



Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Insituto de Matemáticas

Isomorfismo entre el álgebra de Birman-Murakami-Wenzl y el álgebra de Tangles de Kauffman

*Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas*

Presentada por:
JAVIER EDUARDO VEGA GUZMÁN

Profesor Guía: Dr. Marcelo Flores Henríquez

VALPARAÍSO

MES AÑO

Agradecimientos

Al Intituto de Matemática de la Universidad de Valparaiso (IMUV) por su calidad humana y de gran conocimiento.

A mi profesor guía Marcelo Flores Henriquez, por su apoyo, tiempo y generosidad. Por ser un excelente docente y tutor. Fue un gusto trabajar y aprender con él.

A mi madre María Isabel por acompañarme en cada etapa, por confiar en mis decisiones. Por la linda relación que tenemos, por ayudarme siempre, por alegrarse con cada logro, por su cariño, sus consejos. Gracias por todo!

A toda mi familia por el apoyo y entusiasmo que ponen cuando encaro un desafío. Quiero agradecer especialmente a mi tía Andrea por inculcarme el amor a las ciencias desde pequeño y a mis abuelos, de ellos aprendí y sigo aprendiendo mucho. Fueron un gran ejemplo, gracias por todo el amor que nos brindaron a mí al Camilo y Alicia.

A mi pareja Carol Reyes y su hijita Fernandita por todo el amor que me dan día a día, por ser una excelente compañera, por alegrarse por pequeñeses y darme siempre toda la fuerza que necesito.

A mi hijita Sayén Isabel por esperarme y darme siempre una sonrisa y un abrazo cuando nos vemos. Te amo hija!

Este trabajo está dedicado a mí hija Sayén Isabel. Esta lucha continua!.

Resumen

Esta tesis presenta el estudio de la BMW álgebra introducida en 1989 por Birman, Murakami y Wenzl. Esta álgebra se define algebraicamente mediante generadores y relaciones, o geométricamente, como el álgebra de Tangles módulo relación de skein de Kauffman. Probaremos, en efecto, que estas dos versiones son isomorfas. Mostraremos que este isomorfismo es obtenido a partir de la construcción explícita de una base para BMW_n álgebra que será analoga a una base de MT_n previamente construida usando diagramas de Brauer.

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Módulos y Álgebra	5
1.1.1. Módulos	5
1.1.2. Módulo libre	7
1.1.3. Producto Tensorial de Módulos y Álgebras	8
1.1.4. Álgebras	12
1.2. Nudos	13
1.3. Polinomio de Bracket	18
1.4. Grupo de Trenzas de Artin	22
1.5. Método de Jones	26
1.5.1. Álgebra de Hecke	26
1.6. Polinomio de Kauffman de 2-variables	29
2. Álgebra de Birman-Murakami-Wenzl	34
3. Isomorfismo entre el álgebra de Birman-Murakami-Wenzl y el álgebra de Tangles de Kauffman	43
3.1. El homomorfismo φ	43
3.1.1. Conectores de Brauer	45
3.1.2. Tangles Totalmente Descendentes	46
3.2. Una base para el álgebra MT_n	52
3.3. Una base inductiva para BMW_n álgebra	57
3.4. El isomorfismo φ	70

Introducción

La *BMW* álgebra tuvo su origen en la teoría de nudos, poco tiempo después de la invención del famoso polinomio de Jones [9]. Kauffman por su parte introdujo una nueva invariante de isotopía regular para links en S^3 , determinada por relaciones de skein [13]. Birman y Wenzl [5] e independientemente Murakami [16] definieron una familia de álgebras del grupo de trenzas que cocientado por la relación de skein soportaban una función traza de Markov lo que permitía recuperar la invariante polinomial de Kauffman de dos variables, ver sección 1.6. La *BMW* álgebra se define como el álgebra con parametros l, m en $\mathbb{C}$ y generadores $g_1, \dots, g_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-1}$ sujeta a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1} \\g_i g_j &= g_j g_i \quad |i - j| > 1 \\g_i e_i &= e_i g_i = l^{-1} e_i \\e_i g_j e_i &= l e_i \\g_i - g_i^{-1} &= m(1 - e_i).\end{aligned}$$

Note que las dos primeras relaciones corresponden a relaciones de trenzas comúnmente asociado al grupo de trenzas B_n .

Así, *BMW* álgebra está estrechamente relacionada con el grupo de trenza B_n , el álgebra de Iwahori-Hecke y con otras álgebras de diagramas tales como el álgebra de Brauer y de Temperley-Lieb. De hecho, puede interpretarse como una deformación del álgebra de Brauer obtenido a partir de reemplazar el álgebra del grupo simétrico con el álgebra de Iwahori-Hecke. En vista de estas relaciones entre la *BMW* álgebra y varios objetos de tipo A , varios autores han generalizado naturalmente el álgebra de *BMW* para otro tipo de grupos de Artin, así como Häring-Oldenburg motivado por la teoría de nudo de tipo B y el álgebra de Ariki-Koike es que introduce la Birman-Murakami-

wenzl álgebra Ciclotómica en [7].

Birman y Wenzl en [5] construyeron una traza de Markov no degenerada usando la invariante de link de Kauffman, este resultado se muestra en el capítulo 2. La existencia de esta traza en conjunto con las técnicas algebraicas del método de Jones (ver Jones [10] y Wenzl [19]) permitieron derivar que la estructura genérica de esta álgebra era semisimple. Más aún Rui y Si en [18] produjieron un criterio para la simplicidad de la BMW álgebra sobre un cuerpo arbitrario.

Posteriormente en [8] Morton y Traczyk definen el Álgebra Tangles de Kauffman. Esta álgebra se define como sigue: Sea Ω un anillo conmutativo con unidad y l, m indeterminadas en $\mathbb{C}$. El Álgebra de Tangles de Kauffman MT_n es la Ω -álgebra de (n, n) -tangles, módulo relaciones de skein:

$$(1) \quad T^+ - T^- = m(T^0 - T^\infty)$$

$$(2) \quad T^{derecho} = l^{-1}T \quad \text{y} \quad T^{izquierdo} = lT$$



Figura 1

$$(3) \quad T \sqcup \bigcirc = z^{-1}T$$

Donde $T \sqcup \bigcirc$ es un tangle que consiste en la unión de T y una curva cerrada simple que no poseen cruces entre ellos.

Morton y Traczyk [8] probaron que el álgebra MT_n es libre de rango $(2n-1)!! = (2n-1) \cdots 3 \cdot 1$ cuyos (n, n) -tangles son tangles totalmente descendentes, ver definición 36), la cual tenemos los siguientes diagramas de G_i, E_i y G_i^{-1} respectivamente.

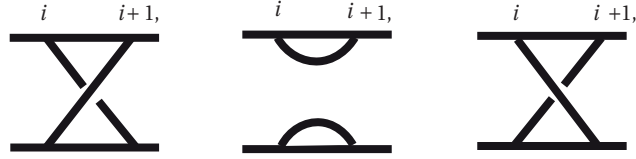


Figura 2

Esta tesis esta dividida en 3 capítulos. En el capítulo 1 revisaremos las definiciones elementales de módulos, álgebras asociativas y producto tensorial de módulos y álgebras. Además se describe la invariante polinomial de Kauffman de dos variables F sobre el conjunto de tangles, junto con la generalización del polinomio de Bracket de isotopía regular dado por el polinomio de Laurent Λ . En el capítulo 2 encontraremos la definición original dada por Birman y Wenzl en [5] y la construcción de una presentación reducida final del álgebra BMW , que culmina con la demostración de la buena definición de la función lineal traza de Markov sobre la BMW álgebra. El capítulo 3 trata el homomorfismo φ entre el álgebra BMW_n y el álgebra MT_n . En la sección 3.1.2 se identificará el conjunto de tangles generador $\{T_d\}$ para el álgebra MT_n llamados tangles totalmente descendente y se finaliza probando que φ es sobreyectiva lo que luego en la sección 3.2 se demuestra la independencia lineal de este conjunto constituyendo una base para el álgebra de Tangles de Kauffman. En la sección 3.3 se muestra la construcción de una base inductiva para el álgebra de BMW_n , se introducen los elementos F_k , ver figura 3 para $2k \leq n - 1$,

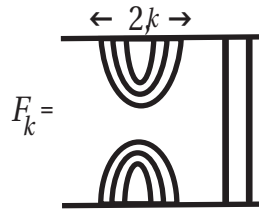


Figura 3

y f_k como el producto de e'_i s, ver proposición 13. Como parte del método inductivo usaremos las filtraciones naturales $BMW_n^{(q)}$ y $MT_n^{(q)}$ como ideal bilatero. En el caso de MT_n surgen desde el punto de vista geométrica cuando consideramos tangles de rango $\leq q$. Demostraremos que para $q = 0, 1$ y algún n fijo el homomorfismo φ es inyectiva sobre BMW_{n-1} . Por último en la sección 3.4 mostramos el paso principal de la inducción, es decir mostrar que $\varphi : BMW_n^{(q)} \longrightarrow MT_n^{(q)}$ es inyectiva para todo n, q . Así

formalizando tenemos que para todo n , la función $\varphi : BMW_n \longrightarrow MT_n$ es un isomorfismo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Módulos y Álgebra

Esta sección tiene como objetivo entregar las nociones básicas de módulos, álgebras asociativas y producto tensorial de módulos y álgebras.

1.1.1. Módulos

Se definirá el concepto de módulo y se verán algunas propiedades básicas de módulos.

Definición 1. Sea R un anillo y M un grupo abeliano. Decimos que M es un R -módulo izquierdo si para todo $r \in R$ y $x \in M$ existe una acción de r sobre x por la izquierda dado por el homomorfismo $h_r(x) = rx$ donde $h : R \longrightarrow \text{End}(M)$ tal que satisface:

$$M.1 \quad r(x + y) = rx + ry \quad \text{para todo } r \in R, x, y \in M,$$

$$M.2 \quad (r + s)x = rx + sx \quad \text{para todo } r, s \in R, x \in M,$$

$$M.3 \quad (rs)x = r(sx) \quad \text{para todo } r, s \in R, x \in M,$$

$$M.4 \quad 1x = x \quad \text{para todo } x \in M.$$

Analogamente se define el R -módulo derecho.

Como **submódulo** de M se entendera como cualquier subgrupo N del grupo aditivo M que es cerrado bajo la acción de R , es decir, para todo $r \in R$ y $n \in N$ entonces $rn \in N$. En tal caso N hereda una estructura de R -módulo.

Sea M un R -módulo, y $\emptyset \neq X \subseteq M$ definimos el **submódulo generado** por X , como el conjunto de todas las combinaciones lineales $\sum r_i x_i$ donde $x_i \in X$, $r_i \in R$. En particular, X es conjunto generador de M si cada elemento de M es combinación lineal de elementos de X y si a la vez X es un conjunto finito, entonces M es **finitamente generado**.

A veces nos encontraremos con módulos que estan dotados de acciones tanto por la izquierda y derecha y a su vez estas acciones son compatibles. Mas precisamente,

Definición 2. Sean R, S anillos y M un grupo abeliano. Decimos que M es un $R-S$ -**bimódulo** es decir, es un R -módulo izquierdo y un S -módulo derecho tal que:

$$(rm)s = r(ms) \quad \text{para todo } m \in M, r \in R \text{ y } s \in S$$

.

Este será un concepto considerado mas adelante en la contrucción del producto tensorial sobre anillos conmutativos con unidad.

Definición 3. Sea R un anillo y M y N R -módulos, se define una aplicación R -lineal u **homomorfismo de módulo** $f : M \longrightarrow N$ tal que $rf(x) = f(rx)$ y $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ para todo $x \in M$, $r \in R$.

Notar que si M y N son R -módulos entonces $Hom(M, N)$ tiene naturalmente estructura de R -módulo.

Veamos algunos conceptos claves que se deprenden de la teoría de grupos y que se extienden a la teoría de Módulos.

Dado $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de módulo, la imagen imf es un submódulo de N y el kernel, $kerf$ es un submódulo de M . Observemos que f es inyectiva, si y solo si, $kerf = 0$. Además el grupo cuociente $M/kerf$ puede ser considerado como un R -módulo y definir el **homomorfismo natural** $\pi : M \longrightarrow M/kerf$ tal que $M/kerf \cong imf$. En general para algún submódulo M' de M tenemos el **módulo cuociente** M/M' obtenido a partir de extender el concepto de módulo sobre el grupo cuociente M/M' donde M' es un subgrupo normal de M .

Tambien se cumple en la teoría de módulos el siguiente resultado de teoría de grupo.

Teorema 1. Sea R un anillo y M, N dos R -módulo. Dado un homomorfismo de módulo $f : M \longrightarrow N$ y un submódulo M' de M con $\pi : M \longrightarrow M/M'$ tal que $M' \subseteq kerf$ entonces

existe un único homomorfismo $\bar{f} : M/M' \rightarrow N$ tal que f puede ser expresada como $f = \bar{f} \circ \pi$. Además $\bar{f}$ es inyectiva, si y solo si, $M' = \ker f$. Osea el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & M/M' \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & N \end{array}$$

1.1.2. Módulo libre

A continuación estudiamos el concepto de independencia lineal y base para módulo.

Definición 4. Sea M un R -módulo y $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ un subconjunto finito de M . Se dice que X (los elementos de X) es (son) linealmente dependiente(s), si existen $r_1, \dots, r_k \in R$ no todos nulos tal que:

$$x_1 \cdot r_1 + \dots + x_k \cdot r_k = 0$$

.

En caso contrario se dira que X es **linealmente independiente** es decir, para cualquier $r_1, \dots, r_k$ se cumple

$$\sum_{i=1}^k x_i r_i = 0 \Leftrightarrow r_i = 0 \quad \forall \quad 1 \leq i \leq k$$

.

Así, $\emptyset \neq X \subset M$ es una base de M si X es linealmente independiente y genera como R -módulo a M .

En particular se sabe lo siguiente:

Proposición 1. Todo módulo libre finitamente generado posee una base finita

El contenido de la siguiente proposición es conocida para espacios vectoriales sobre anillo de división. La prueba es valida para anillos arbitrarios.

Proposición 2. *Sea F un módulo libre sobre R con base infinitas X, Y , entonces $\text{Car}(X) = \text{Car}(Y)$.*

A continuación se caracterizará la definición de módulo libre a través de homomorfismos.

Definición 5. *Sea R un anillo, F un R -módulo y $X \subseteq F$. Se dice que (F, X) es un R -módulo libre sobre X si $i : X \rightarrow F$ es una función que verifica la siguiente propiedad universal, es decir:*

Dado N un R -módulo y una función $\psi : X \rightarrow N$ existe un único homomorfismo de módulo $\bar{f} : F \rightarrow N$ tal que $\psi = \bar{f} \circ i$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow \psi & \downarrow \exists! \bar{f} \\ & & N \end{array}$$

El conjunto X se llama una base de F .

Se debe tener en cuenta de esta propiedad universal lo siguiente: Si (F, X) y (F', X) son R -módulos libres sobre el conjunto X , entonces F es isomorfo a F' .

La siguiente proposición es útil en el estudio de R -módulos.

Proposición 3. *Sea M un R -módulo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) M tiene una base
- (2) M es isomorfo a una suma directa del tipo $\bigoplus_{i \in I} R_i$ con $R_i = R$ para todo $i \in I$
- (3) (M, X) es un R -módulo libre.

1.1.3. Producto Tensorial de Módulos y Álgebras

El producto tensorial es un objeto de estudio muy interesante en la teoría de módulos, pues es una herramienta útil para construir álgebras a partir de un módulo dado.

Sea R un anillo y M, N dos R -módulos derecho e izquierdo respectivamente. Consideremos el $\mathbb{Z}$ -módulo libre $F := \mathbb{Z}^{(M \times N)}$ con $X := \{\mu_x(1)\}_{x \in M \times N}$ la base estandar de F . Es decir, estamos identificando los elementos de $M \times N$ con la base estandar de $\mathbb{Z}^{(M \times N)}$. Ahora dado S un $\mathbb{Z}$ -submódulo de F definida por la unión de relaciones, osea, $S = \langle S_1 \cup S_2 \cup S_3 \rangle$ tal que:

$$S_1 := \{(m + m', n) - (m, n) - (m', n) / m, m' \in M, n \in N\}$$

$$S_2 := \{(m, n + n') - (m, n) - (m, n') / m \in M, n, n' \in N\}$$

$$S_3 := \{(mr, n) - (m, rn) / m \in M, r \in R\}$$

Podemos definir $M \otimes_R N$ como el $\mathbb{Z}$ -módulo cociente F/S . Este objeto se conoce como el producto tensorial de M por N , la clase de equivalencia $\overline{(m, n)}$ del elemento (m, n) de F se denota por $m \otimes n$ y se lee m tensor n .

Las propiedades anteriores se pueden escribir tambien como las siguiente relaciones:

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$$

$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$$

$$m \cdot r \otimes n = m \otimes r \cdot n.$$

Definición 6. Sea M un R -módulo derecho, N un R -módulo izquierdo y L un grupo abeliano aditivo. Una función $\varphi : M \times N \longrightarrow L$ es llamada R -balanceada si satisface lo siguiente:

$$\varphi(m_1 + m_2, n) = \varphi(m_1, n) + \varphi(m_2, n)$$

$$\varphi(m, n_1 + n_2) = \varphi(m, n_1) + \varphi(m, n_2)$$

$$\varphi(m, rn) = \varphi(mr, n)$$

para todo $m, m_1, m_2 \in M, n, n_1, n_2 \in N$ y $r \in R$

se desprenden las siguientes observaciones:

1. $0 \otimes n = 0, m \otimes 0 = 0, (-m) \otimes n = -(m \otimes n), m \otimes (-n) = -(m \otimes n)$
2. Cada elemento de $M \otimes_R N$ se puede representar de la forma $m_1 \otimes n_1 + \dots + m_r \otimes n_r$. Esta representación no es única.

El producto tensorial se caracteriza a través de la siguiente propiedad universal con respecto a las funciones R -balanceada

Teorema 2. *Supongamos R un anillo con 1, M un R -módulo derecho y N un R -módulo izquierdo. Sea $M \otimes_R N$ el producto tensorial de M y N sobre R y sea $\iota : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ un función R -balanceada. Para cada grupo abeliano L y cada función $\varphi : M \times N \longrightarrow L$ R -balanceada existe un único homomorfismo de grupo $\Phi : M \otimes_R N \longrightarrow L$ tal que $\varphi = \Phi \circ \iota$ es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\iota} & M \otimes_R N \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \Phi \\ & & L \end{array}$$

El homomorfismo Φ viene dado por:

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i\right) = \sum_{i=1}^k \varphi(m_i, n_i)$$

Observación 1. *El diagrama conmutativo establece la biyección entre las funciones R -balanceadas $M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ y los homomorfismos de grupo $\Phi : M \otimes_R N \longrightarrow L$*

Como consecuencia de la propiedad universal tenemos la caracterización del producto tensorial $M \otimes_R N$ como un grupo abeliano. Así tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1. *Si L es un R -módulo y $\varphi : M \times N \longrightarrow L$ una función R -balanceada tal que L satisface la propiedad universal precedente, entonces $L \cong M \otimes_R N$ (isomorfismo de grupos abelianos)*

La construcción realizada anteriormente puede ser ampliada a bimódulos.

Sea R, S y T tres anillos con 1, consideremos el conjunto $\text{Hom}(N, M)$, donde M es un $S - R$ -bimódulo y N un $R - T$ -bimódulo. Entonces podemos definir al producto tensorial $M \otimes N$ como una estructura de $S - T$ -bimódulo con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} s \cdot (m \otimes n) &= (s \cdot m) \otimes n, \\ (m \otimes n) \cdot t &= m \otimes (n \cdot t) \end{aligned}$$

Son estas operaciones que dotan al grupo $M \otimes N$ de una estructura de bimódulo. La demostración de esto se apoya en la propiedad universal sobre el producto tensorial.

Ahora, estableceremos algunas de las propiedades básicas del producto tensorial.

Consideremos las siguientes hipótesis. Sea M, M' dos R -módulos derechos, N, N' dos R -módulos izquierdos y supongamos $\varphi : M \longrightarrow M'$ y $\psi : N \longrightarrow N'$ dos homomorfismos de módulos.

- (1) Existe un único homomorfismo de grupo, denotado por $\varphi \otimes \psi$ que va de $M \otimes_R N$ a $M' \otimes_R N'$ tal que $(\varphi \otimes \psi)(m \otimes n) = \varphi(m) \otimes \psi(n)$
- (2) Si M, M' son $R - S$ -bimódulo para algún anillo S y φ un homomorfismo de S -módulo, entonces $\varphi \otimes \psi$ es un homomorfismo de S -módulo izquierdo. En particular si R es conmutativo entonces $\varphi \otimes \psi$ es siempre un homomorfismo de R -módulo.
- (3) Si $\lambda : M' \longrightarrow M''$ y $\mu : N' \longrightarrow N''$ son dos homomorfismos de módulo entonces $(\lambda \otimes \mu)(\varphi \otimes \psi) = (\lambda \circ \varphi) \otimes (\mu \circ \psi)$.
- (4) Sea M un R -módulo derecho, N un $R - T$ -bimódulo y L un T -módulo izquierdo. Entonces existe un único isomorfismo de grupos abelianos

$$(M \otimes_R N) \otimes_T L \cong M \otimes_R (N \otimes_T L),$$

tal que $(m \otimes n) \otimes l \mapsto m \otimes (n \otimes l)$. Si M es un $S - R$ -bimódulo entonces este isomorfismo es de S -módulo.

Nos vamos a centrar ahora en el caso particular que R sea un anillo conmutativo con 1.

Definición 7. Supongamos que M es un R -módulo izquierdo/derecho sobre un anillo conmutativo R . Entonces M es el R -bimódulo tal que se define $mr = rm$ para todo $m \in M$ y $r \in R$.

Definición 8. Sea R un anillo conmutativo con 1, M, N y L R -módulos izquierdos. La función $\varphi : M \times N \longrightarrow L$ es llamada R -bilineal si φ es lineal en cada factor es decir,

$$\begin{aligned} \varphi(r_1 m_1 + r_2 m_2, n) &= r_1 \varphi(m_1, n) + r_2 \varphi(m_2, n) \quad y \\ \varphi(m, r_1 n_1 + r_2 n_2) &= r_1 \varphi(m, n_1) + r_2 \varphi(m, n_2) \end{aligned}$$

Para todo $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ y $r_1, r_2 \in R$

En particular la función $\iota : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ con $\iota(m, n) = m \otimes n$ es una función R -bilineal. Además, si L es un R -módulo izquierdo existe una biyección entre las funciones R -bilineales $\varphi : M \times N \longrightarrow L$ y los homomorfismo de módulo $\Phi : M \otimes_R N \longrightarrow L$ de manera que la correspondencia de φ y Φ hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\iota} & M \otimes_R N \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \phi \\ & & L \end{array}$$

Con estas definiciones y terminología tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2. *Sea R un anillo conmutativo con 1, M, N dos R -módulos izquierdo y $M \otimes_R N$ el producto tensorial de M y N sobre R . Entonces $M \otimes_R N$ es un R -módulo izquierdo con la acción:*

$$r(m \otimes n) = (rm) \otimes n = (mr) \otimes n = m \otimes (rn).$$

1.1.4. Álgebras

En lo que sigue $\mathbb{K}$ denotará un cuerpo.

Definición 9. *Una K -álgebra A es un espacio vectorial sobre K provista de una aplicación bilineal $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ tal que para todo $\alpha \in K$ y para todo $a, b \in A$ se tiene:*

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b).$$

Decimos que A es una K -álgebra finita si es una K -álgebra conmutativa con unidad y de dimension finita como K -espacio vectorial. Además, si para todo $a, b, c \in A$ cumple con $(ab)c = a(bc)$ decimos que es una K -**álgebra asociativa**.

Un homomorfismo de K -álgebras es una aplicación lineal $\phi : A \longrightarrow B$ entre dos álgebras tal que $\phi(1_A) = 1_B$ y $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$; $\forall a, b \in A$.

Definición 10. *Sea K un cuerpo conmutativo y $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto finito, la K -álgebra libre generada por X , denotada por $A(X)$ se caracteriza mediante la siguiente propiedad universal:*

Sea $i : X \longrightarrow A(X)$. Dado B una K -álgebra y una aplicación $\psi : X \longrightarrow B$ existe un único homomorfismo de K -álgebra $\bar{f} : A(X) \longrightarrow B$ tal que $\psi = \bar{f} \circ i$.

Proposición 4. Sea K un cuerpo conmutativo y A, B dos K -álgebras. Entonces la operación $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$ esta bien definida por lo tanto $A \otimes_K B$ es una K -álgebra

Álgebra definida por generadores y relaciones

Si $f_1, f_2, \dots, f_m$ son elementos del álgebra libre $A(X)$, decimos que el álgebra $B := A(X)/\langle\{f_1, \dots, f_m\}\rangle$ es generada por $x_1, \dots, x_n$ con relaciones $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_m = 0$.

Ejemplo 1. Las siguientes álgebras son asociativas no conmutativa

(1) La **Weyl algebra** $K(x, y)/\langle yx - xy - 1 \rangle$

(2) La q -Weyl Algebra $K(x, x^{-1}, y, y^{-1})/\langle yx = qxy \text{ y } xx^{-1} = x^{-1}x = yy^{-1} = y^{-1}y = 1 \rangle$

En lo que sigue se usará el concepto de álgebra mediante sus generadores y relaciones esto nos será de gran ayuda.

1.2. Nudos

Informalmente un nudo matemático es una curva simple en el espacio en que sus extremos se anudan arbitrariamente sin realizar auto-intersecciones. Para imaginarnos lo que es un nudo basta con hacer un nudo cualquiera con una cuerda y pegar sus extremos. De esta forma, podemos concebir un nudo como una manera específica de insertar una circunferencia en el espacio.

El objetivo principal de la teoría de nudos es la búsqueda de métodos matemáticos que permitan diferenciar entre un nudo de otro y distinguir los que están realmente anudados de los que no. Una manera de abordar este trabajo es mediante invariantes de nudos, las cuales nos ayudan a determinar cuando dos nudos no son "iguales", la utilidad de las invariantes radica en que dos nudos con invariantes distintos son nudos diferentes. Algunos ejemplos de nudos son:

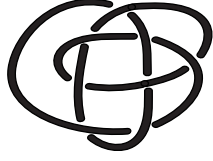


Figura 1.1: Nudo de 8 cruces



Figura 1.2: Nudo trebol y su reflejado

Mas formalmente se tiene:

Definición 11. Un **nudo** es un subconjunto K del espacio $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1 .

El nudo mas sencillo corresponde a la circunferencia S^1 . Este nudo es llamado **nudo trivial** y corresponde a tomar una cuerda y solo unir sus extremos sin anudado alguno. Como un nudo es una curva cerrada simple se puede orientar. Si se orienta se dice que es un nudo orientado.

Definición 12. Un **link** es una unión disjunta de nudos es decir, existe

$$f : \bigsqcup_{k=1}^n S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

continua e inyectiva, donde n es el número de componentes del link.

Al conjunto de todos los link se denotará $\mathcal{L}$. Si cada componente del link esta orientado hablamos de link orientado.

Definición 13. Diremos que dos links L_1 y L_2 son isotópicos, si existe un funcion continua $f : I \times L_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $I = [0, 1]$ tal que $f(L_1) = L_2$. Donde para cada $t \in [0, 1]$, $f_t = f|_{\{t\} \times \mathbb{R}^3}$ es inyectiva y continua. Se denotará por $L_1 \approx L_2$.

Definición 14. Dos links L_1 y L_2 son equivalentes si existe una isotopía entre ellos.

La relación de isotopia de links, la cual denotamos por $\approx$, es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{L}$, ver [12].

Ejemplo 2.

Figura 1.3: Nudos Isotópicos

El problema global para la teoría de nudos es el decidir si dos nudos son equivalente o no, o bien determinar un conjunto de representantes del conjuntos de links $\mathcal{L}/\approx$, es decir, dados L_1 y $L_2 \in \mathcal{L}$ ver si $L_1 \approx L_2$. Una invariante de nudo es una función $I : \mathcal{L} \longrightarrow OBJ$ tal que si $L_1 \approx L_2$ entonces $I(L_1) = I(L_2)$, luego si $I(L_1) \neq I(L_2)$ entonces L_1 no es isotópico a L_2 , donde OBJ es un conjunto conocido de elementos comparables.

Ejemplo 3. *Tipos de invariantes:*

1. *Consideramos la geometría del complemento para definir el grupo de un link L , $G(L)$, como el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L)$, tal que $L_1 \approx L_2$ entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L_1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - L_2)$*
2. *3-coloración*
3. *Polinomio de Alexander*
4. *Polinomio de Jones.*

Para tener un manejo adecuado del nudo (link) sin perder sus propiedades se realiza una proyección planar es decir, se baja una dimensión el nudo.

Definición 15. (Diagrama de un nudo) *Dado un nudo $K \subset \mathbb{R}^3$, un diagrama de K , la cual denotaremos por $D_K \subset \mathbb{R}^2$ se construye del siguiente modo:*

1. *Se proyecta K en un plano de modo tal que dicha proyección solo tenga cruces singulares (simples) es decir, de la forma:*



Figura 1.4

2. Vemos la información del tipo de cruces, donde cada cruce se codifica dependiendo de si se origina en un cruce superior o inferior del link, por una de las dos codificaciones cruzadas a continuación:

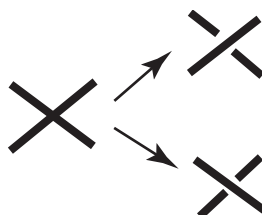


Figura 1.5

Así, obtenemos una proyección genérica del nudo K con las configuraciones respectivas.

Definición 16. Los siguientes movimientos descritos, son llamados movimientos de Reidemeister:

R_1 : mov. uno



R_2 : mov. dos



R_3 : *mov. tres*



Definición 17. Un link orientado es obtenido de orientar cada componente de modo que en cada cruce ocurre:



Figura 1.6: Tipo de cruce

Observación 2. Para links (o diagrama de links) orientados, tenemos el concepto de movimientos de Reidemeister para links orientados.

Definición 18. Dos links orientados (o diagrama de link) se dicen R -isotópicos, si y solo si, uno de ellos puede obtenerse a partir de otro mediante una sucesión finitas de movimientos R_1, R_2, R_3 (orientados)

Luego, tenemos el siguiente teorema

Teorema 3. (Reidemeister, 1931) $K_1 \approx K_2$, si y solo si, D_{K_1} y D_{K_2} son equivalentes mediante los movimientos de Reidemeister.

Así, el teorema 3 nos permite abordar la construcción de una invariante de link a partir del conjunto de diagrama de link con la relación de R -equivalencia por una función $I : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \longrightarrow \{\text{Conjunto conocido}\}$, tal que si D_1 es R -isotópico con D_2 entonces $I(D_1) = I(D_2)$, donde $\mathcal{D}$ es el conjunto de diagramas de link.

Por lo tanto, una forma de obtener invariantes es hacer funciones así que sean invariante bajo los movimientos de Reidemeister.

1.3. Polinomio de Bracket

Con la idea que nos brinda el teorema 3 encontraremos una invariante de nudos a partir del polinomio de Bracket de tres variables A, B y z , para esto debemos establecer algunos cambios en las variables mencionadas de tal modo que el polinomio de Bracket sea invariante bajo los movimientos de Reidemeister y así definir el polinomio de Kauffman de una variable.

Definición 19. Sea A y B dos variables conmutativas y D un diagrama de un link L . Asociaremos un polinomio a este diagrama D .

1. Consideremos un cruce en D , nos fijamos en la línea continua del cruce y rotamos en sentido anti-horario:

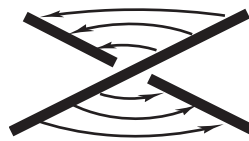


Figura 1.7

2. Se etiqueta las regiones con variables A y B como sigue:

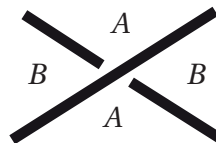


Figura 1.8

3. Luego, hacemos la siguiente descomposición:

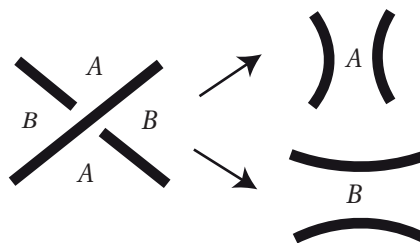


Figura 1.9

Al aplicar este procedimiento a todos los cruces del diagrama D se obtienen 2^n diagramas con marcas A y B . Veamos las siguientes definiciones que nos permitirán encontrar el polinomio.

Definición 20. Sea K un nudo

1. Los links finales con sus marcas A y B se llaman los estados de D_K . Denotaremos por $Est(K)$ al conjunto de todos los estados con sus marcas.
2. Sea $\sigma \in Est(K)$. Denotaremos por $\langle K, \sigma \rangle$ como el producto de las marcas que aparecen en σ .

Para continuar, se considerará el anillo de polinomio $\mathbb{Z}[A, B, z]$ donde las variables A, B y z son variables conmutativas e independientes.

Definición 21. Dado L un link, definimos el polinomio de bracket como sigue:

$$\langle L \rangle(A, B, z) = \sum_{\sigma \in Est(K)} z^{\|\sigma\|} \langle L, \sigma \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, z],$$

donde $\|\sigma\| = \text{número de componentes de } \sigma - 1$ y z una variable que depende de A y B .

Este polinomio se llama polinomio de Bracket de L . El polinomio de Bracket del nudo trivial es igual a 1.

Luego, tenemos la función

$$\langle \rangle : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}[A, B, z]$$

$$K \longmapsto \langle K \rangle$$

Consideremos las siguientes condiciones sobre las variables A, B y z :

$$\begin{array}{ll} A^2 + B^2 + ABz = 0 & \text{ssi } z = -(A^2 + A^{-2}) \\ AB = 1 & \text{ssi } B = A^{-1} \end{array}$$

Así, bajo estas condiciones el polinomio de Bracket $\langle \rangle$ define una invariante de isotopía regular es decir, que respeta los movimientos R_2 y R_3 .

Dicha invariante se puede utilizar para construir una invariante de isotopía ambiente. Para ello necesitamos el siguiente concepto.

Definición 22. *Dado un link orientado. El writhe de un link es la suma de los valores de los cruces es decir,*

$$w(K) = \sum_{p \text{ cruce de } K} \varepsilon_p$$

donde, $\varepsilon_p \in \{1, -1\}$

El siguiente lema de Kauffman nos brinda una receta para obtener un invariante polinomial de nudos, esta invariante es conocida como polinomio de Kauffman.

Lema 1. (Kauffman)

Sea R un anillo, $a \in R$ invertible. Sea f una invariante de isotopía regular de link no orientados a valores en R tal que.

$$f(\text{positive crossing}) = a f(\text{negative crossing}) \quad y \quad f(\text{negative crossing}) = a^{-1} f(\text{positive crossing})$$

Entonces la función F , $F(L) := a^{-w(D)} f(|D|)$ es una invariante para links orientados, donde D es un diagrama de link orientado y $|D|$ un diagrama de link no orientado.

Demostración. Ver el desarrollo de la prueba en [15]. □

Se vio que el polinomio de Bracket es una invariante de isotopía regular es decir, esta caracterizada por el siguiente teorema.

Teorema 4. *Existe una función*

$$\langle \rangle : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

$$D \longmapsto \langle D \rangle$$

Definida unicamente por los siguientes axiomas:

(1) *El bracket del nudo trivial es 1*

$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$

(2) *Braket de un diagrama unión nudo trivial*

$$\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$$

Figura 1.10

(3) *Relación bracket*

$$\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{cup} \rangle \langle \text{cap} \rangle + A^{-1} \langle \text{cup-cap} \rangle$$

Figura 1.11

Ahora considerando el lema de Kauffman para link orientados, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 5. *Sea D un diagrama (orientado) de un link L . Entonces*

$$F(L) := (-A^3)^{-w(D_L)} \langle |D| \rangle$$

*es un invariante de link orientado llamado **polinomio de Kauffman**. Donde $|D|$ es un diagrama de link no orientado.*

Esta invariante será utilizada en el próximo capítulo para definir una traza sobre cierta álgebra llamada *BMW álgebra*.

1.4. Grupo de Trenzas de Artin

En esta sección se presenta el grupo de trenzas, concepto el cual fue introducido por Emil Artin en 1925.

La estructura del grupo de trenzas es de gran utilidad en la construcción de invariantes de nudos y link. Las definiciones estarán formuladas en términos de presentación de grupo por generadores y relaciones.

Es sabido que el grupo simétrico S_n admite la siguiente presentación:

- (i) $s_i^2 = 1$
- (ii) $s_i s_j = s_j s_i$ con $|i - j| > 1$
- (iii) $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$ con $|i - j| = 1$.

Para cada relación los índices son elegidos para $1 \leq i, j \leq n - 1$.

Definición 23. Para $1 \leq i \leq n$ fijamos $P_i := (i, 0, 0)$ y $Q_i := (i, 0, 1)$ puntos en $\mathbb{R}^3$.

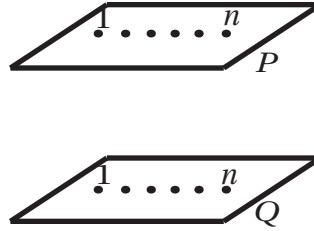


Figura 1.12: Planos P y Q paralelos

Una n -trenza (o simplemente trenza) son n -cuerdas o n -caminos $d_1, d_2, \dots, d_n$ que parten en P_i y terminan en $Q_{\theta(i)}$, donde $\theta \in S_n$ tal que

1. Todo plano paralelo a los planos iniciales corta cada cuerda de la n -trenza en un solo punto.
2. Para todo $t \in [0, 1]$, las cuerdas $d_1, d_2, \dots, d_n$ intersectan a todo plano paralelo a los iniciales en n puntos distintos.

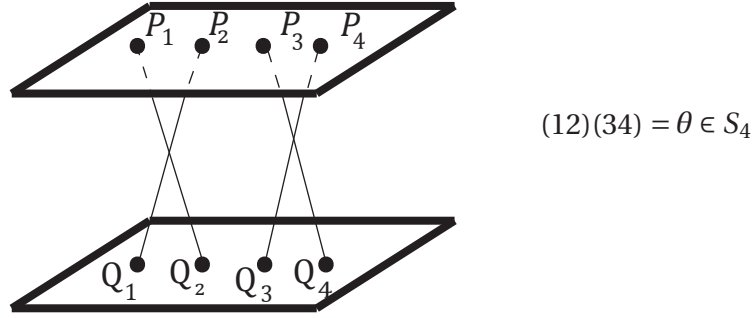


Figura 1.13

Definición 24. Dos trenzas α y β son isotópicas si existe una función continua $f : \alpha \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ tal que para cada $t \in [0, 1]$, la función $f_t : \alpha \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ dada por $f_t(x) = f(x, t)$ con $x \in \alpha$, es una inclusión cuya imagen es una n -trenza, donde $f_0 = id_\alpha$ y $f_1(\alpha) = \beta$. La función f y la familia de homeomorfismo $\{f_t(\alpha)\}_{t \in [0, 1]}$ son llamadas isotopía de α en β . Se denotará por $\alpha \sim \beta$.

Diremos que dos trenzas son equivalentes si una de ellas se obtiene a partir de la otra mediante una isotopía. Además, denotaremos por B_n al conjunto de las n -trenzas. Como en links trabajaremos con proyecciones genéricas de la trenza que solo admite cruces singulares en la proyección y luego se etiqueta cada cruce.

Proposición 5. La relación de isotopía de n -trenzas, la cual denotamos por $\sim$ define una relación de equivalencia.

Demostración. Ver en [4] □

Definición 25. Dados dos trenzas α y $\beta \in B_n$. Denotaremos por $\alpha\beta$ a la trenza que se obtiene identificando los puntos finales de α con los puntos iniciales de β .

Ejemplo 4.



Figura 1.14: Producto de dos 4-trenzas

luego, tenemos el siguiente lema que nos permite definir una operación binaria en $B_n / \sim$, dada por la multiplicación de clases $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$.

Lema 2. $\alpha \sim \beta$ y $\alpha' \sim \beta'$ entonces $\alpha\alpha' \sim \beta\beta'$

Notación: Sin perjudicar escribiremos sólo B_n en vez de $B_n / \sim$

Teorema 6. B_n con la operación recién descrita define un grupo y se llama grupo de n -trenzas.

Definición 26. Para cada número natural n el grupo de trenzas de Artin se define por la siguiente presentación:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}; \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ con } |i-j| > 1, \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ con } |i-j| = 1 \right\rangle$$

Las relaciones de la presentación son denominadas relaciones de trenzas.

Del lema 1.2 en [12] tenemos la siguiente observación:

Observación 3. Para $n \geq 1$ existe un homomorfismo $\phi : B_n \longrightarrow S_n$ sobreyectivo tal que $\phi(\sigma_i) = s_i = (i, i+1)$ es la permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ que intercambia i con $i+1$ y al resto de los elementos los deja fijo, estas permutaciones se conocen como transposiciones simples.

Ahora notemos lo siguiente, dado $\sigma \in B_n$, podemos asociar un nudo (link) simplemente identificando puntos finales con puntos iniciales de la trenza esta operación se le llama operación clausura y se denota por $\hat{}$.

Ejemplo 5.

Figura 1.15: Clausura de una 4-trenza

J. Alexander enunció y probó el siguiente teorema en 1923:

Teorema 7. (Alexander) *Todo link orientado L es isotópico a L_β para algún (no único) elemento $\beta \in B_\infty$ tal que $L_\beta = \hat{\beta} =$ clausura de la trenza β . Donde $B_\infty = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$.*

Demostración. Ver detalle en [2]. □

Luego podemos definir la función, $\hat{\cdot}: B_\infty \rightarrow \mathcal{L}$, tal que $b \rightsquigarrow \hat{b}$. Tenemos que $\hat{\cdot}$ es epiyectiva por el resultado anterior. Sin embargo, dado un link L podemos encontrar dos trenzas distintas tal que $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = L$. Mas aún se tiene lo siguiente:

Definición 27. *En B_∞ definimos las siguientes operaciones llamados movimientos de Markov.*

$$M_1: \alpha\beta \longleftrightarrow \beta\alpha, \text{ con } \alpha, \beta \in B_n$$

$$M_2: \alpha \longleftrightarrow \alpha\sigma_n^{\pm 1} \text{ con } \alpha \in B_n \text{ y } B_n \longleftrightarrow B_{n+1}.$$

La equivalencia de Markov juega un papel crucial en la relación trenzas - Links.

Así, los movimientos de Markov determina la clase de equivalencia de todos los elementos $\beta \in B_n$ que se clausuran para determinar un tipo de link dado. Por lo que el problema de clasificar los tipos de Link es equivalente al problema de clasificar las clases de Markov $[\beta] \in B_\infty$.

Teorema 8. (Markov, 1936) $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ si y solo si, α puede ser obtenido de β usando los movimiento de Markov ($\sim_M$).

Gracias a este resultado podemos establecer la siguiente biyección $B_\infty / \sim_M \longleftrightarrow \mathcal{L}$. Por lo tanto, encontrar una invariante de link se reduce a encontrar una función

$$I : B_\infty \longrightarrow \{\text{Conj. de elementos comparables}\}$$

Tal que:

$$\begin{aligned} I(\alpha\beta) &= I(\beta\alpha) \\ I(\alpha\sigma_n) &= I(\alpha\sigma_n^{-1}) = I(\alpha). \end{aligned}$$

Para todo $\alpha, \beta \in B_n$.

1.5. Método de Jones

En [9] Vaughan Jones construye una nueva invariante polinomial de nudos y links, el Polinomio de Jones, la cual generaliza el polinomio clásico de Alexander. Se observó que este nuevo polinomio detectaba propiedades de links que la invariante de Alexander no podía identificar. Jones consigue esto usando una traza de Markov en el álgebra de Temperley-Lieb lo que luego, construye usando su método el polinomio de HOMFLY-PT sobre el álgebra de Hecke.

Existen otras invariantes polinomiales no contruidas mediante el método de Jones como lo es el Polinomio de Kauffman que se construye usando relaciones skein y técnicas de combinatoria. Este polinomio generaliza el polinomio de Jones como también lo hace el polinomio de HOMFLY-PT, sin embargo estos no son equivalentes. En particular, el álgebra de nudos que estudiaremos será la de Birman-Murakami-Wenzl asociado al polinomio de Kauffman de dos variables.

1.5.1. Álgebra de Hecke

Definición 28. Sea u una indeterminada en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}(u)$ el cuerpo de las funciones racionales. Para cada número natural n el Álgebra de Hecke, denotada por $H_n(u)$ o simplemente H_n , es definida como la $\mathbb{C}(u)$ -álgebra presentada por generadores $1, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ y

relaciones:

$$\begin{aligned} h_i h_j &= h_j h_i && \text{con } |i - j| > 1 \\ h_i h_j h_i &= h_j h_i h_j && \text{con } |i - j| = 1 \\ h_i^2 &= u + (u + 1)h_i && \text{para todo } i. \end{aligned}$$

Observación 4. Los elementos h'_i s son invertibles, de hecho tenemos que:

$$h_i^{-1} = (u^{-1} - 1) + u^{-1}h_i.$$

Veamos el siguiente resultado:

Lema 3. Cada palabra en H_n puede ser escrita como combinacion lineal de palabras en $1, h_1, \dots, h_{n-1}$ con a lo más una aparición del último nivel. Como consecuencia H_n es de dimensión finita.

Demostración. Ver prueba en [11]. □

Teorema 9. El conjunto C_n es una base lineal de H_n . Luego, la $\dim_{\mathbb{C}} H_n(u) = n!$.

Demostración. Ver en [11]. □

Formulemos la función traza de Markov sobre el álgebra de Hecke, para así después poder aplicar receta de Jones. Desde ahora en adelante z denota una variable que conmuta con u .

Teorema 10. Sea z una indeterminada en $\mathbb{C}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una única familia de funciones $\mathbb{C}$ -lineales $\tau = \{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $\tau_n : H_n(u) \longrightarrow \mathbb{C}(u, z)$, es definida para todo $x, y \in H_n(u)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_n(1) &= 1 \\ \tau_n(xy) &= \tau_n(yx) \\ \tau_{n+1}(xh_n y) &= z\tau_n(xy). \end{aligned}$$

Demostración. Ver prueba en [11]. □

Así, tenemos la representación natural π de B_n en H_n , definido por σ_i en h_i , sin embargo debemos coonsiderar una representación un poco mas general, por lo cual debemos hacer un re-escalamiento y normalizar el homomorfismo π , para obener un invariante polinomial de links.

Se denotara por π_θ al nuevo homomorfismo definido por $\pi_\theta(\sigma_i) = \theta h_i$, donde $\theta \in \mathbb{C}$ es el nuevo parametro de re-escalamiento. Ahora, componiendo π_θ con la traza de Markov tenemos el siguiente diagrama:

$$\tau_n \circ \pi_\theta : B_n \xrightarrow{\pi_\theta} H_n(u) \xrightarrow{\tau_n} \mathbb{C}(u, z)$$

Esta familia de composiciones producen una única función $X_\theta : B_\infty \longrightarrow \mathbb{C}(z)$, que de acuerdo a la idea que se desprende del teorema 8 de Markov la función X_θ debe satisfacer los movimientos M_1 y M_2 de Markov para poder definir una invariante de isotopía ambiente de links. En efecto, X_θ respeta M_1 , esto se desprende de la propiedad de la función traza. Para ver si respeta M_2 , en particular la función $\tau_n \circ \pi_\theta$ debe satisfacer:

$$(\tau_n \circ \pi_\theta)(\sigma_n) = (\tau_n \circ \pi_\theta)(\sigma_n^{-1}) \quad \forall n$$

Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\tau_n \circ \pi_\theta)(\sigma_n) &= (\tau_n \circ \pi_\theta)(\sigma_n^{-1}) \\ \theta \tau_n(h_n) &= \theta^{-1} \tau_n(h_n^{-1}) \end{aligned}$$

De esto derivamos $\theta z = \theta^{-1}((u^{-1} - 1) + u^{-1}z)$, tal que el factor θ satisface:

$$\lambda := \theta^2 = \frac{u^{-1} - 1 + u^{-1}z}{z} = \frac{1 - u + z}{uz}$$

o equivalentemente

$$z = -\frac{1 - u}{1 - \lambda u}$$

Así, luego de normalizar el parametro $\theta = \sqrt{\lambda}$ podemos extender la definición $\tau_n \circ \pi_{\sqrt{\lambda}}$ a un cuerpo mas grande, dado por $\mathbb{C}(z, \sqrt{\lambda})$ que satisface los movimientos M_1 y M_2 . Asimismo, debemos procurar que la composición evaluada en el nudo trivial sea igual a 1 para todo n y para cualquier $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ cuya clausura sea isotópica a

S^1 . De esta manera tenemos:

$$(\tau_n \circ \pi_{\sqrt{\lambda}})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) = (\theta z)^{n-1} = (\sqrt{\lambda} z)^{n-1}$$

Entonces, necesitamos normalizar $\tau_n \circ \pi_{\sqrt{\lambda}}$ por $(\sqrt{\lambda} z)^{n-1}$

Teorema 11. *Sea L un link orientado obtenido como la clausura de una trenza $\sigma \in B_n$. Definimos $X : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}(z, \sqrt{\lambda})$, por*

$$X(L) := \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda} z} \right)^{n-1} (\tau_n \circ \pi_{\sqrt{\lambda}})(\sigma).$$

Entonces, X es un invariante de isotopía ambiente para links orientado.

Por último. Primero observemos que al usar z tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda} z} = -\frac{1 - \lambda u}{(1 - u)\sqrt{\lambda}}$$

Segundo, para $\sigma = \sigma_{i_1}^{m_1} \cdots \sigma_{i_r}^{m_r}$, donde los σ_{i_j}' son trenza generadores de B_n , definimos el exponente $e(\sigma)$ como la suma $m_1 + \cdots + m_r$. Y tercero considerando que para todo $\sigma \in B_n$ tenemos, $\pi_{\sqrt{\lambda}}(\sigma) = \sqrt{\lambda}^{e(\sigma)} \pi(\sigma)$.

Por lo tanto, el polinomio de HOMFLY-PT se puede escribir de la siguiente manera:

$$X(L) := \left(-\frac{1 - \lambda u}{(1 - u)\sqrt{\lambda}} \right)^{n-1} \sqrt{\lambda}^{e(\sigma)} (\tau_n \circ \pi_{\sqrt{\lambda}})(\sigma)$$

donde $L = \widehat{\sigma}$ y $\sigma \in B_n$.

Observación 5. *El polinomio HOMFLY-PT tiene una definición por relaciones de skein.*

1.6. Polinomio de Kauffman de 2-variables

Para poder describir la invariante polinomial de dos variables de Kauffman debemos introducir el conjuntos de tangles, además la generalización del Bracket que viene dado por un polinomio de Laurent de dos variables denotada por Λ . Este polinomio se contruye mediante reglas de skein.

Definición 29. *Un (m, n) -tangle es un diagrama no orientado, que admite arcos y curvas cerradas, de modo que los puntos iniciales de los arcos corresponden a m puntos en*

la parte superior del rectángulo y n en la parte inferior del rectángulo.

Ejemplo 6.



Figura 1.16: (4,2)-tangle

En lo que sigue sólo consideraremos los (n, n) -tangles y denotaremos por $\mathcal{U}_n^n$ al conjunto de todos los (n, n) -tangles.

El conjunto $\mathcal{U}_n^n$ admite una multiplicación asociativa que consiste en colocar cada diagrama bajo el anterior, de manera análoga a la multiplicación de diagrama de trenzas.

Consideremos los siguientes diagramas de tangles:

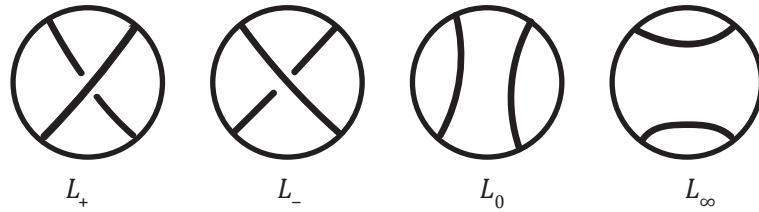


Figura 1.17

Donde L_+, L_-, L_0 y L_∞ son 4 tangles idénticos excepto en un disco pequeño donde difieren en un cruce de manera indicada como se muestra en la figura anterior.

Los siguientes diagramas son generadores del conjunto $\mathcal{U}_n^n$.

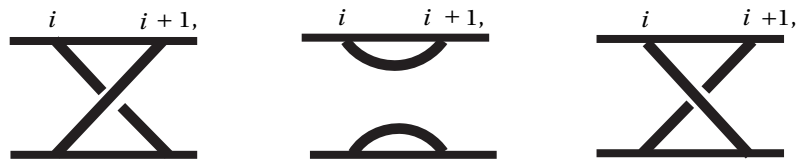


Figura 1.18

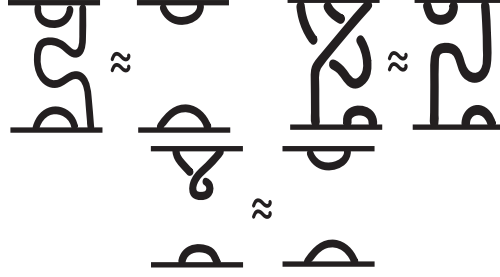
Ejemplo 7.

Figura 1.19

A continuación definimos la existencia de un invariante polinomial de dos variables que respeta los movimientos R_2 y R_3 de Reidemeister sobre el conjunto $\mathcal{U}_n^n$.

Teorema 12. *Existe una única función:*

$$\Lambda : \mathcal{U}_n^n \longrightarrow \mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$$

$$D \longmapsto \Lambda(D)$$

Definida por los siguientes axiomas:

- (i) $\Lambda(U) = 1$, donde U es el nudo trivial S^1 .
- (ii) Λ es un invariante de isotopía regular es decir, respeta R_2 y R_3 de los movimientos de Reidemeister.
- (iii) Lo siguiente ocurre

$$\Lambda(\text{diagrama con un cruce}) = l \Lambda(\text{diagrama sin cruce}) \quad \text{y} \quad \Lambda(\text{diagrama con un cruce}) = l^{-1} \Lambda(\text{diagrama sin cruce})$$

- (iv) Si D_+ , D_- , D_0 y D_∞ , son cuatro diagramas no orientados idénticos excepto en un cruce que difieren de manera indicada como se muestra en la siguiente figura.



Entonces,

$$\Lambda(D_+) + \Lambda(D_-) = m(\Lambda(D_0) + \Lambda(D_\infty))$$

Ahora, podemos considerar el polinomio de Kauffman $F(L)$ sobre el conjunto de diagramas de links orientados $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ y tener la siguiente definición.

Definición 30. *El polinomio de dos variables de Kauffman es la función*

$$F : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$$

Definida por

$$F_L(l, m) = l^{-w(D)} \Lambda(|D|)$$

Donde D es un diagrama de link no orientado, $w(D)$ es el writhe de D y Λ la invariante de isotopía regular.

Ejemplo 8. *Calculemos el polinomio de Kauffman de dos variables del nudo $5_2 = D_+$ de [13]. Entonces,*

$$\Lambda(\mathcal{C}) + \Lambda(\mathcal{C}) = m(\Lambda(\mathcal{C}) + \Lambda(\mathcal{C}))$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{C}) &= m(\Lambda(\mathcal{C}) + \Lambda(\mathcal{C})) - \Lambda(\mathcal{C}) \\ \tau &= m(\delta + l \Lambda(\mathcal{C})) - l^{-3} ; \lambda := \Lambda(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

Ver en [13] polinomio de λ , luego reemplazamos en la igualdad anterior y se obtiene lo siguiente:

$$\tau = m(\delta + l(m^2(l^{-2} + l^{-4}) + m(l^{-3} + l^{-5}) - 2l^{-2} - l^{-4})) - l^{-3}.$$

Ahora calculemos δ ,

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathcal{C}) + \Lambda(\mathcal{D}) &= m(\Lambda(\mathcal{C}) + \Lambda(\mathcal{D})) \\ \Lambda(\mathcal{C}) &= m(\Lambda(\mathcal{C}) + \Lambda(\mathcal{D})) - \Lambda(\mathcal{D})\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\delta = m(l^{-3} + \lambda) - \Lambda(\mathcal{C}) ; \quad \alpha := \Lambda(\mathcal{C})$$

Ver polinomio de α en [13], entonces

$$\delta = m(l^{-3} + \lambda) - [m(l + l^{-1}) - m^{-1}(l + l^{-1}) + 1]$$

Ahora, reemplazamos δ en el despeje de τ y obtenemos:

$$\begin{aligned}\tau &= m[m(l^{-3} + \lambda) - (m(l + l^{-1}) - m^{-1}(l + l^{-1}) + \lambda)] + l[m^2(l^{-2} + l^{-4} + m(l^{-3} \\ &\quad + l^{-5}) - 2l^{-2} - l^{-4})] - l^{-3}\end{aligned}$$

Por último, calculamos el polinomio $F_{5_2}(l, m)$:

$$F_{5_2}(l, m) = l^5 \cdot \tau$$

Capítulo 2

Álgebra de Birman-Murakami-Wenzl

El álgebra de Birman-Murakami-Wenzl fue introducida en 1989 por Birman y Wenzl en [5] y por J.Murakami [16] en 1987. Damos la definición original de esta álgebra mediante generadores y relaciones para luego establecer la presentación final reducida del álgebra BMW_n . Adicionalmente probamos que su dimensión es finita y que admite una única función traza de Markov que es definida en función del polinomio de Kauffman de dos variables.

Definición 31. Sean l y m parametros en $\mathbb{C}(l, m)$. Para cada $n \geq 2$ definimos BMW_n como el álgebra con generadores $1, G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$ y $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ y las siguientes relaciones:

- (1) $G_i G_j = G_j G_i$ con $|i - j| > 1$
- (2) $G_i G_j G_i = G_j G_i G_j$ con $|i - j| = 1$
- (3) $G_i - G_i^{-1} = m(1 - E_i)$ (relación de Kauffman)
- (4) $E_i E_{i\pm 1} E_i = E_i$,
- (5) $G_{i\pm 1} G_i E_{i\pm 1} = E_i G_{i\pm 1} G_i = E_i E_{i\pm 1}$
- (6) $G_{i\pm 1} E_i G_{i\pm 1} = G_i^{-1} E_{i\pm 1} G_i^{-1}$
- (7) $G_{i\pm 1} E_i E_{i\pm 1} = G_i^{-1} E_{i\pm 1}$
- (8) $E_{i\pm 1} E_i G_{i\pm 1} = E_{i\pm 1} G_i^{-1}$

$$(9) E_i G_i = G_i E_i = l^{-1}$$

$$(10) E_i G_{i\pm 1} E_i = l E_i.$$

Para cada relación los índices son elegidos de $1 \leq i, j \leq n-1$.

Para obtener una presentación reducida del álgebra BMW_n necesitamos dos proposición elementales que muestran varias relaciones utiles, los cuales además nos ayudaran a demostrar que nuestra álgebra es de dimensión finita.

Proposición 6. Para cada índice $i \in \{1, \dots, n-1\}$ los elementos G'_i s son invertibles y satisface las siguientes relaciones:

$$(a) E_i G_i = l^{-1} E_i$$

$$(b) G_i^{-1} = G_i + m - m E_i$$

$$(c) G_i^2 = 1 - m G_i + m l^{-1} E_i$$

$$(d) E_i^2 = x E_i.$$

Demostración. Notemos que (c) implica (b). En efecto;

$$m E_i = l(G_i^2 + m G_i - 1)$$

$$l G_i^2 = m E_i - m l G_i + l$$

$$G_i^2 = 1 - m G_i + m l^{-1} E_i$$

$$1 = G_i^2 + m G_i - m E_i G_i$$

$$1 = G_i(G_i + m - m E_i)$$

luego, tenemos probado que (b) se satisface.

Para probar (c) usamos la relacion (3) multiplicado por G_i y mediante un despeje obtenemos que el elemento generador G_i^2 puede reescribirse como $1 - m G_i + m l^{-1} E_i = G_i^2$.

Ahora veamos la relacion (d), a partir de (3) tenemos que $E_i = m^{-1} l(G_i^2 + m G_i - 1)$ para todo i . Entonces

$$\begin{aligned}
E_i^2 &= E_i m^{-1} l (G_i^2 + m G_i - 1) = m^{-1} l (E_i G_i^2 + m E_i G_i - E_i) \\
&= m^{-1} l (l^{-1} E_i G_i + m l^{-1} E_i - E_i) \\
&= m^{-1} l (l^{-2} E_i + m l^{-1} E_i - E_i) \\
&= m^{-1} l^{-1} E_i + E_i - m^{-1} l E_i \\
&= (m^{-1} l^{-1} + 1 - m^{-1} l) E_i \\
&= (m^{-1} (l^{-1} - l) + 1) E_i \\
&= x E_i.
\end{aligned}$$

□

Proposición 7. *Las siguientes relaciones se satisfacen para $|i - j| = 1$.*

$$(a) \quad G_j G_i E_j = E_i G_j G_i = E_i E_j$$

$$(b) \quad G_j E_i G_j = G_i^{-1} E_j G_i^{-1}$$

$$(c) \quad E_j E_i G_j = E_j G_i^{-1}$$

$$(d) \quad G_j E_i E_j = G_i^{-1} E_j$$

$$(e) \quad E_i E_j E_i = E_i$$

Demostración. Se probará la igualdad de (a) usando la relación (3) y de trenza obteniendo así.

$$\begin{aligned}
G_j G_i E_j &= G_j G_i (m^{-1} l (G_j^2 + m G_j - 1)) = m^{-1} l (G_j G_i G_j G_j + m G_j G_i G_j - G_j G_i) \\
&= m^{-1} l (G_i G_j G_i G_j + m G_i G_j G_i - G_j G_i) \\
&= m^{-1} l (G_i G_i G_j G_i + m G_i G_j G_i - G_j G_i) \\
&= m^{-1} l (G_i^2 + m G_i - 1) G_j G_i \\
&= E_i G_j G_i.
\end{aligned}$$

Asumamos por el momento que (d) y (a) por la parte de la derecha se cumplen. Sigamos

Para mostrar que (e) es cierto veamos la identidad (10), osea:

$$\begin{aligned}
 E_i G_j E_i &= l E_i \\
 E_i G_j E_i E_j &= l E_i E_j \\
 E_i G_i^{-1} E_j E_i &= l E_i E_j E_i \\
 E_i G_i^{-1} G_i G_j E_i &= l E_i E_j E_i \\
 E_i G_j E_i &= l E_i E_j E_i \\
 l E_i &= l E_i E_j E_i \\
 E_i &= E_i E_j E_i.
 \end{aligned}$$

Ahora probaremos la segunda igualdad de (a) haciendo el cambio de indice a $G_j G_i E_j$, expandiendo la expresion y utilizando la relacion recien hecha. Tenemos

$$G_i G_j E_i = (G_i G_j E_i) E_j E_i = E_j G_i (G_j E_j) E_i = l^{-1} (E_j G_i E_j) E_i = l^{-1} l E_j E_i = E_j E_i.$$

Finalmente las relaciones (c) y (d) son consecuencia de (e) y (a) respectivamente. En efecto, para (c) y (d) tenemos que:

para(c)	para(d)
$E_j E_i E_j = E_j$	$G_i G_j E_i = E_j G_i G_j$
$E_j E_i E_j G^{-1} = E_j G_i^{-1}$	$G_j E_i E_j = G_i^{-1} E_j G_i G_j E_j$
$E_j E_i G_j G_i G_i^{-1} = E_j G_i^{-1}$	$G_j E_i E_j = G_i^{-1} E_j E_i E_j$
$E_j E_i G_j = E_j G_i^{-1}$	$G_j E_i E_j = G_i^{-1} E_j$

Solo falta probar (b). En efecto se tiene:

$$\begin{aligned}
 G_j E_i E_j &= G_i^{-1} E_j \\
 G_j (E_i E_j) G_i^{-1} &= G_i^{-1} E_j G_i^{-1} \\
 G_j E_i G_j (G_i G_i^{-1}) &= G_i^{-1} E_j G_i^{-1} \\
 G_i E_i G_j &= G_i^{-1} E_j G_i^{-1}.
 \end{aligned}$$

□

Asi, obetenemos la siguiente presentación del álgebra BMW_n .

Definición 32. Sean q y r indeterminadas. El álgebra BMW_n sobre el cuerpo $\mathbb{C}(r, q)$ es el álgebra generado por $1, g_1, e_1, \dots, g_{n-1}e_{n-1}$ con g_i 's invertibles, sujeto a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} g_i g_j g_i &= g_j g_i g_j & |i - j| = 1 \\ g_i g_j &= g_j g_i & |i - j| > 1 \\ e_i g_i &= r^{-1} e_i \\ e_i g_j e_i &= r e_i. \end{aligned}$$

Donde e_i es definida por la ecuación :

$$(q - q^{-1})(1 - e_i) = g_i - g_i^{-1} \quad \forall i.$$

Así mediante un apropiado cambio de variable se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 13. Para $n \geq 2$ el álgebra BMW_n sobre el cuerpo $\mathbb{C}(r, q)$ es el álgebra de Birman-Murakami-Wenzl $BMW_n(l, m)$ donde $l^{\pm 1} = r^{\pm 1}$ y $m = q^{-1} - q$.

Demostración. Ver Teo. 2.7 de [3] □

Así, obtenemos la llamada presentación reducida de BMW_n , la cual tiene generadores $e_1, \dots, e_{n-1}, g_1, \dots, g_{n-1}$ y relaciones:

$$\begin{aligned} g_i g_{i+1} g_i &= g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ g_i g_j &= g_j g_i & |i - j| > 1 \\ g_i e_i &= e_i g_i = l^{-1} e_i \\ e_i g_j e_i &= l e_i \\ g_i - g_i^{-1} &= m(1 - e_i). \end{aligned}$$

Mas aún esta álgebra tiene dimensión finita. En efecto se tiene el siguiente lema:

Lema 4. Cada elemento de $BMW_n(l, m)$ pueden ser escrito como combinación lineal de elementos de la forma $w_1 \gamma w_2$ con $\gamma \in \{g_{n-1}, e_{n-1}, 1\}$ y w_1, w_2 monomios en $1, g_1, e_1, \dots, g_{n-2}, e_{n-2}$.

Demostración. Para demostrar que la $\dim BMW_n(l, m) < \infty$ es suficiente probar que todo monomio $w \in BMW_n$ es combinación lineal de elementos de la forma $w' \gamma w''$.

Procederemos por inducción. Para $n = 2$ se concluye directamente de la presentación del álgebra.

Asumamos que la afirmación es cierta para $k \leq n - 1$. Queremos demostrar que la afirmación se cumple para n . Consideremos un elemento $w \in BMW_n$, entonces $w = w_0\gamma_0w_1\gamma_1, \dots, w_r\gamma_r$ donde cada $\{w_j\}_{j=0}^{j=r} \in BMW_{n-1}$ y cada $\gamma_j \in \{1, e_{n-1}, g_{n-1}\}$.

Ahora aplicamos la hipótesis inductiva sobre el largo de w es decir, sobre r . Para $r = 0$ la hipótesis se cumple, entonces probaremos para $r \geq 1$. Si r es mayor o igual a 1, entonces $w = w_0\gamma_0w_1\gamma_1z$ donde $z = w_2\gamma_2w_3\gamma_3, \dots, w_r\gamma_r$. Como $w_1 \in BMW_{n-1}$, $w_1 = v_0\alpha v_1$, donde $\{v_0, v_1\} \in BMW_{n-2}$ y $\alpha \in \{g_{n-2}, e_{n-2}, 1\}$, luego si reescribimos w reemplazando w_1 nos queda $w = w_0\gamma_0(v_0\alpha v_1)\gamma_1z$ tal que v_0 y v_1 conmutan con γ_0 y γ_1 respectivamente, así $w = (w_0v_0)(\gamma_0\alpha\gamma_1)(v_1z)$.

Solo basta probar que el producto $(\gamma_0\alpha\gamma_1)$ se puede reducir en BMW_n con a lo mas una aparición de g_{n-1} o e_{n-1} para todo $\gamma_0, \gamma_1 \in \{g_{n-1}, e_{n-1}\}$ y $\alpha \in \{1, g_{n-2}, e_{n-2}\}$, si esto se cumple la demostración se termina. Para esto veremos dos casos, cuando $\alpha = 1$ y cuando $\alpha \neq 1$.

Si $\alpha = 1$ se puede reducir trivialmente. Si $\alpha \neq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma_0\alpha\gamma_1 \in \{ & g_{n-1}g_{n-2}g_{n-1}, g_{n-1}g_{n-2}e_{n-1}, g_{n-1}e_{n-2}g_{n-1}, g_{n-1}e_{n-2}e_{n-1}, \\ & e_{n-1}g_{n-2}e_{n-1}, e_{n-1}e_{n-2}g_{n-1}, e_{n-1}e_{n-2}e_{n-1} \} \end{aligned}$$

Usando relaciones de la proposición 7 anterior, podemos reducir cada monomio con a lo mas una aparición de g_{n-1} o e_{n-1} , en efecto

$$\begin{aligned} \gamma_0\alpha\gamma_1 \in \{ & g_{n-2}g_{n-1}g_{n-2}, e_{n-2}g_{n-1}g_{n-2} = e_{n-2}e_{n-1}, g_{n-2}^{-1}e_{n-1}g_{n-2}^{-1}, g_{n-2}^{-1}e_{n-1}, \\ & e_{n-1}e_{n-2}, le_{n-1}, e_{n-1}g_{n-2}^{-1}, e_{n-1} \} \end{aligned}$$

Con esto se termina la prueba. □

Observación 6. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$ el álgebra $BMW_n(l, m)$ puede ser vista como una subálgebra de BMW_{n+1} , así tenemos una cadena inclusiva de álgebras.

$$\mathbb{C} = BMW_0 \hookrightarrow BMW_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow BMW_n \hookrightarrow BMW_{n+1} \hookrightarrow \dots$$

Además, el álgebra BMW_n soporta una traza de Markov. Mas precisamente se tiene.

Teorema 14. *Sea l y m indeterminadas en $\mathbb{C}$. Para cada $BMW_n(l, m)$ con $n \in \mathbb{N}$ existe una única función lineal $tr'_n : BMW_n \longrightarrow \mathbb{C}(l, m)$ tal que para todo $a, b \in BMW_n$ y $n \in \mathbb{N}$ se satisfacen la siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned} tr'_n(ab) &= tr'_n(ba) \\ tr'_n(1) &= 1 \\ tr'_{n+1}(wg_n) &= tr'_{n+1}(we_n) = z tr'_n(w). \end{aligned}$$

Donde $z^{-1} = m^{-1}(l + l^{-1}) - 1$ y $w \in BMW_n$

Demostración. Observemos que la función inclusión $i : B_n \longrightarrow \mathbb{C}[B_n]$ satisface el teorema 1, luego existe un único homomorfismo de álgebra $\phi : \mathbb{C}[B_n] \longrightarrow BMW_n$ que envía σ_i en g_i .

Para algún $w = g_{i_1}^{\epsilon_1} g_{i_2}^{\epsilon_2} \dots g_{i_r}^{\epsilon_r} \in BMW_n$ sea $W = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_r}^{\epsilon_r} \in \phi^{-1}(w)$ y $\widehat{W}$ como el diagrama de un link no orientado determinado por la clausura de la trenza W , tal que para todo n se define tr' como sigue:

$$tr'_n(w) = z^{n-1} F_{\widehat{W}}(l, m)$$

donde F_L es el polinomio de Kauffman de dos variables. Probaremos que la tr' está bien definida independiente de la elección de $W \in \phi^{-1}(w)$, i.e, $tr'(\phi(W)) = tr(w)$. Además los elementos enviados a 0 por tr_n pertenecen al $\ker \phi$. Por lo tanto basta con probar que F_L toma valores 0 sobre el $\ker \phi$.

Para esto primero definamos el conjunto: $\xi_i = m^{-1}(l\sigma_i + l^{-1}\sigma_i^{-1}) - 1 \in \mathbb{C}[B_n]$, tal que $\phi(\xi_i) = e_i$. En efecto

$$\begin{aligned} \phi(\xi_i) &= \phi(m^{-1}(l\sigma_i + l^{-1}\sigma_i^{-1}) - 1) \\ &= m^{-1}l\phi(\sigma_i) + m^{-1}l^{-1}\phi(\sigma_i^{-1}) - \phi(1) \\ &= m^{-1}(l\phi(\sigma_i) + l^{-1}\phi(\sigma_i^{-1})) - 1 \\ \phi(\xi_i) &= e_i. \end{aligned}$$

Lo que implica $\phi(\sigma_i) = l g_i$.

Y segundo sea R_j con $j = 1, \dots, q$ los elementos que generan el $\ker(\phi)$ donde cada R_j es combinación lineal de monomios de $\mathbb{C}[B_n]$.

Observación 7. *Usaremos la notación $\widehat{WR}_j$ como la clausura de la trenza W añadiendo*

por separado a R_j . Así se reduce a probar que $F(\widehat{WR_j}) = 0$.

Sin pérdida de generalidad, consideremos R_1 como:

$$R_1 = l^2 \sigma_1 \xi_1 - \xi_1$$

Reemplazando en R_1 la ecuación ξ_1 , obtenemos

$$\begin{aligned} R_1 &= l^2 [\sigma_1 (m^{-1} (l\sigma_1 + l^{-1} \sigma_1^{-1}) - 1) - [m^{-1} (l\sigma_1 + l^{-1} \sigma_1^{-1}) - 1]] \\ mR_1 &= l^2 [l\sigma_1^2 + l^{-1} - m\sigma_1] - [l\sigma_1 + l^{-1} \sigma_1^{-1} - m] \\ mR_1 &= l[l^2 \sigma_1^2 + 1 - ml\sigma_1] - [l\sigma_1 + l^{-1} \sigma_1^{-1} - m] \end{aligned}$$

Así, de manera equivalente tenemos que:

$$mR_1 = l[l^2 F(\widehat{W}\sigma_1^2) + F(\widehat{W}) - mlF(\widehat{W}\sigma_1)] - [lF(\widehat{W}\sigma_1) + F(\widehat{W}\sigma_1^{-1})mF(\widehat{W})]$$

Luego debemos probar lo siguiente:

$$l[\Lambda(\widehat{W}\sigma_1^2) + \Lambda(\widehat{W}) - m\Lambda(\widehat{W}\sigma_1)] - [\Lambda(\widehat{W}\sigma_1) + \Lambda(\widehat{W}\sigma_1^{-1})m\Lambda(\widehat{W})] = 0$$

lo anterior usando relación skein es igual a:

$$= l[m(\Lambda(\widehat{W}\sigma_1) + \Lambda(\widehat{W})) - m\Lambda(\widehat{W}\sigma_1)] - [m(\Lambda(\widehat{W}) + \Lambda(\widehat{W})) - m\Lambda(\widehat{W})]$$

Si reducimos términos semejantes y usando el axioma (iii) de 12 nos queda:

$$= lm\Lambda(\widehat{W}\sigma_1) - ml\Lambda(\widehat{W}\sigma_1) = 0$$

Ahora si consideramos el link L_∞, L'_∞ , debemos verificar que:

$$l\Lambda(L_\infty) - \Lambda(L'_\infty) = 0$$

Donde L_∞ y L'_∞ son diagramas idénticos excepto en un disco pequeño es decir, como se muestra la siguiente figura:

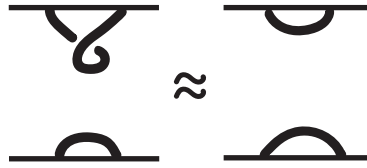


Figura 2.1

Luego por el axioma (iii) del teorema 12 tenemos que $l\Lambda(L_\infty) = \Lambda(L'_\infty)$, lo que prueba R_1 . Las otras relaciones pueden ser chequeada de manera analoga.

Por lo tanto, $\widehat{WR_j}$ es un link igual en todas sus partes excepto en un disco pequeño en que se diferencia entre si, lo mismo ocurre con R_j .

Por lo tanto $F(\widehat{WR_j}) = 0$ lo que implica que $tr'(\widehat{WR_j}) = 0$, entonces $tr'(R_j) = 0$. En consecuencia basta con considerar $tr'(w) = F_L(l, m)$ para que este bien definida. $\square$

Capítulo 3

Isomorfismo entre el álgebra de Birman-Murakami-Wenzl y el álgebra de Tangles de Kauffman

En este capítulo se estudiara en detalle el isomorfismo entre BMW_n y MT_n obtenido por Morton en [1]. Durante todo el desarrollo de este capítulo se considerarán (n, n) -tangles totalmente descendente.

3.1. El homomorfismo φ

Sea $\Omega = \mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$ el anillo del polinomios de Laurent en las variables l y m .

Definición 33. Sea m, l parametros o indeterminadas en $\mathbb{C}$. El álgebra de Tangles de Kauffman, $MT_n(l, m)$, con $n \geq 2$ es generada por $G_1, \dots, G_{n-1}, E_1, \dots, E_{n-1}$ y relaciones:

$$(1) \quad T^+ - T^- = m(T^0 - T^\infty)$$

$$(2) \quad T^{derecho} = l^{-1}T \quad y \quad T^{izquierdo} = lT$$



Figura 3.1

$$(3) T \sqcup \bigcirc = z^{-1} T$$

Donde $T \sqcup \bigcirc$ es un tangle que consiste en la unión de T y una curva cerrada simple que no poseen cruces entre ellos.

Los siguientes diagramas de tangles representan los generadores G_i, E_i y G_i^{-1} respectivamente de esta álgebra.

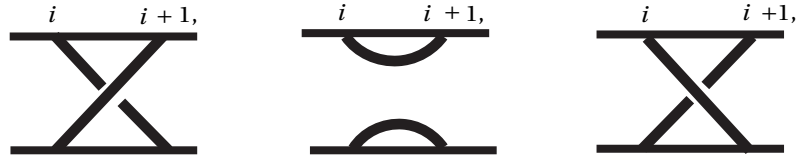


Figura 3.2

Sabemos que el conjunto $\mathcal{U}_n^n$ denota a la familia de diagramas de (n, n) -tangle salvo isotopía regular.

Veamos el siguiente resultado y fijemos $\Omega = \mathbb{Z}$.

Teorema 15. La aplicación $\varphi : BMW_n \longrightarrow MT_n$ determina un homomorfismo de Ω -álgebra definida por $\varphi(g_i) = G_i$ y $\varphi(e_i) = E_i$.

Demostración. Debemos mostrar que los generadores G_i y E_i respetan las relaciones del álgebra BMW_n de la definición 31, para esto usaremos el concepto de isotopía regular y relaciones de tangles.

Para el elemento inverso de G_i tenemos el diagrama con el cruce cambiado, por lo tanto el producto $G_i \cdot G_i^{-1} = 1$, pues por movimiento II de Reidemeister se obtiene el diagrama identidad, como se observa en la siguiente imagen:

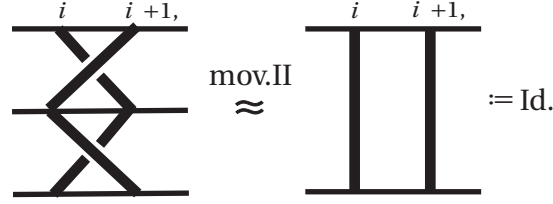


Figura 3.3

Es claro que cada G_i respeta las relaciones de trenzas, en efecto resulta de la aplicación de los movimientos II y III de Reidemeister. También la relación de skein de Kauffman se desprende del axioma (iv) del teorema 12.

Por último, solo nos queda por verificar que se cumple $G_i E_i = E_i G_i = l^{-1} E_i$,

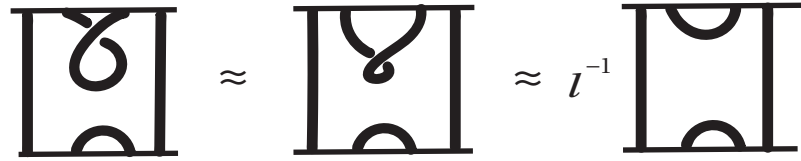


Figura 3.4

□

Queremos probar que MT_n posee una base lineal. Para esto debemos introducir el concepto de conectores de Brauer.

3.1.1. Conectores de Brauer

Sabemos que el diagrama de un (n, n) -tangle consiste en arcos y una número $|T|$ de curvas cerradas. Si cada arco del (n, n) -tangle comienza en algún punto superior y termina en un punto inferior del tangle entonces determina una permutación en S_n . Pero si consideramos un tangle cualquiera es necesario extender la idea de permutación a la de un n -conector.

Definición 34. Un diagrama (n, n) -Brauer (también llamado n -conector) consiste en una familia de $n \in \mathbb{N}$ arcos en el rectángulo $R = I \times I$. De una manera formal, denotemos por P_n como al conjunto formado por todas las particiones de $[2n] = \{1, 2, \dots, 2n\}$, es decir, dada cualquier partición $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ podemos formar un n -conector cuyos arcos son pares disjuntos y su unión es n .

Ejemplo 9. La partición $d = \{[10] = \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 10\}, \{5, 7\}, \{9, 8\}\}$ tiene el siguiente diagrama:

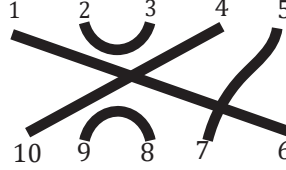


Figura 3.5

Observación 8. Por inducción se puede probar que la cardinalidad de C_n es $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ elementos o bien, como el producto de los primeros n números impares. Ver detalle en [17]. De esta manera se induce una incrustación natural de S_n en C_n .

Definición 35. Sea $\text{conn} : \mathcal{U}_n^n \longrightarrow C_n$ una función tal que $\text{conn}(T_d) = d$, $d \in C_n$

Ejemplo 10.

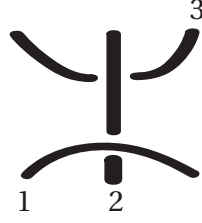


Figura 3.6

3.1.2. Tangles Totalmente Descendentes

En esta sección identificaremos el conjunto de tangles generadores para el álgebra MT_n . Restringiremos nuestra atención a cierto tipo de tangles, llamados totalmente descendentes.

Definición 36. Sea T un (n, n) -tangle, se elije una secuencia de puntos base que consiste en un punto al inicio o final de cada arco de T y también en cada componente. Diremos que T es un tangle totalmente descendente (con respecto a la elección de puntos base) si se logra atravesar todos los arcos de T , comenzando en orden asignado, de tal manera que cada cruce que se encuentre primero es un sobrecruzamiento.


 Figura 3.7: $(3,3)$ -tangle totalmente descendente

Observación 9. (1) Debemos considerar tambien que las cuerdas de un tangle totalmente descendente no posee auto intersecciones. Ver detalle en corolario 5.6 de [6].

(2) Note que para cada n -conector $d \in C_n$ existen $n! \cdot 2^n$ posibles opciones diferentes de tangle.

Lema 5. El álgebra MT_n esta generado por el conjunto de tangles sin curvas cerradas.

Demostración. La prueba se realizará por inducción sobre el número de cruces.

Sea $T \in MT_n$ un tangle y ℓ el número de cruces de T . Si $\ell = 0$ entonces el diagrama del (n, n) -tangle es $\bigcirc^{|T|} = T$ tal que $T = (z^{-1})^k T'$ donde $k = |T|$ y T' es el diagrama de un (n, n) -tangle que se obtiene luego de remover todas las curvas cerradas de T .

Consideremos T con $\ell \geq 1$. Como hipotesis inductiva todos los (n, n) -tangle que poseen menos que ℓ cruces se consideraran sin curvas cerradas.

Si S es un diagrama de tangle que difiere de T sólo invirtiendo uno o más cruces, entonces por la relación de Kauffman de la Definición 33 tenemos lo siguiente:

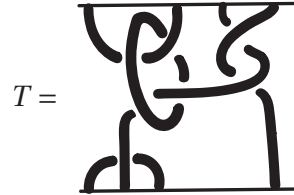
$$\begin{aligned} T - S &= m(T^0 - T^\infty) \\ T &= m(T^0 - T^\infty) + S, \end{aligned}$$

donde T^0 y T^∞ son (n, n) -tangle con menos de ℓ cruces y sin curvas cerradas. Así de manera inductiva aplicamos este procedimiento sobre T .

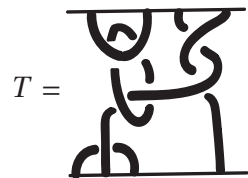
Por último, fijemonos en S supongamos que posee una curva cerrada. Por la relación de tangles de Kauffman podemos hacer que esta curva cerrada tenga sólo cruces por arriba o por debajo con las demás cuerdas de S , entonces $S = (z^{-1})S'$ donde S' poseen menos cruces que T y sin curvas cerradas. Por lo tanto resulta que logramos descomponer T en combinación lineal de tangles con menos cruces que ℓ que no poseen curvas cerradas. $\square$

Veamos el siguiente ejemplo para comprender la importancia de este resultado. Procederemos usando relación de Kauffman:

Ejemplo 11. Sea T un $(4, 4)$ -tangle con el siguiente diagrama



$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} = m \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \right)$$



$$\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \end{array} = m \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \end{array} \right)$$

$$T'' = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \sqcup \bigcirc$$

Luego la descomposición lineal de T en tangles sin curvas cerradas es:

$$T''' = \text{Diagram 3}$$

Figura 3.8

Teorema 16. *El álgebra MT_n es generado por (n, n) -tangles que no poseen curvas cerradas y son totalmente descendentes con respecto a una orientación.*

Demostración. Sabemos gracias al lema anterior que el álgebra MT_n está generada por (n, n) -tangle sin curvas cerradas.

Haremos la prueba por inducción sobre el número de cruces ℓ . Sea $T \in MT_n$, si $\ell = 0$ entonces T ya es un tangle totalmente descendente.

Demostraremos para $\ell > 1$ y, como hipótesis inductiva todos los (n, n) -tangle con menos de ℓ cruces son totalmente descendente con respecto a una orientación sin curvas cerradas.

Ahora si aplicamos la relación (1) de la Definición 33 al primer cruce no-descendente de T con respecto a una orientación arbitraria, entonces resulta que T es combinación lineal de tres tangles de los cuales dos poseen menos cruces que T y otro con menos cruce no-descendente.

Si consideramos S como un (n, n) -tangle que difiere de T en uno o más cruces no-descendente, entonces de manera analoga a la demostración anterior obtenemos la expresión:

$$T - S = m(T^0 - T^\infty)$$

$$T = m(T^0 - T^\infty) + S$$

Así, la inducción muestra que podemos escribir S como una combinación lineal de tangles con cruces totalmente descendente que poseen menos cruces que T . Por lo tanto T es generado por tangles que poseen sólo cruces totalmente descendente. $\square$

Ejemplo 12. Consideremos el siguiente diagrama de un tangle sin curvas cerradas. Se usará relación de Kauffman.

$$\begin{aligned}
 T &= \text{Diagrama de un tangle} \\
 \text{Diagrama 1} - \text{Diagrama 2} &= m \left(\text{Diagrama 3} - \text{Diagrama 4} \right) \\
 T' &= \text{Diagrama de un tangle con cruces numerados 1, 2, 3, 4}
 \end{aligned}$$

Figura 3.9

Teorema 17. Sean S y T diagramas de (n, n) -tangles totalmente descendentes sin curvas cerradas, tal que $\text{conn}(S) = \text{conn}(T)$. Entonces, S y T son ambiente isotópicos, con $S = l^k T$, para algún k .

Demostración. Dirijase a [1] para ver mejor detalle. $\square$

Observación 10. Para cada n -conector d , sea T_d el diagrama de (n, n) -tangle sin curvas cerradas tal que:

- (1) $\text{conn}(T_d) = d$.
- (2) T_d es totalmente descendente con respecto a una orientación

Observación 11. *El número de cruces de un tangle totalmente descendente T_d depende exclusivamente del n -conector d y no de la elección del orden de los arcos de T_d . Sabemos que un tangle con k cruzamientos puede ser escrito como combinación lineal de tangles totalmente descendente con a lo más k cruces, si aplicamos inducción sobre k y empleamos el procedimiento de la demostración del teorema 16, se deduce que T'_d y T_d son tangles totalmente descendente que comparten el mismo conector d , entonces:*

$$T'_d = T_d + \sum_c l_c T_c,$$

donde c es un conector con menos cruces que d .

Definición 37. *El producto tensorial $T_1 \otimes T_2$ de un (k, k) -tangle y un (m, m) -tangle es un diagrama de un $(k + m, k + m)$ -tangle que se obtiene colocando un diagrama al lado del otro.*

Terminemos esta sección demostrando:

Teorema 18. *La función $\varphi : BMW_n \longrightarrow MT_n$ del teorema 15 es sobreyectiva.*

Demostración. Necesitamos probar que cada tangle totalmente descendente T_d es un monomio en los generadores $G_i^{\pm 1}$ y E_i para $1 \leq i \leq n - 1$. Para $n = 0$ y $n = 1$ el teorema es valido trivialmente.

Veamos que para $n \geq 2$ es suficiente probar que cada tangle totalmente descendente T cuya cuerdas no poseen autocruces es la subálgebra generada por E'_i s y G'_i s respectivamente.

Si T posee cuerdas que sólo conectan vertices de la parte superior con vertices de la parte inferior (también llamadas cuerdas monotonas), entonces T es regularmente isotópico a un diagrama de n -trenza que esta representado en el grupo generado por $\{G_i^{\pm 1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Por otro lado, supongamos que se emparejan q puntos en la parte superior y q puntos en la parte inferior del diagrama, de tal manera que los $n - q$ puntos restantes se conectan como k pares, es decir, $2k = n - q$. En este caso existen diagramas b_1 y b_2 de n -trenzas y diagrama de $(n - 2k)$ -trenza b , tal que:

$$T = b_1[(E_1 E_3 \cdots E_{2q-1}) \otimes b] b_2.$$

Ya que b, b_1 y b_2 son diagramas de trenzas generada por $\{G_i^{\pm 1}\}$, se deduce que T es un monomio generado por $\{E_i, G_i^{\pm 1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$. $\square$

3.2. Una base para el álgebra MT_n

En esta sección probaremos que el conjunto generador $\{T_d : d \in C_n\}$ es linealmente independiente, es decir, es base para MT_n .

Teorema 19. *El conjunto de tangle $\{T_c : c \in C_n\}$, forma una Ω -base lineal para MT_n .*

Demostración. Por teorema 17 sabemos que genera a MT_n , luego basta probar que $\{T_c\}$ es linealmente independiente. Usando la teoría expuesta, y por la proposición (2.1) y (2.2) de [1], es que podemos definir una forma bilineal $b : MT_n \times MT_n \rightarrow \Omega$ tal que $b(S, T) = F(\widehat{ST})$. También escribiremos como A a la matriz de orden $|C_n| \times |C_n|$ asociada a b con entradas $a_{cd} = b(T_c, T_d)$ con $c, d \in C_n$.

Supongamos $\sum \alpha_i T_i = 0$, $\alpha_i \in \Omega$. Queremos mostrar que $\alpha_i = 0$ para todo i , esto es equivalente a demostrar que b es una forma no degenerada es decir, $\det(A) \neq 0$. Luego dado $S, T \in MT_n$ tenemos que existen α_i y $\beta_j \in \Omega$ tales que:

$$S = \sum \alpha_i T_i; \quad T = \sum \beta_j T_j$$

de donde se sigue que

$$b(S, T) = b(\sum \alpha_i T_i, \sum \beta_j T_j) = \sum \alpha_i \beta_j b(T_i, T_j) = \sum \alpha_i \beta_j F(\widehat{T_i T_j}).$$

Para cada $c \in C_n$ reemplazamos la c -ésima columna de la matriz A por la combinación lineal de sus columnas con coeficientes α_i , por propiedad de determinantes la nueva matriz tiene determinante $\alpha_c \det(A)$. Para demostrar que $\det(A) \neq 0$ se requiere de la siguiente afirmación.

$\widehat{T_c T_d}$ será representado por un link con r componentes. Si $r = n$, entonces T_d necesariamente es la imagen reflejada verticalmente de c , es decir, cada componente contiene una cuerda de T_c y T_d :

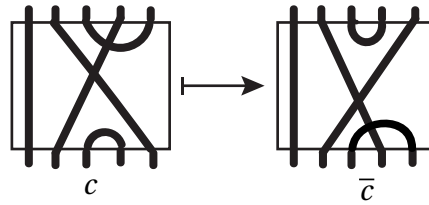


Figura 3.10

Es decir, $r = n$ si y solo si, $d = \bar{c}$.

Si $r < n$, entonces $\widehat{T_c T_d}$ posee al menos dos arcos de T_c y T_d , es decir, cuando clausuramos la multiplicación del tangle S con T y recorremos el link, debemos tomar 2 o más arcos para cerrar la componente.

Ahora, consideremos el siguiente homomorfismo $e : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}[\delta]$ tal que $e(F(K)) = \delta^{|K|}$, donde K es un link y $|K|$ el número de componentes, ahora aplicamos el homomorfismo a todas las entradas de A . Entonces $e(a_{cd}) = \delta^{r-1}$, $r < n$, y $r = n$ si y solo si $d = \bar{c}$. Luego la matriz $e(A)$ tiene entonces una entrada δ^{n-1} en cada fila y columna, así $e(\det(A)) = \det(e(A)) \in \mathbb{Z}[\delta]$ tiene un coeficiente distinto de cero para $\delta^{n(n-1)}$. Por lo tanto, $e(\det(A)) \neq 0$, así $\det(A) \neq 0$, lo que se concluye inmediantamente que $\alpha_i = 0$ para todo i ya que Ω es un dominio de integridad, con esto se termina la prueba. $\square$

Observación 12. Se desprende de la Proposición 4.1 de [1] definir el homomorfismo $e(F(K)) = \delta^{|K|}$ como reemplazo del polinomio de Dubrovnik y de la proposición de Licokorish que se plantea en la sección [VII] de [13] que hace referencia a la conversión entre el polinomio de Dubrovnik $D_L(l, m)$ y el polinomio de Kauffman $F_L(l, m)$ mediante la formula:

$$D_L(l, m) = (-1)^{c(L)+1} i^{-w(L)} F_L(il, -im).$$

donde, $c(L)$ es el número de componentes del link L , $i^2 = -1$ y $w(L)$ es el writhe de L . La formula de traducción es independiente a la elección de orientación de L , ver [14].

A partir del teorema anterior se desprende el siguiente resultado

Corolario 3. Cada conjunto de tangles asociado a conectores distintos forman conjuntos linealmente independiente en MT_n .

Demostración. Ver Corolario 4.4 de [1] $\square$

Probaremos por inducción sobre n que el homomorfismo $\varphi : BMW_n \longrightarrow MT_n$ es un isomorfismo. Para esto construiremos una base explicita para BMW_n . Como parte del método inductivo usaremos los ideales bilateros $BMW_n^{(q)}$ y $MT_n^{(q)}$ el cual corresponde a los tangles de rango $\leq q$.

Definición 38. Un tangle $T \in \mathcal{U}_n^n$ tiene rango $\leq q$, si T se descompone como $T = AB$ con A y B un (n, q) y (q, n) tangle respectivamente.

Observación 13. El $\text{conn}(T)$ tiene a lo más q arcos monotonos sin embargo, esto no es suficiente para que T tenga rango q . Por ejemplo el tangle T en la figura 3.11 tiene rango 2, a pesar de que $\text{conn}(T)$ no tiene arcos monotonos.



Figura 3.11

Definimos $MT_n^{(q)}$ como el subespacio de MT_n generado por tangles de rango $\leq q$. Claramente $MT_n^{(q)}$ es un ideal bilatero tal que

$$MT_n = MT_n^{(n)} \supset MT_n^{(n-2)} \supset \dots$$

Veamos la siguiente proposición importante en la estructura del álgebra de tangles

Proposición 8. $MT_n^{(q)}$ es generado como ideal por elementos $E_1 E_3 \dots E_{2k-1}$ donde $2k = n - q$.

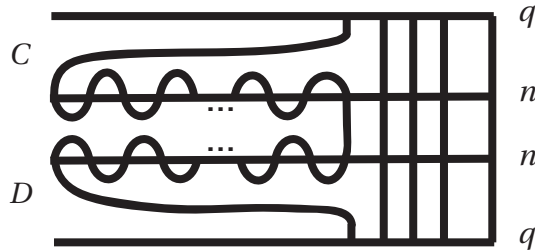
Demostración. Veamos por inducción sobre el rango de T . Si $q = 0$, entonces T pertenece al subespacio de MT_n generado por tangles de rango 0, osea T se descompone como $T = AE_1 B$ donde A es un $(n, 2)$ -tangle y B un $(2, n)$ -tangle.

Ahora queremos probar que para cualquier tangle T de rango q lo podemos escribir como $T = A(E_1 E_3 \dots E_{2k-1})B$ donde A y B son un (n, q) y (q, n) tangle respectivamente.

Para $q > 0$ podemos escribir el tangle identidad en $\mathcal{U}_q^q$ como

$$I = C(E_1 E_3 \dots E_{2k-1})D$$

donde C es un (q, n) -tangle y D un (n, q) -tangle. Ver figura 3.12.


 Figura 3.12: Ideal generado por $E_1 E_3 \dots E_{2k-1}$

Entonces para algún tangle $T = AB$ de rango $\leq q$ se puede reescribir como $T = AIB$ o equivalentemente $T = AC(E_1 E_3 \dots E_{2k-1})DB$, con $AC, DB \in \mathcal{U}_n^n$. Por lo tanto,

logramos expresar T como un elemento del ideal generado por $E_1 E_3 \dots E_{2k-1}$. $\square$

De manera analoga podemos definir en BMW_n

Definición 39. Para $q = n - 2k$ podemos definir $BMW_n^{(q)}$ como el ideal bilatero en BMW_n generado por $e_1 e_3 \dots e_{2k-1}$. Entonces

$$BMW_n = BMW_n^{(n)} \supset BMW_n^{(n-2)} \supset \dots$$

Trenzas de permutación positiva

Sabemos que los generadores g_i^{+1} de BMW_n satisfacen las relaciones de trenzas. Además denotaremos por $\text{perm}: B_n \longrightarrow S_n$ al homomorfismo de grupo tal que $\text{perm}(\beta)(i) = j$, es decir, que la trenza β conecta los vertices o puntos i con el vertice $\bar{j}$, en particular $\text{perm}(\sigma_i) = s_i$.

Proposición 9. Las siguientes condiciones son equivalentes para un elemento $\beta \in B_n$

- (1) β es una trenza generada por elementos σ_i^{+1} .
- (2) β es el producto de r generadores σ_i , donde r es el largo de $\text{perm}(\beta)$.

Además, si β satisface esta condición y $s_{i_1}, \dots, s_{i_r}$ es una expresion reducida para $\text{perm}(\beta)$, entonces $\beta = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_r}$ es una expresion reducida.

Demostración. Ver detalle en proposición 5.14 de [6] $\square$

Definición 40. Si un diagrama de una n -trenza satisface las condiciones de la proposición anterior entonces la llamaremos **trenza de permutación positiva**.

Notemos lo siguiente:

- (1) Para cada $\pi \in S_n$, existe una única trenza de permutación positiva $\beta_\pi \in B_n$ con $\text{perm}(\beta_\pi) = \pi$. Escribiremos g_π para la imagen de β_π en BMW_n y G_π para la imagen de β_π en MT_n , estos elementos tambien lo llamaremos trenza de permutacion positiva determinada por π .
- (2) Sea $\pi \in S_n$ y $1 \leq i < n$, tenemos que $\ell(\pi s_i) = \ell(\pi) + 1$ si y solo si $\pi(i) < \pi(i+1)$, en este caso $g_{\pi s_i} = g_\pi g_i$. De otra manera, $\ell(\pi s_i) = \ell(\pi) - 1$, si y solo si $\pi(i) > \pi(i+1)$, y $g_{\pi s_i} = g_\pi g_i^{-1}$.

De la misma forma, $\ell(s_i\pi) = \ell(\pi) + 1$, si y solo si, $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(i+1)$, en este caso $g_{s_i\pi} = g_i g_\pi$. O también puede ocurrir que $\ell(s_i\pi) = \ell(\pi) - 1$, si y solo si, $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(i+1)$, y $g_{s_i\pi} = g_i^{-1} g_\pi$.

Definición 41. Un (a, b) -permutación de Lorenz es un elemento $\pi \in S_n$ tal que $\pi(i) < \pi(j)$ para $1 \leq i < j \leq a$ y para $a+1 \leq i < j \leq a+b$.

Como caso especial de trenza de permutación positiva, tenemos el concepto de (a, b) -trenza de Lorenz β_π donde $\pi \in S_n$ que equivalentemente satisface las condiciones de la definición anterior y que corresponde a un tipo de trenzas en que las cuerdas de la parte izquierda no permutan con las cuerdas de la parte derecha.

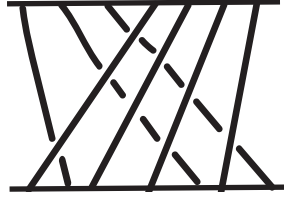


Figura 3.13: $(3, 4)$ -trenza de Lorenz

Lema 6. Si $\pi \in S_{a+b}$ entonces $\pi = \pi_1 \pi_2$ donde π_1 es un (a, b) -permutación de Lorenz, $\pi_2 \in S_a \times S_b \subseteq S_{a+b}$ y $\ell(\pi) = \ell(\pi_1) + \ell(\pi_2)$. Como consecuencia $g_\pi = g_{\pi_1} g_{\pi_2}$.

Demostración. Ver desarrollo en Lema 5.17 de [6]. □

Lema 7. Sea $1 \leq i \leq n-1$ y suponga que $\pi \in S_n$ satisface $\pi^{-1}(i+1) = \pi^{-1}(i) + 1$. Entonces $g_i g_\pi = g_\pi g_{\pi^{-1}(i)}$ y $e_i g_\pi = g_\pi e_{\pi^{-1}(i)}$.

Demostración. Consideremos $j = \pi^{-1}(i)$, $s_i\pi = \pi s_j$ y $\ell(s_i\pi) = \ell(\pi) + 1$. Por lo tanto

$$g_\pi g_j = g_{\pi s_j} = g_{s_i\pi} = g_i g_\pi.$$

La segunda igualdad la probaremos por inducción sobre el largo de π .

Si $\ell(\pi) = 1$ el lema se cumple trivialmente. Supongamos $\ell(\pi) > 1$, elijamos k tal que $\pi = s_k \pi_1$ con $\ell(\pi) = \ell(\pi_1) + 1$. Para continuar la prueba consideremos los siguientes tres casos:

- (1) $k = i+1$. En este caso $\pi^{-1}(i+2) < \pi^{-1}(i+1) = \pi^{-1}(i) + 1$. De esto tenemos $\pi^{-1}(i+2) < \pi^{-1}(i)$, y $\pi = s_{i+1} s_i \pi'$, con $\ell(\pi) = \ell(\pi') + 2$. Por lo tanto

$$g_\pi = g_{i+1}g_i g_{\pi'} \quad y \quad e_i g_\pi = e_i g_{i+1}g_i g_{\pi'} = g_{i+1}g_i e_{i+1} g_{\pi'}$$

ya que, $\pi'^{-1}(i+2) = j+1 = \pi'^{-1}(i+1) + 1$, tenemos que $e_{i+1}g_{\pi'} = g_{\pi'}e_j$

(2) $k = i - 1$. Este caso es similar al anterior.

(3) Si $|k - i| \geq 2$ con $\pi = s_k \pi_1$. Entonces $e_i g_\pi = e_i g_k g_{\pi_1} = g_k e_i g_{\pi_1}$. Ahora , como $\pi_1^{-1}(i+1) = j+1 = \pi_1^{-1}(i) + 1$, así obtenemos $e_i g_{\pi_1} = g_{\pi_1} e_j$

□

Ejemplo 13. Sea $\pi = (14)(23) \in S_4$ entonces $g_\pi = g_1 g_2 g_3 g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2 g_3 g_2 g_1 = \dots$

3.3. Una base inductiva para BMW_n álgebra

Se mostrará la construcción de una base inductiva para el álgebra BMW_n .

Definición 42. La función *shift* $S : MT_n \longrightarrow MT_{n+1}$ es un homomorfismo definido sobre (n, n) -tangle tal que $S(E_i) = E_{i+1}$ y $S(G_i) = G_{i+1}$. Es decir S traslada al tangle un espacio a la derecha como se muestra en la figura 3.14

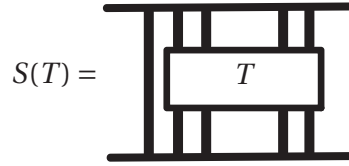


Figura 3.14

Veamos que para algún $W \in MT_n$ se cumple que $WA_m = A_m S(W)$, donde $A_m = G_m G_{m-1} \dots G_1$, esta igualdad se muestra graficamente como sigue:

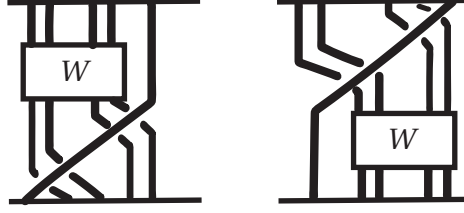


Figura 3.15

Intuitivamente es normal que pensemos que podamos definir la función shift con propiedades similares en BMW_n . Formalmente

Las relaciones del álgebra BMW_n son respetadas por S . Veamos el siguiente resultado

Proposición 10. *El homomorfismo S satisface lo siguiente:*

$$wa_m = a_m S(w) \quad y \quad wb_m = b_m S(w)$$

para algún $w \in BMW_n$ donde,

$$a_m = g_m g_{m-1} \cdots g_1, \quad b_m = g_m^{-1} g_{m-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}$$

Demostración. Consideremos $w \in \{g_i, e_i\}$. Basta con probar el primer caso para todo $i < m$.

Si $w = g_i$ entonces por relación de trenza:

$$wa_m = g_i(g_m \cdots g_2 g_1) = (g_i g_m \cdots g_i g_{i+1} g_i g_{i-1} \cdots g_2 g_1) = (g_m \cdots g_2 g_1) g_{i+1} = a_m S(g_i)$$

Ahora, si $w = e_i$ entonces por la relación (a) de la preposición 7 obtenemos:

$$e_i(g_m g_{m-1} \cdots g_2 g_1) = (g_m g_{m-1} \cdots e_i g_{i+1} g_i \cdots g_2 g_1) = (g_m g_{m-1} \cdots g_2 g_1) e_{i+1} = a_m S(w).$$

De igual manera se prueba para el segundo caso $wb_m = b_m S(w)$ para todo $i < m$. $\square$

Ahora, consideremos el elemento $F_k \in MT_n$ con $2k \leq n$ representado por tangles como se muestra en la siguiente figura.

Las ecuaciones de la siguiente proposición se pueden inspeccionar mediante representación diagramática.

Proposición 11. *Para todo $i < k$ se cumple*

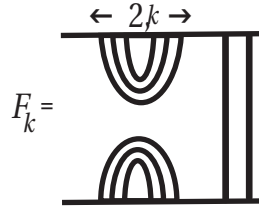


Figura 3.16

$$(1) G_i F_k = G_{2k-i} F_k$$

$$(2) E_i F_k = E_{2k-i} F_k$$

$$(3) F_k G_i = F_k G_{2k-i}$$

$$(4) F_k E_i = F_k E_{2k-1}$$

$$(5) F_k = (G_1 G_2 \dots G_{2k-2}) F_{k-1} E_{2k-1} (G_{2k-2} \dots G_2 G_1)$$

Demostración. Sólo veremos (1) y (5) de la proposición. Para (1) tenemos el siguiente diagrama

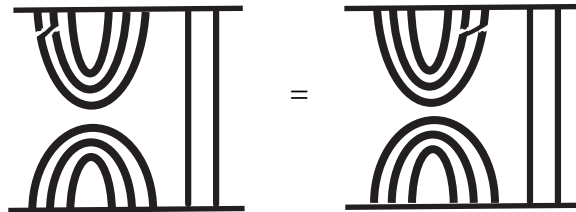


Figura 3.17

Luego el diagrama de (5) resulta ser:

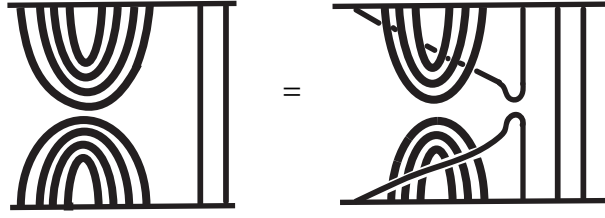


Figura 3.18

□

Podemos definir de manera analoga los elementos $f_k \in BMW_n$. Antes de comenzar observemos aquí ciertas simetria en el álgebra BMW_n .

Definición 43. (1) Sea $\rho_n : BMW_n \longrightarrow BMW_n$ el automorfismo definido por $\rho_n(g_i) = g_{n-i}$ y $\rho_n(e_i) = e_{n-i}$.

(2) Sea $\alpha : BMW_n \longrightarrow BMW_n$ el anti-automorfismo definido por $\alpha(g_i) = g_i$ y $\alpha(e_i) = e_i$

Observación 14. Las simetrias ρ_n, α estan bien definidas por las relaciones de BMW_n

Proposición 12. Existe un automorfismo ρ_n de MT_n y un anti-automorfismo α tal que $\varphi \circ \alpha = \alpha \circ \varphi$ y $\varphi \circ \rho_n = \rho_n \circ \varphi$

Demostración. Ver prueba en [1]

□

Estas funciones representan las siguientes simestrias en MT_n , ver figura 3.19:

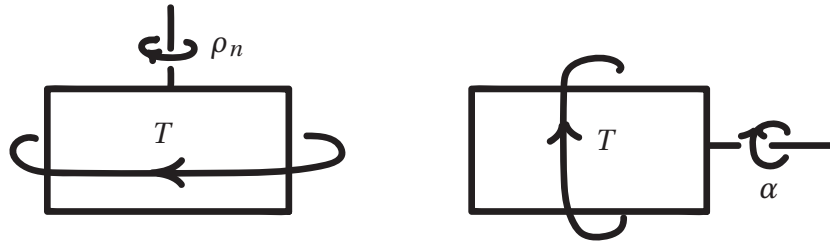


Figura 3.19

Apartir de la proposición anterior los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{array}{ccc}
 BMW_n & \xrightarrow{\varphi} & MT_n \\
 \downarrow \rho_n & & \downarrow \rho_n \\
 BMW_n & \xrightarrow{\varphi} & MT_n
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 BMW_n & \xrightarrow{\varphi} & MT_n \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\
 BMW_n & \xrightarrow{\varphi} & MT_n
 \end{array}$$

Definición 44. Defina $f_1 = e_1$ y

$$f_k = (g_1 g_2 \dots g_{2k-2}) f_{k-1} e_{2k-1} (g_{2k-2} \dots g_2 g_1)$$

para $k \geq 2$.

Los elementos F_k no poseen cruces, queremos expresar f_k como una palabra libre de generadores g'_i s. Así tenemos el siguiente resultado

Lema 8.

$$\begin{aligned}
 (g_1 g_2 \dots g_{2k})(e_1 e_3 \dots e_{2k-1}) &= (e_2 e_4 \dots e_{2k})(e_1 e_3 \dots e_{2k-1}) \\
 (e_1 e_3 \dots e_{2k-1})(g_{2k} \dots g_2 g_1) &= (e_1 e_3 \dots e_{2k-1})(e_2 e_4 \dots e_{2k}).
 \end{aligned}$$

Demostración. Probemos la primera ecuación, reescribiendo la parte izquierda de la ecuación, nos queda

$$(g_1 g_2 e_1)(g_3 g_4 e_3) \dots (g_{2k-1} g_{2k} e_{2k-1}).$$

Usando la segunda igualdad de la relación (a) de la Preposición 7 se obtiene

$$(e_2 e_1)(e_4 e_3) \dots (e_{2k} e_{2k-1}) = (e_2 e_4 \dots e_{2k})(e_1 e_3 \dots e_{2k-1}).$$

Para la segunda ecuación, observemos la parte de izquierda nuevamente de la ecuación

$$(e_1 e_3 \dots e_{2k-1})(g_{2k} g_{2k-1} \dots g_2 g_1) = (e_{2k-1} g_{2k} g_{2k-1}) \dots (e_3 g_4 g_3)(e_1 g_2 g_1).$$

Esta igualdad es posible por que cada e_i con i impar permuta con todos hacia la derecha hasta g_{i+1} , así por la Preposición 7 se obtiene:

$$(e_{2k-1} e_{2k}) \dots (e_3 e_4)(e_1 e_2)$$

Luego se ordena permutando los elemntos e_i de tal manera que se cumpla siempre $|i - j| > 1$, resultando lo deseado.

$$(e_1 e_3 \cdots e_{2k-1})(e_2 e_4 \cdots e_{2k})$$

□

Proposición 13. Para $k \geq 1$,

$$f_k = (e_k)(e_{k-1}e_{k+1})(e_2 \cdots e_{2k-2})(e_1 e_3 \cdots e_{2k-1})(e_2 \cdots e_{2k-2})(e_{k-1}e_{k+1})(e_k).$$

Ejemplo 14. $f_4 = e_4(e_3 e_5)(e_2 e_4 e_6)(e_1 e_3 e_5 e_7)(e_2 e_4 e_6)(e_3 e_5) e_4$.

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre el subíndice k . Para $k = 1$ la proposición es evidentemente valida. Consideremos $k > 2$. Aplicando hipotesis inductiva sobre la siguiente ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} f_k &= (g_1 g_2 \cdots g_{2k-2}) f_{k-1} e_{2k-1} (g_{2k-2} \cdots g_2 g_1) \\ &= (g_1 g_2 \cdots g_{2k-2}) [(e_{k-1})(e_{k-2} e_k) \cdots (e_1 e_2 \cdots e_{2k-3}) \cdots (e_{k-2} e_k)(e_{k-1})] e_{2k-1} (g_{2k-1} \cdots g_2 g_1) \end{aligned}$$

e_{2k-1} conmuta con todos los elementos hacia la izquierda hasta e_{2k-3}

$$f_k = (g_1 g_2 \cdots g_{2k-2}) [(e_{k-1})(e_{k-2} e_k) \cdots (e_1 e_2 \cdots e_{2k-3} e_{2k-1}) \cdots (e_{k-2} e_k)(e_{k-1})] (g_{2k-1} \cdots g_2 g_1)$$

continuemos, entonces aplicando la Proposición 10 a los extremos de la ecuación f_k se obtiene:

$$e_k(e_{k-1}e_{k+1}) \cdots (g_1 g_2 \cdots g_{2k-2})(e_1 e_3 \cdots e_{2k-1})(g_{2k-2} \cdots g_2 g_1) \cdots (e_{k-1}e_{k+1})e_k$$

Luego, fijandonos en la parte de al medio de la ecuación anterior volvemos aplicar la proposición 10 obteniendo

$$e_k(e_{k-1}e_{k+1}) \cdots (e_3 e_5 \cdots e_{2k-3})(g_1 g_2 \cdots g_{2k-2})(e_1 e_3 \cdots e_{2k-1})(g_{2k-2} \cdots g_2 g_1) \cdots (e_{k-1}e_{k+1})e_k$$

Por el lema anterior podemos reemplazar los g_i 's por $(e_2 e_4 \cdots e_{2k-2})$ quedando

$$e_k(e_{k-1}e_{k+1}) \cdots (e_3 e_5 \cdots e_{2k-3})(e_2 e_4 \cdots e_{2k-2})(e_1 e_3 \cdots e_{2k-1})(e_2 e_4 \cdots e_{2k-2}) \cdots (e_{k-1}e_{k+1})e_k$$

Por lo tanto, es posible obtener la expresión para f_k que no involucra elementos g'_i s, así:

$$f_k = e_k(e_{k-1}e_{k+1})(e_2 \cdots e_{2k-2})(e_1e_3 \cdots e_{2k-1})(e_2 \cdots e_{2k-2})(e_{k-1}e_{k+1})e_k$$

□

Observación 15. También se satisface $f_k = (e_k e_{k+1} \cdots e_{2k-2}) f_{k-1} e_{2k-1} (e_{2k-2} \cdots e_{k+1} e_k)$. Veamos esto en términos de tangles, para $k = 3$ tenemos

$$F_3 = (E_3 E_4) F_2 E_5 (E_4 E_3)$$

Esto es igual al siguiente diagrama:

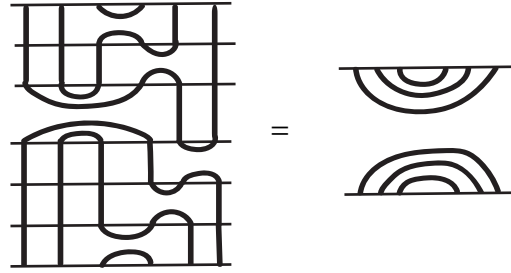


Figura 3.20

Ahora enunciaremos un resultado análogo a la proposición 11, que se probará usando relaciones de BMW_n .

Proposición 14. Para todo $i < k$ se cumple

- (1) $g_i f_k = g_{2k-i} f_k$,
- (2) $e_i f_k = e_{2k-i} f_k$,
- (3) $f_k g_i = f_k g_{2k-i}$,
- (4) $f_k e_i = f_k e_{2k-i}$.

Demostración. Notemos que g_i y g_{2k-i} conmutan.

Probaremos la ecuación (1) por inducción sobre k .

Para $k = 2$ e $i = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} g_1 f_2 &= g_1 [(g_1 g_2) e_1 e_3 (g_2 g_1)] = g_1 (g_1 g_2 e_1) e_3 g_2 g_1 \\ &= g_1 (e_2 e_3 e_1 g_2 g_1) \\ &= g_3 (g_1 g_2 e_1 e_3 g_2 g_1) \\ &= g_3 f_2. \end{aligned}$$

Probaremos para $k > 2$. Si $2 \leq i < k$, entonces usando la Proposición 10, tenemos:

$$\begin{aligned} g_i f_k &= g_i (g_1 g_2 \cdots g_{2k-2}) f_{k-1} e_{2k-1} (g_{2k-2} \cdots g_2 g_1) \\ &= (g_1 g_2 \cdots g_{2k-2}) g_{i-1} f_{k-1} e_{2k-1} (g_{2k-2} \cdots g_2 g_1) \\ &= (g_1 g_2 \cdots g_{2k-2}) g_{2k-i-1} f_{k-1} e_{2k-1} (g_{2k-2} \cdots g_2 g_1), \end{aligned}$$

Que por hipotesis de inducción es igual a

$$g_{2k-i} (g_1 g_2 \cdots g_{2k-2}) f_{k-1} e_{2k-1} (g_{2k-2} \cdots g_2 g_1) = g_{2k-i} f_k$$

Para la ecuación (2) también se prueba por inducción sobre k con el cuidado de ocupar la expresión f_k de la Proposición 13. Para $k = 2$ e $i = 1$ tenemos:

$$e_1 f_2 = e_1 (e_2 (e_1 e_3) e_2 (e_1 e_3) e_2 (e_1 e_3) e_2) = e_1 e_3 e_2 e_1 e_3 e_2 e_1 e_3 e_2 = e_1 e_2 e_1 e_3 e_2 = e_1 e_3 e_2$$

De manera similar obtenemos que $e_3 f_2 = e_1 e_3 e_2$.

La prueba para $k > 2$ e $2 \leq i < k$ se sigue de manera analoga.

El último caso para completar la prueba de la ecuación (1) y (2) es verificar cuando $i = 1$ y $k > 2$.

Consideremos $h_j = \alpha(a_j) \alpha(a_{j-2}) e_{j+1} e_{j-1}$.

Ya que $f_k = h_{2k-2} f_{k-2} a_{2k-4} a_{2k-2}$, entonces probando lo siguiente es suficiente para resolver en (1) y (2), es decir:

$$(1') \quad g_1 h_j = g_{j+1} h_j$$

$$(2') \quad e_1 h_j = e_{j+1} h_j$$

para todo j

Probaremos (1') y (2') por inducción sobre j . Para $j = 2$ tenemos

$$h_2 = \alpha(a_2)\alpha(a_0)e_3e_1 = g_1g_2e_3e_1 = g_1g_2e_1e_3 = e_2e_1e_3 = e_2e_3e_1 = g_3g_2e_3e_1$$

Entonces,

$$e_1h_2 = e_1e_2e_1e_3 = e_1e_3 = e_3e_1 = e_3h_2 \quad y \quad g_3h_2 = g_3g_1g_2e_1e_3 = g_1h_2$$

Para $j > 2$, observemos que usando relaciones de trenza y el homomorfismo Shift obtenemos:

$$\alpha(a_j)\alpha(a_{j-2}) = g_2g_1S(\alpha(a_{j-1})\alpha(a_{j-3}))$$

Luego,

$$\begin{aligned} e_1h_j &= e_1g_2g_1S(\alpha(a_{j-1})\alpha(a_{j-3})e_je_{j-2}) = g_2g_1e_2S(h_{j-1}) = g_2g_1S(e_1h_{j-1}) \\ &= g_2g_1S(e_je_{j-1}) \\ &= g_2g_1e_{j+1}S(h_{j-1}) = e_{j+1}h_j \end{aligned}$$

De manera análoga se prueba para $g_1h_j = g_{j+1}h_j$ usando la relación de trenza $g_1g_2g_1 = g_2g_1g_2$ e hipótesis inductiva sobre j .

Por último, la ecuación (3) y (4) son resultado directo de la ecuación (1) y (2) respectivamente usando el anti-automorfismo α . $\square$

Definición 45. Para cada n y $q = n - 2k$ definimos $V_n^{(q)}$ como el subespacio de $BMW_n^{(q)}$ generado por elementos $g_\pi w_{2k} g_\tau g_\mu$, donde π, μ son $(2k, q)$ permutación de Lorenz, τ es una permutación de las últimas q cuerdas y $w_{2k} \in BMW_{2k}^{(0)}$.

Observación 16. Notemos que la dimensión de BMW_n es:

$$|C_n| = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{q}^2 |C_k|^2 q!$$

Lema 9. Supongamos que $\varphi : BMW_{m+1} \longrightarrow MT_{m+1}$ es inyectiva. Entonces $BMW_{m+1}e_m = BMW_me_m$

Demostración. Es suficiente probar que cumpla con el resultado

$$MT_{m+1}E_m = MT_mE_m.$$

Dado $T \in MT_{m+1}$ definimos $\varepsilon_m(T)$ como el siguiente (m, m) -tangle:

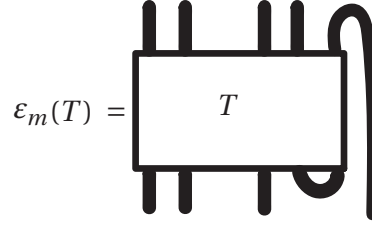


Figura 3.21

Se observa que usando $\varepsilon_m(T)$ como un $(m+1, m+1)$ -tangle se tiene que $\varepsilon_m(T)E_m = TE_m$. Ver figura 3.22,

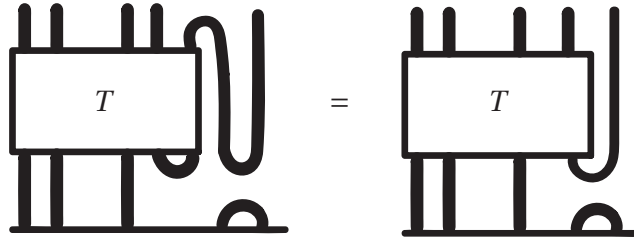


Figura 3.22

Luego podemos extender el mapeo $T \mapsto \varepsilon_m(T)$ a una función lineal $\varepsilon_m : MT_{m+1} \rightarrow MT_m$.

Así para todo $X \in MT_{m+1}$, se tiene que $XE_m = \varepsilon_m(X)E_m \in MT_mE_m$. $\square$

Corolario 4. *Bajo las mismas condiciones del lema anterior se cumple, $BMW_{m+1}e_1 = S(BMW_m)e_1$.*

Demostración. Vamos a probar de manera equivalente la igualdad en términos de tangles es decir, por demostrar que $MT_{m+1}E_1 = S(MT_m)E_1$. Sabemos por el lema anterior que $MT_{m+1}E_m = MT_mE_m$.

Aplicando el automorfismo ρ a la ecuación anterior nos queda:

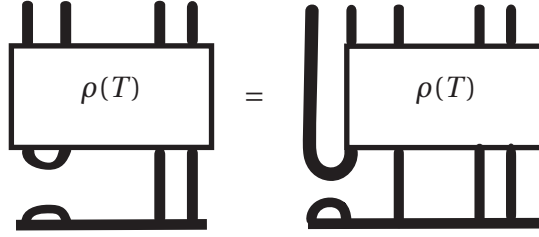


Figura 3.23

Así demostramos lo deseado. □

Proposición 15. *Suponga que $\varphi|_{BMW_{n-1}} \longrightarrow MT_{n-1}$ es inyectiva. Entonces*

- (1) $BMW_{2k}f_k = BMW_kf_k$, para todo k con $2k \leq n$.
- (2) $BMW_{2k+1}S(f_k) = BMW_{k+1}S(f_k)$ para todo k con $2k+1 \leq n$.

Demostración. Probaremos (1), para $k=1$ la ecuación es válida, pues $g_1^{\pm 1}e_1$ y e_1e_1 son multiples de e_1 ver Proposición 6, capítulo 3.

Para $k \geq 2$ tenemos $k+1 \leq n-1$ y $BMW_{k+1}e_k = BMW_ke_k$ por el lema 9. Así, basta probar que BMW_kf_k es un ideal izquierdo de BMW_{2k} para todo $i < 2k$ es decir,

$$\begin{aligned} g_i BMW_k f_k &\subset BMW_k f_k \\ e_i BMW_k f_k &\subset BMW_k f_k, \end{aligned}$$

Observemos que para $i < k$ la prueba es inmediata. Ahora para $i > k$ se deduce de 14, y del hecho de que g_i y e_i conmutan con BMW_k .

Finalmente, por la proposición 13 podemos escribir $f_k = e_k r_k$ para algún $r_k \in BMW_{2k}$. Por lo tanto para $i = k$ sea $\chi \in \{g_k^{\pm 1}, e_k\}$, entonces

$$\chi BMW_k f_k = \chi BMW_k e_k r_k \subseteq BMW_{k+1} e_k r_k = BMW_k e_k r_k = BMW_k f_k$$

Con esto completamos la prueba para (1).

Demostremos (2). Para $k=1$ la prueba es directa. Por otro lado también en BMW_3 se puede verificar que $e_2^2 = z^{-1}e_2$, $e_2e_1e_2 = e_2$, $e_2g_1e_2 = l^{-1}e_2$, $g_2e_2 = le_2$, $g_2e_1e_2 = g_1^{-1}e_2$ y $g_2g_1e_2 = e_1e_2$. Por lo tanto $BMW_2e_2 = BMW_3e_2$.

Ahora para $k \geq 2$ tenemos $k+2 \leq n-1$, de modo que $BMW_{k+2}e_{k+1} = BMW_{k+1}e_{k+1}$

del lema 9. Debemos demostrar que para todo $i \leq 2k$ se cumple:

$$\begin{aligned} g_i BMW_{k+1} S(f_k) &\subset BMW_{k+1} S(f_k) \\ e_i BMW_{k+1} S(f_k) &\subset BMW_{k+1} S(f_k) \end{aligned}$$

Cuando $i < k$ es inmediato. Para $i > k$ se deduce de la proposición 14 y de que los elementos g_i y e_i conmutan con BMW_{k+1} . Para el caso $i = k$ al igual que en (1) podemos concluir que $S(f_k) = e_{k+1} S(r_k)$, así:

$$e_{k+1} BMW_{k+1} S(f_k) = e_{k+1} BMW_{k+1} e_{k+1} S(r_k) \subseteq BMW_{k+2} e_{k+1} S(r_k) = BMW_{k+1} S(f_k).$$

Así completamos la prueba de (2). □

Corolario 5. Si $\varphi|_{BMW_{n-1}}$ es inyectiva. Entonces el ideal generado por f_k en BMW_n con $k = \lfloor n/2 \rfloor$, puede ser escrito como:

- (1) $BMW_{2k}^{(0)} = BMW_k f_k BMW_k$ cuando $n = 2k$, y
- (2) $BMW_{2k+1}^{(1)} = BMW_{k+1} S(f_k) BMW_{k+1}$, cuando $n = 2k + 1$.

Demostración. (1)

Sabemos que $BMW_n^{(q)}$ es el ideal bilatero en BMW_n generado por f_k , entonces

$$\begin{aligned} BMW_{2k}^{(0)} &= BMW_{2k} f_k BMW_{2k} \\ &= BMW_k f_k BMW_{2k} \\ &= BMW_k f_k BMW_k \end{aligned}$$

□

Demostración. (2)

De la misma manera tenemos que $BMW_{2k+1}^{(1)}$ es el ideal bilatero generado por $S(f_k)$, entonces

$$BMW_{2k+1}^{(1)} = BMW_{2k+1} S(f_k) BMW_{2k+1}$$

Sea $S(f_k) = a_{2k}^{-1} f_k a_{2k}$, aplicando la proposición 15 y el anti-automorfismo α se obtiene el resultado exactamente como en (1). □

Ahora se demostrará la inyectividad de φ sobre el ideal bilatero generado por f_k en BMW_n , con $k = \lfloor n/2 \rfloor$.

Teorema 20. *Asumamos que $\varphi|BMW_{n-1} \longrightarrow MT_{n-1}$ es inyectiva para algún n particular. Entonces $\varphi|BMW_{2k}^{(0)} \longrightarrow MT_{2k}^{(0)}$ es inyectiva, cuando $n = 2k$, y $\varphi|BMW_{2k+1}^{(1)} \longrightarrow MT_{2k+1}^{(1)}$ es inyectiva, cuando $n = 2k + 1$.*

Demostración. Primero para el caso cuando $n = 2k$ tenemos por el corolario 5 anterior que $BMW_{2k}^{(0)} = BMW_k f_k BMW_k$ generado por $|C_k|^2$ elementos de la forma $t_c f_k t_d$ con $c, d \in C_k$ tal que la imagen de estos elementos representan diagrama de tangles totalmente descendente $T_c F_k T_d$. Por lo tanto es suficiente probar que la imagen de $t_c f_k t_d$ por φ es linealmente independiente en MT_{2k} .

Sabemos por el teorema 19 que el conjunto $\{\varphi(t_c) : c \in C_k\}$ constituye una base para MT_k , entonces $\{t_c : c \in C_k\}$ es una base de BMW_k ya que por hipótesis $\varphi : BMW_k \longrightarrow MT_k$ es un isomorfismo. Por lo tanto $BMW_{2k}^{(0)}$ es generado por el conjunto

$$\{\varphi^{-1}(T_c) f_k \varphi^{-1}(T_d) : c, d \in C_k\}.$$

La imagen de este conjunto generador por φ es $\{T_c F_k T_d : c, d \in C_k\}$ que corresponden a diagramas de (n, n) -tangle con distinto conector en C_{2k} que por corolario 3 es un conjunto independiente en MT_{2k} , lo que implica que φ es inyectiva sobre el ideal bilatero $BMW_{2k}^{(0)}$.

La prueba para el caso $n = 2k + 1$ es similar. En efecto, tenemos por hipótesis que $\varphi : BMW_{k+1} \longrightarrow MT_{k+1}$ es un isomorfismo. Entonces, podemos escoger algún elemento $t_c \in BMW_{k+1}$ con $c \in C_{k+1}$, donde $\varphi(t_c)$ es representado por un tangle totalmente descendente T_c . Nuevamente por corolario 5 se tiene que $\{t_c S(f_k) t_d\}$, $c, d \in C_{k+1}$ con $|C_{k+1}|^2$ genera al ideal $BMW_{2k+1}^{(1)}$. Mas aún la imagen por φ de $\{t_c S(f_k) t_d\}$ el cual es un conjunto linealmente independiente en MT_{2k+1} . Por lo tanto φ es inyectiva sobre $BMW_{2k+1}^{(1)}$, □

Completamos esta sección presentando un teorema que precede el resultado que buscamos. Anteriormente demostramos que para algún n fijo el resultado siguiente es verdadero para $q = 0, 1$, a partir de la inyectividad de φ sobre BMW_{n-1} usando inducción en n .

Teorema 21. *$\varphi : BMW_n^{(q)} \longrightarrow MT_n^{(q)}$ es inyectiva para todo n, q .*

Demostración. La prueba se detallará mediante el siguiente lema. □

El proceso de inducción sobre q para la inyectividad de φ se sigue estableciendo el siguiente lema.

Lema 10. *Asumamos que $\varphi|BMW_{n-1}$ es inyectivo para algún n en particular. Entonces*

- (1) $V_n^{(q)} + BMW_n^{q-2}$ es un ideal bilatero en $BMW_n^{(q)}$.
- (2) $\varphi|V_n^{(q)} \longrightarrow MT_n$ es inyectivo para $q > 0$
- (3) $e_1 e_3 \cdots e_{2k-1} \in V_n^{(q)}$

Demostración. Dejaremos la prueba de (1) para la siguiente sección.

Para (2) consideremos el caso $n = 2k$. Por el teorema 20, $\varphi|BMW_{2k}^{(0)}$ es inyectiva. También conocemos que $MT_{2k}^{(0)}$ es generado por $|C_k|^2$ diagramas de (k, k) -tangles totalmente descendente de rango 0 y que $\varphi|BMW_{2k}^{(0)} \longrightarrow MT_{2k}^{(0)}$ es sobreyectiva.

Luego por hipótesis tenemos que $BMW_{2k}^{(0)}$ posee como base al conjunto $\{t_c f_k t_d\}$ con $c, d \in C_k$, es decir, $\varphi^{-1}(T_c) = t_c$ cuya imagen por φ es el conjunto de tangles totalmente descendente en $MT_{2k}^{(0)}$.

De la definición 45 el subespacio $V_n^{(q)} \subset BMW_n^{(q)}$ es generado por el conjunto $\{g_\pi w_{2k} g_\tau g_\mu\}$ con $w_{2k} \in BMW_{2k}^{(0)}$ tal que los elementos $\varphi(g_\pi w_{2k} g_\tau g_\mu)$ son representado por tangles totalmente descendente de rango $\leq q$ en $MT_n^{(q)}$, que por corolario 3 forman un conjunto independiente en MT_n . Por lo tanto $\varphi|V_n^{(q)} \longrightarrow MT_n$ es inyectiva.

Para el caso $n = 2k + 1$ el argumento es similar ocupando (2) del teorema 20.

La prueba de (3) es inmediata de la construcción de $f_k \in V_n^{(q)}$. □

3.4. El isomorfismo φ

Finalizamos este trabajo demostrando la inyectividad de $\varphi : BMW_n \longrightarrow MT_n$. La estrategia es probar el paso de inducción restante del teorema 21 es decir, si $\varphi|BMW_{n-1}$ es inyectiva y $\varphi|BMW_n^{(q)}$ es inyectivo, entonces $\varphi|BMW_n^{(q-2)}$ es inyectiva. Conocemos por inducción sobre n que $\varphi|V_n^{(q)}$ es inyectiva para todo $q > 0$.

Queda sólo demostrar que $V_n^{(q)} + BMW_n^{(q-2)} = BMW_n^{(q)}$, como $BMW_n^{(q)}$ es un ideal bilatero generado por f_k con $f_k \in V_n^{(q)}$, entonces necesitamos probar que $V_n^{(q)} + BMW_n^{(q-2)}$ es un ideal bilatero en BMW_n . Ya que $V_n^{(q)} + BMW_n^{(q-2)}$ es invariante bajo el anti-automorfismo α , es suficiente mostrar que es un ideal izquierdo.

Proposición 16. *Sea $n = q + 2k$ y $X_n^{(q)}$ es el subespacio generado por el conjunto $\{g_\pi g_\tau BMW_{2k} f_k\}$ donde $\alpha(g_\pi)$ es una $(2k, q)$ -trenza de Lorenz y g_τ una trenza de permutación positiva*

en $S^{2k}(B_q)$. Supongamos que $\varphi|BMW_{n-1}$ es inyectivo para $q \geq 2$. Entonces

$$L_n^{(q)} = X_n^{(q)} + BMW_n^{(q-2)}$$

es un ideal izquierdo.

Demostración. Se desarrollará mas adelante. $\square$

Corolario 6. Supongamos que $V_n^{(q)} + BMW_n^{(q-2)}$ es un ideal izquierdo bajo las condiciones de hipótesis de la Proposición 16, por lo tanto, inmediatamente se prueba el teorema 21.

Demostración. Ya que $L_n^{(q)}$ es un ideal izquierdo por la Proposición 16, entonces $V_n^{(q)} + BMW_n^{(q-2)}$ es un ideal izquierdo. Es decir, para todo $w \in BMW_n^{(q)}$ se cumple $w(V_n^{(q)} + BMW_n^{(q)}) \subseteq V_n^{(q)} + BMW_n^{(q)}$. Además por definición el espacio $BMW_n^{(q)}$ es el ideal bilatero de rango $\leq q$, por lo tanto se reduce a demostrar que $wV_n^{(q)} \subseteq V_n^{(q)}$. Luego,

$$\begin{aligned} wV_n^{(q)} &= w\{g_\pi BMW_{2k}^{(0)} g_\tau g_\mu\} \\ &= \{w g_\pi BMW_{2k} f_k BMW_{2k} g_\tau g_\mu\} \\ &= \{w [g_\pi g_\tau BMW_{2k} f_k] BMW_{2k} g_\mu\} \\ &= \{w X_n^{(q)} BMW_{2k} g_\mu\} \\ &\subseteq \{X_n^{(q)} BMW_{2k} g_\mu\} \end{aligned}$$

donde $V_n^{(q)} \subseteq X_n^{(q)}$. Por lo tanto $V_n^{(q)}$ es un ideal izquierdo. $\square$

La prueba de la Proposición 16 ocupará el resto de esta sección. Se analizarán los elementos $g_i g_\pi$ y $e_i g_\pi$, con π una trenza de permutación positiva. Para esto usaremos algunos resultados vistos en la subsección 3.2. El siguiente resultado se adjunta al lema 7 como consecuencia de las relaciones de trenza y de BMW .

Lema 11. Sea ρ una permutación y $\rho_1 = \rho s_i$. Entonces la trenza de permutación positiva g_{ρ_1} satisface las siguientes ecuaciones:

- (1) $g_{\rho_1} = g_i g_\rho$ si $\rho(i) < \rho(i+1)$
- (2) $g_\rho = g_i g_{\rho_1}$ si $\rho(i) > \rho(i+1)$

Corolario 7. Dado cualquiera trenza de permutación positiva g_ρ esta puede ser escrita como producto de $\{g'_i s_i, i \neq \ell\}$ y una (ℓ, q) -trenza de Lorenz.

Ejemplo 15. Consideremos la siguiente trenza de permutación positiva $g_\rho = g_1 g_2 g_3 g_1 g_2 g_1$. Si usamos relaciones de trenzas podemos escribir $g_\rho = g_2 g_1 g_2 g_3 g_2 g_1$ que es el producto de g_i 's y una $(3, 1)$ -trenza de Lorenz. Diagramáticamente sería:

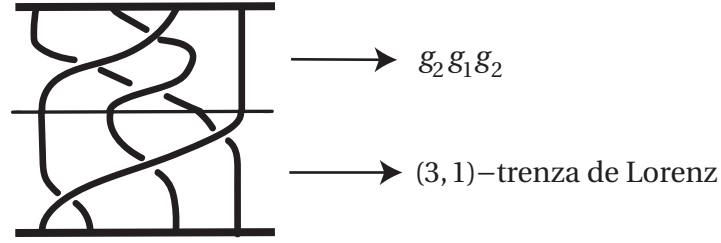


Figura 3.24

Lema 12. $X_n^{(q)} S^{2k}(BMW_q) \subset L_n^{(q)}$.

Demostración. Debemos demostrar que $X_n^{(q)} w \subset L_n^{(q)}$ con $w \in S^{2k}(BMW_q)$.

Para $x e_j$ con $x \in X_n^{(q)}$ w sabemos que el elemento $f_k e_j \in BMW_n^{(q-2)}$ para $j > 2k$, por lo tanto $X_n^{(q)} e_j \subset BMW_n^{(q-2)} \subset L_n^{(q)}$ con $j > 2k$.

Ahora sea g_τ una trenza de permutación positiva en $S^{2k}(B_q)$. Entonces por el lema 11 tenemos que:

$$\begin{aligned} g_\tau g_j &= g_{\tau'} \quad \text{o} \\ g_\tau g_j &= g_{\tau'} (g_j)^2 = g_{\tau'} (1 - m g_j + m l^{-1} e_j) \\ &= g_{\tau'} - m g_{\tau'} g_j + m l^{-1} g_{\tau'} e_j \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x g_j \in L_n^{(q)}$ para algún elemento generador $x = g_\pi w_{2k} f_k g_\tau \in X_n^{(q)}$. Como consecuencia $X_n^{(q)} g_j \subset L_n^{(q)}$ para $j > 2k$. $\square$

Lema 13. Supongamos que $\varphi|_{BMW_{2k}^{(0)}}$ es inyectiva. Entonces cada elemento en $BMW_{2k} f_k$ es combinación lineal de elementos de la forma.

$$g_m g_{m+1} \cdots g_{2k-2} e_{2k-1} BMW_{2k} f_k,$$

donde, $m = 1, \dots, 2k-2$ y $e_{2k-1} \in BMW_{2k}^{(0)}$.

Demostración. Por suposición, φ es un isomorfismo de $BMW_{2k} f_k \subset BMW_{2k}^{(0)}$ a $MT_{2k} F_k$ de MT_{2k} . Cada elemento de $MT_{2k} F_k$ se puede escribir como combinación lineal de tangles totalmente descendentes T_c , talque el conector c une de alguna manera los

puntos de arriba y, los puntos inferiores coinciden con el elemento F_k . Ahora podemos elegir el orden de las cuerdas para cada conector c como lo deseemos, así asumamos que para cada tanque T_c la cuerda cuya punto final está en la posición $2k$ de la parte superior se encuentra por encima de todas las demás. Por lo tanto, por isotopía ambiente sobre las cuerdas podemos escribir cada uno de estos tangles T_c es:

$$G_m G_{m+1} \cdots G_{2k-2} E_{2k-1} T F_k$$

para algún $m = 1, \dots, 2k - 2$. Por último el isomorfismo φ implica que podemos considerar este conjunto como generador para $BMW_{2k} f_k$. $\square$

Ejemplo 16. Veamos la representación diagramática del lema anterior

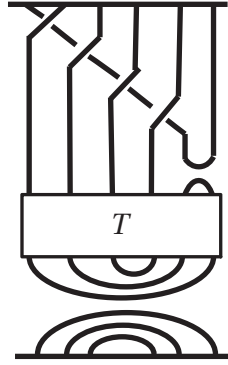


Figura 3.25

Lema 14. Para cada $m = 1, \dots, 2k - 2$ y cada trenza de permutación g_ρ con $\rho^{-1}(i) < \rho^{-1}(j)$ para $1 \leq i < j \leq 2k - 1$ y $\rho^{-1}(2k + 1) = \rho^{-1}(2k) + 1$ tenemos

$$g_\rho e_{2k} g_m g_{m+1} \cdots g_{2k-2} e_{2k-1} = g_{\rho'} e_{2k-1}$$

Para alguna trenza de permutación positiva $g_{\rho'}$.

Demostración. Primero, e_{2k-1} puede ser movido a la derecha de $g_m g_{m+1} \cdots g_{2k-2}$ tal que

$$g_\rho e_{2k} g_m g_{m+1} \cdots g_{2k-2} e_{2k-1} = g_\rho g_m g_{m+1} \cdots g_{2k-2} e_{2k} e_{2k-1}$$

Observemos que la trenza $g_{2k-2} \cdots g_{m+1} g_m \alpha(g_\rho)$ es de permutación positiva ya que $g_{2k-2} \cdots g_{m+1} g_m$ es una trenza de permutación positiva sobre las primeras $2k - 1$ cuer-

das y $\alpha(g_\rho) = g_{\rho^{-1}}$ no logra cruzar estas cuerdas, llamaremos g_{ρ_1} a esta trenza de permutación positiva. Además, por relaciones de BMW nos queda la siguiente expresión $e_{2k-1}g_{2k}g_{2k-1}g_{\rho_1}$ o $e_{2k-1}g_{2k}^{-1}g_{2k-1}^{-1}g_{\rho_1}$. Ahora ρ_1 cumple la hipótesis del lema por lo que $\rho_1(2k+1) = \rho_1(2k) + 1$, luego usando el lema 11 ya sea el caso en que $\rho_1(2k-1) < \rho_1(2k)$ o $\rho_1(2k) < \rho_1(2k-1)$ se tiene que $g_{2k}g_{2k-1}g_{\rho_1}$ y $g_{2k}^{-1}g_{2k-1}^{-1}g_{\rho_1}$ es una trenza de permutación positiva, llamaremos g_{ρ_2} a esta nueva trenza de permutación positiva. Entonces $e_{2k-1}e_{2k}g_{\rho_1} = e_{2k-1}g_{\rho_2}$. Aplicando el anti-automorfismo α tenemos

$$\begin{aligned} g_\rho e_{2k} g_m g_{m+1} \cdots g_{2k-2} e_{2k-1} &= \alpha(e_{2k-1} e_{2k} g_{\rho_1}) \\ &= \alpha(e_{2k-1} g_{\rho_2}) \\ &= \alpha(g_{\rho_2}) e_{2k-1} \\ &= g_{\rho''} e_{2k-1} \end{aligned}$$

donde $\rho_2^{-1} = \rho''$ □

Continuemos con la prueba de la proposición 16, probando que $L_n^{(q)}$ es un ideal izquierdo. Con el lema anterior demostramos de manera particular que $L_n^{(q)} g_\rho \subset L_n^{(q)}$ para $g_\rho \in S^{2k}(B_q)$. Luego, sólo queda demostrar que $e_i x, g_i x \in L_n^{(q)}$ para con $x \in X_n^{(q)}$ y cada $1 \leq i \leq n-1$ y $w_{2k} \in BMW_{2k}^{(0)}$.

Demostración. (proposición 16).

Consideremos $x = g_\pi w_{2k} f_k$, donde $\alpha(g_\pi)$ es una $(2k, q)$ -trenza de Lorenz y $w_{2k} \in BMW_{2k}^{(0)}$.

Centraremos nuestra demostración en los elementos $e_i g_\pi$ y $g_i g_\pi$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Supongamos que $\pi(i+1) > \pi(i)$, entonces por el lema 11 $g_{\pi_1} = g_i g_\pi$, luego $\alpha(g_{\pi_1}) = \alpha(g_i g_\pi) = \alpha(g_\pi) g_i$ es una $(2k, q)$ -trenza de Lorenz. De otro modo tenemos que $g_\pi = g_i g_{\pi_1}$ con $\pi_1(i+1) < \pi_1(i)$ lo que implica que g_{π_1} es una $(2k, q)$ -trenza de Lorenz.

Por lo tanto usando relaciones de BMW tenemos:

$$\begin{aligned}
 g_i x &= g_i g_\pi w_{2k} f_k = (g_i)^2 g_{\pi_1} w_{2k} f_k \\
 &= (1 - m g_i + m l^{-1} e_i) g_{\pi_1} w_{2k} f_k \\
 &= g_{\pi_1} - m g_i g_{\pi_1} + m l^{-1} e_i g_{\pi_1} \\
 &= g_{\pi_1} w_{2k} f_k - m g_i g_{\pi_1} w_{2k} f_k + m l^{-1} e_i g_{\pi_1} w_{2k} f_k \\
 &= g_{\pi_1} w_{2k} f_k - m g_\pi w_{2k} f_k + m l^{-1} e_i g_{\pi_1} w_{2k} f_k \in L_n^{(q)}
 \end{aligned}$$

y $e_i x = e_i g_\pi w_{2k} f_k = e_i g_i g_{\pi_1} w_{2k} f_k = l^{-1} e_i g_{\pi_1} w_{2k} f_k$.

Ahora notemos que π^{-1} es una permutación de Lorenz inversa y la trenza g_π puede ser vista como una trenza de Lorenz inversa $g_{\pi^{-1}}$, es decir, $g_\pi = \alpha(g_{\pi^{-1}})$, donde $\alpha(g_{\pi^{-1}})$ la llamaremos trenza de permutación de Lorenz inversa.

También vemos que cumple con $\pi(i+1) = \pi(i) + 1$. En efecto, si $\pi(i+1) \leq 2k$ y $\pi(i) > 2k$ entonces $\alpha(g_{\pi^{-1}})$ sigue siendo una $(2k, q)$ -trenza de Lorenz. Por otro lado, si $\pi(i+1) > 2k$ y $\pi(i) \leq 2k$ entonces por lema 11 $g_i g_\pi = g_i \alpha(g_{\pi^{-1}})$ que es una trenza de Lorenz inversa. Por lo tanto, $g_i g_\pi w_{2k} f_k = g_\pi g_{\pi(i)} w_{2k} f_k$ se encuentra en $X_n^{(q)}$, ahora sólo nos queda por considerar el elemento $e_i x$. Para ello definiremos la permutación ρ como sigue:

$$\rho(j) = \begin{cases} 2k & \text{si } j = \pi(i) \\ j-1 & \text{si } \pi(i) < j \leq 2k \\ j+1 & \text{si } 2k+1 \leq j < \pi(i+1) \\ 2k+1 & \text{si } j = \pi(i+1) \\ j & \text{si } \text{otro caso} \end{cases}$$

En estricto rigor la función ρ logra cruzar aquellas cuerdas que no pudo cruzar $\alpha(g_{\pi^{-1}})$, lo que hace que el producto $g_\pi g_\rho$ aún siga siendo una trenza de permutación positiva. Entonces $g_\pi g_\rho = g_{\pi_1}$, donde $\pi_1 = \rho \circ \pi$. Además, ρ intercambia las primeras $2k$ cuerdas con las últimas q cuerdas entre ellas mismas, así la cuerda $\pi(i)$ pasa al puesto $2k$ y lo mismo ocurre con $\pi(i+1)$ que ocupa el lugar $2k+1$, como se muestra en el siguiente diagrama.

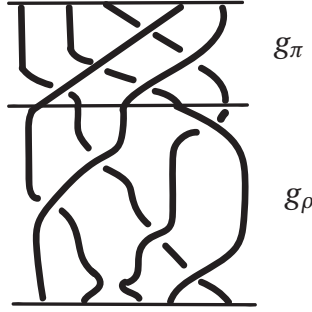


Figura 3.26

Luego, podemos escribir $x = g_{\pi_1}(g_\rho)^{-1}w_{2k}f_k$ con $g_\rho \in BMW_{2k}S^{2k}(B_q)$. Notar que π_1 cumple $\pi_1^{-1}(i) < \pi_1^{-1}(j)$, si y sólo si, $i < j \leq 2k-1$.

Por lo tanto es suficiente probar usando el lema 12 que $e_i x' \in L_n^{(q)}$ donde $x' = g_{\pi_1}w'_{2k}f_k$ y $\pi_1(i+1) = \pi_1(i) + 1$, entonces $e_i x' = e_i g_{\pi_1}w'_{2k}f_k = g_{\pi_1}e_{\pi_1(i)}w'_{2k}f_k$. Primero fijemonos en el elemento e_{2k} que está entre $S^{2k}(BMW_q)$ y $BMW_{2k}f_k$, y segundo por los lemas enunciados anteriormente es que se trabajó sobre $BMW_{2k}f_k$. Luego por el lema 13 cualquier elemento de $BMW_{2k}f_k$ es combinación lineal de elementos del conjunto $g_m g_{m+1} \cdots g_{2k-2} e_{2k-1} BMW_{2k}f_k$ y finalmente usando el lema 14 podemos escribir el elemento $e_i x'$ como combinación lineal de elementos de la forma $g_{\pi'} BMW_{2k}f_k$, y así se libera e_{2k} . Por lo tanto $e_i x' \in L_n^{(q)}$. $\square$

Esto concluye la prueba para la proposición 16 y la prueba inductiva del lema 10. Ahora tenemos establecido el isomorfismo φ de BMW_n a MT_n para todo n . Mas formalmente:

Teorema 22. *Para todo n , la función $\varphi : BMW_n \longrightarrow MT_n$ es un isomorfismo.*

Demostración. La sobreyectividad se probó en el teorema 18 de la sección 3.1.2. La inyectividad es evidente para $n = 0, 1$. Mostramos por doble inducción sobre n y q que φ es inyectivo sobre todos los ideales $BMW_n^{(q)}$. Por el teorema 20, si φ es inyectiva sobre BMW_{n-1} entonces φ es inyectiva sobre $BMW_n^{(0)}$ (si n es par) o sobre $BMW_n^{(1)}$ (si n es impar). Además por el lema 10 y proposición 20, si φ es inyectivo sobre BMW_{n-1} y sobre $BMW_n^{(q-2)}$, entonces φ es inyectiva sobre $BMW_n^{(q)}$ para todo n, q . $\square$

Bibliografía

- [1] A basis for the birman-wenzl algebra. in preparation manuscript, 1989, 2000.
- [2] ALEXANDER, J. W. A Lemma on Systems of Knotted Curves. *Proc Natl Acad Sci U S A* 9 (12 1923), 93—95.
- [3] ARJEH M. COHEN, D. A. G., AND WALES, D. B. BMW algebras of simply laced type. *Journal of Algebra* 286 (12 2005), 107–153.
- [4] ARTIN, E. Theory of braids. *Ann. of Math.* 48 (12 1947), 101–126.
- [5] BIRMAN, J. S., AND WENZL, H. Braids, link polynomials and a new algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.* 313 2 (12 1989), 249–273.
- [6] GOODMAN, F. M., AND HAUSCHILD, H. Affine Birman–Wenzl–Murakami algebras and tangles in the solid torus. *Annals of Math* 187 (12 2006), 177—137.
- [7] HÄRING-OLDENBURG, R. Cyclotomic Birman-Murakami-Wenzl algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra* 161 (12 2001), 113—144.
- [8] H.R.MORTON, AND P.TRACZYK. Knots and algebras. In *Contribuciones Matemáticas en homenaje al profesor D. Antonio Plans Sanz de Bremond. ed. E. Martin-Peinador and A. Rodez Usan, University of Zaragoza* (12 1990), 201–220.
- [9] JONES, V. F. R. A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* (12 1983), 103–111.
- [10] JONES, V. F. R. Index for subfactors. *Inventiones Mathematicae* 72 (12 1983), 1—25.
- [11] JONES, V. F. R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math* 126 (12 1987), 335—388.

-
- [12] KASSEL, C., AND TURAEV, V. *Braid groups*. Springer, 2008.
 - [13] KAUFFMAN, L. H. An invariant of regular isotopy. *Trans. Amer. Math. Soc.* 318 2 (12 1990), 417–471.
 - [14] KAUFFMAN, L. H., AND LAMBROPOULOU, S. Skein Invariants of Links and Their State Sum Models. 226.
 - [15] LICKORISH, W. R. *An Introduction to Knot Theory*. Springer, 1997.
 - [16] MURAKAMI, J. The Kauffman polynomial of links and representation theory. *Osaka J. Math.* 24 4 (12 1987), 745–758.
 - [17] R. BRAUER. On algebras which are connected with the semisimple continuous groups. *Annals of Math* 38 (12 1937), 857–872.
 - [18] RUI, H., AND SI, M. Gram determinants and semisimple criteria for Birman-Wenzl algebras. *Annals of Mathematics Preprint*, *arXiv:math/0607266v1* (2006).
 - [19] WENZL, H. On the structure of Brauer’s centralizer algebras. *Annals of Mathematics* 128 (12 1988), 173—193.