



Universidad de Valparaíso  
Facultad de Ciencias  
Instituto de Matemáticas

## **La invariante $Q$ y una versión tied de ella**

*Tesis para optar al grado de  
Magíster en Matemáticas*

Presentada por:  
CLAUDIO ANDRÉS FIERRO PARRAGUEZ

*Profesor Guía: Dr. Jesús Juyumaya Rojas*

VALPARAÍSO  
AGOSTO 2024

# Agradecimientos

Primero agradecer a mi familia, en especial a mi madre, padre y hermano. Por brindarme siempre su apoyo incondicional en mi continua formación en la matemática. También a mis amigas y amigos, que siempre han estado ahí para los buenos y malos momentos.

Agradecer también a la Universidad de Valparaíso la oportunidad de poder haber formado parte de los estudiantes de este programa generación 2021, en donde tuve la oportunidad de formar una amistad con mis compañeros: Bladimir Blanco y Jorge Gómez. También agradecer al cuerpo docente del programa: Rodrigo Castro, Marcelo Flores, Amalia Pizarro, Milton Espinoza y Jesús Juyumaya. Un reconocimiento especial a mi profesor guía el profesor Jesús Juyumaya, por déjame nuevamente ser su estudiante tesista y aprender más de la teoría de Nudos y la teoría de tied link. También a O' Bryan Cárdenas por el apoyo brindado en programación.

# Índice general

|                                                |           |
|------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Preliminares</b>                         | <b>5</b>  |
| 1.1. Nociones generales de topología . . . . . | 5         |
| 1.2. Nudos y links . . . . .                   | 6         |
| 1.3. Links equivalentes . . . . .              | 13        |
| 1.4. Diagrama de link . . . . .                | 14        |
| 1.5. Los movimientos de Reidemeister . . . . . | 17        |
| 1.6. Trenzas . . . . .                         | 20        |
| 1.7. Equivalencia de trenzas . . . . .         | 24        |
| 1.8. Estructura $\mathfrak{B}_n$ . . . . .     | 24        |
| 1.9. Proyección de una trenza . . . . .        | 26        |
| 1.10. Diagrama de una trenza . . . . .         | 27        |
| 1.11. $n$ -trenzas elementales . . . . .       | 28        |
| 1.12. Presentación de Artin de $B_n$ . . . . . | 29        |
| 1.13. Nudos y Trenzas . . . . .                | 30        |
| <b>2. Invariantes</b>                          | <b>32</b> |
| 2.1. Invariantes . . . . .                     | 32        |
| 2.2. Invariantes polinomiales . . . . .        | 33        |
| 2.2.1. Polinomio de Alexander . . . . .        | 33        |
| 2.2.2. Polinomio de Conway . . . . .           | 35        |
| 2.2.3. Polinomio de Jones . . . . .            | 37        |
| 2.2.4. Polinomio de Homflypt . . . . .         | 44        |
| 2.2.5. Polinomio Bracket . . . . .             | 48        |
| 2.3. Polinomio de Kauffman . . . . .           | 49        |
| 2.3.1. Polinomio $Q$ . . . . .                 | 52        |

|                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3. Tied Links</b>                                                           | <b>59</b> |
| 3.1. Conjunto de Particiones . . . . .                                         | 59        |
| 3.2. Monoide de trenzas ligadas . . . . .                                      | 61        |
| 3.3. Tied Links . . . . .                                                      | 64        |
| 3.4. Teorema de Alexander para tied link . . . . .                             | 66        |
| 3.5. Teorema de Markov para tied links . . . . .                               | 69        |
| <b>4. Invariantes de Tied link</b>                                             | <b>71</b> |
| 4.1. Invariante $\mathcal{F}$ . . . . .                                        | 71        |
| 4.2. Invariante $\mathcal{L}$ . . . . .                                        | 73        |
| 4.3. Invariante $\langle\langle \ \rangle\rangle$ . . . . .                    | 74        |
| <b>5. Una extensión de <math>Q</math> a tied links</b>                         | <b>76</b> |
| 5.1. Extensión entre el polinomio bracket y el polinomio de Kauffman . . . . . | 76        |
| 5.2. Relación entre el polinomio $Q$ y el polinomio Kauffman . . . . .         | 77        |

# Introducción

La teoría de nudos tiene su origen a fines del siglo XVIII y proponía dar una explicación al comportamiento de los átomos a la hora de absorber y emitir luz. Con el descubrimiento del electrón, esta teoría fue refutada. Por lo cual la teoría de nudos estuvo relativamente estancada. Tenía que llegar el XX, para que la teoría de nudos resurgiera nuevamente, gracias a los aportes realizados por los topólogos de la época tales como: Max Dehn, J. W. Alexander y Kurt Reidemeister.

El problema fundamental de la teoría de nudos es indicar cuándo dos nudos son equivalentes, es decir, cuando uno de ellos se puede obtener a partir del otro mediante una deformación continua. La idea de deformación continua es formalmente definido en matemáticas mediante el concepto de isotopía ambiente.

En el año 1920, J.W. Alexander define la primera invariante polinomial de nudos, conocida como polinomio de Alexander. Tal polinomio es de una variable y puede ser definido utilizando herramientas algebraicas [15]. En el año 1925 E. Artin introduce el grupo de trenza, ver[4], generando con esto un nuevo impulso a la teoría de nudos. Fue así que J.W. Alexander demostró que todo link puede ser obtenido mediante la cerradura de una trenza, ver Definición 1.13.2. Luego, en el año 1930, A. Markov introdujo los movimientos de Markov  $M_1$  y  $M_2$ , ver [7], que se muestran a continuación.

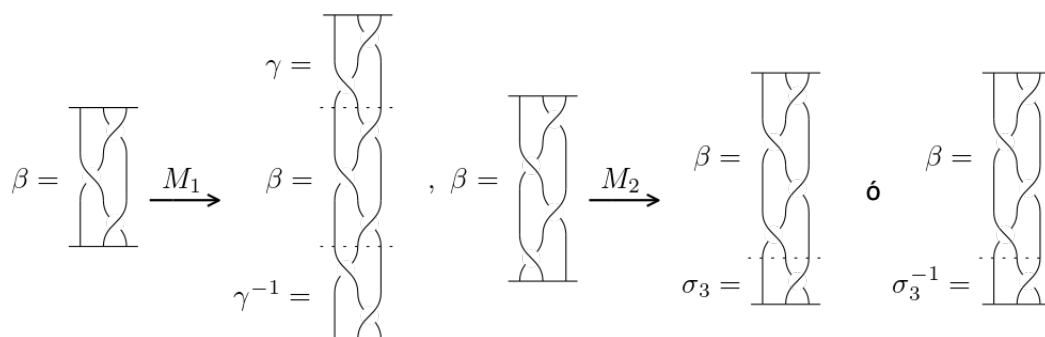


Figura 1: Movimientos de Markov

Usando estos movimientos, Markov demuestra que dos links son equivalentes, si y sólo si, las trenzas que definen estos links (según el teorema de Alexander) son Markov equivalentes, para detalles.

En 1926, Kurt Reidemeister introduce los siguientes movimientos sobre diagramas de links, como sigue:

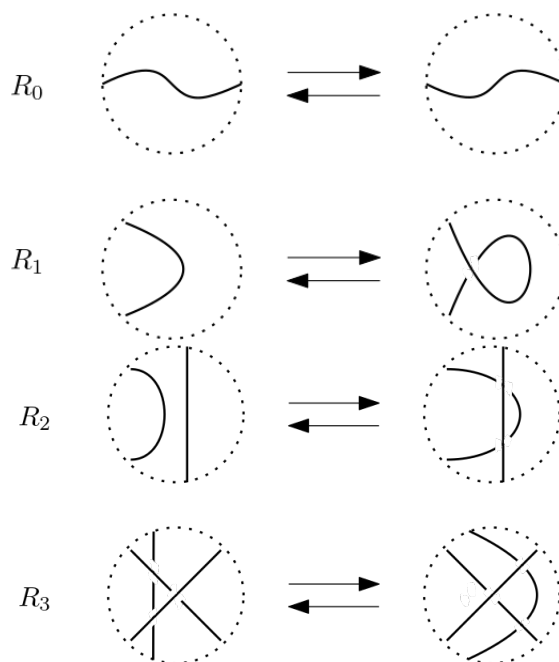


Figura 2: Movimientos de Reidemeister

Tales movimientos se conocen hoy en día como los movimientos de Reidemeister. Estos permiten estudiar los links mediante sus diagramas. Más precisamente, el teorema de Reidemeister dice que dos links son ambientemente isotópicos, si y sólo si, sus diagramas son equivalentes mediante una secuencia finita de movimientos de Reidemeister, ver [15]. Así, usando el teorema de Reidemeister ayudó a la construcción de una tabla de clasificación de nudos (ver [14, Apéndice I]). Esta teoría no tan solo estudia los nudos, sino también los links. Un link corresponde a una unión disjunta de una cantidad finita de nudos, los que serán estudiados a partir de diagramas.

J.H. Conway, estableció que el polinomio de Alexander puede definirse mediante una relación hecha, ver [15, Definición 6.2.1]. Así el polinomio de Alexander es conocido también como el polinomio de Alexander-Conway.

V. F. Jones introduce en el año 1984 una segunda invariante polinomial conocida

como el polinomio de Jones. Este polinomio no solo da nuevos bríos a la teoría de nudos, sino también activa investigaciones en otras áreas de la matemática, como lo son la Física y Biología molecular, para más detalles ver [18].

Una pregunta natural es ¿existirán otros invariantes polinomiales?. Esta pregunta fue respondida con la definición del polinomio de HOMFLYPT, cuyo nombre se debe a sus descubridores: Jim Hoste, Adrian Ocneanu, Kenneth Millett, Peter J. Freyd, W.B.R. Lickorish, David N. Yetter, Józef H. Przytycki y Pawel Traczyk. Este polinomio es en dos variables y extiende tanto al polinomio de Alexander y al polinomio de Jones.

Más tarde, L. Kauffman introduce una nueva invariante polinomial, conocida como el polinomio de Kauffman. Tal invariante es también en dos variables y se define originalmente mediante relaciones madeja. Notemos que el polinomio de Jones se puede obtener mediante una especialización del polinomio de Kauffman .

Se define en 1986 una nueva invariante polinomial, mediante relacion skein llamado polinomio  $Q$ , para detalles ver [16]. Este polinomio puede ser construido mediante una especialización del polinomio de Kauffman. El polinomio  $Q$  es el foco central de esta tesis.

La teoría de tied links, fue introducida en el año 2016 por Aicardi-Juyumaya, ver [1]. Esta teoría asigna ligas (tied) entre las componentes de un link y puede ser pensado como una generalización de la teoría clásica de nudos. En [1, Teorema 2.1] y [2, Teorema 1 y Teorema 3], se definen las invariantes polinomiales para tied links.

Esta tesis se organiza como sigue. En el Capítulo 1 se presentará la teoría clásica de nudos y links, para ello daremos un pequeño recordatorio de las nociones básicas de topología que serán utilizadas en la definición de ellos. En este capítulo se presentarán elementos fundamentales tales como: equivalencia entre nudos y links (orientados o no) y diagramas de nudos y links, sobre estos últimos, los movimientos de Reidemeister para diagramas de nudos o links. También se presentarán los conceptos básicos de la teoría de trenzas en lo que destacaremos la presentación de Artin, los teoremas de Alexander y Markov, entre otros.

En el Capítulo 2 se presentarán las invariantes polinomiales más importantes hasta la fecha conocidos, dentro de los que se destacaran: Polinomio de Alexander, Polinomio Alexander-Conway, Polinomio de Jones, Polinomio de Kauffman y por último, y no menos importante el polinomio  $Q$  pues corresponderá a una de las bases de la conjetura a presentar.

En el Capítulo 3 se presentará la teoría de tied links, comenzando por un recorri-

do por el conjunto de particiones, los monoides de trenzas ligadas (braid) para luego ser generalizada a nivel de link, los que llamaremos tied links. En este capítulo también se presentara la teoría de trenzas ligadas, en la que encontraremos el teorema de Alexander para tied link y los movimientos de Markov para trenzas ligadas.

En el Capítulo 4 se presentarán tres invariantes de tied links, tales como: La invariante  $\mathcal{F}$  el que corresponde a ser una extensión del polinomio de HOMFLYPT a nivel de nudos (o link) básicos. La invariante  $\mathcal{L}$  que es una extensión del polinomio de Kauffman y por último el invariante doble bracket  $\langle\langle \ \ \rangle\rangle$ , que es una extensión del polinomio bracket. Cada uno de estos invariantes se definirán mediante relaciones skein.

En el último capítulo mostraremos las relaciones que existen entre los invariantes clásicos de nudos (o links) con las invariantes tied link definidas en el Capítulo 4, con el efectos de poder conjeturar la existencia de una versión tied del polinomio  $Q$ , y de manera que este último, sea una especialización de la invariante  $\mathcal{L}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

En el presente capítulo se presentarán las nociones básicas de la teoría de nudos, que es la base para la lectura de esta tesis.

### 1.1. Nociones generales de topología

Comenzaremos definiendo algunas herramientas necesarias en este capítulo.

**Definición 1.1.1** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos. Una función  $\varphi : X \rightarrow Y$  se dice que es un homeomorfismo si:

- 1)  $\varphi$  es una biyección,
- 2)  $\varphi$  es una función continua,
- 3) la función inversa,  $\varphi^{-1}$ , es continua.

**Definición 1.1.2** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos con  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$  y dos funciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  se dicen homotópicas si existe una función continua  $h$  definida como  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $h(x, 0) = f(x)$  y  $h(x, 1) = g(x)$ .

**Notación 1.1.1** Denotaremos por  $h_t$  una función homotopía definida como  $h_t : X \rightarrow Y$  tal que  $h_t(x) = h(x, t)$  con  $t \in [0, 1]$  la que llamaremos función tiempo.

**Definición 1.1.3** Diremos que una homotopía es una isotopía, si  $h_t$  es una función inyectiva.

**Definición 1.1.4** Sea  $X$  un espacios topologicos y  $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$  una isotopía. Diremos que  $h$  es una isotopía ambiente de  $X$ , si  $h$  lleva  $X$  en  $X$ , es decir:  $X = Y$ :

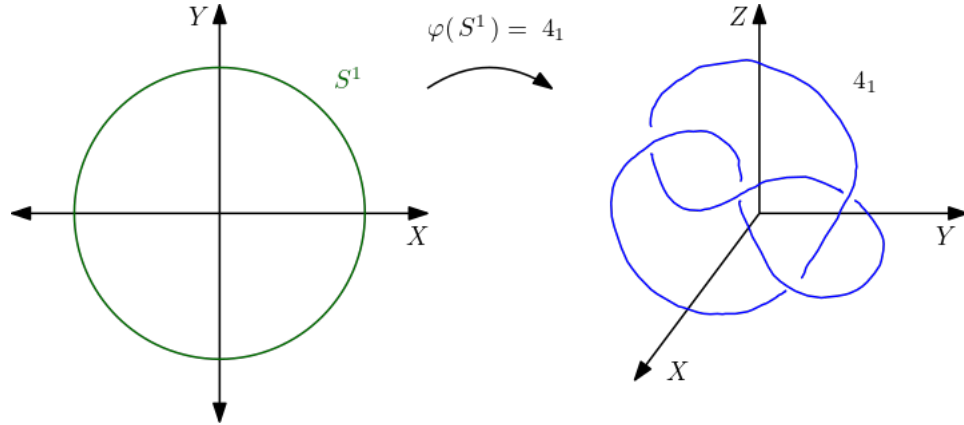
$$h : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

## 1.2. Nudos y links

Antes de abordar la siguiente sección se recomienda al lector ver [10, Table 1.1. pág. 5], en ella encontrara algunos nudos que serán usados como ejemplo mayoritariamente en está sección. En los que se destacan: nudo trivial, nudo trébol ( $3_1$ ), nudo ocho ( $4_1$ ), etc.

**Definición 1.2.1** Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^3$ . Se dice que  $K$  es un nudo si existe un homeomorfismo  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $\varphi(S^1) = K$ .

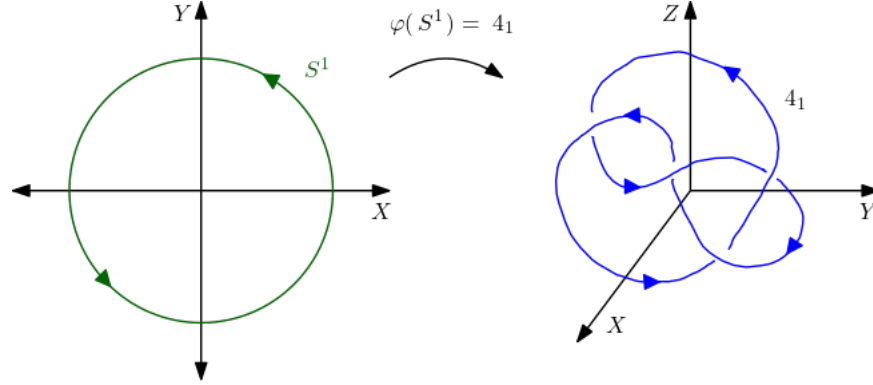
**Ejemplo 1.2.1** Sea el nudo ocho  $4_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ . Sea  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un homeomorfismo, tal que  $\varphi(S^1) = 4_1$ , es decir:



**Definición 1.2.2** Sea  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un homeomorfismo. Si  $S^1$  es un círculo orientado, tal que  $\varphi(S^1) = K$ , entonces  $K$  es un nudo orientado.

La definición anterior se debe a que todo homeomorfismo preserva la orientación heredada del círculo  $S^1$

**Ejemplo 1.2.2** Una de las posibilidades de orientación del nudo ocho ( $4_1$ ) es mostrada a continuación.



**Observación 1.2.1** El círculo unitario  $S^1$  tiene solo dos posibilidades de orientación, por lo que un nudo puede tener solo dos orientaciones.

**Notación 1.2.1** Denotaremos por  $|\mathcal{K}|$  el conjunto de nudos no orientados y denotaremos por  $\mathcal{K}$  el conjunto de nudos orientados.

**Definición 1.2.3** Sea  $K$  un nudo orientado. Definiremos por  $|K|$  un nudo obtenido de  $K$  omitiendo la orientación.

**Definición 1.2.4** [10, Definición 1.1] Sea  $L \subseteq \mathbb{R}^3$ . Denotaremos por  $L$  un link, si él está formado por una cantidad finita de uniones disjuntas de  $m$  nudos  $K_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ , es decir:

$$L = \bigsqcup_{i=1}^m K_i$$

En esta tesis apadrinaremos un link transversal el que denotaremos por  $C$ , es decir:

**Definición 1.2.5** Definiremos por  $C$  al link transversal como el formado por un trébol y el nudo trivial enlazados entre sí, tal como se muestra en la siguiente figura:

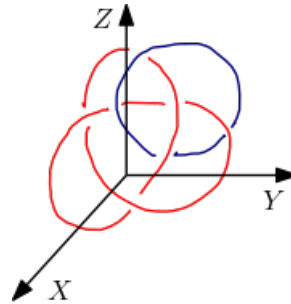


Figura 1.1: link  $C$

**Observación 1.2.2** Dado que un link esta compuesto por nudos estos pueden estar orientados o no, es por ello que un link también puede estar orientado o no.

**Notación 1.2.2** Denotaremos por  $L$  al link orientado y por  $|L|$  el link obtenido de  $L$  omitiendo la orientación. Por otro lado, denotaremos por  $\mathcal{L}$  el conjunto de links orientado y por  $|\mathcal{L}|$  el de los links no orientados.

**Ejemplo 1.2.3** Sea  $|L| \subseteq \mathbb{R}^3$  un link formado por la **unión disjunta** de dos componentes  $|K_1|, |K_2| \in |\mathcal{K}|$ , tal que  $|K_1| = |3_1|$  y  $|K_2| = |4_1|$ , cuyas componentes que lo conforman están **enlazados**, es decir:

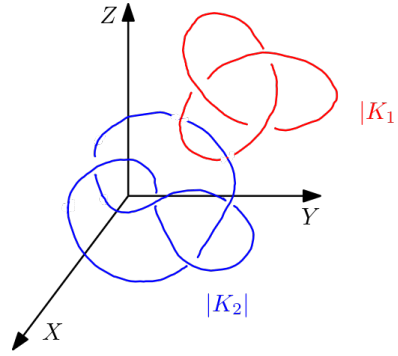


Figura 1.2: Link  $|L| = |K_1| \sqcup |K_2|$ .

**Ejemplo 1.2.4** Sea  $|L| \subseteq \mathbb{R}^3$  un link formado por la **unión disjunta** de dos componentes  $|K_1|, |K_2| \in |\mathcal{K}|$ , tal que  $|K_1| = |3_1|$  y  $|K_2| = |4_1|$ , cuyas componentes que lo conforman **no están enlazados**, es decir:

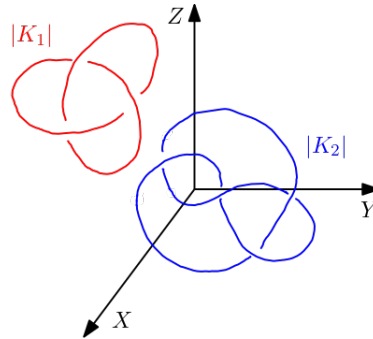


Figura 1.3: Links  $|L| = |K_1| \sqcup |K_2|$

**Observación 1.2.3** Los ejemplos anteriores 1.2.3 y 1.2.4, puede producir en él lector admitir dos interpretaciones para el mismo concepto de **unión disjunta**. Tal ambigüedad

no genera ningún tipo de problema, pues para las propiedades tanto de link  $L$  (orientado o no) y un nudo  $K$  (orientado o no) pueden estar **elazadas** o **no enlazadas**. Tradicionalmente en la teoría de nudos o link, unión disjunta es no enlazada.

**Ejemplo 1.2.5** Consideremos el siguiente link  $L = K_1 \sqcup K_2$ , con  $K_1 = 3_1$  y  $K_2 = 4_1$ , es decir

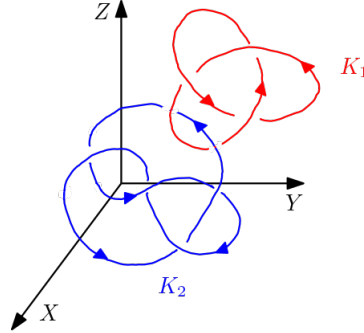


Figura 1.4:  $L = K_1 \sqcup K_2$

**Definición 1.2.6** Sean  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$  dos nudos no enlazados. Definiremos por  $K_1 \# K_2$  la suma conexa entre  $K_1$  y  $K_2$ , es decir,  $K_1 \# K_2$  corresponde al resultado obtenido al realizar el siguiente proceso:

- 1) Tomar un arco no anudado de cada nudo  $K_1$  y  $K_2$ .

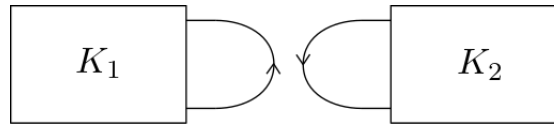


Figura 1.5

- 2) Realizar una interrupción (corte) a cada arco del proceso anterior. Rescatando la identificación del sentido de la orientación original de cada uno de los arcos del "nudo"  $K_1$  y  $K_2$ . Se asignan las etiquetas  $P_1, P_2$  y  $Q_1, Q_2$  a los "nudos"  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente.

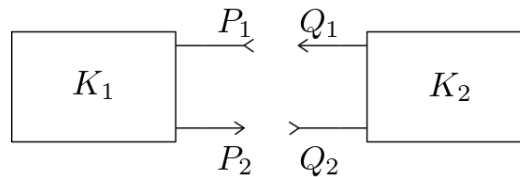


Figura 1.6

- 3) Finalmente se unen los extremos  $P_1, P_2$  con  $Q_1, Q_2$  de cada uno de los "nudos"  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente, de manera, que dicha unión debe preservar la misma orientación entre los extremos, es decir: unimos el extremo  $P_1$  con  $Q_1$  y  $P_2$  con  $Q_2$ , notemos que los extremos  $P_1$  no se puede unir con el extremo  $Q_2$ , dado que al unir no se respeta la orientación, lo mismo para el caso de unir los extremos  $P_2$  con  $Q_1$ .

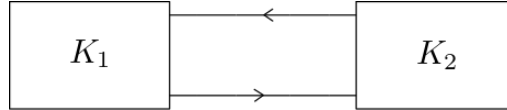
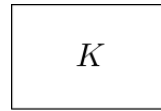


Figura 1.7

- 4) Quedando finalmente un nudo de una sola componente.

Figura 1.8:  $K = K_1 \# K_2$ 

**Ejemplo 1.2.6** Sea  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ , con  $K_1 = 3_1$  y  $K_2 = 4_1$ . Determine la suma conexa  $K = K_1 \# K_2$ .

**Desarrollo:** Consideremos los nudos  $K_1 = 3_1$  y  $K_2 = 4_1$  no enlazados, vistos gráficamente de la siguiente forma:

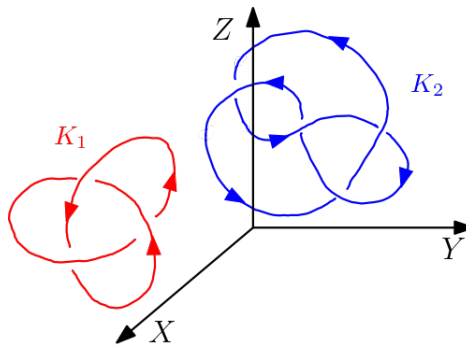
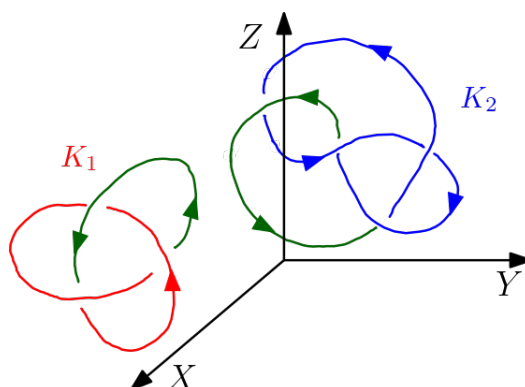


Figura 1.9

**Paso 1:** Consideremos del nudo  $K_1$  y de  $K_2$  un arco de cada uno, el que destacaremos de color verde, es decir:



*Paso 2: Interrumpir (corta) el arco escogido y etiquetar con  $P_1, P_2$  y  $Q_1, Q_2$  los extremos de los "nudos"  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente, es decir:*

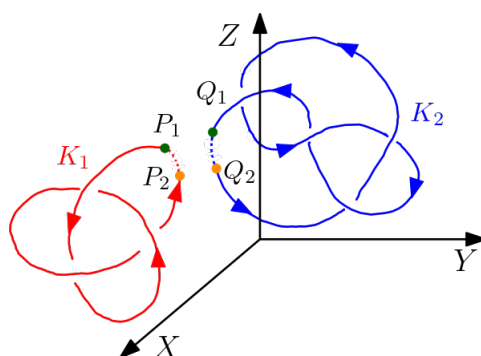


Figura 1.10

*Paso 3: Luego se unen los extremos  $P_1$  con  $Q_1$  y  $P_2$  con  $Q_2$ , dado que respetan el sentido de la orientación de ambos "nudos"  $K_1$  y  $K_2$*

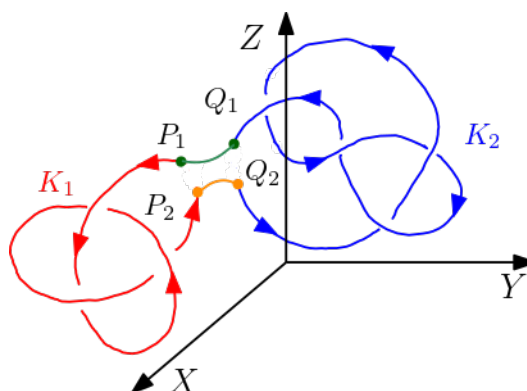


Figura 1.11

*Paso 4: finalmente se obtiene un único nudo  $K$ , formado por una sola componente.*

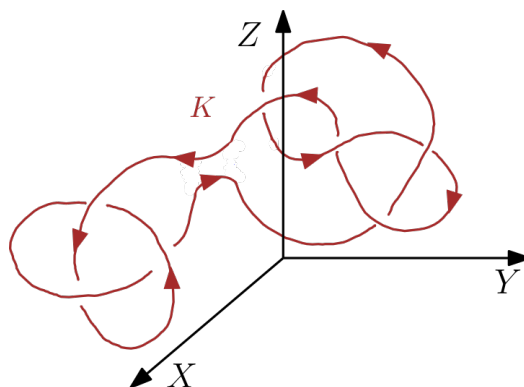


Figura 1.12

**Ejemplo 1.2.7** Consideremos el siguiente link, el que es llamado Hopf-link ( $|HL|$ )

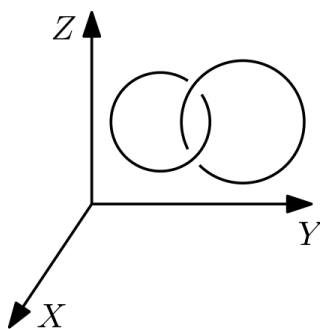


Figura 1.13: Link  $|HL|$

**Ejemplo 1.2.8** Determinemos algunas de las posibles orientaciones del Hopf-link, es decir:

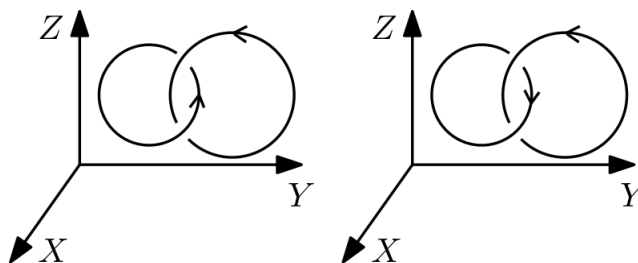


Figura 1.14: orientaciones del Hopf.link

**Definición 1.2.7** El link  $\neg L$  es llamado inverso de  $L$ , si este es obtenido al invertir la orientación de todas las componentes del link  $L$ .

**Ejemplo 1.2.9** Sea  $L = K_1 \sqcup K_2$  el siguiente link.

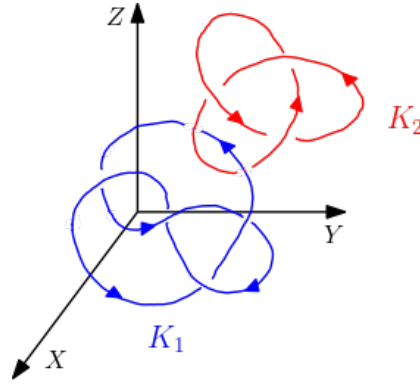


Figura 1.15: Link  $L$

Luego el link  $\neg L$  corresponde a:

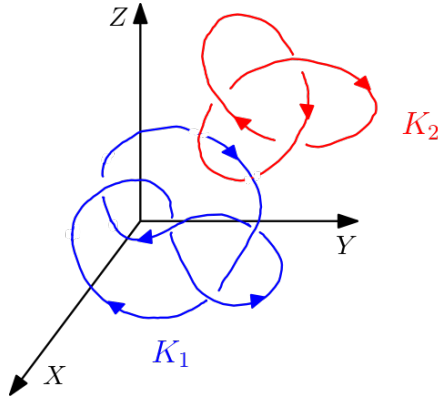


Figura 1.16: link  $\neg L$

### 1.3. Links equivalentes

**Definición 1.3.1** [10, Definición 1.2] Dos links  $L_1$  y  $L_2$  son ambientes isotópicos (equivalentes), si existe una isotopía de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $h_0(L_1) = L_1$  y  $h_1(L_1) = L_2$  con  $h : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una isotopía ambiente. Denotaremos como  $L_1 \sim L_2$ , al hecho de que  $L_1$  y  $L_2$  son equivalentes.

**Proposición 1.3.1**  $\sim$  es una relación de equivalencia.

Notemos que probar que dos links  $L_1$  y  $L_2$  son equivalentes no es trivial en general, definir la isotopía  $h_0(L_1) = L_1$  y  $h_1(L_1) = L_2$  es difícil.

## 1.4. Diagrama de link

Dentro de las estrategias de estudio de los nudos y links, objetos en  $\mathbb{R}^3$ , es trasladar dicho estudio al espacio  $\mathbb{R}^2$ . Esta traslación es vía proyección genérica.

**Definición 1.4.1** Definimos por  $\mathfrak{P}$  a la proyección genérica del link  $|L|$  sobre un plano en  $\mathbb{R}^2$  si las únicas autointersecciones permitidas son los cruces dobles, es decir:



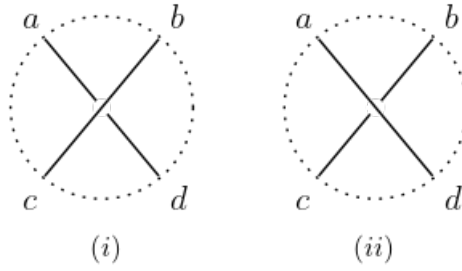
Figura 1.17: Cruce de doble punto de  $\mathfrak{P}$

**Notación 1.4.1** En lo que sigue, cada cruce doble será etiquetado como se presenta en la siguiente figura, de modo de obtener los segmentos  $ad$  y  $bc$ .

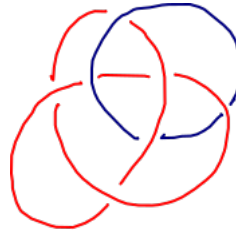


Figura 1.18: Cruce doble etiquetado

**Definición 1.4.2** Definimos por  $|D_L|$  el diagrama no orientado del link  $|L|$ , si cada cruce doble etiquetado se identifica: (i) el segmento  $bc$  está sobre el segmento  $ad$  y (ii) el segmento  $ad$  está sobre el segmento  $bc$ .

Figura 1.19: Diagrama  $|D_L|$ 

**Ejemplo 1.4.1** A continuación se muestra un diagrama del link transversal  $|C|$ .

Figura 1.20: Diagrama del link transversal  $|C|$ , denotado como  $|D_C|$ 

**Notación 1.4.2** Denotaremos por  $\mathfrak{D}$  el conjunto de diagramas orientados, consecuentemente  $|\mathfrak{D}|$  el conjunto de diagramas no orientados.

**Definición 1.4.3** El diagrama  $|D_L|^*$  es el reflejado de  $|D_L|$  si este se obtiene al cambiar los cruces del diagrama  $|D_L|$  como sigue:

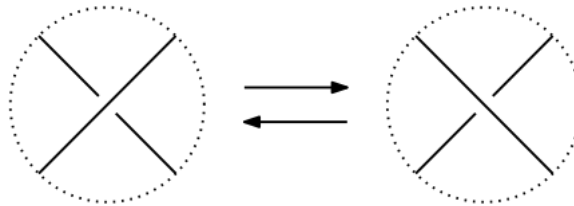


Figura 1.21: Cambio de identificación de cruces.

**Ejemplo 1.4.2** Utilizando la Figura 1.20. determinemos  $|D_C|^*$  del link  $|C|$ , es decir:

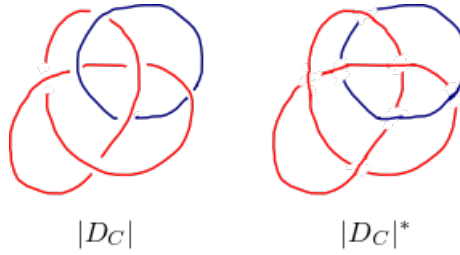


Figura 1.22: Diagrama reflejado  $|D_C|^*$  del diagrama  $|D_C|$ .

**Definición 1.4.4** Diremos que  $D_L$  es el diagrama orientado del link  $L$ , si cada cruce tiene solo una de las siguientes configuraciones:

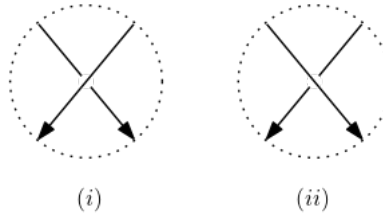


Figura 1.23: (i) cruce positivo y (ii) cruce negativo.

**Ejemplo 1.4.3** Un posible diagrama orientado  $D_C$  para el link  $C$ , es el siguiente:

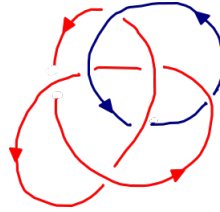


Figura 1.24: Diagrama  $D_C$ .

**Definición 1.4.5** Un diagrama  $D$  es signado si cada cruce  $c_i$  se etiqueta con  $\pm 1$  según se indica a continuación:

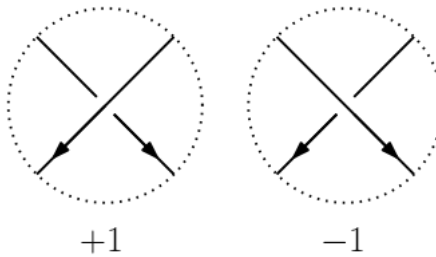


Figura 1.25: Identificación de cruces signados

con  $\text{sig}(c_i) = \pm 1$  el signo del cruce  $c_i$ .

**Ejemplo 1.4.4** Consideremos el diagrama de link transversal  $D_C$  orientado. A continuación se da una interpretación gráfica del diagrama signado del link  $C$

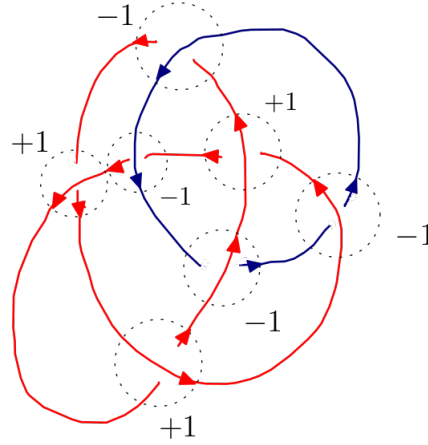


Figura 1.26: Diagrama signado del link  $C$

**Notación 1.4.3** Denotaremos por  $w(D)$  a la suma de los signos asignados a los cruces  $c_i$ , es decir:

$$w(D) = \sum_{i=1}^n \text{sig}(c_i).$$

**Ejemplo 1.4.5** Determinemos  $w(C)$  del link transversal  $C$ , ver Figura 1.26.

$$\omega(C) = +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = -1$$

## 1.5. Los movimientos de Reidemeister

Los movimientos de Reidemeister son un tipos de movimientos locales que pueden ser aplicados al un diagrama  $D$  de un link  $L$  (orientados o no). En el año 1927 Kurt Reidemeister demuestra, que dos link  $L$  y  $L'$  son equivalentes si el diagrama de uno de ellos se obtiene a partir del otro mediante una cantidad finita de movimientos de Reidemeister. Este resultado hoy se conoce como Teorema de Reidemeister [[9], página 396].

**Notación 1.5.1** Denotaremos por  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  a los movimientos locales de un diagrama  $|D|$  proveniente de un link  $|L|$ , los que llamaremos Movimientos de Reidemeister. A saber:

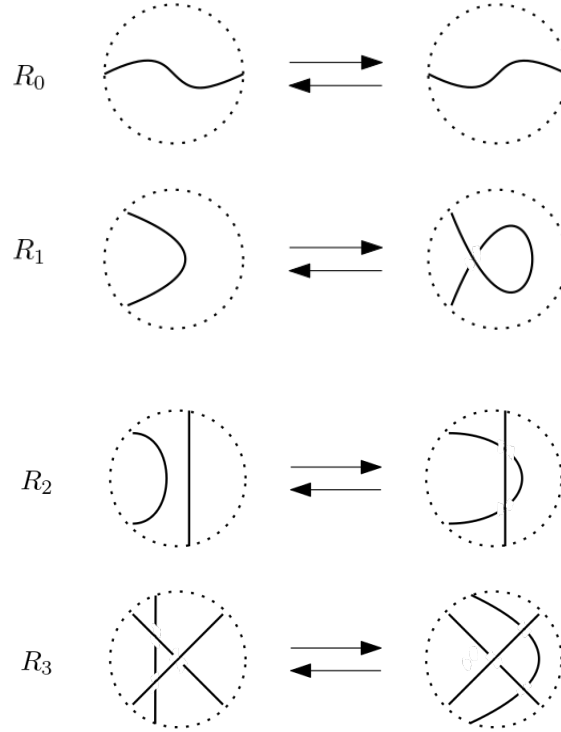
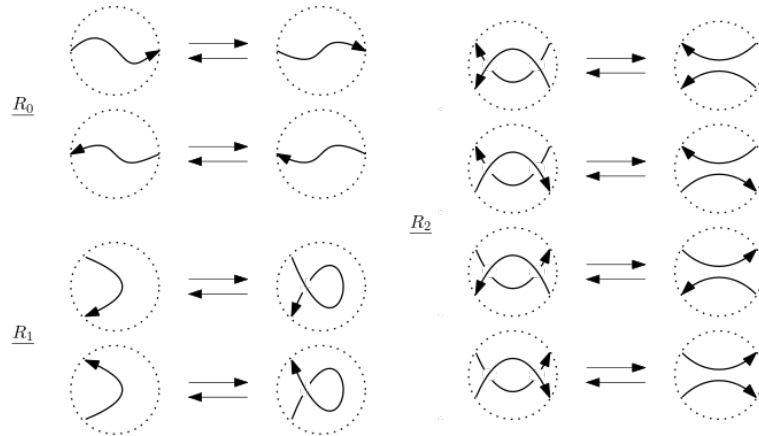


Figura 1.27: Movientos de Reidemeister para diagramas no orientados.

Analogamente, denotaremos por  $\underline{R}_0$ ,  $\underline{R}_1$ ,  $\underline{R}_2$  y  $\underline{R}_3$  a los Movimientos de Reidemeister para diagramas orientados. A saber:



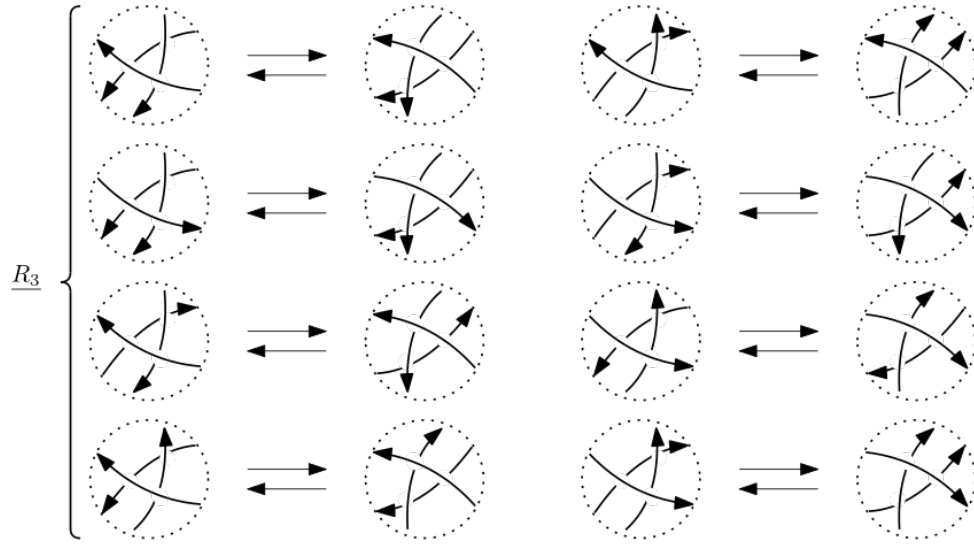


Figura 1.28: Movimiento de Reidemeister para diagramas orientados.

Sin pérdida de generalidad, las siguientes definiciones y teoremas de esta sección pueden ser considerado tanto para link y diagramas orientados o no.

**Definición 1.5.1** Diremos que los diagramas  $D$  y  $D'$  son  $R$ -equivales si al realizar una composición finita de movimientos de Reidemeister  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  o  $R_3$  sobre el diagrama  $D$  se obtiene el diagrama  $D'$ . Denotaremos por  $D \sim_R D'$  si  $D$  y  $D'$  son  $R$ -equivalentes.

**Ejemplo 1.5.1** El nudo ocho  $4_1$  y su reflejado  $4_1^*$ , son  $R$ -equivalentes.

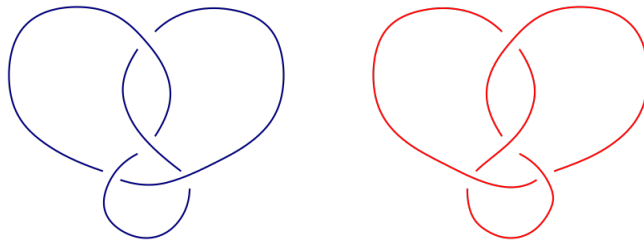
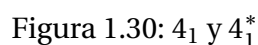


Figura 1.29: Nudo ocho y su reflejado

Notemos que:


$$D \sim_R D' \text{ si y sólo si } L \sim L'$$
$$\mathcal{L}/\sim \longleftrightarrow \mathcal{D}/\sim_B.$$

El grupo de trenzas fue introducido por el austriaco E. Artin (1947) [4]. Este grupo es fuertemente utilizado en la teoría de nudos, gracias a los resultados obtenidos por J. Jones. Más precisamente el grupo de trenzas es usado por Jones para definir el famoso invariante polinomial que hoy lleva su nombre: polinomio de Jones. Se recomienda para esta sección ver [6, Capítulo I].

**Definición 1.6.1** Sea  $X$  un conjunto no vacío. Llamaremos a  $S_X$  el grupo simétrico del conjunto  $X$ , es decir, está formado por las funciones biyectivas de  $X$  en  $X$ , bajo la operación compuesta de funciones.

**Observación 1.6.1** En adelante si  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  denotaremos  $S_X$  por  $S_n$ .

**Notación 1.6.1** Si  $\sigma \in S_n$  la función biyectiva  $\sigma$  se denota

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 1.6.1** Consideremos en el grupo simétrico  $S_5$  al  $\sigma$  definido a continuación:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

significa:  $\sigma(1) = 5, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 4$  y  $\sigma(5) = 1$ .

**Definición 1.6.2** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos en  $\mathbb{R}^3$ , el camino  $\delta$  de  $A$  en  $B$  es una función continua de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $\delta(0) = A$  y  $\delta(1) = B$

Consideremos en adelante  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in [0, 1]\}$  un cubo en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos el plano superior  $P = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in [0, 1]\}$  y el plano inferior  $Q = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in [0, 1]\}$  del cubo  $W$ , tal que los puntos  $p_i$  y  $q_j$  con  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  serán ubicados en los planos  $P$  y  $Q$  respectivamente, es decir:

$$p_i := \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{i+1}, 1\right), \quad q_j := \left(\frac{1}{2}, \frac{j}{j+1}, 0\right).$$

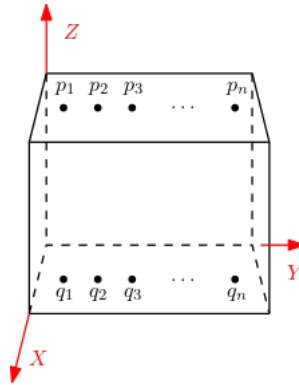


Figura 1.31: Cubo W

Los caminos  $\delta_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  unirán los puntos  $p_i$  con un puntos  $q_j$ , es decir:

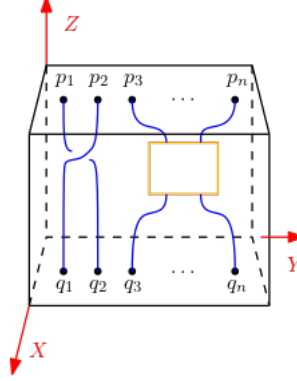


Figura 1.32: Ejemplo de posibles caminos  $\delta_i$

**Definición 1.6.3** Llamaremos una  $n$ -trenza a la familia de caminos  $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ , si para todo plano  $T$  paralelo a  $P$  y comprendido entre los planos superior e inferior del cubo  $W$  se tiene que  $T$  corta a  $\delta_i$  en un solo punto, para todo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Observación 1.6.2** Todo camino  $\delta_i$  puede tener una orientación natural, tal orientación en esta tesis será considerada de manera descendente, es decir:

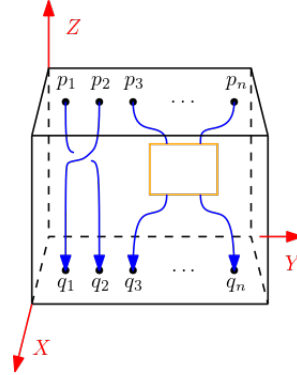
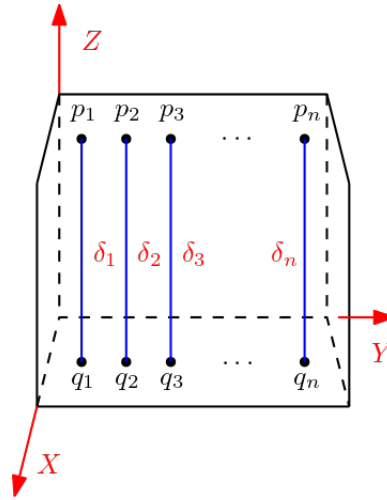


Figura 1.33: Orientación descendente

**Definición 1.6.4** Llamaremos por trenza identidad si todos los caminos  $\delta_i$  son rectos y paralelos entre sí, es decir:

Figura 1.34: Trenza identidad  $1_n$ 

**Definición 1.6.5** Sea  $\delta = \{\delta_i\}_{1 \leq i \leq n}$  la trenza tal que  $\delta_i$  une  $p_i$  con  $q_{j_i}$ . Denotaremos por  $\pi_\delta$  la permutación definida por:

$$\pi_\delta : i \rightarrow j_i.$$

**Ejemplo 1.6.2** Consideremos la siguiente trenza y su respectiva permutación  $\pi_\delta$ , con  $\delta$  el conjunto de caminos de la siguiente 6–trenza, es decir:

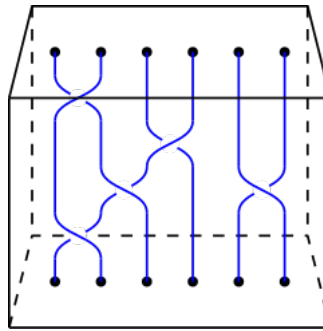


Figura 1.35: 6–trenza

Luego

$$\pi_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 4)(5 \ 6).$$

## 1.7. Equivalencia de trenzas

De manera intuitiva, al igual que en la teoría de nudos, diremos que dos  $n$ -trenzas son equivalentes si mediante deformaciones continuas de una se puede llegar a la otra, sin realizar cortes a los caminos y sin mover los puntos extremos de los caminos  $p_i$  y  $q_j$  con  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ . Más precisamente.

**Definición 1.7.1** Diremos que las  $n$ -trenzas  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes si existe una isotopía continua e inyectiva  $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ , tal que  $h(\alpha, 0) = \alpha$  y  $h(\alpha, 1) = \beta$ . Denotaremos  $\alpha \sim \beta$  para indicar que  $\alpha$  y  $\beta$  sean equivalentes.

**Ejemplo 1.7.1** Consideremos las siguientes trenzas equivalentes.

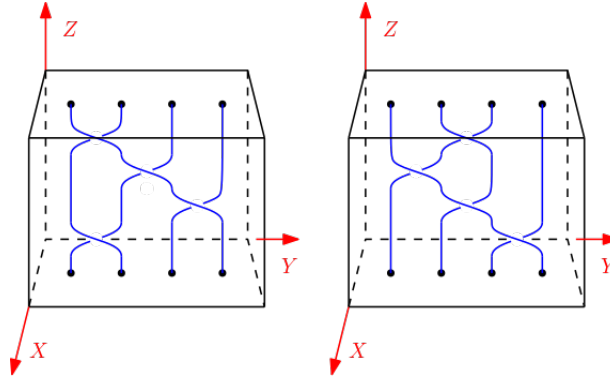


Figura 1.36: Trenzas equivalentes

**Definición 1.7.2** Denotaremos por  $\mathfrak{B}_n$  al conjunto de  $n$ -trenzas geométricas.

**Proposición 1.7.1**  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $\mathfrak{B}_n$ .

**Notación 1.7.1** En adelante denotaremos por  $B_n := \mathfrak{B}_n / \sim$ , es decir el conjunto de  $n$ -trenzas cocientado con la relación de equivalencia  $\sim$ .

## 1.8. Estructura $\mathfrak{B}_n$

**Definición 1.8.1** Definiremos por  $\alpha\beta$  al producto entre  $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}_n$ . Más precisamente  $\alpha\beta$  es el producto por concatenación, o sea el obtenido al unir los puntos finales de  $\alpha$  con los puntos iniciales de  $\beta$ .

**Ejemplo 1.8.1** *Determinemos el cuasi-producto de las  $n$ -trenzas  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir:*

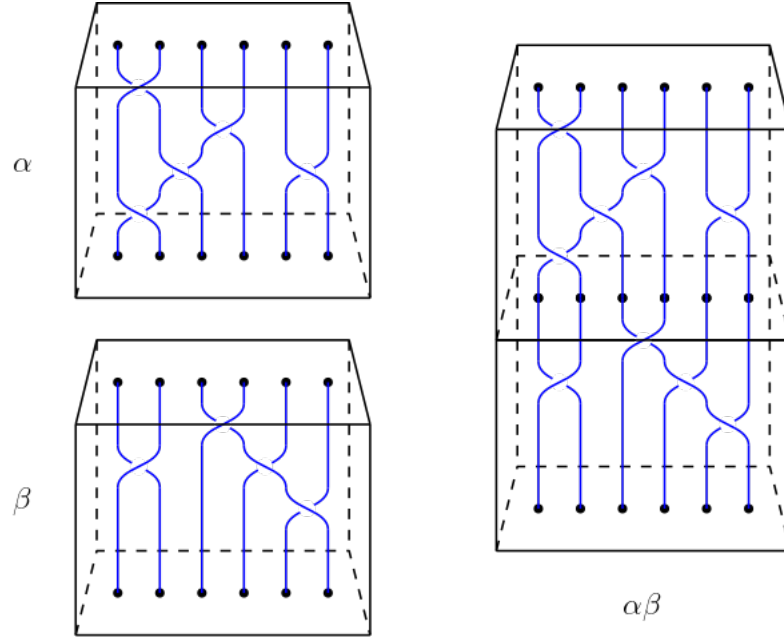


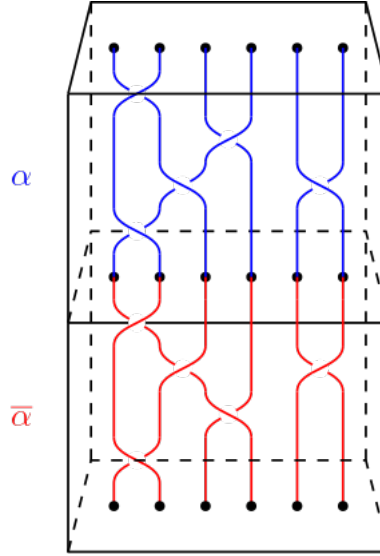
Figura 1.37: Cuasi-producto  $\alpha\beta$

**Lema 1.8.1** *Sean  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$   $n$ -trenzas. Si  $\alpha \sim \alpha'$  y  $\alpha' \sim \beta'$ , entonces  $\alpha\alpha' \sim \beta\beta'$ .*

**Proposición 1.8.1** *El producto es "asociativo", es decir para todo  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{B}_n$  se tiene que  $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$ .*

**Proposición 1.8.2** *Si  $1_n, \alpha \in \mathfrak{B}_n$  entonces  $1_n\alpha \sim \alpha 1_n \sim \alpha$ .*

**Notación 1.8.1** *En lo que sigue denotaremos por  $\bar{\alpha}$  la trenza reflejada de  $\alpha$ , la obtención de está es reflejando la trenza  $\alpha$  con respecto a su plano inferior, es decir:*

Figura 1.38:  $\bar{\alpha}$  la trenza reflejada de  $\alpha$ 

con  $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathfrak{B}_n$ .

**Proposición 1.8.3** Si  $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathfrak{B}_n$  entonces  $\alpha \bar{\alpha} \sim \bar{\alpha} \alpha \sim 1_n$

**Teorema 1.8.1** El par  $(\mathfrak{B}_n, *)$  tiene estructura de grupo, al que llamaremos grupo de trenzas, donde  $*$  esta definido mediante:

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha\beta].$$

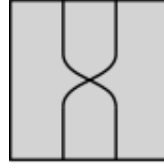
En adelante  $[\alpha]$  lo denotaremos simplemente como  $\alpha$ .

## 1.9. Proyección de una trenza

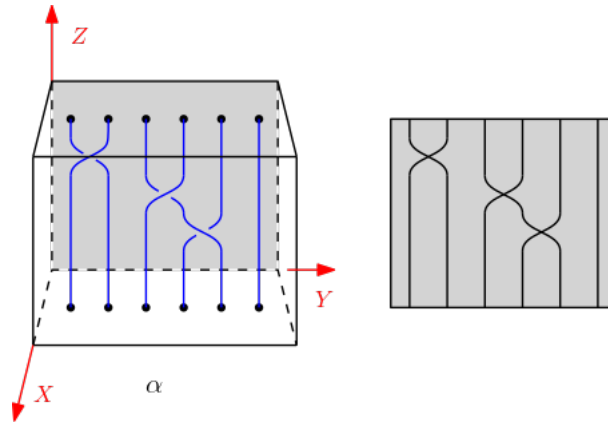
Para entender la proyección de una  $n$ -trenza es preciso considerar un plano ortogonal  $\Omega$  a los planos  $P$  y  $Q$ , el que puede ser considerado como la cara posterior del cubo  $W$ , es decir

$$\Omega := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in [0, 1]\}.$$

**Definición 1.9.1** Llamaremos por  $\mathcal{P}(\alpha)$  a la proyección de  $\alpha \in \mathfrak{B}_n$  obtenida al proyectar  $\alpha$  sobre el plano ortogonal  $\Omega$ , admitiendo solo cruces de la forma:

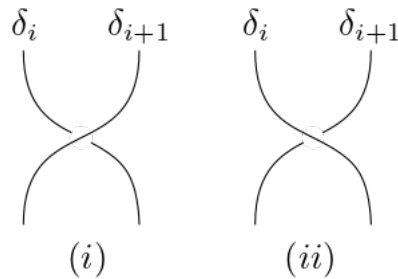
Figura 1.39: Plano ortogonal  $\Omega$ 

**Ejemplo 1.9.1** *Determinemos la proyección de  $\alpha \in \mathfrak{B}_n$*

Figura 1.40: Proyección de  $\alpha$  sobre el plano ortogonal  $\Omega$ .

## 1.10. Diagrama de una trenza

**Definición 1.10.1** *Sea  $a \in \mathfrak{B}_n$  y  $\mathcal{P}(\alpha) \in \Omega$ . Definiremos por  $D_\alpha$  al diagrama de una  $n$ -trenza  $\alpha$ , si en cada cruce doble del plano  $\Omega$  se identifica: (i) si el camino  $\delta_{i+1}$  está más alejado del plano  $\Omega$  y (ii) si el camino  $\delta_i$  está más alejado del plano  $\Omega$ , es decir:*



**Ejemplo 1.10.1** *Determinemos el diagrama de la trenza  $\alpha$*

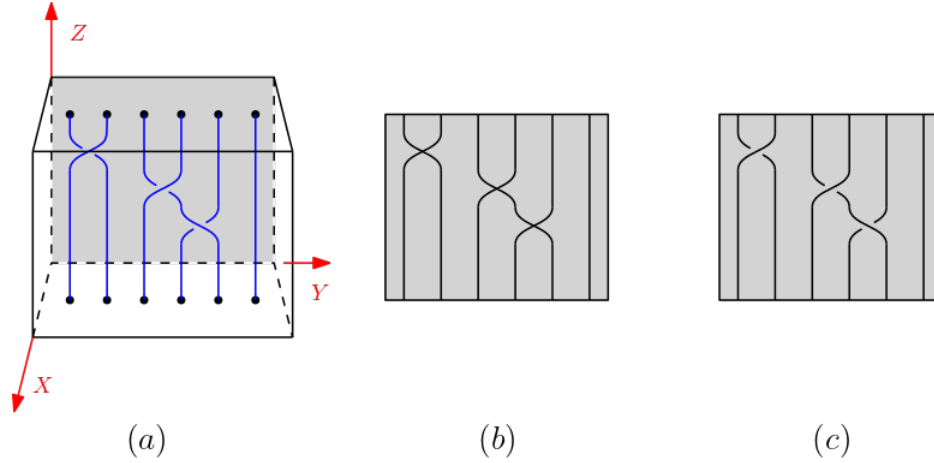


Figura 1.41: (a) trenza  $\alpha$ , (b) Proyección de  $\alpha$  sobre el plano ortogonal  $\Omega$  y (c) diagrama  $D_\alpha$

## 1.11. $n$ -trenzas elementales

**Definición 1.11.1** *Denotaremos por  $\sigma_i$  a la trenza elemental, cuyo diagrama es:*

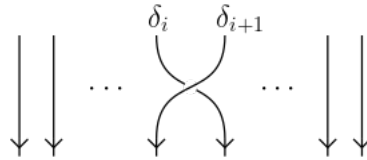


Figura 1.42: Trenza elemental  $\sigma_i$

**Definición 1.11.2** *Denotaremos por  $\sigma_i^{-1}$  a la trenza elemental, cuyo diagrama es:*

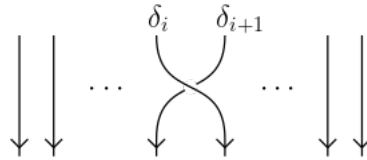
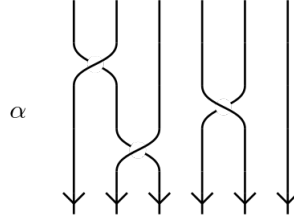
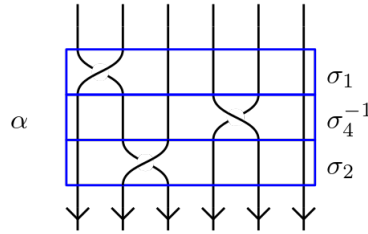


Figura 1.43: Trenza elemental  $\sigma_i^{-1}$

**Ejemplo 1.11.1** *Considerando el diagrama de la trenza  $\alpha$ . Ella se escribe en función de las trenzas elementales como sigue:*

Figura 1.44: Trenza  $\alpha$ 

Luego tenemos que sus trenzas elementales son

Figura 1.45: Trenza  $\alpha$ 

es decir

$$\alpha = \sigma_1 \sigma_4^{-1} \sigma_2$$

## 1.12. Presentación de Artin de $B_n$

**Teorema 1.12.1** [4, Artin, E.] El grupo de trenzas  $B_n$  sobre  $n$  caminos, está generado por los elementos  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}$  cuyas relaciones son:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i &= \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1. \end{aligned}$$

**Observación 1.12.1** Notemos que cada  $\sigma_i$  puede ser visto como  $\alpha_i$ . Además se tiene  $B_n \subset B_{n+1}$ , simplemente agregando una cuerda a la derecha de la trenza en  $B_n$ .

**Observación 1.12.2** Notemos que existe epimorfismo de  $B_n$  en  $S_n$ , decir:

$$\pi : B_n \rightarrow S_n$$

En particular, notemos que los elementos de la forma  $(i \ i + 1) \in S_n$  tienen como preimagen la trenza  $\sigma_i$ .

**Definición 1.12.1** Definiremos  $B_\infty$  al grupo de trenzas infinita, tal que

$$B_\infty = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$$

con  $B_i$  el grupo de trenza de  $i$  caminos.

### 1.13. Nudos y Trenzas

**Definición 1.13.1** Definiremos por  $\hat{\alpha}$  el link orientado, que se obtiene al unir los puntos finales con los puntos iniciales de la trenza  $\alpha$  orientada. A este proceso le llamaremos cerradura.

**Definición 1.13.2** Sea  $\hat{\cdot}$  la función cerradura,, esta es una función epiyectiva definida por:

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} : B_\infty &\rightarrow \mathcal{L} \\ \alpha &\rightarrow \hat{\alpha} \end{aligned}$$

**Teorema 1.13.1** [7, Teorema de Alexander] Sea  $L$  un link orientado, entonces existe una trenza  $\sigma \in B_n$  para algun  $n$ , tal que  $L = \hat{\sigma}$ . Es decir,  $\hat{\cdot}$  es una función epiyectiva.

**Observación 1.13.1** Consideremos la trenza  $e \in B_1$  y  $\sigma_1 \in B_2$ , al aplicar la función cerradura sobre las trenzas, obteniendo así los link  $\hat{e}$  y  $\hat{\sigma}_1$ , los que corresponden a ser el nudo trivial. Así,  $\hat{\cdot}$  no es una función inyectiva. Para solucionar el problema de no ser inyectiva necesitamos introducir los movimientos de Markov.

**Definición 1.13.3** Sean las operaciones  $M_1$  y  $M_2$ , llamados movimientos de Markov definidos como sigue:

- 1) Para  $\beta \in B_n$ . Definimos la operación  $M_1$  llamada conjugación de  $\beta$  como  $M_1(\beta) = \gamma\beta\gamma^{-1}$ , con  $\gamma$  en  $B_n$ .
- 2) Definimos la operación  $M_2$ , como  $M_2(\beta) = \beta\sigma_n$  o  $M_2(\beta) = \beta\sigma_n^{-1}$ , donde  $\sigma_n$  es un generador de  $B_{n+1}$ .

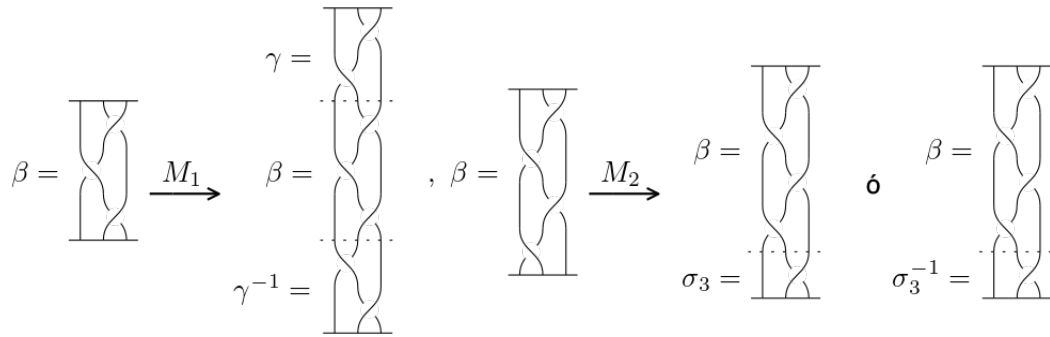


Figura 1.46: Movimientos de Markov's

**Teorema 1.13.2 (Teorema de Markov)** Sea  $L_1$  y  $L_2$  dos link orientados, tal que  $L_1 = \widehat{\alpha_1}$  y  $L_2 = \widehat{\alpha_2}$ , con  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{B}_n$ , se cumple:

$$L_1 \sim L_2 \text{ si y solo si } \alpha_1 \sim_M \alpha_2.$$

# Capítulo 2

## Invariantes

Actualmente uno de los grandes desafíos de la teoría de nudos, es la clasificación de estos. Una de las herramientas utilizadas para realizar dicha clasificación son las invariantes polinomiales. En este capítulo introduciremos algunas invariantes polinomiales para links (o nudos) más relevantes y las relaciones que existen entre ellas. En particular estudiaremos la invariante polinomial  $Q$  y daremos algunas propiedades de ella.

### 2.1. Invariantes

**Definición 2.1.1** Sea  $Obs$  un conjunto no vacío. Un invariante de link es una función  $I : \mathcal{L} \rightarrow Obs$  tal que si  $L_1 \sim L_2$  entonces  $I(L_1) = I(L_2)$ .

**Observación 2.1.1** Es deseable que  $Obs$  sea bien entendido. En particular,  $Obs$  se puede considerar como un anillo de polinomios. En este caso diremos que la función  $I$  es un invariante polinomial.

Como ya hemos mencionado en la Observación 2.3.2, existe una biyección entre los links y los diagramas de link, este hecho nos permite definir invariantes para link a través de sus diagramas.

**Definición 2.1.2** Sea  $Obs$  un conjunto no vacío. Una invariante de diagramas orientados (o no) es una función  $\mathfrak{I} : \mathcal{D} \rightarrow Obs$  tal que si  $D \sim_R D'$  entonces  $\mathfrak{I}(D) = \mathfrak{I}(D')$ .

**Definición 2.1.3** Diremos que  $\mathfrak{I}$  es un invariante de isotopía regular, si solo respeta los movimientos de Reidemeister  $R_2$  y  $R_3$ .

**Lema 2.1.1** [8, Lemma 2.1] Sea  $\mathfrak{R}$  un anillo y  $a$  un elemento invertible en  $\mathfrak{R}$ . Supongamos que  $f(|D|) \in \mathfrak{R}[a]$  es un invariante de isotopía regular de un diagrama de link  $|D|$ , tal que al evaluarla se tiene que:

$$f(\bigcirc) = af(\neg) \text{ y } f(\bigcirc) = a^{-1}f(\neg).$$

Luego la función  $\mathfrak{F}$  es una invariante de links orientados, definida como

$$\mathfrak{F}(L) := a^{-w(D)} f(|D|).$$

## 2.2. Invariantes polinomiales

Para introducirnos en la siguiente sección, es necesario recordar las invariantes polinomiales clásicas, entre los que se encuentran: Polinomio de Alexander  $\Delta_D$ , Polinomio de Conway  $\nabla_D$ , Polinomio de HOMFLYPT  $P_D$ , Polinomio de Jones  $V(D)$ , Polinomio de Kauffman  $K(D)$  y el Polinomio  $Q(D)$ . Dichos polinomios pueden ser estudiados algebraicamente o por medio de relaciones skein. En esta tesis nos enfocaremos en las relaciones skein que define cada uno de estos polinomios, para tales efectos utilizaremos diagramas de link.

A continuación presentaremos las relaciones que existen entre dichos polinomios:

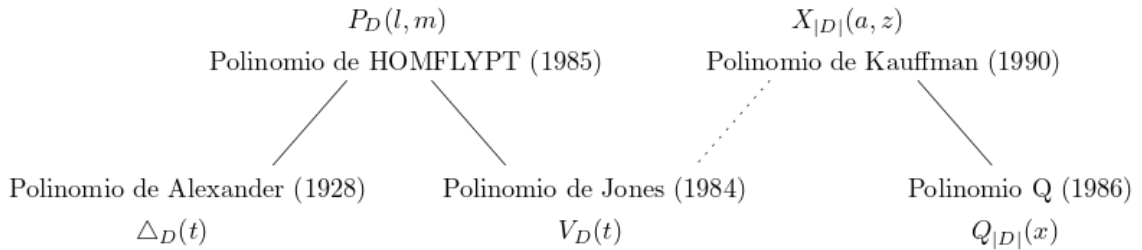


Figura 2.1: Invariantes polinomiales clásicos

### 2.2.1. Polinomio de Alexander

El polinomio de Alexander (1928) es la primera invariante polinomial de nudos. Este polinomio puede ser definido de distintas maneras, en esta tesis nos centraremos en su representación por medio de relaciones skein.

**Definición 2.2.1** Llamaremos  $D_+$ ,  $D_-$  y  $D_0$  tres diagramas de link que coinciden fuera de los discos punteados y dentro de ellos difieren como se muestra en la Figura 2.2.

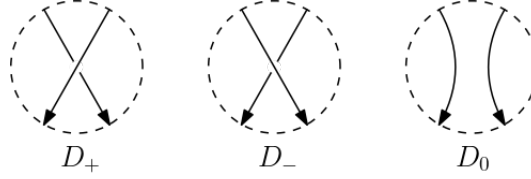


Figura 2.2: Triple de Conway

El polinomio de Alexander no fue definido originalmente a partir de relaciones skein, ver [3]. Sin embargo años más tarde Conway la define a través de relaciones skein, que es la forma que usaremos en esta tesis.

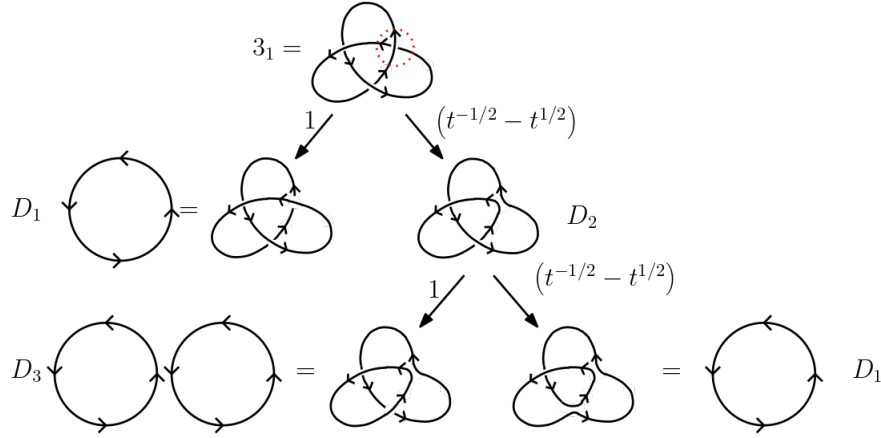
**Definición 2.2.2** Denotamos por  $\Delta(D)$  al polinomio de Alexander, si la función  $\Delta$  asigna a cada diagrama  $D$  del link  $L$  un único polinomio de Laurent en el anillo  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ , que satisface las siguientes reglas:

- 1)  $\Delta_D(t)$  es una invariante bajo la isotopía de  $L$ ,
- 2)  $\Delta_D(t) = 1$ , si  $D$  es el diagrama del no nudo,
- 3) Dado el triple de Conway  $D_+$ ,  $D_-$  y  $D_0$  se satisface la siguiente ecuación

$$\Delta_{D_+}(t) - \Delta_{D_-}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2}) \Delta_{D_0}(t)$$

la que llamaremos relación skein.

**Ejemplo 2.2.1** Determinemos el polinomio de Alexander para el diagrama del nudo  $3_1$

Figura 2.3: Estados del diagrama de Alexander  $3_1$ 

Luego tenemos que

$$\Delta_{3_1}(t) - \Delta_{D_1}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2}) \Delta_{D_2}(t), \quad (2.1)$$

$$\Delta_{D_2}(t) - \Delta_{D_3}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2}) \Delta_{D_1}(t), \quad (2.2)$$

de donde  $\Delta_{D_3}(t) = 0$  y  $\Delta_{D_1}(t) = 1$ , finalmente tenemos que:

$$\Delta_{3_1}(t) = t^{-1} - 1 + t.$$

De manera análoga tenemos que  $3_1^*$

$$\Delta_{3_1^*}(t) = t^{-1} - 1 + t.$$

**Observación 2.2.1** Notemos que  $\Delta$  no distingue entre  $3_1$  y  $3_1^*$ .

Años mas tarde, Conway define un nuevo invariante polinomial, que se conoce en la actualidad como el Polinomio de Conway, este resulta ser igual al Polinomio de Alexander. Por lo anterior, a veces, se suele decir que  $\Delta$  es el polinomio de Alexander-Conway.

### 2.2.2. Polinomio de Conway

**Definición 2.2.3** Denotaremos por  $\nabla_D(x)$  el polinomio de Conway, si la función  $\nabla$  asigna a cada diagrama  $D$  de link  $L$  un polinomio de Laurent en el anillo  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ , el que

satisface las siguientes reglas:

- 1)  $\nabla_D(t)$  es una invariante de links,
- 2) Si  $D$  es el diagrama del nudo trivial, entonces  $\nabla_D(t) = 1$ ,
- 3) Dado el triple de Conway  $D_+$ ,  $D_-$  y  $D_0$  se satisface la siguiente ecuación

$$\nabla_{D_+}(t) - \nabla_{D_-}(t) = x \nabla_{D_0}(t)$$

la que llamaremos relación skein.

**Ejemplo 2.2.2** Determinemos el polinomio Conway de el nudo  $3_1$ .

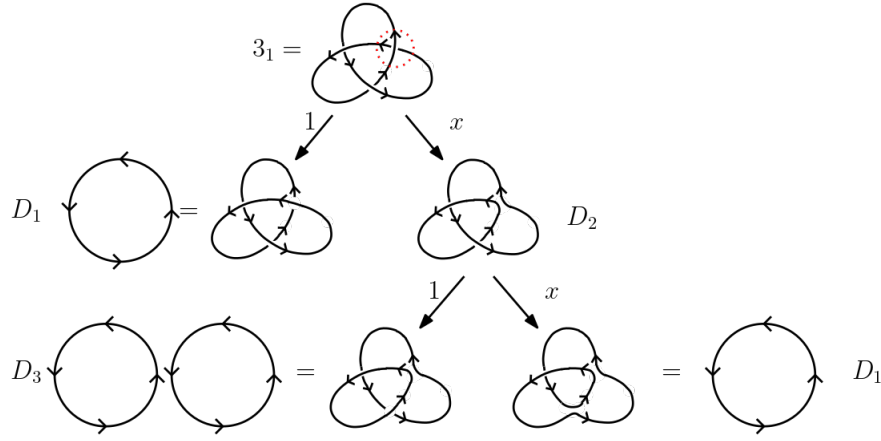


Figura 2.4: Diagrama  $3_1$

luego tenemos que

$$\nabla_{3_1}(x) - \nabla_{D_1}(x) = x \nabla_{D_2}(x) \quad (2.3)$$

$$\nabla_{D_2}(x) - \nabla_{D_3}(x) = x \nabla_{D_1}(x) \quad (2.4)$$

donde  $\nabla_{D_1}(x) = 1$  y  $\nabla_{D_3}(x) = 0$ , finalmente tenemos que:

$$\nabla_{3_1}(x) = 1 + x^2.$$

De manera analoga, tenemos que:

$$\nabla_{3_1^*}(x) = 1 + x^2$$

Notemos que el polinomio de Conway tampoco distingue  $3_1$  y  $3_1^*$

**Observación 2.2.2** Notemos que los polinomios de Alexander y Conway están relacionados al realizar el siguiente cambio de variable  $x = t^{-1/2} - t^{1/2}$ , es decir:

$$\Delta_D(t) = \nabla_D(t^{-1/2} - t^{1/2}).$$

Comprobemos que al reemplazar  $x = t^{-1/2} - t^{1/2}$  en el polinomios de Conway de los Ejemplos 2.2.1 y 2.2.2 obtenemos los polinomios de Alexander obtenidos en el Ejemplo 2.2.1, es decir:

$$\begin{aligned} \nabla_{3_1}(t^{-1/2} - t^{1/2}) &= 1 + (t^{-1/2} - t^{1/2})^2 \\ &= 1 + t^{-1} - 2 + t \\ &= t^{-1} - 1 + t \end{aligned} \tag{2.5}$$

Analogamente tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_{3_1^*}(t^{-1/2} - t^{1/2}) &= 1 + (t^{-1/2} - t^{1/2})^2 \\ &= 1 + t^{-1} - 2 + t \\ &= t^{-1} - 1 + t \end{aligned} \tag{2.6}$$

El polinomio de Alexander y el de Conway del nudo Conway (ver Figura 2.5), es equivalente al polinomio del nudo trivial, es decir igual a uno.

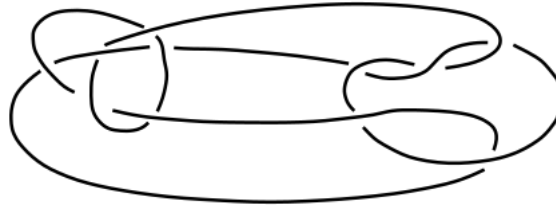


Figura 2.5: Nudo Conway de once cruces

### 2.2.3. Polinomio de Jones

Desde la aparición del invariante polinomial de Alexander quien era en esos tiempos el único invariante polinomial conocido, tuvieron que pasar más de 50 años, para

que en el año 1985 se describiera un nuevo invariante polinomial: el polinomio de Jones. El que puede definirse, mediante relaciones skein, como sigue.

**Definición 2.2.4** [10, Proposición 3.7] Sea  $D$  un diagrama de link. El polinomio de Jones  $V_D(t)$  de una variable puede ser determinado mediante las siguientes reglas:

- 1)  $V_D(t)$  es un invariante,
- 2) Si  $D$  es el diagrama del nudo trivial, entonces  $V_D(t) = 1$ ,
- 3)  $t^{-1}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{D_0}(t)$ .

Algunas propiedades notables del polinomio de Jones, se pasan a explicitar.

**Proposición 2.2.1** [15, Proposición 11.1.1] Sea  $\bigcirc_\mu$  la unión disjunta de  $\mu$  no nudos no enlazados

$$V_{\bigcirc_\mu} = (-1)^{\mu-1} (t^{1/2} + t^{-1/2})^{\mu-1}.$$

**Proposición 2.2.2** [15, Proposición 11.2.1] Sea  $D \sqcup \bigcirc_\mu$  el diagrama, con  $\bigcirc_\mu$  la unión disjunta de  $\mu$  no nudos no enlazados, se calcula como:

$$V_{D \sqcup \bigcirc_\mu} = (-1)^\mu (t^{1/2} + t^{-1/2})^\mu V_D(t).$$

**Teorema 2.2.1** [15, Teorema 11.2.2.] Sean  $D_1$  y  $D_2$  los diagrama de los nudos  $K_1$  y  $K_2$  orientados respectivamente, donde  $D_1 \# D_2$  la suma conexa de dos nudos, entonces

$$V_{D_1 \# D_2}(t) = V_{D_1}(t) V_{D_2}(t).$$

**Teorema 2.2.2** [15, Teorema 11.2.3.] Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos diagrama de los links  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente, entonces

$$V_{D_1 \sqcup D_2}(t) = -(t^{1/2} + t^{-1/2}) V_{D_1}(t) V_{D_2}(t).$$

**Teorema 2.2.3** [15, Teorema 11.2.4.] Sea  $\neg D$  el diagrama con cambio de orientación del diagrama  $D$  del nudo orientado  $K$ , entonces:

$$V_{\neg D}(t) = V_D(t)$$

**Teorema 2.2.4** [15, Teorema 11.2.5.] Sean  $D^*$  el diagrama cambio de cruces del diagrama  $D$  correspondiente del nudos  $K$ , entonces:

$$V_D(t) = V_{D^*}(t^{-1}).$$

**Ejemplo 2.2.3** Notemos que el polinomio de Alexander para los nudos  $7_4$  y  $9_2$  son iguales, pero para el polinomio de Jones ellos son distintos. Más precisamente:

$$\Delta_{7_4}(x) = \Delta_{9_2}(x) = 4 - 7x + 4x^2$$

$$V_{7_4}(t) = t - 2t^2 + 3t^3 - 2t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7 - t^8$$

$$V_{9_2}(t) = t - t^2 + 2t^3 - 2t^4 + 2t^5 - 2t^6 + 2t^7 - t^8 + t^9 - t^{10}$$

Recordemos que los diagrama de los nudos  $7_4$  y  $9_2$  son:

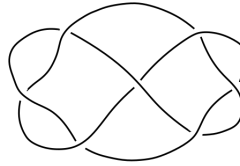


Figura 2.6: Nudo  $7_4$

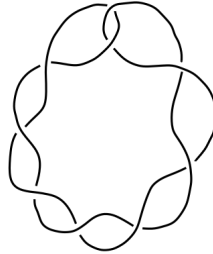
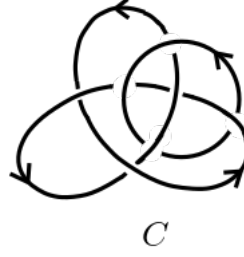
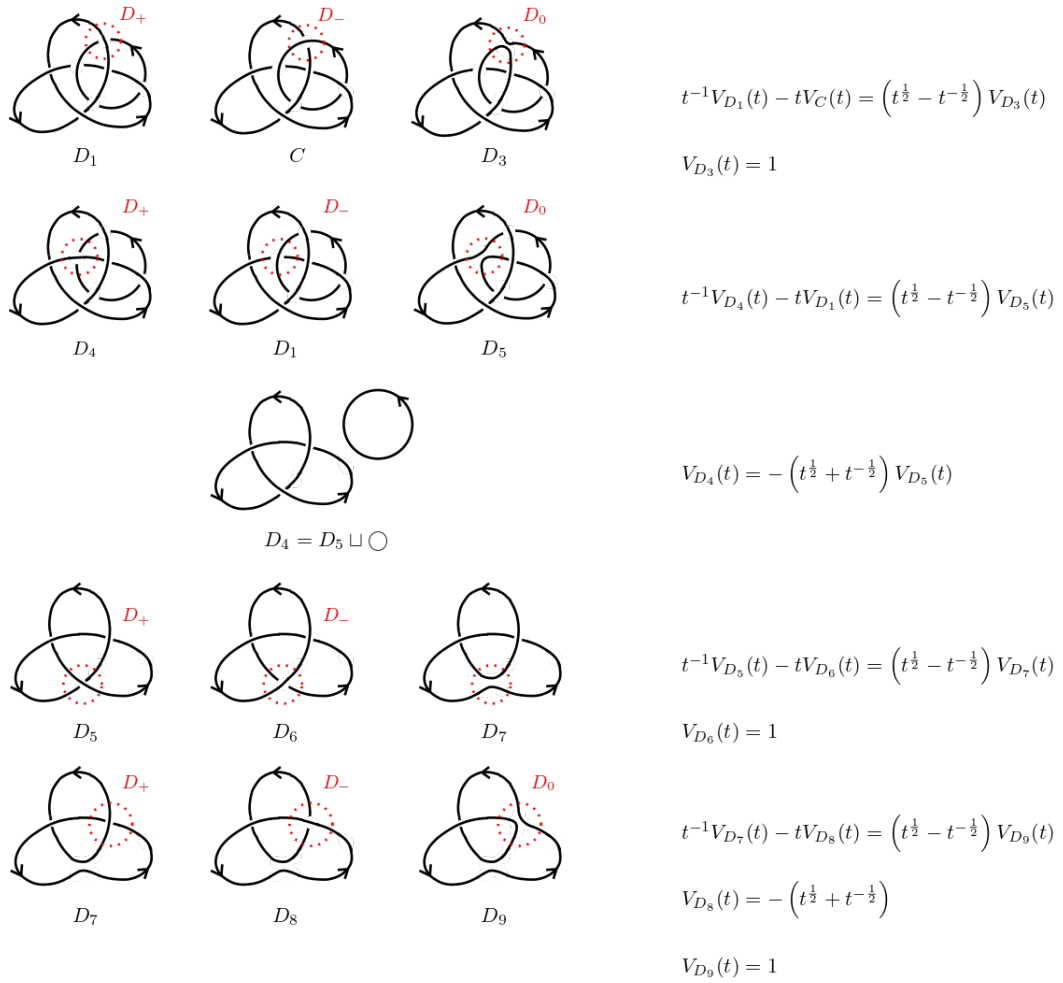


Figura 2.7: Nudo  $9_2$

**Ejemplo 2.2.4** Determinemos el polinomio de Jones para el link trasversal  $C$ , es decir:

Figura 2.8: Link transversal  $C$  (orientado)Figura 2.9: Estados de descomposición del link transversal  $C$  (orientado)

Luego tenemos que

$$t^{-1}V_{D_1}(t) - tV_C(t) = \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_3}(t)$$

$$\begin{aligned}
tV_C(t) &= t^{-1}V_{D_1}(t) - \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_3}(t) \\
V_C(t) &= t^{-2}V_{D_1}(t) - t^{-1}\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_3}(t) \\
V_C(t) &= t^{-2}V_{D_1}(t) + \left(t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
t^{-1}V_{D_4}(t) - tV_{D_1}(t) &= \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_5}(t) \\
V_{D_1}(t) &= t^{-2}V_{D_4}(t) - t^{-1}\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_5}(t) \\
V_{D_1}(t) &= t^{-2}V_{D_4}(t) + \left(t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_5}(t)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

pero  $V_{D_4}(t) = -\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_5}(t)$ , entonces continuando en (2.8), tenemos

$$\begin{aligned}
V_{D_1}(t) &= t^{-2} \cdot -\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_5}(t) + \left(t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_5}(t) \\
V_{D_1}(t) &= -\left(t^{-\frac{5}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_5}(t)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
t^{-1}V_{D_5}(t) - tV_{D_6}(t) &= \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_7}(t) \\
V_{D_5}(t) &= t^2V_{D_6}(t) + \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)V_{D_7}(t) \\
V_{D_5}(t) &= t^2 + \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)V_{D_7}(t)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Continuando, tenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
t^{-1}V_{D_7}(t) - tV_{D_8}(t) &= \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{D_9}(t) \\
V_{D_7}(t) &= t^2V_{D_8}(t) + \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)V_{D_9}(t) \\
V_{D_7}(t) &= t^2 \cdot -\left(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) \\
V_{D_7}(t) &= -t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Luego utilizando (2.9), (2.10) y (2.11), podemos concluir que

$$V_{D_7}(t) = -t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} V_{D_5}(t) &= t^2 + \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) V_{D_7}(t) \\ &= t^2 + \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) \left(-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= -t^4 + t^3 + t \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} V_{D_1}(t) &= -\left(t^{-\frac{5}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right) V_{D_5}(t) \\ &= -\left(t^{-\frac{5}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right) (-t^4 + t^3 + t) \\ &= t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{3}{2}} + t^{\frac{7}{2}} - t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

finalmente por (2.7), concluimos

$$\begin{aligned} V_C(t) &= t^{-2} V_{D_1}(t) + \left(t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) \\ V_C(t) &= t^{-2} \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{3}{2}} + t^{\frac{7}{2}} - t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) + \left(t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) \\ V_C(t) &= t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{7}{2}} + t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{3}{2}} + t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \\ V_C(t) &= -t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{7}{2}} + t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Ejemplo 2.2.5** Determinemos los polinomios de Jones y de Alexander de los siguientes nudos  $K_1$  y  $K_2$ .

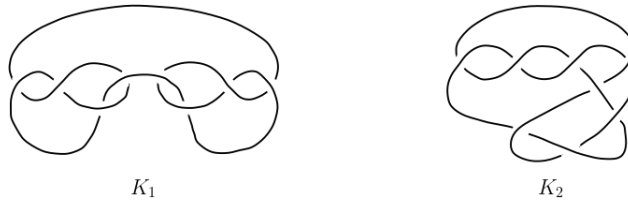
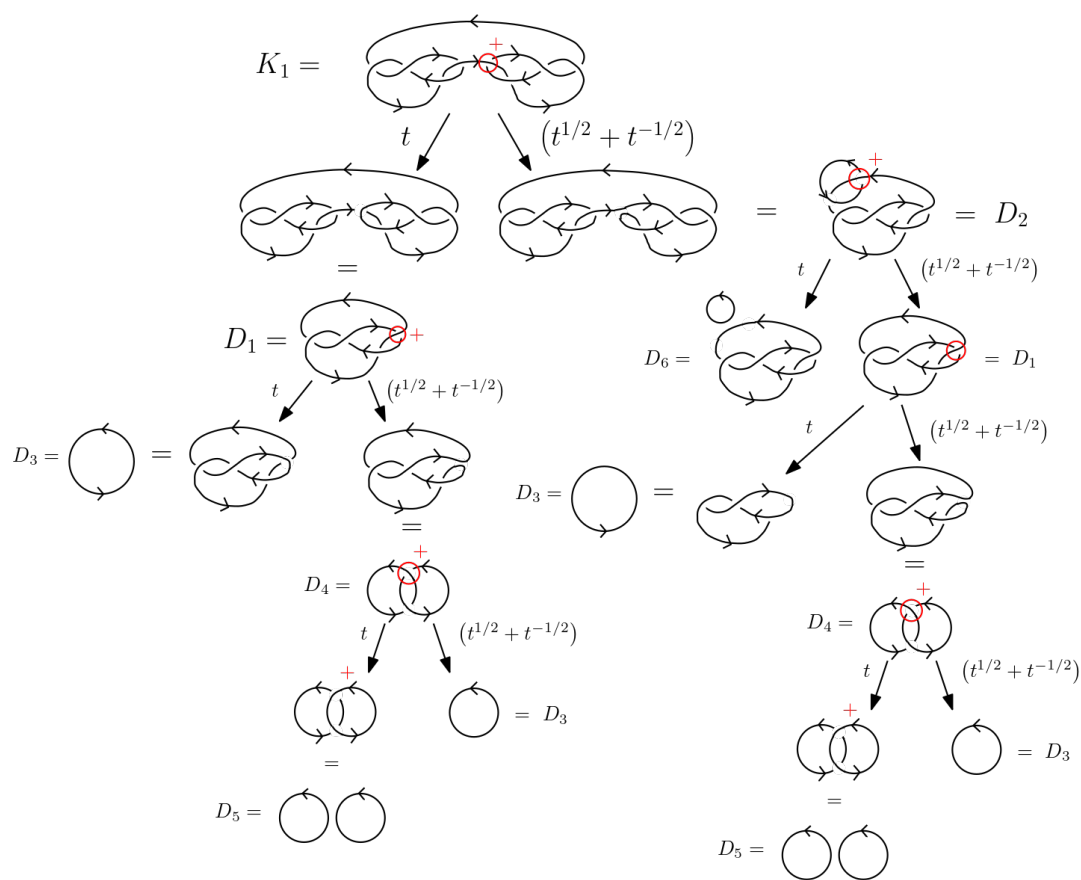


Figura 2.10: Diagrama de los nudos  $K_1$  y  $K_2$

Determinemos el polinomio de Jones del nudo  $K_1$

Figura 2.11: Estados del polinomio de Jones de  $K_1$

Luego tenemos que

$$V_{K_1}(t) = (t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2)^2.$$

Al calcular  $V_{K_2}$  nos podemos percatar que  $V_{K_1}(t) = V_{K_2}(t)$ , por lo tanto el polinomio de Jones no distingue a  $K_1$  y  $K_2$ . Pero el polinomio de Alexander de estos dos nudos, es:

$$\begin{aligned}\Delta_{K_1}(t) &= (t^{-1} - 3 + t)^2, \\ \Delta_{K_2}(t) &= -t^{-3} + 3t^{-2} - 5t^{-1} + 7 - 5t + 3t^2 - t^3.\end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio de Alexander si distingue los nudos  $K_1$  y  $K_2$ .

#### 2.2.4. Polinomio de Homflypt

Una generalización que extiende al polinomio de Alexander y al polinomio de Jones, es el polinomio de HOMFLYPT, cuyo nombre corresponde a ser un acrónimo de sus descubridores. El polinomio de HOMFLYPT a diferencia del polinomio de Alexander y Jones, corresponde a ser un polinomio de dos variables, el que se define como sigue:

**Definición 2.2.5** [11, Teorema] Sea  $D$  un diagrama de link. El polinomio de Homflypt  $P_D(l, m)$ , de dos variables puede ser definido mediante las siguientes reglas:

- 1)  $P_D(l, m)$  es invariante,
- 2)  $P_D(l, m) = 1$ , con  $D$  el diagrama de el no nudo,
- 3)  $l^{-1}P_{D_+}(l, m) - lP_{D_-}(l, m) = mP_{D_0}(l, m)$ .

**Observación 2.2.3** Notemos que el polinomio de Alexander puede ser obtenido a partir del polinomio de Homflypt, al sustituir la variable  $l = 1$  y  $m = (t^{-1/2} - t^{1/2})$ . Por otro lado al sustituir la variable  $l = t$  y  $m = -(t^{-1/2} - t^{1/2})$  se obtiene el polinomio de Jones.

**Lema 2.2.1** Sean los diagramas  $D$  y  $D^*$  de los links  $L$  y  $L^*$ . El polinomio de HOMFLYPT satisface la siguiente relación:

$$P_{D^*}(l, m) = P_D(l^{-1}, m).$$

- 1)  $P_{\bigcirc^\mu}(l, m) = -\left(\frac{l-l^{-1}}{m}\right)^{\mu-1}$
- 2)  $P_{D_1 \# D_2}(l, m) = P_{D_1}(l, m)P_{D_2}(l, m)$
- 3)  $P_{D_1 \sqcup D_2}(l, m) = -\left(\frac{l-l^{-1}}{m}\right)P_{D_1}(l, m)P_{D_2}(l, m)$
- 4)  $P_{\neg D}(l, m) = P_D(l, m)$
- 5)  $P_{D^*}(l, m) = P_D(l^{-1}, m)$

Figure 1 consists of six diagrams of three-component links, labeled  $D_1$ ,  $C$ ,  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$ , and  $D_6$ . Each diagram shows a trefoil-like link with a red dotted region labeled  $D_+$ . The diagrams are arranged in two rows of three. The bottom row shows the decomposition  $D_4 = D_5 \cup \bigcirc$ .

$$P_{D_9}(l, m) = 1$$

Figura 2.12: Estados del nudo transversal C al estilo HOMFLYPT

$$\begin{aligned}
l^{-1}P_{D_1}(l, m) - lP_C(l, m) &= mP_{D_3}(l, m) \\
P_C(l, m) &= l^{-2}P_{D_1}(l, m) - ml^{-1}P_{D_3}(l, m) \\
P_C(l, m) &= l^{-2}P_{D_1}(l, m) - ml^{-1}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

*también tenemos*

$$\begin{aligned}
l^{-1}P_{D_4}(l, m) - lP_{D_1}(l, m) &= mP_{D_5}(l, m) \\
P_{D_1}(l, m) &= l^{-2}P_{D_4}(l, m) - ml^{-1}P_{D_5}(l, m) \\
P_{D_1}(l, m) &= l^{-2} \cdot -\left(\frac{l-l^{-1}}{m}\right)P_{D_5}(l, m) - ml^{-1}P_{D_5}(l, m) \\
P_{D_1}(l, m) &= -\left(\frac{l^{-1}-l^{-3}}{m}\right)P_{D_5}(l, m) - ml^{-1}P_{D_5}(l, m) \\
P_{D_1}(l, m) &= \left(\frac{l^{-3}-l^{-1}}{m} - ml^{-1}\right)P_{D_5}(l, m)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

*también tenemos*

$$\begin{aligned}
l^{-1}P_{D_5}(l, m) - lP_{D_6}(l, m) &= mP_{D_7}(l, m) \\
P_{D_5}(l, m) &= l^2P_{D_6}(l, m) + mlP_{D_7}(l, m) \\
P_{D_5}(l, m) &= l^2 + mlP_{D_7}(l, m)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

*pero*

$$\begin{aligned}
l^{-1}P_{D_7}(l, m) - lP_{D_8}(l, m) &= mP_{D_9}(l, m) \\
P_{D_7}(l, m) &= l^2P_{D_8}(l, m) + mlP_{D_9}(l, m) \\
P_{D_7}(l, m) &= l^2\left(-\left(\frac{l-l^{-1}}{m}\right)\right) + ml \\
P_{D_7}(l, m) &= l^2\left(\frac{l^{-1}-l}{m}\right) + ml \\
P_{D_7}(l, m) &= \left(\frac{l-l^3}{m}\right) + ml
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Al utilizar los puntos (2.18), (2.19) y (2.20), obtenemos:

$$P_{D_7}(l, m) = \left( \frac{l - l^3}{m} \right) + ml \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} P_{D_5}(l, m) &= l^2 + mlP_{D_7}(l, m) \\ P_{D_5}(l, m) &= l^2 + ml \left( \left( \frac{l - l^3}{m} \right) + ml \right) \\ P_{D_5}(l, m) &= l^2 + l^2 - l^4 + m^2 l^2 \\ P_{D_5}(l, m) &= 2l^2 - l^4 + m^2 l^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} P_{D_1}(l, m) &= \left( \frac{l^{-3} - l^{-1}}{m} - ml^{-1} \right) P_{D_5}(l, m) \\ P_{D_1}(l, m) &= \left( \frac{l^{-3} - l^{-1}}{m} - ml^{-1} \right) \cdot (2l^2 - l^4 + m^2 l^2) \\ P_{D_1}(l, m) &= \frac{2(1 - l^2)}{lm} - \frac{(1 - l^2)l}{m} + \frac{(1 - l^2)m}{l} - 2lm + ml^3 - lm^3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Continuando con (2.17) y (2.23), entonces

$$\begin{aligned} P_C(l, m) &= l^{-2} P_{D_1}(l, m) - ml^{-1} \\ P_C(l, m) &= l^{-2} \left( \frac{2(1 - l^2)}{lm} - \frac{(1 - l^2)l}{m} + \frac{(1 - l^2)m}{l} - 2lm + ml^3 - lm^3 \right) - ml^{-1} \\ P_C(l, m) &= \frac{2(1 - l^2)}{l^3 m} - \frac{1 - l^2}{lm} + \frac{(1 - l^2)m}{l^3} - \frac{m^3 + 3m}{l} + lm \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para los polinomios de diagramas no orientados de link  $L$ , se definen las siguientes interpretaciones geométricas.

**Definición 2.2.6** Llamaremos  $|D_+|$ ,  $|D_-|$ ,  $|D_0|$ ,  $|\overline{D}|$ ,  $|\widehat{D}|$  y  $|D|$  seis diagramas de link que coinciden fuera del diagrama punteado y dentro de los diagramas punteados difieren como muestra la Figura 2.13

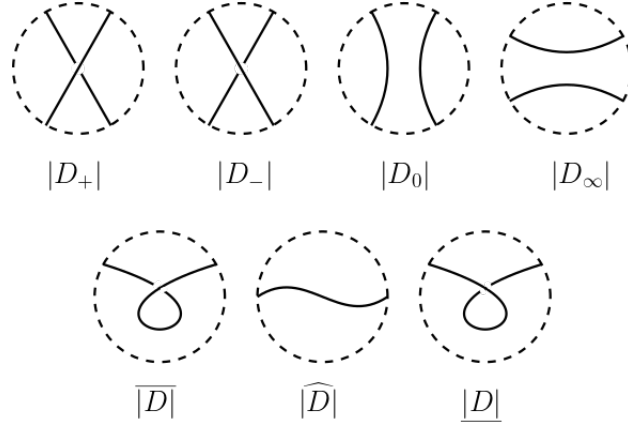


Figura 2.13: Diagramas punteados  $|D_+|$ ,  $|D_-|$ ,  $|D_0|$ ,  $|\overline{D}|$ ,  $|\widehat{D}|$ ,  $|\underline{D}|$

### 2.2.5. Polinomio Bracket

El siguiente polinomio no es una invariante polinomial, pero al normalizar este (Lema 2.1.1) se puede obtener una.

**Teorema 2.2.5** [15, Teorema 11.4.1] Denotaremos por  $\langle \rangle$  al polinomio bracket. La función  $\langle \rangle$  asigna a cada diagrama  $|D|$  de un link  $|L|$  un polinomio de Laurent en el anillo  $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ , que satisface las siguientes reglas:

- 1)  $\langle |D| \rangle = 1$ , si  $|D|$  es el no nudo,
- 2)  $\langle |D_1| \sqcup |D_2| \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle |D_1| \rangle \langle |D_2| \rangle$ ,
- 3)  $\langle |D| \rangle = A \langle |D_\infty| \rangle + A^{-1} \langle |D_0| \rangle$ .

**Lema 2.2.2** Sea  $|D|$  un diagrama de link. Al aplicar al aplicar el movimiento de Reidemeister  $R_1$ , es decir:  $|\overline{D}|$  y  $|\underline{D}|$  el polinomio bracket cumple las siguientes relaciones:

$$\langle |\overline{D}| \rangle = -A^3 \langle |\widehat{D}| \rangle,$$

$$\langle |\underline{D}| \rangle = -A^{-3} \langle |\widehat{D}| \rangle.$$

**Ejemplo 2.2.7** A continuación se muestran los polinomios bracket para los nudos  $|3_1|$  y  $|3_1^*|$

$$\langle |3_1| \rangle = -A^{-5} - A^3 + A^7,$$

$$\langle |3_1^*| \rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^5.$$

**Definición 2.2.7** Sea  $|D|$  el diagrama del un link y su reflejado  $|D^*|$ , entonces:

$$\langle D^* \rangle(A) = \langle D \rangle(A^{-1}).$$

**Teorema 2.2.6** [15, Teorema 11.4.1] Sea  $|D|$  un diagrama de link  $|L|$ . Entonces existe un único polinomio de una variable denotado por  $\Lambda_D(A)$  sobre el anillo de enteros  $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ , el que satisface las siguientes reglas.

- 1)  $\Lambda_{|D|}(A)$  es invariante bajo isotopía regular,
- 2) Si  $|D|$  es el diagrama del no nudo, entonces  $\Lambda_{|D|}(A) = 1$ ,
- 3)  $\Lambda_{|D_1| \sqcup |D_2|}(A) = -(A^2 + A^{-2}) \Lambda_{|D_1|}(A) \Lambda_{|D_2|}(A)$ ,
- 4)  $\Lambda_{|D|}(A) = A \Lambda_{|D_\infty|}(A) + A^{-1} \Lambda_{|D_0|}(A)$ .

**Teorema 2.2.7** [15, Teorema 11.4.2] Sea  $|D|$  el diagrama del link  $L$  sin orientación. Sea  $D$  el diagrama del link  $L$  orientado, entonces se define el polinomio de bracket para diagramas orientados por

$$\hat{\Lambda}_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)} \Lambda_{|D|}(A)$$

**Observación 2.2.4** Notemos que este ultimo invariante corresponde al polinomio de Jones al reemplazar  $A = t^{-\frac{1}{4}}$ , es decir:

$$\hat{\Lambda}_D\left(t^{-\frac{1}{4}}\right) = V_D(t)$$

Para mas detalles ver demostración del Teorema 11.4.2 en [15].

## 2.3. Polinomio de Kauffman

**Teorema 2.3.1** [15, Teorema 11.4.3] Sea  $|D|$  un diagrama de link  $|L|$ . Entonces existe un único polinomio de dos variable sobre el anillo de enteros  $\mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ , denotado por  $X_D(a, z)$ , el que satisface las siguientes reglas.

- 1)  $X_D(a, z)$  es una invariante de isotopía regula,
- 2) Si  $|D|$  es el diagrama del no nudo, entonces  $X_{|D|}(a, z) = 1$ ,
- 3)  $X_{|D_+|}(a, z) + X_{|D_-|}(a, z) = z(X_{|D_\infty|}(a, z) + X_{|D_0|}(a, z))$ ,

$$4) X_{|D|}(a, z) = aX_{|\widehat{D}|}(a, z) \text{ y } X_{|\overline{D}|}(a, z) = a^{-1}X_{|\widehat{D}|}(a, z).$$

Este polinomio es conocido como el polinomio de Kauffman de dos variables para diagramas no orientados.

**Ejemplo 2.3.1** Determinemos el polinomio de Kauffman del nudo  $|3_1|$ , es decir:

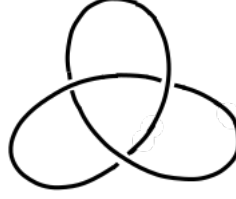
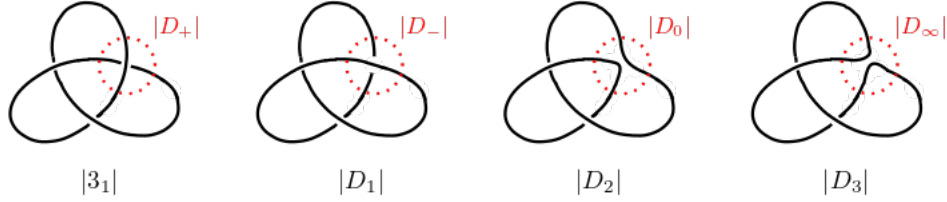
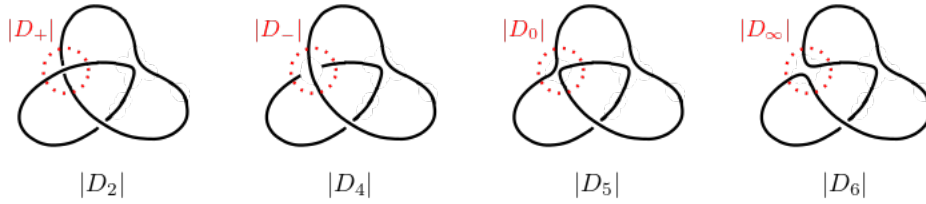


Figura 2.14: Nudo  $|3_1|$

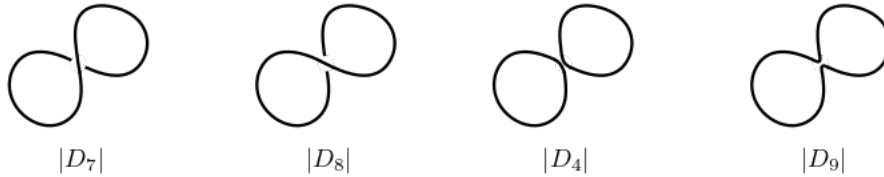
Luego tenemos los estados del nudos  $|3_1|$  al estilo polinomio Kauffman.



$$X_{|3_1|}(a, z) + X_{|D_1|}(a, z) = z (X_{|D_3|}(a, z) + X_{|D_2|}(a, z)) \quad X_{|D_1|}(a, z) = a \quad X_{|D_3|}(a, z) = a^{-2}$$



$$X_{|D_2|}(a, z) + X_{|D_4|}(a, z) = z (X_{|D_5|}(a, z) + X_{|D_6|}(a, z)) \quad X_{|D_5|}(a, z) = a \quad X_{|D_6|}(a, z) = a^{-1}$$



$$X_{|D_7|}(a, z) + X_{|D_8|}(a, z) = z (X_{|D_4|}(a, z) + X_{|D_9|}(a, z)) \quad X_{|D_7|}(a, z) = a \quad X_{|D_8|}(a, z) = a^{-1} \\ X_{|D_9|}(a, z) = 1$$

Figura 2.15: Estados del nudo  $|3_1|$  al estilo Kauffman

$$\begin{aligned}
X_{|3_1|}(a, z) + X_{|D_1|}(a, z) &= z(X_{|D_3|}(a, z) + X_{|D_2|}(a, z)) \\
X_{|3_1|}(a, z) &= -X_{|D_1|}(a, z) + z(X_{|D_3|}(a, z) + X_{|D_2|}(a, z)) \\
X_{|3_1|}(a, z) &= -a + z(a^{-2} + X_{|D_2|}(a, z))
\end{aligned} \tag{2.24}$$

siguiendo con nuestros calculos, tenemos la ecuación

$$\begin{aligned}
X_{|D_2|}(a, z) + X_{|D_4|}(a, z) &= z(X_{|D_5|}(a, z) + X_{|D_6|}(a, z)) \\
X_{|D_2|}(a, z) &= -X_{|D_4|}(a, z) + z(X_{|D_5|}(a, z) + X_{|D_6|}(a, z)) \\
X_{|D_2|}(a, z) &= -X_{|D_4|}(a, z) + z(a + a^{-1})
\end{aligned} \tag{2.25}$$

del último estado de la Figura 2.16, tenemos

$$X_{|D_4|}(a, z) = (a + a^{-1})z^{-1} - 1$$

Luego considerando las ecuaciones (2.26), obtenemos:

$$\begin{aligned}
X_{|D_2|}(a, z) &= -X_{|D_4|}(a, z) + z(a + a^{-1}) \\
X_{|D_2|}(a, z) &= -((a + a^{-1})z^{-1} - 1) + z(a + a^{-1})
\end{aligned} \tag{2.26}$$

con este resultado y con la ecuación (2.25) obtenemos:

$$\begin{aligned}
X_{|3_1|}(a, z) &= -a + z(a^{-2} + X_{|D_2|}(a, z)) \\
X_{|3_1|}(a, z) &= -a + za^{-2} + zX_{|D_2|}(a, z) \\
X_{|3_1|}(a, z) &= -a + za^{-2} + z(-((a + a^{-1})z^{-1} - 1) + z(a + a^{-1})) \\
X_{|3_1|}(a, z) &= -a + a^{-2}z - (a + a^{-1}) + z + (a + a^{-1})z^2 \\
X_{|3_1|}(a, z) &= (-2a - a^{-1}) + (1 + a^{-2})z + (a + a^{-1})z^2
\end{aligned} \tag{2.27}$$

**Definición 2.3.1** [15, Definición 11.4.2] Definimos el polinomio  $F_D \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$  para diagramas de link orientados  $D$ , como:

$$F_D(a, z) = a^{w(D)} X_{|D|}(a, z).$$

Este polinomio es conocido como el polinomio de Kauffman de dos variables para dia-

*gramas orientados*

**Teorema 2.3.2** [15, Teorema 11.4.4] *Sea  $D$  el diagrama del link  $L$ . El polinomio  $F_D(a, z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$  es una invariante de isotopía ambiente de links orientados  $L$ .*

**Lema 2.3.1** [15, Lema 2.6.] *Sea  $D$  el diagrama de un link. Los polinomios  $X_D(a, z)$  y  $F_D(a, z)$  satisfacen:*

$$X_{D^*}(a, z) = X_D(a^{-1}, z) \quad y \quad F_{D^*}(a, z) = F_D(a^{-1}, z)$$

**Observación 2.3.1** *Notemos que el polinomio de Kauffman no extiende el polinomio de Alexander, pero si extiende el polinomio de Jones. En efecto tenemos*

$$V_D(t) = F_D\left(-t^{-\frac{3}{4}}, t^{\frac{1}{4}} + t^{-\frac{1}{4}}\right)$$

*para más detallar ver [15, Teorema 11.4.5]*

### 2.3.1. Polinomio $Q$

A continuación se presentara el polinomio  $Q$ , el cual es el objetivo principal de estudio de esta tesis. Detalles del polinomio  $Q$  puede ser visto en [16] [13].

**Teorema 2.3.3** *Existe una única función  $Q$  que designa a cada link  $|L|$  un único polinomio de Laurent en el anillo  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$  que satisface:*

- 1)  $Q_{|D|}(x)$  es una invariante,
- 2) Si  $|D|$  es el diagrama del nudo trivial, entonces  $Q_{|D|}(x) = 1$ ,
- 3) Dado los diagramas  $|D_+|$ ,  $|D_-|$ ,  $|D_0|$  y  $|D_\infty|$ , se satisface la siguiente ecuación:

$$Q_{|D_+|}(x) + Q_{|D_-|}(x) = x(Q_{|D_0|}(x) + Q_{|D_\infty|}(x)) \quad (2.28)$$

**Definición 2.3.2** *Sea  $|D|$  el diagrama del link  $|L|$ , compuesto por  $c$ -componentes disjuntas no enarzadas de no nudos. El polinomio  $Q$  satisface la siguiente relación*

$$Q_D(x) = \mu^{c-1},$$

*donde  $\mu = 2x^{-1} - 1$ .*

**Propiedades 2.3.1** Se determinan las siguiente propiedades para el polinomio  $Q$ :

- 1)  $Q_{(|D_1| \# |D_2|)}(x) = Q_{|D_1|} Q_{|D_2|}$ , con  $|D_1| \# |D_2|$  la suma conexas,
- 2)  $Q_{(D_1 \sqcup D_2)}(x) = \mu Q_{D_1}(x) Q_{D_2}(x)$ ,
- 3)  $Q_L(x) = Q_{L^*}(x)$ .

**Ejemplo 2.3.2** Determine el polinomio  $Q$ , para el nudo  $3_1$ , es decir el nudo trébol.

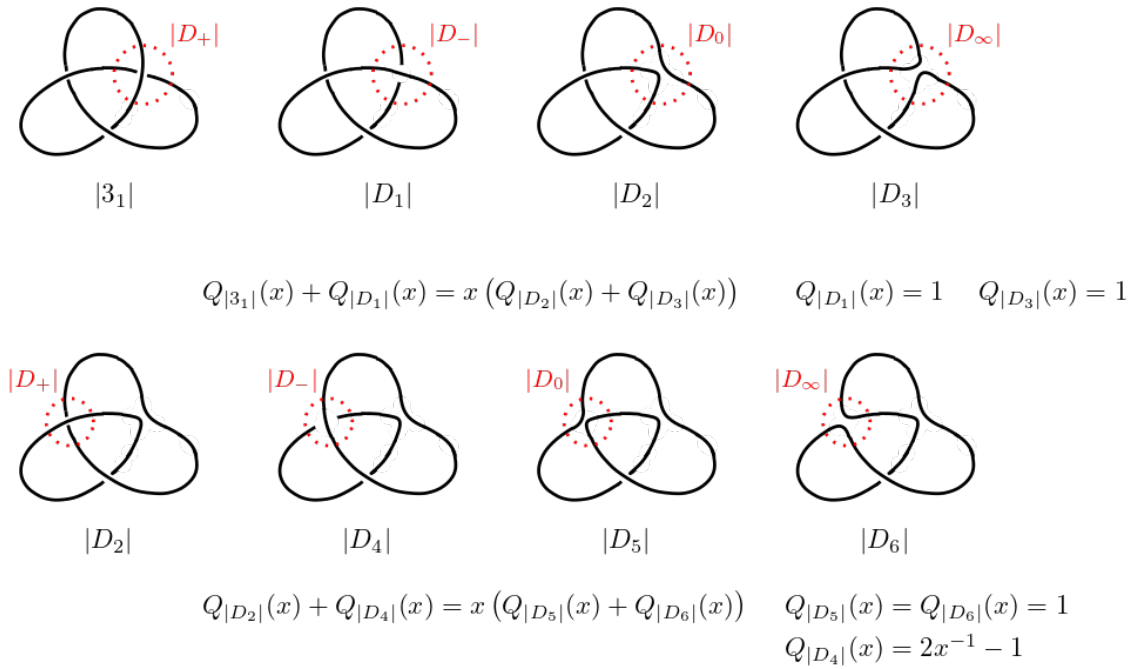


Figura 2.16: Estados del nudo trébol al estilo polinomio  $Q$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
 Q_{|3_1|}(x) + Q_{|D_1|}(x) &= x(Q_{|D_2|}(x) + Q_{|D_3|}(x)) \\
 Q_{|3_1|}(x) &= -Q_{|D_1|}(x) + x(Q_{|D_2|}(x) + Q_{|D_3|}(x)) \\
 Q_{|3_1|}(x) &= -1 + x \cdot Q_{|D_2|}(x) + x
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

pero, también tenemos la siguiente ecuación, es decir:

$$\begin{aligned} Q_{|D_2|}(x) + Q_{|D_4|}(x) &= x(Q_{|D_5|}(x) + Q_{|D_6|}(x)) \\ Q_{|D_2|}(x) &= -Q_{|D_4|}(x) + x(Q_{|D_5|}(x) + Q_{|D_6|}(x)) \\ Q_{|D_2|}(x) &= -2x^{-1} + 1 + 2x \end{aligned} \quad (2.30)$$

luego, al sustituir (2.21) en (2.20), obtenemos que

$$\begin{aligned} Q_{|3_1|}(x) &= -1 + x \cdot Q_{|D_2|}(x) + x \\ Q_{|3_1|}(x) &= -1 + x \cdot (-2x^{-1} + 1 + 2x) + x \\ Q_{|3_1|}(x) &= -3 + 2x + 2x^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Tal resultado puede ser comprobado en [16], página 572. En el cual solo se consideran los coeficientes numéricos del polinomio obtenido, cuyo exponente del factor literal es creciente, es decir  $Q_{|3_1|}(x) = -3 + 2x + 2x^2$

**Observación 2.3.2** Notemos que en tal tabla ([16], página 572), el el grado del polinomio  $Q$  para un nudo  $|K|$ , depende del número de cruces del nudo  $|K|$ , es decir  $|3_1|$  tiene tres cruces, por lo tanto el grado del polinomio  $Q$  es de grado dos,  $3 - 1 = 2$ .

**Ejemplo 2.3.3** Determinemos el polinomio de  $Q$ , para el link Hopfly, es decir:

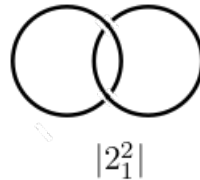
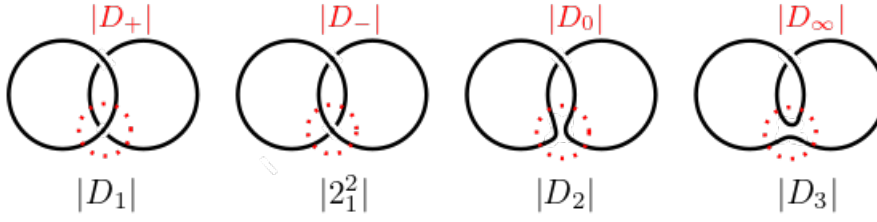


Figura 2.17: Link Hopfly  $(2_1^2)$ .

Luego tenemos:



$$Q_{|D_1|}(x) + Q_{|2_1^2|}(x) = x(Q_{|D_2|}(x) + Q_{|D_3|}(x)) \quad Q_{|D_2|}(x) = Q_{|D_3|}(x) = 1$$

$$Q_{|D_1|}(x) = 2x^{-1} - 1$$

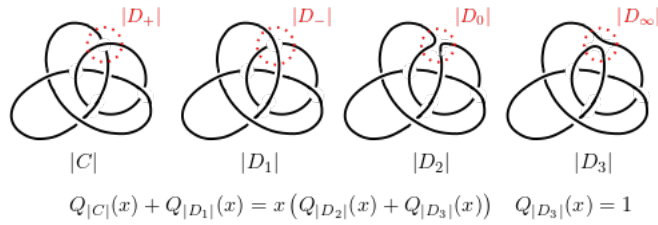
Figura 2.18: Estados del link Hopfly al estilo polinomio  $Q$ .

entonces

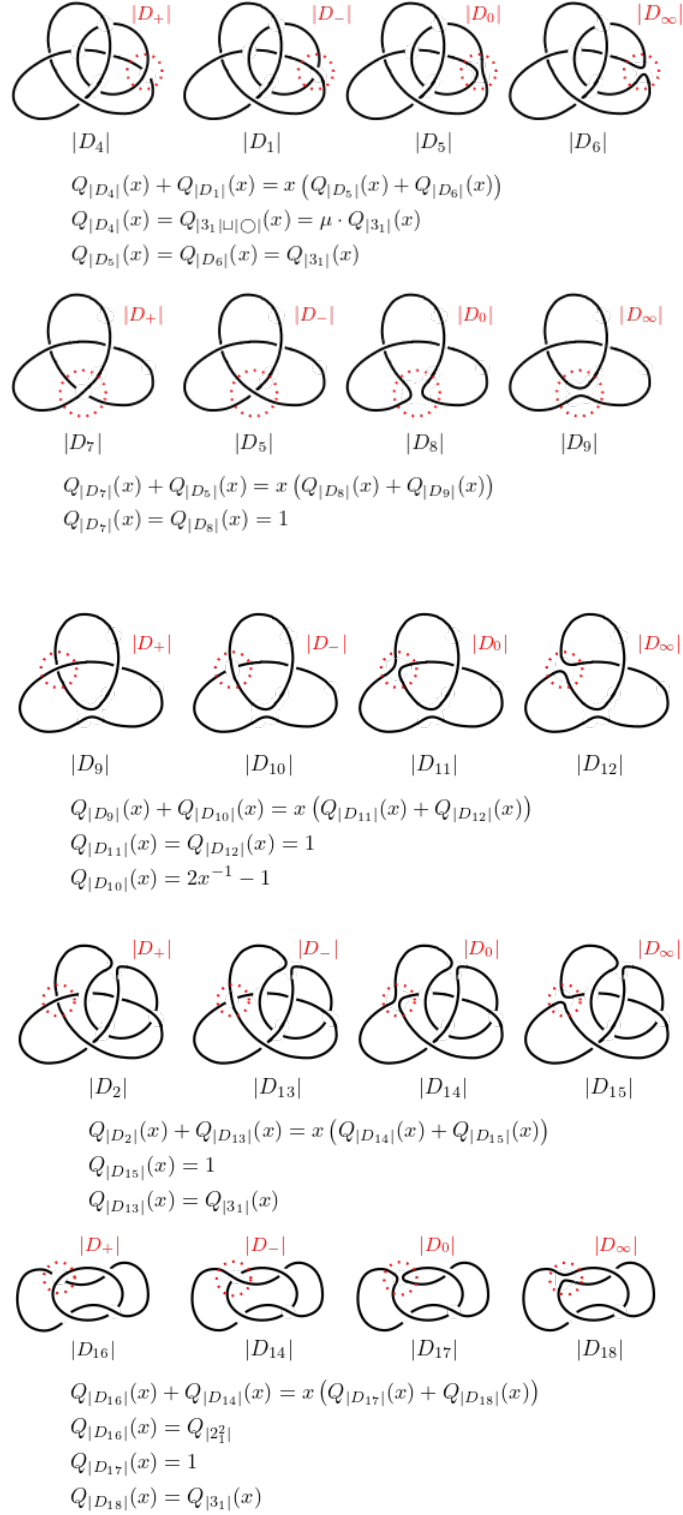
$$\begin{aligned} Q_{|D_1|}(x) + Q_{|2_1^2|}(x) &= x(Q_{|D_2|}(x) + Q_{|D_3|}(x)) \\ Q_{|2_1^2|}(x) &= -Q_{|D_1|}(x) + x(Q_{|D_2|}(x) + Q_{|D_3|}(x)) \\ Q_{|2_1^2|}(x) &= -(2x^{-1} - 1) + x(2) \\ Q_{|2_1^2|}(x) &= -2x^{-1} + 1 + 2x \end{aligned} \quad (2.32)$$

**Observación 2.3.3** Notemos que en el caso de links, la observación 2.3.2 no es aplicable.

**Ejemplo 2.3.4** Determinemos el polinomio  $Q$  para el link transversal  $|C|$ . Consideremos la descomposición de estados del link transversal  $|C|$  al estilo polinomio  $Q$ , es decir:



$$Q_{|C|}(x) + Q_{|D_1|}(x) = x(Q_{|D_2|}(x) + Q_{|D_3|}(x)) \quad Q_{|D_3|}(x) = 1$$

Figura 2.19: Estados del link transversal  $|C|$

Entonces, tenemos nuestra primera ecuación que nos permitirá calcular el polinomio de  $Q$  para el link transversal.

$$\begin{aligned}
 Q_{|C|}(x) + Q_{|D_1|}(x) &= x(Q_{|D_2|}(x) + Q_{|D_3|}(x)) \\
 Q_{|C|}(x) &= -Q_{|D_1|}(x) + x(Q_{|D_2|}(x) + Q_{|D_3|}(x)) \\
 Q_{|C|}(x) &= -Q_{|D_1|}(x) + x(Q_{|D_2|}(x) + 1) \\
 Q_{|C|}(x) &= -Q_{|D_1|}(x) + xQ_{|D_2|}(x) + x
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

De igual forma tenemos la ecuación del segundo nivel, es decir:

$$\begin{aligned}
 Q_{|D_4|}(x) + Q_{|D_1|}(x) &= x(Q_{|D_5|}(x) + Q_{|D_6|}(x)) \\
 Q_{|D_1|}(x) &= -Q_{|D_4|}(x) + x(Q_{|D_5|}(x) + Q_{|D_6|}(x)) \\
 Q_{|D_1|}(x) &= -\mu \cdot Q_{|3_1|}(x) + 2x \cdot Q_{|3_1|}(x) \\
 Q_{|D_1|}(x) &= (-2x^{-1} + 1 + 2x) \cdot Q_{|3_1|}(x)
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

El siguiente teorema muestra una propiedad relacionada entre el polinomio  $Q$  y los polinomios braket y Jones sobre nudos de 2-puentes. Para detalles del concepto de 2-puentes se sugiere ver [15, Capítulo 4].

**Teorema 2.3.4** *Si  $|D|$  es un diagrama de nudo de 2-puentes, entonces se cumplen las siguientes ecuaciones:*

- 1)  $Q_{|D|}(x) = 2x^{-1}V_D(t)V_D(t^{-1}) + 1 - 2x^{-1}$ , con  $x = -t - t^{-1}$
- 2)  $Q_{|D|}(x) = 2x^{-1} \langle |D| \rangle \langle |D^*| \rangle + 1 - 2x^{-1}$ , con  $x = -A^4 - A^{-4}$

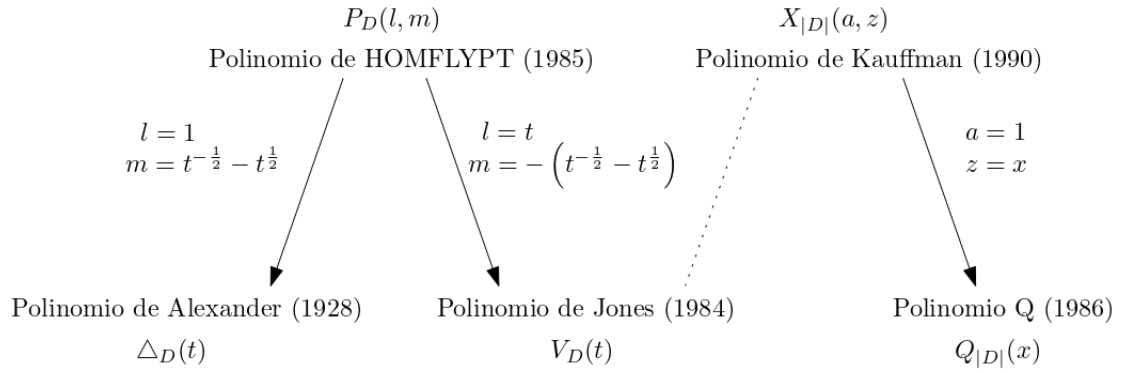


Figura 2.20: Especializaciones entre invariantes polinomiales

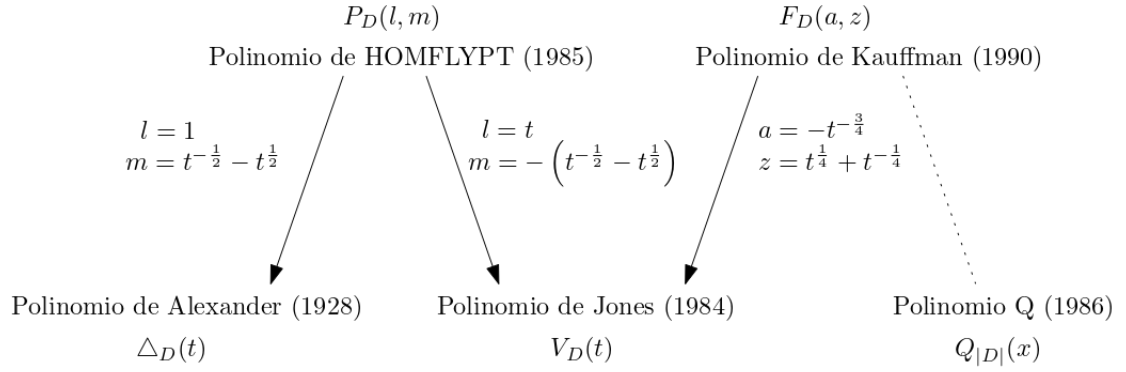


Figura 2.21: Especializaciones entre invariantes polinomiales para diagramas orientados

## Capítulo 3

### Tied Links

En el siguiente capítulo, repasaremos la teoría de tied links, esta teoría fue introducida por Francesca Aicardi y Jesús Juyumaya en el año 2016, ver [1]. El origen de los tied link surge de interpretar como diagramas los elementos generadores de la llamada bt-algebra (trenzas ligadas). Aicardi-Juyumaya definen un invariante polinomial para tied links por medio de la receta de Jones y también por relaciones skein. Esta invariante corresponde a ser una generalización del polinomio de Homflypt. En esta tesis el estudio de los tied links los realizaremos haciendo uso de diagramas de tied links.

Cabe precisar que los tied links tiene una relación con las trenzas ligadas, como los link con las trenzas.

#### 3.1. Conjunto de Particiones

**Definición 3.1.1** *Llamaremos por  $I = \{I_1, \dots, I_k\}$  la partición del conjunto  $A$ , si los bloques  $I_1, \dots, I_k$  de  $I$  satisfacen:*

$$1) \bigcup_{i=1}^k I_i = A,$$

2) Si  $i \neq j$ , entonces  $I_i \cap I_j = \emptyset$ , con  $i, j = 1, 2, 3, \dots, k$ .

**Observación 3.1.1** *Notemos que toda relación de equivalencia  $\sim$  sobre un conjunto  $A$  define una partición de  $A$ , y viceversa.*

**Definición 3.1.2** *Denotaremos por  $P_n$  como el conjunto de particiones de  $[n] := \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .*

**Observación 3.1.2** El cardinal del conjunto de particiones  $P_n$  es el  $n$ -ésimo número de Bell.

**Ejemplo 3.1.1** Para  $n = 3$ ,  $P_3$  está formado por los siguientes elementos

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\} \text{ y } \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Así el cardinal de  $P_3$  es cinco.

**Definición 3.1.3** Denotaremos por  $\leq$  el orden parcial del conjunto  $P_n$ , es decir,  $I \leq J$  si y sólo si cada bloque de  $J$  es formado por la unión de bloques de  $I$ .

En adelante utilizaremos una representación mediante ligas para referirnos a los elementos del conjunto de partición  $P_n$ , si bien también pueden ser analizados utilizando una representación por grafos lineales.

**Ejemplo 3.1.2** Para  $n = 6$ , consideremos el elemento  $\{\{1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3\}\} \in P_6$ , donde:

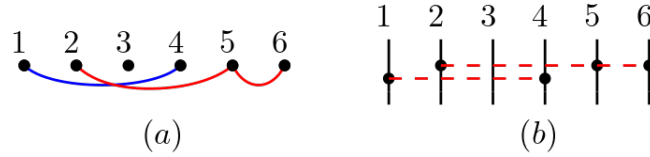


Figura 3.1: (a) grafo lineal y (b) diagrama de ligas

El conjunto de particiones  $P_n$  se puede dotar de un producto  $*$ , de modo que este obtiene una estructura de monoide conmutativo. Más precisamente, tenemos la siguiente definición

**Definición 3.1.4** Denotaremos por  $I * J$  el producto entre las particiones  $I$  y  $J$  de  $P_n$ , como la mínima partición de  $[n]$  que es mayor que  $I$  y  $J$ .

**Ejemplo 3.1.3** Consideremos la particiones  $I = \{\{1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3\}\}$  y  $J = \{\{1, 2, 4\}, \{5, 6\}, \{3\}\}$  de  $P_6$ , tenemos

$$I * J = \{\{1, 2, 4, 5, 6\}, \{3\}\}$$

**Observación 3.1.3** Notemos que el elemento neutro, bajo la operación  $*$  corresponde a  $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ .

**Ejemplo 3.1.4** En  $(P_6, \leq)$ . Sean  $P_6, I = \{\{1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3\}\}$  y  $J = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ , entonces el producto  $I * J = J$ .

**Definición 3.1.5** Denotaremos  $\mu_{i,j} \in P_n$  la partición de  $[n]$  que esta formado únicamente por un bloque  $\{i, j\}$  y el resto son singleton.

**Ejemplo 3.1.5** Determinemos  $\mu_{i,j} \in P_3$  con  $1 \leq i < j \leq n$ , es decir:

$$\mu_{2,3}, \mu_{1,3}, \mu_{1,2}.$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_{2,3} &= \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \\ \mu_{1,3} &= \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \\ \mu_{1,2} &= \{\{1, 2\}, \{3\}\}. \end{aligned}$$

Estos elementos definen una presentación de  $P_n$ . La cual se explica en el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.1** [5, Teorema 2]  $P_n$  es representado por generadores  $\mu_{i,j}$ , los que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mu_{i,j} & \quad i < j, \\ \mu_{i,j} \mu_{k,l} &= \mu_{k,l} \mu_{i,j} \quad i < j \text{ y } k < l, \\ \mu_{i,j} \mu_{i,k} &= \mu_{i,j} \mu_{j,k} = \mu_{i,k} \mu_{j,k} \quad i < j < k. \end{aligned}$$

## 3.2. Monoide de trenzas ligadas

**Definición 3.2.1** Denotaremos por  $\eta_i$  el elemento con un tied que une el camino  $i$  con la con el camino  $(i + 1)$  y  $\sigma_i$  es representado como el diagrama de trenzas vistos en la sección de trenzas. Es decir:

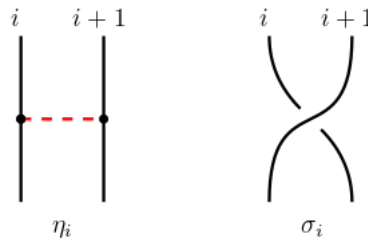


Figura 3.2: Generadores  $\eta_i$  y  $\sigma_i$  respectivamente

**Definición 3.2.2** Denotaremos por  $TB_n$  al monoide de trenzas ligadas, es decir, el monoide que es generado por los generadores del grupo de trenzas  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  y los generadores  $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$  llamados *tied*, satisfaciendo las siguientes relaciones:

$$\eta_i \eta_j = \eta_j \eta_i \quad \text{para todo } i, j, \quad (3,1),$$

$$\eta_i \sigma_i = \sigma_i \eta_i \quad \text{para todo } i, \quad (3,2),$$

$$\eta_i \sigma_j = \sigma_j \eta_i \quad \text{si } |i - j| > 1, \quad (3,3),$$

$$\eta_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \eta_j \quad \text{si } |i - j| = 1, \quad (3,4),$$

$$\eta_i \sigma_j \sigma_i^{-1} = \sigma_j \sigma_i^{-1} \eta_j \quad \text{si } |i - j| = 1, \quad (3,5),$$

$$\eta_i \eta_j \sigma_i = \eta_j \sigma_i \eta_j = \sigma_i \eta_i \eta_j \quad \text{si } |i - j| = 1, \quad (3,6),$$

$$\eta_i \eta_i = \eta_i \quad \text{para todo } i. \quad (3,7).$$

Las relaciones de la definición anterior pueden entenderse en términos de diagramas, por ejemplo, la relación (3,6), se interpreta como:

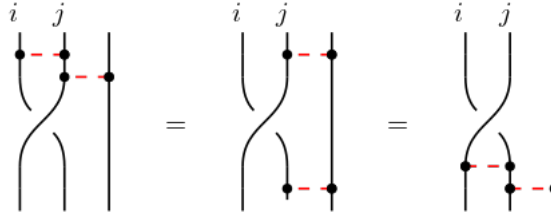


Figura 3.3: Relación (3,6)

La siguiente definición generaliza  $\eta_{i,j}$  a ligaduras que unen dos cuerdas arbitrarias.

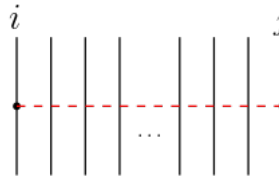


Figura 3.4:  $\eta_i$

**Definición 3.2.3** Definimos el generador de tied  $\eta_{i,j}$ , es decir liga que une las hebras  $i$  y  $j$  con  $|i - j| \geq 2$ , es decir:

$$\eta_{i,j} = \sigma_1 \cdots \sigma_{j-2} \eta_{j-1} \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}.$$

Tenemos el siguiente lema.

**Lema 3.2.1** [17, Lema 1] Si  $|i-j| = 1$  los generadores  $\sigma_i$  y  $\eta_i$  del monoide  $TB_n$  satisfacen:

- 1)  $\sigma_i \eta_j \sigma_i^{-1} = \sigma_j^{-1} \eta_i \sigma_j$ ,
- 2)  $\sigma_i^{-1} \sigma_j \eta_i = \eta_j \sigma_i^{-1} \sigma_j$ ,
- 3)  $\sigma_j \eta_i \sigma_j^{-1} = \sigma_i \eta_j \sigma_i^{-1}$ .

**Ejemplo 3.2.1** En  $\{\{1\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}\} \in P_6$  tenemos:

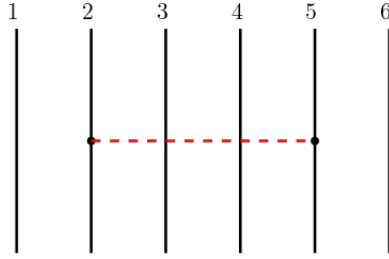


Figura 3.5:  $\{\{1\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}\}$

Así,

$$\eta_{2,5} = \sigma_2 \sigma_3 \eta_4 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \eta_4 \sigma_3 \sigma_2$$

cuyo grafo de línea corresponde a

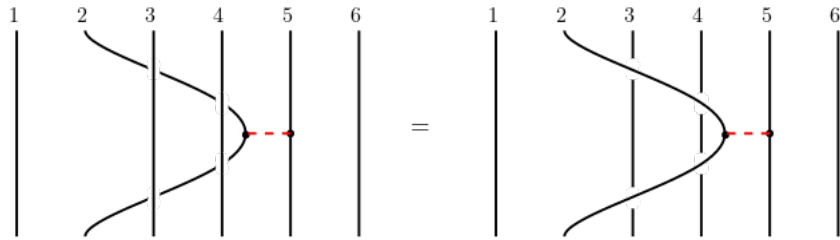


Figura 3.6:  $\eta_{2,5} = \sigma_2 \sigma_3 \eta_4 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \eta_4 \sigma_3 \sigma_2$

Notar que el monoide  $TB_n$  se puede describir un producto semidirecto entre  $P_n$  y  $B_n$ . Más precisamente tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.1** El monoide  $TB_n \cong P_n \rtimes B_n$ .

Tal demostración puede ser visto en [1].

**Definición 3.2.4** Sea  $\alpha \in TB_n$ . Denotaremos por  $\alpha = (I, \sigma)$  a la trenza ligada, tal que  $I \in P_n$  y  $\sigma \in B_n$ .

### 3.3. Tied Links

**Definición 3.3.1** Denotaremos por  $\tilde{L}$  un tied link, es decir, es un link cuyas componentes pueden estar conectadas por medio de una ligadura (o resorte).

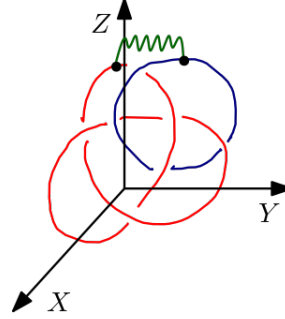


Figura 3.7: Tied link  $\tilde{C}$

**Definición 3.3.2** Sea  $L$  un link con  $m$  componentes, si conectamos con una ligadura una misma componente, diremos que la ligadura no es esencial, en caso contrario diremos que es una ligadura esencial.

**Definición 3.3.3** Denotaremos por  $\tilde{\mathcal{L}}$  al conjunto de tied links.

**Observación 3.3.1** Sea  $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{L}}$ , el link  $L$  puede ser obtenido por  $\tilde{L}$  olvidando las ligas (tied).

**Definición 3.3.4** Denotaremos por  $D_{\tilde{L}}$  el diagrama de un tied link  $\tilde{L}$ , es decir, al diagrama  $D$  del link  $L$  se le asignan una ligadura entre las componentes originales de  $\tilde{L}$ .

**Definición 3.3.5** Denotaremos por  $\tilde{\mathcal{D}}$  el conjunto de diagramas de tied links.

**Observación 3.3.2** Los ligas (tied) no son objetos topológicos. Su finalidad es identificar componentes de link mediante ligas, tales componentes puede estar enlazadas o no.

**Propiedades 3.3.1** Un tie cumple con las siguientes propiedades "geométricas":

- 1) Los puntos de identificación de componentes de un tie son móviles, tales puntos se pueden desplazar por toda la componente de un link. En el caso de los diagramas tales puntos solo se pueden desplazar por sus arcos.

- 2) Un tie puede traspasar toda componente de link.
- 3) Todo tie puede dilatarse o contraerse en  $\mathbb{R}^3$  o en  $\mathbb{R}^2$  según sea el tied link o su diagrama.

**Observación 3.3.3** La cantidad de componentes de un tied link  $\tilde{L}$  es la misma cantidad de componentes del link  $L$

**Notación 3.3.1** Denotaremos por  $C_i \rightsquigarrow C_j$  al tie que vincula la componente  $C_i$  con la componente  $C_j$  de un tied link  $\tilde{L}$ , con  $i \neq j$  e  $i, j = 1, 2, 3, \dots, m$ .

**Definición 3.3.6** Diremos que dos componentes de link están ligadas entre si, si pertenecen a la misma clase. En otras palabras si ya existe una ligadura entre ellas o se puede asignar una ligadura entre las componentes.

**Definición 3.3.7** Los movimientos de Reidemester para diagramas de tied links están determinados por los siguientes cuatro movimientos tied.

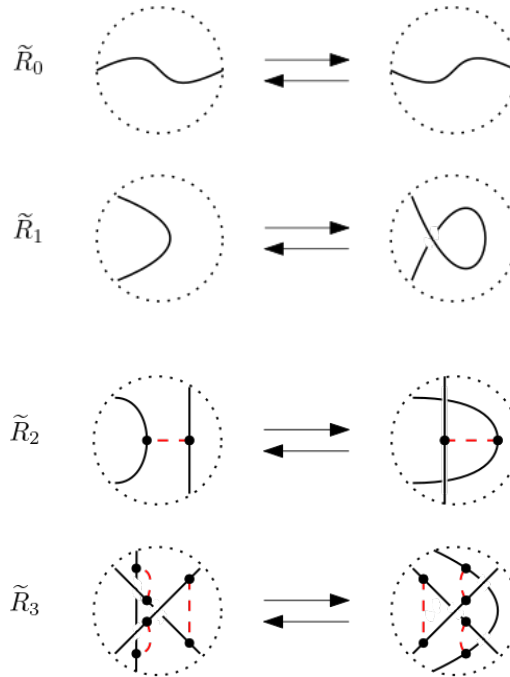


Figura 3.8: Movimientos de Reidemester para tied links

**Definición 3.3.8** [1, Definición 1.4] Sea  $\tilde{L}_1$  y  $\tilde{L}_2$  dos tied links orientados. Diremos que  $\tilde{L}_1$  y  $\tilde{L}_2$  son tie-isotópicos si y sólo si:

- 1) Los link  $L_1$  y  $L_2$  son ambiente isotópicos,
- 2) Los conjuntos  $\tilde{L}_1$  y  $\tilde{L}_2$  definen la misma partición del conjunto de componentes de  $L_1$  y  $L_2$ .

### 3.4. Teorema de Alexander para tied link

**Definición 3.4.1** Denotaremos por  $TB_\infty$  el límite inductivo, si él está asociado a la cadena  $TB_2 \subset \dots \subset TB_{n-1} \subset TB_n \subset \dots$

**Definición 3.4.2** Sea  $\sigma \in TB_\infty$ . Definiremos por  $\hat{\sigma}$ , la clausura de  $\sigma$ , de igual modo que la clausura de trenzas, es decir, se identifican los puntos iniciales y finales de  $\sigma$ , por medio de una función epiyectiva  $\Psi$  de  $TB_\infty$  en  $\tilde{\mathcal{D}}$

El siguiente teorema es el Teorema de Alexander para tied links.

**Teorema 3.4.1** [1, Teorema 3.5]. Cada tied link orientado puede ser obtenido clausurando una trenza ligada.

Para la demostración de este teorema, podemos hacer uso del teorema de Alexander de manera similar para diagrama de link y diagrama de trenzas: Y al finalizar este proceso se incorporaran el o los tie. es decir:

- 1) Primero ubicar un punto  $O$  en el diagrama  $D$  del link  $L$ , el que llamaremos centro. Este punto no puede estar posicionado sobre los arcos del link, tal que al recorrer el link  $L$  desde  $O$  se mantiene un único sentido, el que esta determinado por la orientación de  $L$ .
- 2) Una vez detectado el centro  $O$ , se procede a dividir el diagrama  $D$  del link  $L$  mediante líneas radiales desde el centro  $O$ , de modo que cada sector limitado por ellas admita solo un cruce.
- 3) Luego cada linea radial intersecta a los arcos del diagrama  $D$  del link  $L$ , de modo que asignaremos una etiqueta numeral, partiendo con la intersección más próxima del centro  $O$  sobre la linea radial. Este proceso de se repite en cada en todas las lineas radiales.

- 4) Finalmente se construye el diagrama de trenzas (realizando el producto) utilizando los sectores definidos por las líneas radiales.
- 5) Para de del tied del link  $L$  estas serán desplazadas utilizando sus propiedades "geométricas" ( ver 3.3.1) sobre una misma línea radial. Determinado así  $\mu_{i,j}$ , con  $i$  y  $j$  la enumeración establecida en la línea radial.

**Ejemplo 3.4.1** Consideremos el diagrama del tied link orientado  $\tilde{C}$ , es decir:

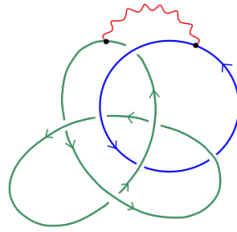
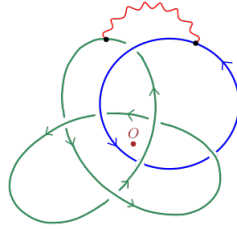
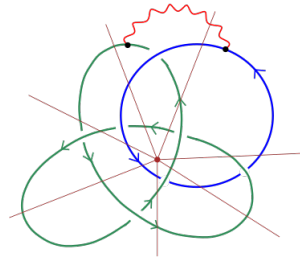


Figura 3.9: Diagrama del tied link  $\tilde{C}$

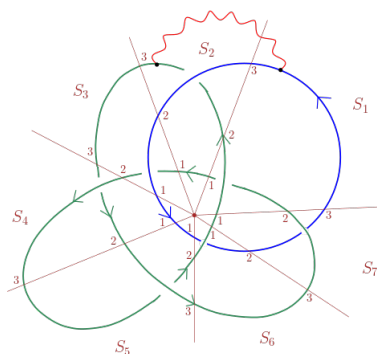
- 1) Determinemos el centro  $O$  del diagrama del tied link  $\tilde{C}$ , es decir:



- 2) Determinemos los sectores limitados por la líneas radiales, es decir:



- 3) Asignemos las etiquetas numéricas en cada línea radial



4) Construcción de diagrama de trenza de acuerdo a los sectores



5) Determinemos el tied  $\mu_{i,j}$  al considerar una de las lineas radiales. Al considerar la primera linea radial, tenemos que  $\mu_{1,3}$

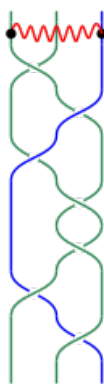


Figura 3.10:  $\tilde{C} = \mu_{1,3}\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$

**Ejemplo 3.4.2** Sea  $\alpha \in TB_3$  con  $\alpha = (I, \sigma)$ , tal que  $l = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$  y  $\alpha = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2$  y  $\hat{\alpha} = \tilde{C}$

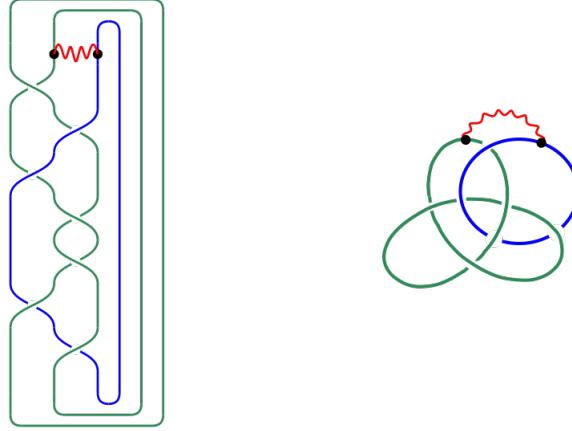


Figura 3.11: Clausura de la trenza ligada  $\tilde{C}$

### 3.5. Teorema de Markov para tied links

**Definición 3.5.1** Dos trenzas ligadas del monoide  $TB_\infty$  son  $t$ -Markov equivalentes si una puede obtenerse de la otra aplicando una cantidad finita de los siguientes movimientos.

- 1) Conmutatividad en  $TB_n$ . Para todo  $\alpha, \beta \in TB_n$  se puede sustituir  $\alpha\beta$  por  $\beta\alpha$ ,
- 2) Estabilización. Para todo  $\alpha \in TB_n$ ,  $\alpha$  se puede sustituir por  $\alpha\sigma_n$  o  $\alpha\sigma_n^{-1}$ , ambos en  $TB_{n+1}$ ,
- 3)  $t$ -estabilización. Para todo  $\alpha \in TB_n$  se puede sustituir  $\alpha$  por  $\alpha\mu_{i,j}$  si  $i, j$  pertenecen al mismo ciclo de  $p(\alpha)$ , con

$$p: TB_n \rightarrow S_n$$

la que denotaremos por  $\alpha \sim_{tM} b$

**Ejemplo 3.5.1** Consideremos  $\sigma \in TB_3$  con  $\sigma = \{I, \sigma\}$ , tal que:

$$I = \{\{1\}, \{2, 3\}\} \text{ y } \sigma = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2.$$

Al considerar el tercer punto de la definición anterior, tenemos que  $p(\sigma) = (1\ 2)(3)$  por lo tanto  $\sigma \sim_{tM} \sigma\mu_{1,2}$ , es decir:

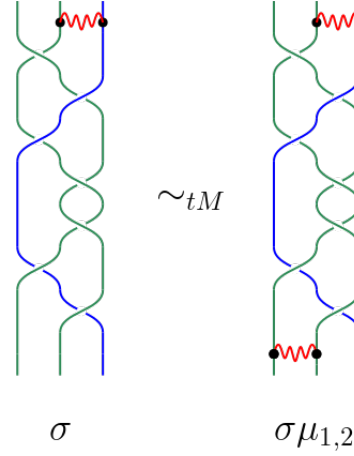
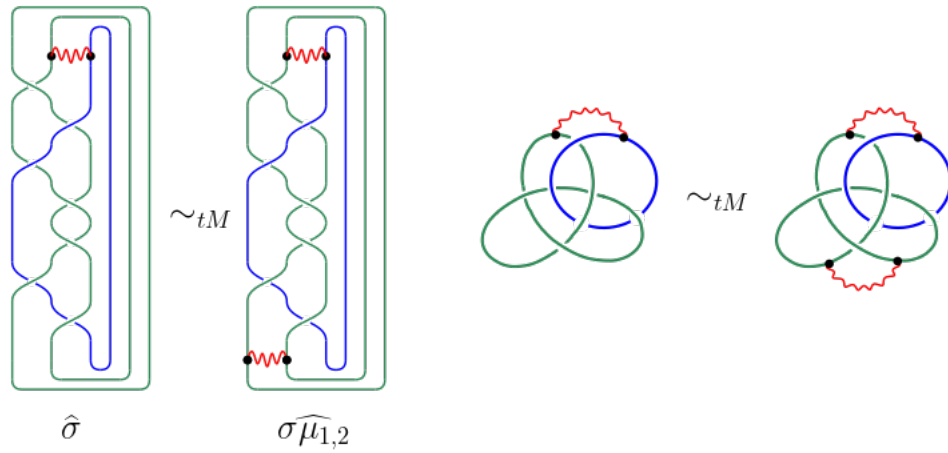


Figura 3.12:  $\sigma$  y  $\sigma\mu_{1,2}$

**Teorema 3.5.1** [1, Teorema 3.7]. *Dos trenzas ligadas son tie-isotópicas si y sólo si, ellos son  $\sim_{tM}$ -equivalentes.*

**Ejemplo 3.5.2** *Considerando el Ejemplo 3.5.1 tenemos que:*



## Capítulo 4

### Invariantes de Tied link

En el presente capítulo se presentan las invariantes de tied links definidas por Aicardi-Juyumaya, en el año 2016, ver [1] y [2]. Recordaremos su definición y sus principales propiedades, las que introduciremos haciendo uso de sus relaciones de madeja (skein).

#### 4.1. Invariante $\mathcal{F}$

En lo que sigue, para la definición de invariantes de tied link, es necesario considerar tres variables  $a, b$  y  $c$ . Definimos  $A = \mathbb{C}(a, b, c)$ , es decir el cuerpo de funciones racionales en las variables  $a, b$  y  $c$  sobre el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ .

**Notación 4.1.1** Denotaremos por  $D_+, D_-, D_0, \hat{D}_+, \hat{D}_-$  y  $\hat{D}_0$  los seis diagramas de discos punteados que coinciden fuera de ellos, pero en su interior difieren como se indica a continuación:

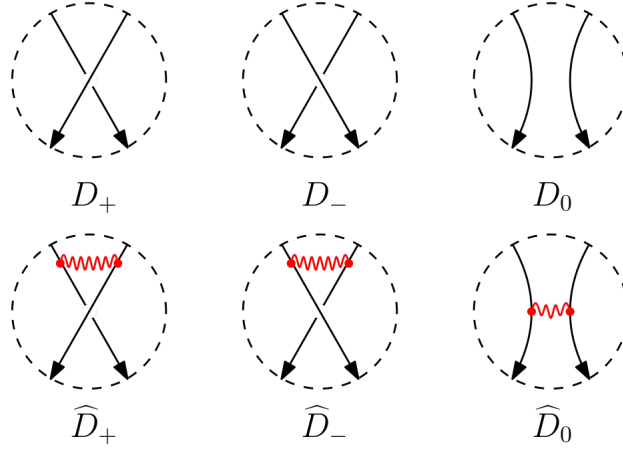


Figura 4.1: Regla de madeja para invariantes de tied link

**Teorema 4.1.1** [1, Teorema 2.1] Existe una única función  $\mathcal{F} : \hat{\mathcal{D}} \rightarrow A$  invariante de tied links orientados definida únicamente por las siguientes reglas:

- 1)  $\mathcal{F}(D) = 1$  si  $D$  es el no nudo,
- 2)  $\mathcal{F}(D \sqcup \bigcirc) = \frac{1}{cb} \mathcal{F}(D),$
- 3)  $\frac{1}{c} \mathcal{F}(D_+) - c \mathcal{F}(D_-) = (1 - a^{-1}) (\mathcal{F}(\hat{D}_0) + c^{-1} \mathcal{F}(\hat{D}_+)),$
- 4)  $\frac{1}{ac} \mathcal{F}(\hat{D}_+) - c \mathcal{F}(\hat{D}_-) = (1 - a^{-1}) \hat{D}_0,$
- 5)  $\frac{1}{c} \mathcal{F}(D_+) = c [\mathcal{F}(D_-) + (a - 1) \mathcal{F}(\hat{D}_-)] + (a - 1) \mathcal{F}(\hat{D}_0),$
- 6)  $c \mathcal{F} D_- = \frac{1}{c} [\mathcal{F}(D_+) + (a^{-1} - 1) \mathcal{F}(\hat{D}_+)] + (a^{-1} - 1) \mathcal{F}(\hat{D}_0).$

**Propiedades 4.1.1** [1, Propiedades 2.2] A continuación presentaremos algunas propiedades del polinomio  $\mathcal{F}$ :

- 1)  $\mathcal{F}$  es multiplicativa con respecto a la suma conexas de componentes no enlazadas.
- 2) La imagen de  $\mathcal{F}$  no se altera si se cambian las orientaciones del diagrama de link.
- 3) Sea  $D$  un diagrama de link y sea  $D^\pm$  los cruces positivos o negativos en  $D$ . Así,  $\mathcal{F}(D^\pm)$  se obtiene al cambiar las variables  $c$  por  $\frac{1}{c}$  y  $a$  por  $\frac{1}{a}$  en  $\mathcal{F}(D)$ .

4) Sea  $L$  un link (o nudo), entonces  $\mathcal{F}(L)$  se define por (a) y (d) del Teorema 4.1.1 y por lo tanto satisface la siguiente ecuación skein del tipo Homflypt:

$$l\mathcal{F}(\hat{\mathcal{D}}_+) + l^{-1}\mathcal{F}(\hat{\mathcal{D}}_-) + m\mathcal{F}(\hat{\mathcal{D}}_0) = 0,$$

$$\text{con } l = \frac{i}{\sqrt{ac}} \text{ y } m = i\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right).$$

## 4.2. Invariante $\mathcal{L}$

**Notación 4.2.1** Denotaremos por  $|\hat{\mathcal{D}}_0|$  y  $|\hat{\mathcal{D}}_\infty|$  los dos diagramas de tied link no orientados de discos punteados que coinciden fuera de ellos, pero en su interior difieren como se indica a continuación:

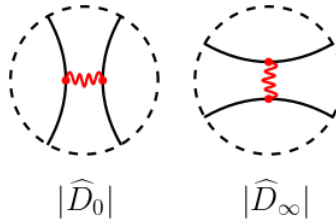


Figura 4.2: Discos  $|\hat{\mathcal{D}}_0|$  y  $|\hat{\mathcal{D}}_\infty|$  de un diagrama no orientado

**Teorema 4.2.1** [2, Teorema 1] Existe una única función  $\mathcal{L}$  que asigna a cada diagrama de tied link no orientado, un único polinomio de Laurent en el anillo  $\mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}, x^{-1}]$ , que satisface las siguientes reglas:

- 1)  $\mathcal{L}(\bigcirc) = 1$ ,
- 2)  $\mathcal{L}(|D| \sqcup \bigcirc) = x^{-1} \mathcal{L}(|D|)$ ,
- 3)  $\mathcal{L}$  es un invariante bajo los movimientos de Reidemeister  $R_2$  y  $R_3$ ,
- 4)  $\mathcal{L}(\overline{|D|}) = a \mathcal{L}(|D_\sim|)$ ,
- 5)  $\mathcal{L}(\underline{|D|}) = a^{-1} \mathcal{L}(|D_\sim|)$ ,
- 6)  $\mathcal{L}(|D_+|) + \mathcal{L}(|D_-|) = z [\mathcal{L}(|\hat{\mathcal{D}}_0|) + \mathcal{L}(|\hat{\mathcal{D}}_\infty|)]$ .

Las uniones disjuntas del punto (b) en el caso de ser uniones por tied, puede ser calculada por la siguiente regla:

$$\mathcal{L}(|D| \sqcup \bigcirc) = y \mathcal{L}(|D|),$$

con

$$y := (a + a^{-1})z^{-1} - 1.$$

**Teorema 4.2.2** [2, Teorema 2] Sea  $D$  un diagrama de un tied link orientado. La función  $\tilde{\mathcal{L}}$  definida por

$$\tilde{\mathcal{L}}(D) := a^{-w(D)} \mathcal{L}(|D|)$$

define una invariante de ambiente tie-isotópico de un tied links.

**Observación 4.2.1** Cabe notar que la invariante  $\mathcal{L}(a, z, x)$  es una generalización de la invariante de Kauffman en dos variables  $X_{|D|}(a, z)$ , es decir,  $\mathcal{L}$  coincide con el polinomio de Kauffman sobre nudos, sin embargo  $\mathcal{L}$  es mas potente sobre links, dado que existen link que Kauffman no distingue pero si  $\mathcal{L}$ .

### 4.3. Invariante $\langle\langle \rangle\rangle$

El polinomio doble bracket, corresponde a la construcción de un polinomio para tied link. Tal construcción es similar a la utilizada en  $\langle \rangle$ , considerando  $A$  y  $c$  dos variables independientes y conmutativas.

**Teorema 4.3.1** [2, Teorema 3] Existe una única función  $\langle\langle \rangle\rangle$  que asigna a cada link no orientado un único polinomio de Laurent en el anillo  $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}, c]$  que satisface las siguientes reglas:

- 1)  $\langle\langle \bigcirc \rangle\rangle = 1,$
- 2)  $\langle\langle |D| \sqcup \bigcirc \rangle\rangle = c \langle\langle |D| \rangle\rangle,$
- 3)  $\langle\langle |D| \tilde{\sqcup} \bigcirc \rangle\rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle\langle |D| \rangle\rangle,$
- 4)  $\langle\langle \rangle\rangle$  es una invariante de isotopía regular para tied links,
- 5)  $\langle\langle |\tilde{D}_+| \rangle\rangle = A \langle\langle |\tilde{D}_0| \rangle\rangle + A^{-1} \langle\langle |\tilde{D}_\infty| \rangle\rangle,$

$$6) \langle\langle |D|_+ \rangle\rangle + \langle\langle |D|_- \rangle\rangle = (A + A^{-1}) (\langle\langle |\tilde{D}_0| \rangle\rangle + \langle\langle |\tilde{D}_\infty| \rangle\rangle).$$

**Proposición 4.3.1** *El polinomio bracket doble  $\langle\langle \ \rangle\rangle$  satisface:*

$$1) \langle\langle |\underline{D}| \rangle\rangle = -A^3 \langle\langle |D_\sim| \rangle\rangle,$$

$$2) \langle\langle |\overline{D}| \rangle\rangle = -A^{-3} \langle\langle |D_\sim| \rangle\rangle.$$

**Observación 4.3.1** *El polinomio doble bracket  $\langle\langle \ \rangle\rangle$  coincide con el polinomio bracket de Kauffman, siempre que todas componentes del link esten ligadas.*

**Teorema 4.3.2** [2, Teorema 4] *Sea  $D$  un diagrama de un tied link orientado. La función  $\mathcal{J}$  definida por:*

$$\widetilde{\mathcal{J}}(D) := (-A)^{-3w(D)} \langle\langle |D| \rangle\rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, c^{\pm 1}].$$

*define una invariante de ambiente tie-isotópico de un tied link.*

**Corolario 4.3.1** *Al sustituir la variable  $A = t^{1/4}$  del polinomio  $\widetilde{\mathcal{J}}(D)$  se obtiene el polinomio de Jones, siempre que  $D$  sea el diagrama de link de una única componente.*

**Observación 4.3.2** *Notemos que existe una relación entre los teoremas 4.2.1 y 4.3.1 al sustituir  $a = -A^3$ ,  $z = A + A^{-1}$  y  $x = c^{-1}$ , dado este hecho, se tiene que:*

$$\widetilde{\mathcal{J}}(D) = (-A)^{-3w(D)} \mathcal{L}(|D|).$$

En el siguiente capítulo se presenta el trabajo de investigación, la que tiene como objetivo construir una versión tied para el invariante  $Q$ , el que llamaremos invariante  $\tilde{Q}$ .

## Capítulo 5

### Una extensión de $Q$ a tied links

En el presente capítulo se conjetura una posible extensión denotada  $\tilde{Q}$  del polinomio  $Q$  para tied links, es decir, una invariante para tied links que sea igual al polinomio  $Q$  en nudos pero más fuerte a nivel de links.

Los trabajos realizados por Aicardi-Juyumaya nos dan indicios para plantear la conjeturar sobre la existencia de la invariante  $\tilde{Q}$ .

#### 5.1. Extensión entre el polinomio bracket y el polinomio de Kauffman

Notemos que el polinomio Bracket a diferencia del polinomio de Kauffman de dos variables esta definido por una cantidad distinta de reglas a cumplir. Por lo tanto, una de las preguntas que nos podemos formular es como a partir del polinomio bracket damos origen a la regla 3) del polinomio Kauffman, es decir en palabras practicas como se define  $\langle |\overline{D}| \rangle$  y  $\langle |\underline{D}| \rangle$ , notemos que

$$\begin{aligned}\langle |\overline{D}| \rangle &= A \langle |\hat{D}| \rangle + A^{-1} \langle \hat{D} \sqcup \bigcirc \rangle \\ &= A \langle |\hat{D}| \rangle + A^{-1} (-A^2 - A^{-2}) \langle |\hat{D}| \rangle \\ &= -A^{-3} \langle |\hat{D}| \rangle,\end{aligned}\tag{5.1}$$

de manera análoga, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \langle |\underline{D}| \rangle &= A^{-1} \langle |\widehat{D}| \rangle + A \langle |\widehat{D}| \sqcup \bigcirc \rangle \\
 &= A^{-1} \langle |\widehat{D}| \rangle + A(-A^2 - A^{-2}) \langle |\widehat{D}| \rangle \\
 &= -A^3 \langle |\widehat{D}| \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Por otro lado, notemos que  $\langle |D_-| \rangle = A^{-1} \langle |D_0| \rangle + A \langle |D_\infty| \rangle$ , donde al calcular la suma de  $\langle |D_+| \rangle$  y  $\langle |D_-| \rangle$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \langle |D_+| \rangle + \langle |D_-| \rangle &= A \langle |D_0| \rangle + A^{-1} \langle |D_\infty| \rangle + A^{-1} \langle |D_0| \rangle + A \langle |D_\infty| \rangle \\
 &= (A + A^{-1}) (\langle |D_0| \rangle + \langle |D_\infty| \rangle)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Notemos que el polinomio bracket puede ser obtenido especializar el polinomio de Kauffman, al considerar  $a = -A^3$  y  $z = A + A^{-1}$ .

## 5.2. Relación entre el polinomio Q y el polinomio Kauffman

De manera análoga al caso anterior, el polinomio de Kauffman puede ser obtenido a partir del polinomio Q, siempre que  $b = z$  y  $a = 1$ . Teniendo presente los invariantes construidos por Aicardi y Juyumaya, ver [1] [2], se establece la siguiente conjetura.

**Conjetura 5.2.1** *Existe una única función  $\tilde{Q}$  que asigna a cada diagrama de tied link no orientado un único polinomio de Laurent en el anillo  $\mathbb{Z}[p^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ , que quede definida por las siguientes reglas:*

- 1)  $\tilde{Q}$  es un invariante de isotopía regular para tied links,
- 2)  $\tilde{Q}_{|U|}(p, q) = 1$  si  $|U|$  es el no nudo,
- 3)  $\tilde{Q}_{D \sqcup U}(p, q) = q Q_D(p, q)$ ,
- 4)  $\tilde{Q}_{D \sqcup U}(p, q) = (2p^{-1} - 1) Q_D(p, q)$
- 5)  $\tilde{Q}_{D_+}(p, q) + \tilde{Q}_{D_-}(p, q) = p \left( \tilde{Q}_{\widetilde{D_0}}(p, q) + \tilde{Q}_{\widetilde{D_\infty}}(p, q) \right).$

Notese que  $\tilde{Q}$  puede ser obtenido a partir de  $\mathcal{L}$  al considerar  $q = x^{-1}$ ,  $p = z$  y  $a = 1$ .

**Ejemplo 5.2.1** *Determinemos el polinomio  $\tilde{Q}$  para el nudo  $|3_1|$ , es decir:*

$$\tilde{Q}_{|3_1|}(p, q) + \tilde{Q}_{|D_1|}(p, q) = p (\tilde{Q}_{|D_2|}(p, q) + \tilde{Q}_{|D_3|}(p, q)) \quad \tilde{Q}_{|D_1|}(p, q) = 1 \quad \tilde{Q}_{|D_3|}(p, q) = 1$$

$$Q_{|D_2|}(p, q) + Q_{|D_4|}(p, q) = p (Q_{|D_5|}(p, q) + Q_{|D_6|}(p, q)) \quad Q_{|D_5|}(p, q) = 1$$

$$Q_{|D_6|}(p, q) = 1$$

$$Q_{|D_4|}(p, q) = 2p^{-1} - 1$$

Figura 5.1: Estados del nudo  $|3_1|$  al estilo  $\tilde{Q}$

Luego al utilizar las ecuaciones presentes en la Figura 5.1, se obtiene que

$$\tilde{Q}_{|3_1|}(p, q) = -3 + 2p + 2p^2$$

Por lo tanto las reglas de  $\tilde{Q}$  respeta las reglas de la teoría clásica de links. De manera análoga al calcular  $|3_1^*|$ , de obtiene el mismo resultado, este hecho se debe a que el polinomio  $Q$ , no distingue entre un link y su reflejado, siempre que se considere la siguiente extensión  $p = x$  y  $q = 1$ .

# Bibliografía

- [1] AICARDI, F., AND JUYUMAYA, J. Tied links. *J. Knot Theory Ramifications* 25, 9 (2016), 1641001, 28.
- [2] AICARDI, F., AND JUYUMAYA, J. Kauffman type invariants for tied links. *Math. Z.* 289, 1-2 (2018), 567–591.
- [3] ALEXANDER, J. W. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society* 30 (1928), 275–306.
- [4] ARTIN, E. Theory of braids. *Annals of Mathematics* 48, 1 (1947), 101–126.
- [5] FITZGERALD, D. G. A presentation for the monoid of uniform block permutations. *Bull. Austral. Math. Soc.* 68, 2 (2003), 317–324.
- [6] HANSEN, V. L. Braids and coverings: Selected topics.
- [7] KASSEL, C., AND TURAEV, V. *Braid groups*, vol. 247 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. With the graphical assistance of Olivier Dodane.
- [8] KAUFFMAN, L. H. An invariant of regular isotopy. *Trans. Am. Math. Soc.* **318**(2), 417–471.
- [9] KAUFFMAN, L. H. States model and the Jones polynomial. *Topology* **26**(3), 395–407.
- [10] LICKORISH, W. B. R. *An introduction to knot theory*, vol. 175 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [11] LICKORISH, W. B. R., AND MILLETT, K. C. A polynomial invariant of oriented links. *Topology* 26, 1 (1987), 107–141.

- 
- [12] LIVINGSTON, C., AND MOORE, A. H. Knotinfo: Table of knot invariants. URL: `knotinfo.math.indiana.edu`, Current Month Current Year.
  - [13] MIYAZAWA, Y. Links with trivial  $Q$ -polynomial. *J. Math. Soc. Japan* 71, 1 (2019), 19–42.
  - [14] MURASUGI, K. *Knot theory and its applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita.
  - [15] MURASUGI, K. *Knot theory & its applications*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita, Reprint of the 1996 translation [MR1391727].
  - [16] ROBERT D. BRANDT, W. L., AND MILLETT, K. C. A polynomial invarioant for unoriented knots and links. *Invent. math.*84, 563–573.
  - [17] RYOM-HANSEN, S. On the representation theory of an algebra of braids and ties. *J. Algebraic Combin.* 33, 1 (2011), 57–79.
  - [18] SUMNERS, D. W. *Using Knot Theory to Analyze DNA Experiments*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1988, pp. 221–232.