_\lambda)d_\lambda(y,Ty) \le k_\lambda d_\lambda(x,Tx)$. Así,

$$d_\lambda(y,Ty) \le \frac{k_\lambda}{1-k_\lambda} d_\lambda(x,Tx),$$

de modo que T satisface la COBF con constantes $k_\lambda/(1-k_\lambda) \in [0,1)$.

3. Sean $\lambda \in \Lambda$, $x \in X$. Si para algún $y \in Tx$, $d_\lambda(x,Tx) \le d_\lambda(y,Ty)$, entonces $d_\lambda(y,Ty) = 0$, de modo que $d_\lambda(y,Ty) \le k_\lambda d_\lambda(x,Tx)$. Así, T satisface la COBF.

4. Sean $\lambda \in \Lambda$, $x \in X$, e $y \in Tx$. Luego,

$$d_\lambda(y,Ty) \le H^\lambda(Tx,Ty) \le k_\lambda(d_\lambda(x,Ty) + d_\lambda(y,Tx)) = k_\lambda d_\lambda(x,Ty).$$

   Esto, junto con el hecho que $d_\lambda(x,Ty) \le d_\lambda(x,y) + d_\lambda(y,Ty)$, implica

$$d_\lambda(y,Ty) \le \frac{k_\lambda}{1-k_\lambda} d_\lambda(x,y).$$

   Por tanto, T satisface la BOC con constantes $k_\lambda/(1-k_\lambda) \in [0,1)$.

5. Para el caso Chatterjea generalizado, sean $\lambda \in \Lambda$, $x \in X$ e $y \in Tx$. Luego,

$$H^\lambda(Tx,Ty) \le k_\lambda d_\lambda(x,Ty) \le k_\lambda(d_\lambda(x,Tx) + H^\lambda(Tx,Ty)),$$

   y en consecuencia,

$$d_\lambda(y,Ty) \le H^\lambda(Tx,Ty) \le \frac{k_\lambda}{1-k_\lambda} d_\lambda(x,Tx).$$

   Así, T satisface la COBF con constantes $k_\lambda/(1-k_\lambda) \in [0,1)$.

6. Si T es Berinde, sean $\lambda \in \Lambda$, $x \in X$ e $y \in Tx$. Luego,

$$H^\lambda(Tx,Ty) \le k_\lambda d_\lambda(x,y) + L d_\lambda(y,Tx) = k_\lambda d_\lambda(x,y).$$

   Como $y \in Tx$, entonces $d_\lambda(y,Ty) \le k_\lambda d_\lambda(x,y)$, de modo que T satisface la COB con constantes $k_\lambda \in [0,1)$.

7. Si T es Reich, entonces T es Berinde. En efecto, sean $\lambda \in \Lambda, x, y \in X$. Ya hemos

observado que

$$d_\lambda(y,Ty) \leq d_\lambda(y,z) + d_\lambda(z,Ty),$$

para todo $z \in Tx$. Reemplazando y considerando que $d_\lambda(x,Tx) \leq d_\lambda(x,z)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
H^\lambda(Tx,Ty) &\leq \alpha_\lambda d_\lambda(x,y) + \beta_\lambda d_\lambda(x,z) + \gamma_\lambda d_\lambda(y,Ty)\\
&\leq \alpha_\lambda d_\lambda(x,y) + \beta_\lambda[d_\lambda(x,y) + d_\lambda(y,z)] + \gamma_\lambda[d_\lambda(y,z) + d_\lambda(z,Ty)]\\
&= (\alpha_\lambda + \beta_\lambda)d_\lambda(x,y) + (\beta_\lambda + \gamma_\lambda)d_\lambda(y,z) + \gamma_\lambda d_\lambda(z,Ty)\\
&\leq (\alpha_\lambda + \beta_\lambda)d_\lambda(x,y) + (\beta_\lambda + \gamma_\lambda)d_\lambda(y,z) + \gamma_\lambda H^\lambda(Tx,Ty).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$H^\lambda(Tx,Ty) \leq \frac{\alpha_\lambda + \beta_\lambda}{1-\gamma_\lambda} d_\lambda(x,y) + \frac{\beta_\lambda + \gamma_\lambda}{1-\gamma_\lambda} d_\lambda(y,Tx).$$

Como $\alpha_\lambda + \beta_\lambda + \gamma_\lambda < 1$, entonces $(\alpha_\lambda + \beta_\lambda)/(1-\gamma_\lambda) < 1$ y $(\beta_\lambda + \gamma_\lambda)/(1-\gamma_\lambda) \geq 0$. Por tanto, T es Berinde, y satisface la COB como consecuencia.

8. Finalmente, si T es una contracción Ciric, entonces dado $\lambda \in \Lambda$, $x \in X$ e $y \in Tx$, tenemos

$$H^\lambda(Tx,Ty) \leq \alpha_\lambda \max\{d_\lambda(x,y), d_\lambda(x,Tx), d_\lambda(y,Ty), d_\lambda(x,Ty), d_\lambda(y,Tx)\},$$

pero como $y \in Tx$ y $d_\lambda(x,Tx) \leq d_\lambda(x,y)$, tenemos

$$H^\lambda(Tx,Ty) \leq \alpha_\lambda \max\{d_\lambda(x,y), d_\lambda(y,Ty), d_\lambda(x,Ty)\} \leq \alpha_\lambda[d_\lambda(x,y) + d_\lambda(y,Ty)].$$

En consecuencia,

$$d_\lambda(y,Ty) \leq \frac{\alpha_\lambda}{1-\alpha_\lambda} d_\lambda(x,y),$$

de modo que T satisface la COB con constantes $\alpha_\lambda/(1-\alpha_\lambda) \in [0,1)$. Esto completa la demostración.

□

Observación 4.1.2. Como parte del aporte de esta tesis, presentamos un nuevo tipo de contracción (NC) que satisface la COBF. Para ello, sea $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ tal que

$$H^\lambda(Tx,Ty) \leq k_\lambda[d_\lambda(x,Ty) + d_\lambda(y,Ty)],$$

donde $k_\lambda \in [0,1)$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Notemos que dado $x \in X$ e $y \in Tx$,

$$d_\lambda(y, Ty) \leq H^\lambda(Ty, Tx) \leq k_\lambda[d_\lambda(y, Tx) + d_\lambda(x, Tx)] = k_\lambda d_\lambda(x, Tx).$$

En consecuencia, T satisface la COBF con constantes k_λ.

4.2. Existencia de punto fijo

En lo que sigue, denotamos, para cada $\lambda \in \Lambda$ y $x \in X$,

$$C_\lambda(x) = \{y \in Tx, |, d_\lambda(x, y) = d_\lambda(x, Tx)\} \quad \text{e} \quad \mathscr{I}_T(x) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda(x).$$

El siguiente lema es una extensión del teorema de Caristi (ver Teorema A.0.1), para funciones univaluadas.

Lema 4.2.1. *(Corolario 12 en [13]) Sea $f : X \to X$ una función arbitraria. Supongamos que para cada $\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda : X \to \mathbb{R}$ es una función semicontinua inferior y acotada inferiormente, tal que para cada $x \in X$,*

$$d_\lambda(x, f(x)) \leq \varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(f(x)).$$

Entonces, f tiene al menos un punto fijo.

Teorema 4.2.1. *Sea $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ una correspondencia, y supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *T satisface la condición orbital de Banach,*
2. *$\mathscr{I}_T(x)$ es no vacío, para cada $x \in X$, y*
3. *T es débilmente semicontinua superior.*

Entonces, T tiene al menos un punto fijo.

Demostración. Como T satisface la COB, existe una familia $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $[0,1)$ tal que

$$d_\lambda(y, Ty) \leq k_\lambda d_\lambda(x, y), \text{ para todo } \lambda \in \Lambda, x \in X \text{ e } y \in Tx.$$

De la condición 2, existe una función de selección $f : X \to X$, es decir, $f(x) \in Tx$ para todo $x \in X$, que además satisface $d_\lambda(x, f(x)) = d_\lambda(x, Tx)$, para todo $\lambda \in \Lambda$ y $x \in X$. Así,

$$d_\lambda(x, f(x)) - d_\lambda(f(x), Tf(x)) \geq (1 - k_\lambda) d_\lambda(x, f(x)).$$

Definiendo $\varphi_\lambda : X \to \mathbb{R}$ como $\varphi_\lambda(x) = d_\lambda(x, Tx)/(1 - k_\lambda)$, tenemos que

$$d_\lambda(x, f(x)) \leq \varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(f(x)).$$

Es directo que φ_λ es acotada inferiormente por 0, y por condición 3, φ_λ es semicontinua inferior, para cada $\lambda \in \Lambda$. Del lema, existe $x^* \in X$ tal que $x^* = f(x^*)$, y en consecuencia, $x^* \in Tx^*$. Esto completa la demostración. □

La continuidad de las contracciones Nadler nos permiten establecer el siguiente corolario.

Corolario 4.2.1. *Sea $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ una contracción Nadler tal que $\mathscr{I}_T(x)$ es no vacío, para cada $x \in X$. Entonces, T tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Debido a que T es una función continua respecto a las seudo-métricas de Hausdorff, entonces T es semicontinua superior. En consecuencia, como T satisface la condición orbital de Banach, la existencia de punto fijo se sigue del teorema anterior. □

Las siguientes dos proposiciones ilustran casos especiales, donde la condición 2 del Teorema 4.2.1 es válida.

Proposición 4.2.1. *Sea $f : X \to X$ una función univaluada. Entonces, $\mathscr{I}_{\{f\}}(x)$ es no vacío, donde $\{f\}(x) := \{f(x)\}$, para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Se sigue directamente que $f(x) \in \mathscr{I}_{\{f\}}(x)$, pues $f(x) \in \{f\}(x)$, y además $d_\lambda(x, f(x)) = d_\lambda(x, \{f\}(x))$. □

Proposición 4.2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico completo, y $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ una correspondencia. Entonces, $\mathscr{I}_T(x)$ es no vacío, para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sean

$$C_n(x) = \{y \in Tx \mid d(x, y) \leq d(x, Tx) + 1/n\}.$$

Definamos de manera recursiva la sucesión

$$y_1(x) \in C_1(x),$$

$$y_{n+1}(x) \in C_n(x) \cap B(y_n(x), 1/2^n).$$

Tenemos así que $\{y_{n+p}(x)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ es una sucesión de Cauchy en $C_p(x)$, para cada $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sea y^* el límite de dicha sucesión. Luego,

$$y^* \in \bigcap_{p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} C_p(x) = \mathscr{I}_T(x).$$

Por tanto, $\mathscr{I}_T(x)$ es no vacío, lo que completa la demostración. □

Corolario 4.2.2. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $k \in [0, 1)$ y $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ una correspondencia débilmente semicontinua superior que satisface*

$$d(y, Ty) \leq kd(x, Tx), \text{ para todo } x \in X \text{ e } y \in Tx.$$

Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. Es directo del Teorema 4.2.1 y Proposición 4.2.2. □

Corolario 4.2.3. *(Nadler [28]) Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ una contracción Nadler. Entonces, T tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Sigue de Proposición 4.2.2 y Corolario 4.2.2. □

Corolario 4.2.4. *Sea $\{k_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia en $[0, 1)$ y $f : X \to X$ una función continua que satisface la siguiente condición:*

$$d_\lambda(f(x), f^2(x)) \leq k_\lambda d_\lambda(x, f(x)), \text{ para todo } x \in X, \text{ y } \lambda \in \Lambda.$$

Entonces, T tiene un punto fijo.

Demostración. La correspondencia $\{f\}(x) = \{f(x)\}$ satisface las condiciones del Teorema 4.2.1, de modo que ella tiene un punto fijo. □

El siguiente corolario, el cual es un resultado de Tarafdar en [34], es un caso particular del corolario anterior .

Corolario 4.2.5. *(Tarafdar [34]) Sea $\mathscr{F} = \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de constantes en $[0,1)$ y $f : X \to X$ una función $\mathscr{F}$-contractiva, es decir, para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \Lambda$,*

$$d_\lambda(f(x), f(y)) \leq k_\lambda d_\lambda(x, y).$$

Entonces, f tiene un punto fijo.

Demostración. La función f satisface la condición del corolario anterior. □

Observación 4.2.1. Como las correspondencias de la Proposición 4.1.1 satisfacen la condición orbital de Banach, asumiendo que estas satisfacen las condiciones 2 y 3 del Teorema 4.2.1, se deduce que cada una de ellas posee un punto fijo.

4.3. Propiedad uniformemente condensante

En esta sección, X denota un espacio uniforme no necesariamente completo. Empezamos recordando la definición de la medida de no-compacidad gamma, $\gamma : \mathscr{B}(X) \to [0,\infty]$, dada por

$$\gamma(A) = \text{ínf} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_{F\in\langle X\rangle} \{\epsilon > 0 \mid A \subseteq U_{\lambda,\epsilon}[F]\},$$

y la medida de no-compacidad de Kuratowski, $\alpha : \mathscr{B}(X) \to [0,\infty]$ dada por

$$\alpha(A) = \text{ínf} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \left\{\epsilon > 0 \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Q_i,\ \text{diam}_\lambda(Q_i) < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Para algunos resultados en esta sección, es necesario que una medida de no-compacidad satisfaga una condición adicional. Precisamos a continuación.

Definición 4.3.1. Una función $\Phi : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ es una *medida de no-compacidad fuerte*, si y solo si, Φ es una medida de no-compacidad que satisface la siguiente condición, para todo $A, B \subseteq X$:

$$\Phi(A \cup B) = \text{máx}\{\Phi(A), \Phi(B)\}.$$

En lo que sigue, consideramos Φ una medida de no-compacidad fuerte. Observemos que las medidas definidas en el capítulo anterior (medida de Kuratowski, Hausdorff, y gamma) son medidas de no-compacidad fuertes.

Definición 4.3.2. Sean $\mathscr{F}$ una familia de correspondencias de X en $\mathscr{P}(X)$ y $T \in \mathscr{F}$. Diremos que

- T es *condensante*, (o Φ-condensante), si para cada $A \in \mathscr{B}(X)$ tal que $\Phi(A) > 0$ y $T(A) \in \mathscr{B}(X)$, se cumple $\Phi(T(A)) < \Phi(A)$.
- $\mathscr{F}$ es *uniformemente condensante* (o Φ-uniformemente condensante), si para todo $A \in \mathscr{B}(X)$ tal que $\Phi(A) > 0$ y $\bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(A) \in \mathscr{B}(X)$, se cumple que

$$\Phi\left(\bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(A)\right) < \Phi(A).$$

Dada $\mathscr{F}$, una familia de correspondencias de X en $\mathscr{P}(X)$, denotamos por $T_{\mathscr{F}}$ la correspondencia de X en $\mathscr{B}(X)$, definida como

$$T_{\mathscr{F}}(x) := \bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(x).$$

Definición 4.3.3. Una correspondencia $T : X \to \mathscr{P}(X)$ es *compacta*, si y solo si, para todo $A \in \mathscr{B}(X)$, $T(A)$ es precompacto, y, una familia $\mathscr{F}$ es *uniformemente compacta*, si $T_{\mathscr{F}}$ es compacta.

Observación 4.3.1. Sea $\mathscr{F}$ una familia de correspondencias de X en $\mathscr{P}(X)$.

1. Si $\mathscr{F}$ es finita y cada $T \in \mathscr{F}$ es condensante, entonces $\mathscr{F}$ es uniformemente condensante,
2. si $T_{\mathscr{F}}$ es compacta, entonces $T_{\mathscr{F}}$ es condensante,
3. $\mathscr{F}$ es uniformemente condensante, si y solo si, $T_{\mathscr{F}}$ es condensante, y
4. si $T_{\mathscr{F}}$ es compacta, entonces $\mathscr{F}$ es uniformemente condensante.

Observación 4.3.2. Los conceptos y definiciones anteriores se pueden considerar de manera análoga con funciones univaluadas $f : X \to X$, donde la imagen directa por un conjunto $A \in \mathscr{P}(X)$ es la usual. Es decir, $f(A) = \{x \in X \mid (\exists y \in X) x = f(y)\}$.

En la siguiente proposición, mostraremos que las iteraciones de una función univaluada condensante forman una familia uniformemente condensante.

Proposición 4.3.1. *Sea $f : X \to X$ una función condensante. Entonces, $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ es una familia uniformemente condensante.*

Demostración. Sea $A \in \mathscr{B}(X)$ tal que $\Phi(A) > 0$. Fijemos

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(A).$$

Como $B = f(B) \cup f(A)$, entonces $\Phi(B) = \max\{\Phi(f(B)), \Phi(f(A))\}$. Luego, $\Phi(B) = \Phi(f(B)) < \Phi(A)$, o bien $\Phi(B) = \Phi(f(B))$, lo que implica que $\Phi(B) = 0$, pues f es condensante. En ambos casos, $\Phi(B) < \Phi(A)$, que es lo que se quería demostrar. □

Otro ejemplo de familias uniformemente condensante son las contracciones Nadler. Pero con una condición intermedia, entre la de ser una familia de correspondencias compactas y la de ser una familia uniformemente compacta. La siguiente proposición da cuenta de este hecho.

Proposición 4.3.2. *Sea $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia en $[0,1)$, y $\mathscr{F}$ una familia de correspondencias $T : X \to \mathscr{C}\mathscr{B}(X)$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $T \in \mathscr{F}$, $x, y \in X$, $H^\lambda(Tx, Ty) \le k_\lambda d_\lambda(x, y)$, y*

2. *$\bigcup_{T\in\mathscr{F}} Tx$ es precompacto, para todo $x \in X$.*

Entonces, $\mathscr{F}$ es γ-uniformemente condensante.

Demostración. Sean $A \in \mathscr{B}(X)$, $\epsilon > \gamma(A)$, $\lambda \in \Lambda$ y $a_1, \ldots, a_r \in X$ tales que

$$A \subseteq U_{\lambda,\epsilon}[a_1] \cup \cdots \cup U_{\lambda,\epsilon}[a_r].$$

Por la condición 1, se tiene $H^\lambda(Tx, Ta_i) \le k_\lambda d_\lambda(x, a_i) < k\epsilon$, para todo $x \in U_{\lambda,\epsilon}[a_i]$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, y todo $T \in \mathscr{F}$. Luego,

$$T(A) \subseteq U_{\lambda,k_\lambda\epsilon}[Ta_1] \cup \cdots \cup U_{\lambda,k_\lambda\epsilon}[Ta_r], \text{ para todo } T \in \mathscr{F},$$

y en consecuencia,

$$\bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(A) \subseteq \bigcup_{T\in\mathscr{F}} U_{\lambda,k_\lambda\epsilon}[T_{\mathscr{F}}(a_1)] \cup \cdots \cup U_{\lambda,k_\lambda\epsilon}[T_{\mathscr{F}}(a_r)].$$

Por la condición 2, $T_{\mathscr{F}}(a_i)$ es precompacto, para todo $i \in \{1,\dots,r\}$. Así, para todo $\eta > 0$ y todo $i \in \{1,\dots,r\}$, existe $G_i = \{b_{i,1},\dots,b_{i,m_i}\} \subseteq T_{\mathscr{F}}(a_i)$ tal que $T_{\mathscr{F}}(a_i) \subseteq U_{\lambda,k_\lambda\epsilon}[G_i]$. Por tanto,

$$\bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(A) \subseteq \bigcup_{T\in\mathscr{F}} U_{\lambda,(\eta+k_\lambda\epsilon)}[G_1] \cup\cdots\cup U_{\lambda,(\eta+k_\lambda\epsilon)}[G_r] = \bigcup_{T\in\mathscr{F}} U_{\lambda,(\eta+k_\lambda\epsilon)}[G],$$

donde $G = G_1 \cup\cdots\cup G_r$. Como $\epsilon > \alpha(A)$ y $\eta > 0$ son arbitrarios, se sigue que

$$\gamma\left(\bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(A))\right) \leq k_\lambda \gamma(A).$$

Por lo tanto, si $\gamma(A) > 0$, entonces $\gamma(\bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(A))) < \gamma(A)$. Esto prueba que $\mathscr{F}$ es γ-uniformemente condensante, lo que completa la demostración. □

En el caso que X sea compacto, la propiedad de ser uniformemente condensante se deduce de la semicontinuidad superior.

Proposición 4.3.3. *Sean X un espacio uniforme compacto y $\mathscr{F}$ una familia de funciones de X en $\mathscr{C}(X)$ semicontinuas superior. Entonces, $\mathscr{F}$ es uniformemente condensante.*

Demostración. Supongamos que las funciones $T \in \mathscr{F}$ son semicontinuas superior. Por Teorema 1.1.3, $T_{\mathscr{F}}$ es semicontinua superior. En consecuencia, por Teorema 1.1.2, $T_{\mathscr{F}}(X)$ es compacto. Por ende, $T_{\mathscr{F}}$ es uniformemente condensante. □

Como veremos en el siguiente ejemplo, una familia de funciones (univaluadas o multivaluadas) condensantes, no necesariamente es una familia uniformemente condensante, de modo que estos conceptos no son superfluos.

Ejemplo 4.3.1. Sean X un espacio de Banach real, $a \in X$ y $A = B(a,1)$ la bola de centro a y radio 1. Para cada $x \in X$, definamos $T_x : X \to X$ como la función constante en x, es decir, $T_x(y) = x$, para todo $y \in X$. La familia $\mathscr{F} = \{T_x\}_{x\in A}$ no es α-uniformemente condensante, pues

$$\alpha\left(\bigcup_{x\in A} T_x(A)\right) = \alpha(A),$$

pero, según Proposición 3.1.4, $\alpha(A) = 2 > 0$. Sin embargo, cada función T_x es α-condensante, ya que $\alpha(T_x(B)) = 0$, para todo $B \in \mathscr{B}(X)$.

Los siguientes resultados brindan información topológica del conjunto de puntos fijos de funciones condensantes y familias uniformemente condensantes.

Lema 4.3.1. *Sea $T : X \to \mathscr{B}(X)$ una correspondencia Φ-condensante. Entonces, Fix(T) es precompacto (eventualmente vacío).*

Demostración. Es directo que $\mathrm{Fix}(T) \subseteq T(\mathrm{Fix}(T))$, de lo que se deduce el acotamiento de $\mathrm{Fix}(T)$, y $\Phi(\mathrm{Fix}(T)) \leq \Phi(T(\mathrm{Fix}(T)))$. Suponiendo que $\Phi(\mathrm{Fix}(T)) > 0$, se obtiene $\Phi(\mathrm{Fix}(T)) < \Phi(\mathrm{Fix}(T))$. Esta contradicción implica $\Phi(\mathrm{Fix}(T)) = 0$, lo que completa la demostración. □

Corolario 4.3.1. *Sea $T : X \to \mathscr{C}\mathscr{B}(X)$ una correspondencia condensante y débilmente semicontinua inferior. Entonces, Fix(T) es compacto (eventualmente vacío).*

Demostración. De la semicontinuidad superior se deduce que $\mathrm{Fix}(T)$ es cerrado y, por Lemma 4.3, $\mathrm{Fix}(T)$ es compacto. □

Teorema 4.3.1. *Sea $\mathscr{F}$ una familia de correspondencias $T : X \to \mathscr{P}(X)$ uniformemente condensante. Entonces, $\bigcup_{T\in\mathscr{F}}$ Fix(T) es precompacto.*

Demostración. Por Observación 4.3.1 y la hipótesis, $T_{\mathscr{F}}$ es condensante. Así, el resultado se deduce del lema anterior, pues $\bigcup_{T\in\mathscr{F}} \mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(T_{\mathscr{F}})$, lo que completa la demostración. □

Observación 4.3.3. Para el lema 4.3.1, no es necesaria la condición fuerte de Φ. Por ende, el corolario 4.3.1 y teorema 4.3.1 son válidos para una medida de no-compacidad arbitraria, no necesariamente fuerte.

Corolario 4.3.2. *Bajo los supuestos de Proposición 4.3.2, $\bigcup_{T\in\mathscr{F}}$ Fix(T) es precompacto.*

Demostración. Es directo de Proposición 4.3.2 y el teorema anterior. □

El corolario precedente es una generalización de un resultado de Saint-Raymond en espacios métricos, el cual enunciamos a continuación.

Corolario 4.3.3. *(Teorema 1, [32]) Sean (X, d) un espacio métrico completo, $k \in [0, 1)$ y $T : X \to \mathscr{K}(X)$ una correspondencia Nadler:*

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \text{ para todo } x, y \in X.$$

Entonces, Fix(T) es compacto.

Demostración. Consecuencia directa del corolario anterior. □

4.4. Un resultado tipo Mönch

Sean X un espacio uniforme, $A \subseteq X$ y $\mathscr{C}$ una familia de subconjuntos de X. La $\mathscr{C}$-*envoltura* de A se define como

$$\mathrm{co}_{\mathscr{C}}(A) := \bigcap \{C \in \mathscr{C} \mid A \subseteq C\}.$$

Se dice que $\mathscr{C}$ es una *familia estable*, si las dos condiciones siguientes se cumplen:

1. para cada $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$, $\bigcap \mathscr{C}' \in \mathscr{C}$, y

2. para cada $A \in \mathscr{B}(X)$, $\mathrm{co}_{\mathscr{C}}(A) \in \mathscr{B}(X)$ y $\Phi(\mathrm{co}_{\mathscr{C}}(A)) = \Phi(A)$.

Una familia estable puede ser la de conjuntos cerrados en un espacio uniforme arbitrario, o la familia de conjuntos convexos, o cerrados y convexos en un espacio vectorial topológico. Trivialmente, $\mathscr{B}(X)$ es también una familia estable.

Sean $\mathscr{C}$ una familia estable de subconjuntos de X y $E \subseteq X$. Se dice que $G : E \rightrightarrows X$ es una correspondencia *KKM extendida*, si se tiene

$$\mathrm{co}_{\mathscr{C}}(A) \subseteq G(A) = \bigcup_{x \in A} G(x),$$

para todo subconjunto finito A de E. Diremos que G es una correspondencia *fuertemente KKM extendida* si, para cada $x \in E$,

1. $x \in G(x)$, y

2. $G^*(x) = \mathrm{co}_{\mathscr{C}}(G^*(x))$, donde $G^*(x) = X \setminus G^{-1}(x)$.

Las evaluaciones en G^{-1} y G^* suelen llamarse fibras y cofibras de G, respectivamente.

Las correspondencias fuertemente KKM extendidas son un caso particular de las correspondencias KKM extendidas, como vemos a continuación.

Proposición 4.4.1. *Sean $\mathscr{C}$ una familia estable de subconjuntos de X, $E \in \mathscr{C}$ y $G : E \rightrightarrows E$ una correspondencia fuertemente KKM extendida. Entonces, G es KKM extendida*

Demostración. Sean A un subconjunto finito de E, e $y \in \mathrm{co}_{\mathscr{C}}(A)$. Como $y \in G(y)$, entonces $y \in G^*(y)$, por lo que $\mathrm{co}_{\mathscr{C}}(A)$ no está contenido en $G^*(y) = \mathrm{co}_{\mathscr{C}}(G^*(y))$. En consecuencia, existe $x \in A$ tal que $x \notin G^*(y)$, por lo que $y \in G(x)$. Esto completa la demostración. □

Proposición 4.4.2. *Sean $\mathscr{C}$ una familia estable de subconjuntos de X, $E \in \mathscr{C}$ y $G : E \to \mathscr{P}(X)$ una correspondencia tal que G^* no es KKM extendida. Entonces, las dos siguientes condiciones se satisfacen:*

1. *Existe $y \in E$ tal que $y \in \mathrm{co}_{\mathscr{C}}(G(y))$, y*

2. *G tiene un punto fijo, siempre que $G(x) = \mathrm{co}_{\mathscr{C}}(G(x))$, para todo $x \in E$.*

Demostración. De lo asumido, existe un subconjunto finito A de E e $y \in \mathrm{co}_{\mathscr{C}}(A)$ tales que $y \notin G^*(A)$. Así, $y \in \bigcap_{x\in A} G^{-1}(x)$. En consecuencia, para todo $x \in A$, $x \in G(y)$. Esto implica $\mathrm{co}_{\mathscr{C}}(A) \subseteq \mathrm{co}_{\mathscr{C}}(G(y))$, lo que demuestra 1. Como 2 se deduce de 1, la demostración está completa. $\square$

El siguiente resultado es de tipo Mönch. Un resultado de este tipo permite encontrar subconjuntos invariantes de familias uniformemente condensantes, bajo cualquiera de las medidas de no-compacidad definidas en el capítulo precedente

Teorema 4.4.1. *Sean $\mathscr{C}$ una familia estable de subconjuntos de X, $M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{B}(X)$ completo (con la uniformidad subespacio), y $\mathscr{F}$ una familia de correspondencias uniformemente condensantes, de M en $\mathscr{P}(M)$. Supongamos además que al menos una de las dos condiciones siguientes se satisfacen:*

1. *Cada $C \in \mathscr{C}$ es cerrado, o*

2. *cada $T \in \mathscr{F}$ es semicontinua superior.*

Entonces, existe $K \in \mathscr{C}$ compacto no vacío, y tal que $T(K) \subseteq K$, para todo $T \in \mathscr{F}$.

Demostración. Sea $m \in M$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\Sigma = \bigcap_{T\in\mathscr{F}} \{K \in \mathscr{C} \mid K \subseteq M,\ m \in K \text{ y } T(K) \subseteq K\},\ B = \bigcap_{K\in\Sigma} K, \text{ y}$$

$$C = \mathrm{co}_{\mathscr{C}}\left(\{m\} \cup \bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(B)\right).$$

Se tiene que B es invariante para cada $T \in \mathscr{F}$. En efecto, $T(B) \subseteq \bigcap_{K\in\Sigma} T(K) \subseteq B$, para cada $T \in \mathscr{F}$. Como $m \in M$, $\bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(B) \subseteq B$ y $B \in \mathscr{C}$, entonces $C \subseteq B$. En consecuencia, para cada $T \in \mathscr{F}$, $T(C) \subseteq T(B) \subseteq C$, de modo que $C \in \Sigma$ y $B \subseteq C$. Se obtiene entonces

$B = C$.
Por la estabilidad de $\mathscr{C}$ como familia, se tiene

$$\Phi(C) = \Phi\left(\{m\} \cup \bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(B)\right) = \Phi\left(\bigcup_{\mathscr{T}\in\mathscr{F}} T(B)\right) = \Phi\left(\bigcup_{T\in\mathscr{F}} T(C)\right),$$

y como $\mathscr{F}$ es uniformemente condensante, entonces C es precompacto. Así, B es no vacío, precompacto y para todo $T \in \mathscr{F}$, $T(B) \subseteq B$. Si se satisface la condición 1, B es precompacto y cerrado dentro de M, y entonces es compacto que cumple las condiciones del enunciado. Si por otro lado, se satisface la condición 2, consideremos $K = \overline{B}$. Como cada $T \in \mathscr{F}$ es semicontinua superior, entonces $T^{-1}(K)$ es cerrado y K es compacto, debido a la completitud de M. En consecuencia, $K \subseteq T^{-1}(K)$ y por tanto $T(K) \subseteq K$, para todo $T \in \mathscr{F}$. Esto completa la demostración. □

El teorema de Kakutani-Fan-Glicksberg (Teorema A.0.3) admite una extensión, que enunciamos en el siguiente corolario.

Corolario 4.4.1. *Sea X un espacio vectorial topológico real, M un subconjunto de X acotado, completo y convexo. Sea $\mathscr{F}$ una familia de funciones de M en sí mismo, uniformemente condensante y cada una semicontinua superior, tal que $\{Tx\}_{T\in\mathscr{F}}$ satisface la propiedad de la intersección finita, para todo $x \in M$. Entonces, existe un punto fijo común para la familia $\mathscr{F}$, es decir, existe $x^* \in M$ tal que $x^* \in Tx^*$, para todo $T \in \mathscr{F}$.*

Demostración. Por Teorema 4.4.1, existe un subconjunto K de X compacto, convexo no vacío, tal que para todo $T \in \mathscr{F}$, $T(K) \subseteq K$. Sea $G : K \to 2^K$ la correspondencia definida por $Gx = \bigcap_{T\in\mathscr{F}} Tx$. Como Tx es compacto, para cada $T \in \mathscr{F}$ y $x \in K$, se sigue que Gx es no-vacío. Además, G es semicontinua superior, por Teorema 1.1.1. Así, por Teorema A.0.3, existe $x^* \in M$ tal que $x^* \in Gx^*$. Esto completa la demostración. □

A continuación, enunciamos una versión condensante del teorema de punto fijo de Markov-Kakutani.

Corolario 4.4.2. *Sea X espacio vectorial topológico real, M un subconjunto de X completo, acotado y convexo. Sea $\mathscr{F}$ una familia de funciones de M en sí mismo, uniformemente condensante, continuas y que conmutan vía composición. Entonces, existe $x^* \in M$ tal que $x^* \in Tx^*$, para todo $T \in \mathscr{F}$.*

Demostración. Se sigue de Teorema 4.4.1 y del teorema de Markov-Kakutani clásico. □

Definición 4.4.1. Sean X un espacio vectorial y M un subconjunto convexo de X. Una aplicación $T : M \to X$ se dice *afín*, si para todo $x, y \in M$ y $t \in [0,1]$, $T(tx + (1-t)y) = tTx + (1-t)Ty$.

Análogamente, y para concluir el capítulo, enunciamos una versión condensante del teorema de punto fijo de Kakutani.

Corolario 4.4.3. *Sean X un espacio vectorial topológico localmente convexo, M un subconjunto de X no vacío, metrizable, acotado, completo y convexo, y $\mathscr{F}$ una familia de funciones afines de M en sí mismo, uniformemente condensante y equicontinuo. Entonces, existe $x^* \in M$ tal que $Tx^* = x^*$, para todo $T \in \mathscr{F}$.*

Apéndice A

Apéndice

Teorema A.0.1. *[9] Sea* (X, d) *un espacio métrico completo,* $f : X \to X$ *una función y* $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ *una función semicontinua inferior tal que* $d(x, f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x))$*, para todo* $x \in X$*. Entonces,* f *tiene un punto fijo.*

Teorema A.0.2. *(Markov-Kakutani, Teorema V-10.6 en [10]) Sean* E *un espacio vectorial topológico,* K *subconjunto compacto y convexo de* E*. Sean* $\mathscr{F}$ *una familia de funciones lineales continuas que mapean* K *en sí mismo, y además conmutan con la composición. Entonces, existe* $x^* \in K$ *tal que* $Tx^* = x^*$*, para todo* $T \in \mathscr{F}$*.*

Teorema A.0.3. *[11, 19] Sean* E *un espacio vectorial topológico localmente convexo,* $M \subseteq E$ *compacto, convexo no vacío, y* $\mathscr{F}$ *una familia equicontinua de funciones afines de* M *en sí mismo, que además es un grupo con la composición. Entonces, existe* $x^* \in M$ *tal que* $Tx^* = x^*$*, para todo* $T \in \mathscr{F}$*.*

Teorema A.0.4. *(Borsuk,[6]) Si* S *es una esfera en un espacio normado de dimensión* n*, y* $A_1, \ldots, A_n$ *es un cubrimiento cerrado de* S*, entonces existen* A_k *y* $x, y \in A_k$ *tales que* $x = -y$*. En particular,* $diam(A_k) \geq diam(S)$*.*

Bibliografía

[1] ALIPRANTIS, C., AND BORDER, K. *Infinite Dimensional Analysis.* Masson, New York, 2006.

[2] ARANDELOVIĆ, I. D. Measure of non-compactness on uniform spaces. *Mathematica Moravica 12* (1998), 1–8.

[3] ATKIN, C. Boundedness in uniform spaces, topological groups, and homogeneous spaces. *Acta Mathematica Hugarica* ***57***, 3-4 (1991), 213–232.

[4] BANACH, S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales. *Fundamenta. Mathematicae. Vol. 3,* 1 (1922), 133–181.

[5] BANÁS, J., AND GOEBL, K. *Measures of Noncompactness in Banach spaces.* Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1980.

[6] BORSUK, K. Drei sätze über die n-dimensionale euklidische sphäre. *Fundamenta Mathematicae 20,* 1 (1933), 177–190.

[7] BOURBAKI, N. *Elements of Mathematics, General Topology. Part 1.* Hermann, Paris, 1966.

[8] BROUWER, L. Über abbildungen von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen 70* (1912), 161–115.

[9] CARISTI, J. Fixed point theorem for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society* ***215*** (1976), 241–251.

[10] DUNFORD, N., AND SCHWARTZ, J. *Linear Operators, Part I: General Theory.* Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[11] FAN, K. Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* ***38***, 2 (1952), 121–126.

[12] FIERRO, R. Noncompactness measure and fixed points for multi-valued functions on uniform spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics 15:95* (2018).

[13] FIERRO, R. A condition on uniform spaces for the existence of maximal elements and fixed points. *Journal of Fixed Point Theory and Applications* ***24***, 59 (2022).

[14] FIERRO, R., AND PIZARRO, S. Fixed points of correspondences satisfying a Banach orbital condition. *Cubo. A Mathematical Journal* ***25***, 1 (2023), 151–159.

[15] FIERRO, R., AND PIZARRO, S. Banach orbital condition and uniformly condensing property on uniform spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis (En revisión)* (2024).

[16] FURI, M., AND VIGNOLI, A. Fixed points for densifying mappings. *Rendiconti Accademia Nazionale Lincei* ***47***, 6 (1969), 465–467.

[17] FURI, M., AND VIGNOLI, A. On a property of the unit sphere in a linear normed space. *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques* ***18***, 6 (1970), 333–334.

[18] FURI, M., AND VIGNOLI, A. On α-nonexpansive mappings and fixed points. *Rendiconti Accademia Nazionale Lincei* ***32***, 1 (1970), 13–28.

[19] GLICKSBERG, I. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proceedings of the American Mathematical Society* ***3***, 1 (1952), 170–174.

[20] HEJCMAN, J. Boundedness in uniform spaces and topological groups. *Czechoslovak Mathematical Journal* ***9***, 4 (1959), 544–563.

[21] HIMMELBERG, C., PORTER, J., AND VAN VLECK, F. Fixed point theorems for condensing multifunctions. *Proceedings of the American Mathematical Society* ***23*** (1969), 635–641.

[22] HORVATH, C. Measure of non-compactness and multivalued mappings in complete metric topological vector spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 108*, 2 (1985), 403–408.

[23] KAKUTANI, S. Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets. *Proceedings of the Imperial Academy **14*** (1938), 242–245.

[24] KELLEY, J. *General Topology*. Springer, Harrisonburg, 1955.

[25] KURATOWSKI, C. Sur les espaces complets. *Fundamenta Mathematicae **15*** (1930), 301–309.

[26] MARKOV, A. Quelques théorèms sur les ensembles abéliens. *Doklady Akademii Nauk SSSR **10*** (1936), 311–314.

[27] MÖNCH, H. Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **4***, 5 (1980), 985–999.

[28] NADLER, S. Multivalued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics **30***, 2 (1969), 475–487.

[29] PIZARRO, S. Hacia una teoría de punto fijo en espacios uniformes. Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad de Valparaíso, 2022.

[30] RAKOČEVIĆ, V. Measures of noncompactness and some applications. *Filomat **12***, 2 (1998), 87–120.

[31] SADOVSKII, B. A fixed-point principle. *Functional Analysis and Its Applications **1*** (1967), 151–153.

[32] SAINT RAYMOND, J. Multivalued contractions. *Set-Valued Analysis **2***, 4 (1994), 559–571.

[33] SCHAUDER, J. Der fixpunktsatz in funktionalräumen. *Studia Mathematica **2*** (1930), 171–180.

[34] TARAFDAR, E. An approach to fixed-point theorems on uniform spaces. *Transactions of the American Mathematical Society **74***, 4 (1974), 209–225.

[35] TYCHONOFF, A. Ein fixpunktsatz. *Mathematische Annalen Vol. 111* (1935), 767–776.