



Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Sistemas dinámicos de orden fraccionario

*Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas*

Presentada por:
BLADIMIR ANDRÉS BLANCO MONTES

Profesor Guía: Dr. Rodrigo Castro Marín

VALPARAÍSO
JULIO, 2025

Agradecimientos

A Dios, por darme la fuerza en las ocasiones en que el camino se tornó difícil, permitiéndome así alcanzar esta meta.

A mi familia, que me ha apoyado desde la distancia, en especial a mis padres, quienes han depositado su confianza en mis capacidades.

A mis compañeros y amigos, Claudio Fierro y Jorge Gómez, quienes me acompañaron en este recorrido de principio a fin. Les agradezco por compartir su conocimiento, su tiempo y su dedicación en este camino lleno de aprendizajes y momentos gratos.

A los profesores que hicieron posible este logro, en especial al Dr. Rodrigo Castro, quien, durante las clases, seminarios y reuniones, me mostró las matemáticas desde una perspectiva diferente y fue un gran apoyo en este proceso. Al Dr. Marcelo Flórez, quien siempre estuvo dispuesto a resolver mis inquietudes; a la Dra. Amalia Pizarro, por su calidez y amabilidad en cada encuentro y al Dr. Raúl Fierro por su tiempo, paciencia y dedicación en las correcciones de esta tesis.

Resumen

El objetivo de este trabajo de grado es investigar la teoría y las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. En primer lugar, se aborda el enfoque de los sistemas de ecuaciones diferenciales de orden entero, estudiando la teoría cualitativa, con énfasis en la aplicación del teorema de Hartman-Grobman. En segundo lugar, se profundiza en el cálculo fraccionario y en el uso de la derivada fraccionaria de Caputo dentro de los sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, extendiendo la teoría cualitativa de orden entero al caso fraccionario. En tercer lugar, se analiza el teorema de Hartman-Grobman en su versión fraccionaria. Finalmente, se presentan aplicaciones en diversas áreas mediante ejemplos prácticos, observando los resultados obtenidos a partir de simulaciones numéricas; en particular, el cambio en la estabilidad de un punto de equilibrio según el orden fraccionario considerado.

Palabras clave: Cálculo fraccionario, derivada fraccionaria de Caputo, teorema de Hartman-Grobman en versión fraccionaria.

Índice general

1. Conceptos básicos	3
1.1. Teoría cualitativa	3
1.2. Teorema de la variedad estable	21
2. Cálculo fraccionario	25
2.1. Funciones especiales	27
2.2. Derivada e integral de orden fraccionario	37
2.3. Sistema dinámico fraccionario de Caputo	49
2.4. Análisis de estabilidad	54
3. Modelo fraccionario para la fiebre del dengue	67
3.1. Modelo clásico	68
3.2. Modelo fraccionario	71

Introducción

El estudio de las derivadas de orden fraccionario ha avanzado significativamente desde sus inicios en el siglo XIX. Estas derivadas constituyen una extensión natural de las derivadas tradicionales de orden entero, y fue gracias a los matemáticos Georg Friedrich Bernhard Riemann y Joseph Liouville que se establecieron las bases del cálculo fraccionario. El concepto inicial de esta teoría está vinculado a la integral de orden fraccionario, introducida por Liouville en 1832, quien amplió el concepto de integral a órdenes no enteros, sentando así los fundamentos de la teoría moderna de las derivadas fraccionarias [14].

En 1854, Riemann realizó una contribución fundamental al desarrollo de esta teoría al introducir el concepto de la integral de Riemann-Liouville. Aunque no formuló explícitamente la noción de derivada de orden fraccionario, su trabajo en integrales fraccionarias proporcionó el marco teórico esencial para el desarrollo posterior de esta disciplina [22].

El avance más significativo en la teoría de las derivadas de orden fraccionario ocurrió en 1967, cuando Michele Caputo introdujo la definición de derivada fraccionaria de Caputo. Esta innovación surgió para resolver las limitaciones de la formulación clásica de Riemann-Liouville, especialmente en el tratamiento de condiciones iniciales para problemas de valor inicial, donde la definición de Caputo demostró ser más adecuada físicamente.

Durante las décadas de 1980 y 1990, la teoría de las derivadas de orden fraccionario comenzó a ganar mayor atención, con investigaciones que ampliaron significativamente su aplicación en diversos campos. Investigadores como Igor Podlubny desempeñaron un papel clave en el desarrollo de la teoría y en la aplicación de las derivadas de orden fraccionario a las ecuaciones diferenciales. Su obra principal, publicada en 1999, ofreció un enfoque integral sobre las ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus

aplicaciones en Ingeniería y Física [20].

El interés por las derivadas fraccionarias ha crecido significativamente en el estudio de sistemas dinámicos, ya que estas permiten modelar con mayor precisión fenómenos que presentan características de memoria y anomalías en la dinámica de los sistemas. En particular, la derivada de Caputo se ha consolidado como una herramienta valiosa para el análisis y control de sistemas dinámicos de orden fraccionario, gracias a su capacidad para capturar comportamientos no locales y dependientes del tiempo [20].

Investigaciones claves como las desarrolladas por Kilbas, Srivastava y Trujillo (2006) han contribuido significativamente al avance teórico en este campo, proporcionando un marco matemático riguroso para la aplicación de estos modelos en diversas áreas científicas y tecnológicas [9], [12].

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Teoría cualitativa

La teoría cualitativa de los sistemas dinámicos se centra en el análisis del comportamiento de estos sistemas sin requerir la resolución explícita de sus ecuaciones. En lugar de obtener soluciones exactas, esta teoría busca identificar propiedades globales del sistema, tales como la estabilidad, la existencia de órbitas periódicas, la sensibilidad a las condiciones iniciales y la estructura del espacio de fases. Para ello, se desarrolla un marco teórico basado en la noción de “flujos topológicamente equivalentes”, mediante la cual se estudian los flujos asociados a sistemas dinámicos no lineales que exhiben un comportamiento cualitativamente análogo al de ciertos sistemas lineales. En esta sección, se presenta un resumen conciso de los conceptos, métodos y resultados fundamentales que permitirán una mejor comprensión de esta teoría. Para un estudio más exhaustivo de estos temas, se recomienda consultar [10] y [19].

Definición 1.1. Sea E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Un sistema dinámico es una función, $\phi: \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$, de clase C^1 tal que se satisfacen las siguientes condiciones:

- i. Para cualquier $t \in \mathbb{R}$ fijo, la función ϕ_t es un difeomorfismo de E en E ,
- ii. $\phi_0(x) = x$, para todo $x \in E$, y
- iii. $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Matemáticamente hablando, un sistema dinámico es un función $\phi(t, x)$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, la cual describe como se mueven los puntos $x \in E$ con respecto al tiempo.

En lo que sigue, llamaremos flujo o sistema dinámico a esta función ϕ . La cual, a veces también suele escribirse como abuso de notación como $\phi_t(x)$ en lugar de ϕ . Además, para cada $x \in E$, la curva $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de órbita del punto x .

Observación 1.1. De la definición (1.1), se deduce que para cada $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t es una función de clase C^1 de E en E que tiene una inversa de clase C^1 , ϕ_{-t} ; es decir, ϕ_t con $t \in \mathbb{R}$ es una familia de difeomorfismo de un parámetro en E que forma un grupo conmutativo bajo composición.

En adelante, notaremos que si se fija un entero $n \in \mathbb{N}$, y se toma $x \in \mathbb{R}^n$. Entendiendo que $x = x(t)$ con $t \in \mathbb{R}$, usaremos libremente $\dot{x} := \frac{d}{dt}x$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ anotaremos

$$M_n(\mathbb{R}) = \{A \mid A = (a_{ij}), a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n\},$$

como el espacio de las matrices cuadradas con coeficientes reales. Además, si $A \in M_n(\mathbb{R})$, definimos a

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Esta serie, como serie con valores vectoriales, converge absolutamente, pues $\|A\| < \infty$, donde

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$$

, y, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|$ denota la norma euclidiana de x , es decir,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Definición 1.2. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Llamamos campo vectorial a una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, porque esta función asigna un vector $f(x)$ a cada punto de U .

Definición 1.3. Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) se denomina autónoma, si puede escribirse en la forma

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

donde $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable y f es un campo vectorial. Esta propiedad se caracteriza por el hecho de que f depende únicamente de la variable x y no explícitamente del tiempo t .

En consecuencia, el sistema es invariante bajo traslaciones temporales, lo que implica que su comportamiento dinámico depende exclusivamente del estado x en cada instante.

Nótese que, debido al enfoque en “sistemas dinámicos” adoptado en este trabajo de investigación, nos centraremos únicamente en sistemas autónomos

Ejemplo 1.1. Sean $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la función definida por $\phi_t(x) = e^{At}x$. Luego, ϕ es un sistema dinámico. En efecto, para todo $s, t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$e^{At}(e^{As}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!} A^j x \right). \quad (1.2)$$

Luego,

$$e^{At}(e^{As}x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{s^j}{j!} A^{k+j} x.$$

Realizando un cambio de índice $n = k + j$, esto puede reescribirse como

$$e^{At}(e^{As}x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \frac{s^{n-k}}{(n-k)!} \right) \frac{A^n}{n!} x.$$

Por el teorema del binomio, sabemos que

$$\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \frac{s^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(t+s)^n}{n!}.$$

Por tanto,

$$e^{At}(e^{As}x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} A^n x = e^{A(t+s)} x,$$

lo cual demuestra (1.2).

Observación 1.2. Este flujo ϕ_t está asociado a los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Es decir, para cada $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\phi_t(x_0) = e^{At}x_0$ es la única solución del problema de valor inicial dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

En efecto, sea $x(t) = \phi_t(x_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(\phi_t(x_0)) = \frac{d}{dt}(e^{At}x_0).$$

Dado que e^{At} es una serie que converge absolutamente, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} x_0, \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} x_0, \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \cdots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) x_0, \\ &= Ae^{At}x_0, \\ &= A\phi_t(x_0), \\ &= Ax(t). \end{aligned}$$

Por tanto, $x(t) = \phi_t(x_0)$ es solución. Además, esta solución es única, como vemos a continuación. Sea $x(t)$ cualquier solución de (1.3) y definamos a $y(t) = e^{-At}x(t)$. Luego, $x(t) = e^{At}y(t)$ y, como $x(t)$ es solución de (1.3), entonces

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)), \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t), \\ &= -Ae^{-At}x(t) + Ae^{-At}x(t), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $y(t)$ es constante y esta constante es igual a $y(0) = x(0) = x_0$. Por lo tanto, $x(t) = e^{At}y(t) = x_0e^{At}$, lo cual demuestra la unicidad de soluciones en (1.3).

En lo que sigue, asumimos que la función $f(x)$ es continuamente diferenciable; es decir, que la derivada $Df(x)$, considerada como una aplicación $Df : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$, es una función continua de x en algún subconjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$. Además, si el campo vectorial f es diferenciable en x_0 , entonces la derivada $Df(x_0)$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, es decir, $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, cuya representación matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es la matriz Jacobiana de f evaluada en x_0 . Los espacios lineales $\mathbb{R}^n$ y $L(\mathbb{R}^n)$ están dotados de la norma euclidiana $\|\cdot\|$ y de la norma de operador $\|\cdot\|$. Además, decimos que f es continua en el conjunto E si es continua en cada punto

$x \in E$ y si f es continua en E , escribimos $f \in C(E)$.

Definición 1.4. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, decimos que f es de clase C^r en E si f es continua en E y todas las derivadas parciales de orden menor o igual a r existen y son continuas en E y escribimos que $f \in C^r(E)$.

Definición 1.5. Supongamos que $f \in C(E)$, donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces, $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (1.1) en un intervalo I , si $x(t)$ es diferenciable en I y si, para todo $t \in I$, $x(t) \in E$ y

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Además, dado $x_0 \in E$, $x(t)$ es una solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

en un intervalo I si $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$ y $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (1.1) en el intervalo I .

Teorema 1.1. Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que $f \in C^1(E)$. Entonces, para cada punto $x_0 \in E$, existe un intervalo maximal J en el cual el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

tiene una solución única $x(t)$; es decir, si el problema de valor inicial tiene una solución $y(t)$ en un intervalo I , entonces $I \subset J$ e $y(t) = x(t)$ para todo $t \in I$. Además, el intervalo maximal J es abierto; es decir, $J = (\alpha, \beta)$.

Ver en [19], Teorema 1, p. 89, la demostración de este teorema.

Definición 1.6. El intervalo (α, β) denotado en el teorema anterior se llama intervalo maximal de existencia de la solución $x(t)$ del problema de valor inicial (1.4) o simplemente el intervalo maximal de existencia del problema de valor inicial (1.4).

Observación 1.3. En general, si $\phi_t(x)$ es un sistema dinámico en E , subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces la función

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(x) \right|_{t=0},$$

define un campo vectorial de clase C^1 en E , y para cada $x_0 \in E$, $\phi_t(x_0)$ es una solución del problema de valor inicial (1.4). Además, para cada $x_0 \in E$, el intervalo máximo de existencia de $\phi_t(x_0)$, $I(x_0)$, es $(-\infty, \infty)$, entonces $\phi_t(x_0)$ satisface las propiedades de un sistema dinámico. Recíprocamente, si $\phi_t(x_0)$ es un sistema dinámico, entonces debe estar definido para todo $t \in \mathbb{R}$, lo que implica que $I(x_0) = (-\infty, \infty)$.

Para el analizar los sistemas no lineales (1.1), es importante es determinar los puntos de equilibrios de éste y describir el comportamiento cerca de estos puntos de equilibrio. El comportamiento local de un sistema no lineal (1.1) cerca de un punto de equilibrio x_0 es equivalente a determinar el comportamiento del sistema lineal

$$\dot{x} = Ax. \quad (1.5)$$

Definición 1.7. El sistema lineal (1.3), con la matriz $A = Df(x_0)$ es llamado linealización de (1.1) en el punto x_0 .

Definición 1.8. Consideremos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias en $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial definido en un conjunto abierto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que $x_0 \in E$ es un punto de equilibrio del sistema, es decir, $f(x_0) = 0$. El punto de equilibrio x_0 se denomina punto de equilibrio hiperbólico si ninguno de los valores propios de la transformación lineal $Df(x_0)$ tiene parte real igual a cero.

Observación 1.4. Los puntos de equilibrio del sistema (1.1) corresponden a puntos fijos del flujo asociado a dicho sistema. Es decir, un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio si satisface $\varphi(t, p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde φ es el flujo asociado al sistema (1.1) definido por la ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = f(x)$.

El Teorema de Existencia y Unicidad Local para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias establece que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 en un entorno de un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces existe un intervalo abierto I que contiene a 0 y una única solución $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema de valor inicial $\dot{x} = f(x)$ con $x(0) = x_0$. La suavidad C^1 de f garantiza la existencia y unicidad local de las soluciones, lo que a su vez permite definir localmente el flujo $\varphi(t, x_0) = x(t)$. Notemos que la condición de que f sea de clase

C^1 (o localmente Lipschitz continua) solo garantiza la existencia y unicidad local de las soluciones. Para asegurar la existencia y unicidad global de las soluciones (y por lo tanto, que el flujo $\varphi(t, x_0)$ esté definido para todo $t \in \mathbb{R}$), se requieren condiciones adicionales sobre la función f , como ser globalmente Lipschitz continua.

Dado que p es un punto de equilibrio, entonces $f(p) = 0$. Esto implica que la solución del problema de valor inicial con $x(0) = p$ es la función constante $x(t) = p$, para todo t en su intervalo de existencia. Debido a la unicidad local, esta debe ser la única solución con esa condición inicial. Sustituyendo en la ecuación diferencial, $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(p) = 0 = f(p)$, lo cual es consistente. Por lo tanto, para todo t en el intervalo de existencia,

$$\varphi(t, p) = p.$$

Si asumimos que el flujo φ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$ (lo cual puede requerir condiciones adicionales sobre f), entonces p es un punto fijo del flujo. La órbita de un punto x_0 bajo el flujo es el conjunto:

$$\mathcal{O}(x_0) = \{\varphi(t, x_0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Para un punto de equilibrio p , la órbita se reduce a $\mathcal{O}(p) = \{p\}$, indicando que el sistema permanece indefinidamente en ese estado.

Definición 1.9. Un punto de equilibrio x_0 de (1.1) se denomina sumidero si todos los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real negativa. Se denomina fuente si todos los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tienen parte real positiva, y se denomina silla si al menos uno de los valores propios tiene parte real positiva y al menos otro tiene parte real negativa.

Los términos sumidero, fuente y silla adquieren sentido una vez que se estudie la dinámica del sistema con dichas características. En particular, se analizará el comportamiento de los sistemas lineales con matriz diagonal en el caso $n = 2$. Consideremos el problema de valor inicial (1.3), como punto de equilibrio hiperbólico el $(0, 0)$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y la matriz A asociada está definida como:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

la solución del problema de valor inicial (1.3) con $x_0 \in \mathbb{R}^2$ está dada por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} x_0,$$

■ **Caso 1:** $\lambda < 0 < \mu$.

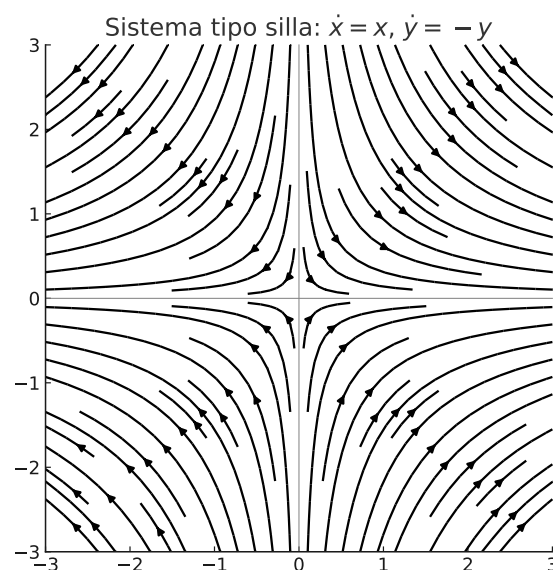


Figura 1.1: Silla.

Dependiendo de la posición inicial del punto x_0 en el plano cartesiano, se obtienen diferentes trayectorias u órbitas, como se muestra en la Figura (1.1), junto con el campo vectorial asociado. En este caso, el punto de equilibrio $(0,0)$ es una silla, ya que la solución presenta direcciones inestables y estables:

- La dirección estable está asociada al valor propio negativo $\lambda < 0$, pues las trayectorias convergen hacia $(0,0)$ a lo largo del eje correspondiente.
- La dirección inestable está asociada al valor propio positivo $\mu > 0$, ya que las trayectorias divergen desde $(0,0)$ a lo largo de este eje.

Esté comportamiento caracteriza al punto de equilibrio como un punto silla.

- **Caso 2:** $\lambda > \mu > 0$.

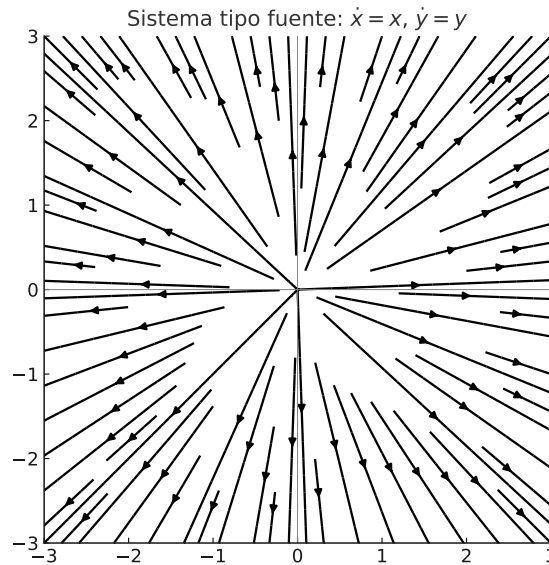


Figura 1.2: Fuente.

En este caso, dado que todos los valores propios de la matriz A son positivos, podemos concluir que el punto de equilibrio $(0,0)$, mostrado en la Figura 1.2 junto con su campo vectorial asociado, es inestable y se clasifica como una *fente*. Esta clasificación se debe a que las soluciones del sistema crecen exponencialmente a medida que $t \rightarrow +\infty$, lo que implica que las trayectorias divergen del punto de equilibrio en todas las direcciones, siguiendo las características determinadas por los valores propios de la matriz A .

■ **Caso 3:** $\lambda < \mu < 0$.

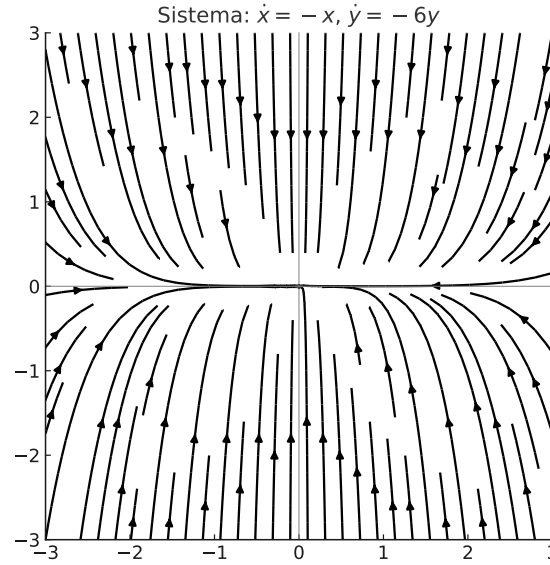


Figura 1.3: Sumidero.

En este caso, razonando de manera análoga al caso anterior, observamos que todos los valores propios asociados a la matriz A son negativos. Esto nos permite concluir que el punto de equilibrio $(0,0)$, mostrado en la Figura 1.3 junto con su campo vectorial asociado, es estable y se denomina como un sumidero. Esta denominación se justifica por el hecho de que las soluciones del sistema decaen exponencialmente conforme $t \rightarrow +\infty$, lo que implica que las trayectorias convergen hacia el punto de equilibrio en todas las direcciones.

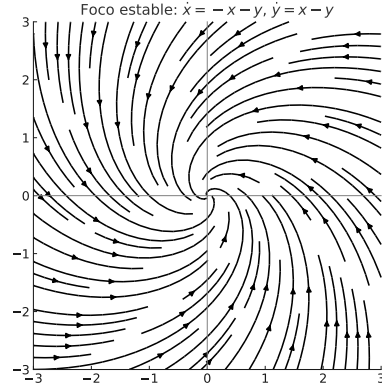
Ahora consideremos la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

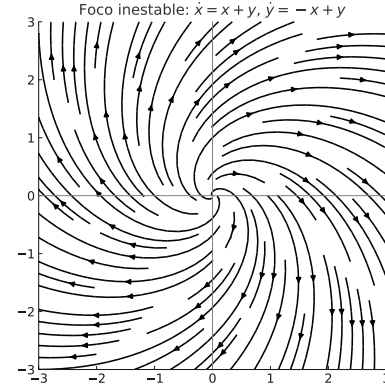
los valores propios de A están dados por el par de números complejos conjugados $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La solución general del problema de valor inicial asociado a (1.3) en este caso está dada por:

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix} x_0. \quad (1.7)$$

■ **Caso 4:** $\alpha \neq 0$.



(a) Foco estable.

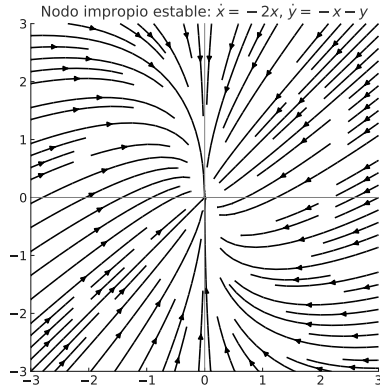


(b) Foco inestable.

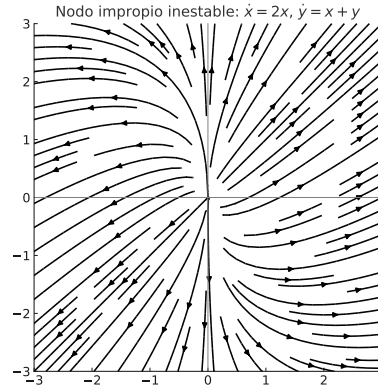
Notamos que parte real de los valores propios, α , determina la estabilidad del sistema, mientras que la parte imaginaria, β , controla la oscilación rotacional. En particular, se presentan los siguientes casos:

- Si $\alpha < 0$, las trayectorias son espirales convergentes hacia el punto de equilibrio, ya que todas las soluciones del sistema tienden a él conforme $t \rightarrow +\infty$; es decir, es decir, $|\phi_t| \rightarrow 0$ siendo así un punto de equilibrio estable. Cabe señalar que las trayectorias en la Figura (1.4a) se acercan al origen siguiendo líneas tangentes bien definidas; es decir, el ángulo $\theta(t)$ que forma el vector $x(t)$ con el eje no tiende a un valor constante cuando $t \rightarrow +\infty$. En su lugar, se cumple que $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y esto es denominado un foco estable.
- Si $\alpha > 0$, las trayectorias en el espacio de fases describen espirales divergentes como se muestra en la Figura (1.4b), lo que implica que las soluciones del sistema crecen exponencialmente conforme $t \rightarrow +\infty$, siguiendo el razonamiento anterior, el punto de equilibrio es inestable y es denominado foco inestable.

■ **Caso 5:** Si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$.



(a) Nodo impropio estable.



(b) Nodo impropio inestable.

En este caso, la matriz A tiene un único valor propio $\lambda_{1,2} = \alpha$ de multiplicidad algebraica 2. El retrato de fase asociado consiste en semirrectas (excluyendo la solución nula) que convergen o divergen del punto de equilibrio, dependiendo del signo de α ; es decir

- Si $\alpha < 0$, las trayectorias convergen al punto de equilibrio cuando $t \rightarrow +\infty$.
- Si $\alpha > 0$, las trayectorias divergen del punto de equilibrio cuando $t \rightarrow +\infty$.

Este comportamiento se ilustra en las Figuras (1.5a) y (1.5b). Estos puntos de equilibrio se denominan nodos impropios estables o nodos impropios inestables, respectivamente.

■ **Caso 6:** $\alpha = 0$.

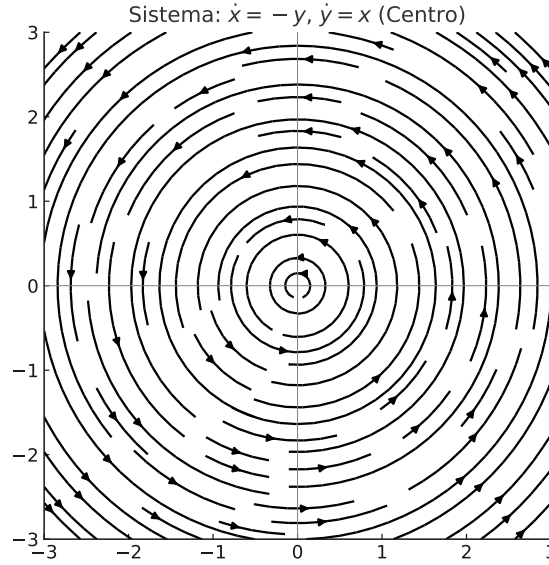


Figura 1.6: Centro.

En este caso la matriz A posea un par de valores propios complejos conjugados puramente imaginarios, es decir, $\pm ib$, el retrato de fase del sistema lineal es linealmente equivalente al representado en la Figura (1.6). En este caso, las trayectorias son curvas cerradas que rodean al origen, y en general tienen forma de elipses, de modo que ninguna trayectoria tiende a él cuando $t \rightarrow +\infty$ o $t \rightarrow -\infty$. Por lo tanto, el punto de equilibrio en el origen exhibe un comportamiento conservativo, denominado como centro. Esto implica que el sistema describe un movimiento oscilatorio periódico, con infinitas curvas cerradas en torno al punto de equilibrio $(0,0)$, sin crecimiento ni decaimiento en el tiempo. Además, estas curvas se atraviesan en el sentido de las agujas del reloj si $\beta > 0$, en sentido antihorario si $\beta < 0$.

Note que, en este caso los valores propios de la matriz A son cero; es decir, si $\det A = 0$, el punto de equilibrio es llamado un punto de equilibrio degenerado de (1.3).

Definición 1.10. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, y sea $f \in C^1(E)$. Dado que f es localmente Lipschitz, el sistema autónomo (1.1) posee una solución única para cada condición inicial $x_0 \in E$, definida en un intervalo maximal. Denotamos por $\varphi_t(x_0)$ el

flujo asociado a dicha solución, y suponemos que dicho flujo está definido globalmente para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, un conjunto $S \subset E$ es llamado invariante con respecto al flujo ϕ_t si

$$\phi_t(S) \subset S \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

el conjunto S se llama positivamente (o negativamente) invariante con respecto al flujo ϕ_t si

$$\phi_t(S) \subset S \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (\text{o } t \leq 0).$$

Observación 1.5. Supongamos que el campo vectorial $f \in C^1(E)$, con $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y que el sistema dinámico autónomo (1.1) admite un flujo único ϕ_t definido para todo $t \in \mathbb{R}$. En este caso, la órbita de un punto $x_0 \in E$, definida como

$$\mathcal{O}(x_0) = \{\phi_t(x_0) : t \in \mathbb{R}\},$$

es un conjunto invariante respecto al flujo ϕ_t .

En ausencia de unicidad (por ejemplo, si f no es localmente Lipschitz), pueden existir múltiples soluciones pasando por el mismo punto x_0 , y por tanto distintas órbitas que se intersecan. En ese caso, la noción de órbita deja de ser unívoca y la afirmación anterior ya no es válida.

Definición 1.11. Sea λ un valor propio de la matriz A de tamaño $n \times n$ con multiplicidad $m \leq n$. Entonces, para $k = 1, \dots, m$, cualquier solución no nula v de la ecuación

$$(A - \lambda I)^k v = 0,$$

se denomina vector propio generalizado de A , asociado a λ .

Esta definición es de suma importancia en la teoría de sistemas dinámicos y en el análisis de matrices, ya que los vectores propios generalizados amplían la noción de vectores propios tradicionales para matrices que no son diagonalizables.

En sistemas lineales, la presencia de valores propios con multiplicidad mayor que uno puede generar comportamientos complejos que no pueden describirse con vectores propios estándar. Los vectores propios generalizados permiten construir una base completa para el espacio $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$ en el caso de valores propios complejos), facilitando la descomposición de la matriz A en su forma de Jordan. Ver [11] para más detalle.

Esta descomposición es crucial para:

1. Resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales: Proporciona una forma explícita de expresar soluciones en términos de exponenciales de matrices y polinomios.
2. Estudiar la estabilidad de sistemas dinámicos: Ayuda a identificar componentes del sistema asociadas con crecimiento, decaimiento o comportamiento oscilatorio.
3. Modelar trayectorias en el espacio defase: Los vectores propios generalizados representan direcciones o subespacios clave donde las trayectorias evolucionan en sistemas no diagonalizables.

En resumen, los vectores propios generalizados son esenciales para trabajar con sistemas que presentan estructuras algebraicas más complejas. Su importancia radica en que permiten describir la dinámica del sistema completo, incluso cuando la matriz que define el sistema no es diagonalizable.

Las demostraciones de los siguientes dos teoremas pueden encontrarse en [19], exactamente en p. 33, Teorema 1 y p. 36 Teorema 2, respectivamente.

Teorema 1.2. *Sea A una matriz real $n \times n$ con valores propios reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Entonces, existe una base de vectores propios generalizados para $\mathbb{R}^n$.*

Este teorema establece que siempre podemos encontrar una cantidad suficiente de vectores propios (o generalizados) en el espacio complejo para formar una base completa.

Teorema 1.3. *Sea A una matriz real $n \times n$. Entonces, existe una base*

$$B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\},$$

para el espacio real $\mathbb{R}^n$ (con $n = 2m - k$) que satisface las siguientes propiedades:

1. *Para cada valor propio complejo $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, con $\beta_j \neq 0$, hay un par de vectores reales u_j y v_j asociados con las partes real e imaginaria de los vectores propios generalizados correspondientes.*

2. Para cada valor propio real λ_j , existe un único vector propio real u_j correspondiente.

Este teorema generaliza el análisis de valores propios al caso real, lo que permite descomponer el sistema en subespacios reales. Es particularmente útil para describir sistemas lineales con valores propios complejos, en términos de su comportamiento oscilatorio y exponencial.

Observación 1.6. Cuando A tiene valores propios complejos, los vectores reales u_j y v_j asociados con $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ están relacionados con la dinámica oscilatoria del sistema. En particular, la contribución de estos valores propios al sistema puede describirse mediante funciones seno y coseno con frecuencia angular β_j y decaimiento exponencial dado por α_j .

Esta observación subraya la importancia de los valores propios complejos en el análisis de sistemas dinámicos. Los términos seno y coseno introducen oscilaciones en el sistema, mientras que la parte real α_j determina si estas oscilaciones crecen, decaen o permanecen constantes con el tiempo.

A continuación definiremos los subespacios estables, inestables y centrales, E^s , E^u y E^c , respectivamente, de un sistema lineal:

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.8)$$

sea $w_j = u_j + i v_j$ un vector propio generalizado de la matriz (real) A correspondiente a un valor propio $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Note que si $\beta_j = 0$, entonces $v_j = 0$. Y sea

$$B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\},$$

una base de $\mathbb{R}^n$ (con $n = 2m - k$) como se establece en los Teoremas (1.2) y (1.3) y la observación

Definición 1.12. Sea $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $w_j = u_j + i v_j$ y B como se describió anteriormente. Entonces:

$$E^s = \text{Span}\{u_j, v_j \mid \alpha_j < 0\},$$

$$E^u = \text{Span}\{u_j, v_j \mid \alpha_j > 0\},$$

y

$$E^c = \text{Span}\{u_j, v_j \mid \alpha_j = 0\},$$

se denominan subespacios estables, inestables y centrales de $\mathbb{R}^n$ generados por las partes reales e imaginarias de los vectores propios generalizados w_j correspondientes a los valores propios λ_j con partes reales negativas, positivas y cero, respectivamente.

Esta definición proporciona una clasificación precisa de los subespacios asociados con el sistema lineal. Los subespacios E^s , E^u y E^c describen la dirección de las trayectorias que decaen, crecen o se mantienen constantes, respectivamente. Esta clasificación es fundamental para entender la dinámica local cerca de puntos de equilibrio.

Ejemplo 1.2. Consideremos el sistema lineal autónomo de la forma

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

donde la matriz A es

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Estudiaremos la estructura del sistema a través de los valores propios y vectores propios de la matriz A . El polinomio característico asociado es

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 3) [(\lambda + 2)^2 + 1],$$

lo que nos entrega los valores propios:

$$\lambda_1 = -2 + i, \quad \lambda_2 = -2 - i, \quad \lambda_3 = 3.$$

Los valores propios λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con parte real negativa, lo cual implica que las soluciones en el subespacio asociado a estos valores propios presentan órbitas espirales que decaen hacia el origen. Este comportamiento es característico de focos estables en sistemas lineales tridimensionales. El vector propio asociado a λ_1 es

$$w_1 = u_1 + i v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y el vector propio asociado a $\lambda_3 = 3$ es

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos entonces identificar:

- El subespacio estable E^s del sistema, generado por los vectores reales y complejos correspondientes a los valores propios con parte real negativa, está contenido en el plano $x_1 x_2$.
- El subespacio inestable E^u está generado por el vectores propios u_2 , correspondiente al valores propios positivo $\lambda_3 = 3$, y coincide con el eje x_3 .

El retrato de fase del sistema se representa en la Figura 1.4a, donde se observa que las trayectorias en el plano $x_1 x_2$ tienden al origen de forma espiral debido a la parte imaginaria de los valores propios, mientras que las soluciones que se alejan en la dirección del eje x_3 crecen exponencialmente en el tiempo.

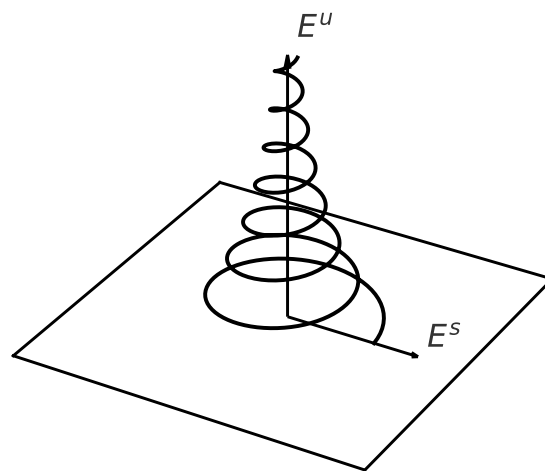


Figura 1.7: Subespacio estable e inestable del sistema (1.8).

1.2. Teorema de la variedad estable

El Teorema de la Variedad Estable es uno de los resultados fundamentales en la teoría cualitativa local de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este teorema establece que, en un entorno de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal (1.1) posee variedades estables e inestables, denotadas por S y U , respectivamente, las cuales son tangentes en x_0 a los subespacios E^s y E^u del sistema linealizado (1.3). Además, las variedades S y U tienen la misma dimensión que E^s y E^u , y son invariantes bajo el flujo ϕ del sistema (1.1). En particular, se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(c) = x_0, \quad \forall c \in S,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = x_0, \quad \forall c \in U.$$

Formalmente, el enunciado del teorema es el siguiente:

Teorema 1.4. (*Teorema de la Variedad Estable*) Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ conteniendo el origen. Sea $f \in C^1(E)$ y ϕ_t el flujo del sistema no lineal (1.1). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(0) = 0$ y además que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $n - k$ valores propios con parte real positiva. Entonces, existe una variedad diferenciable, k -dimensional S , tangente al subespacio estable E^s del sistema (1.3) en 0, tal que para todo $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$, para todo $x_0 \in S$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x_0) = 0;$$

y existe una variedad $(n - k)$ -dimensional U tangente al subespacio inestable E^u de (1.3) en 0 tal que, para todo $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ y para todo $x_0 \in U$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

Ver en [19], Teorema 1, p. 107, la demostración de este teorema.

Teorema 1.5. (*Teorema De La Variedad Central*) Sea $f \in C^r(E)$ donde E es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ conteniendo el origen y $r \geq 1$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(0) = 0$ y además que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa, j valores propios con parte real positiva y $m = n - k - j$ valores propios con parte real igual a cero. Entonces existe una m -variedad central C de clase C^r tangente al subespacio central E^c de (1.3) en 0, la cual es invariante bajo el flujo ϕ_t de (1.1).

Ver en [19], Teorema 2, p. 116, la demostración de este teorema.

Definición 1.13. Sean $f \in C^1(E_1)$ y $g \in C^1(E_2)$, donde E_1 y E_2 son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ que contienen el origen. Supongamos que $x = 0$ es un punto de equilibrio para ambos sistemas:

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{y} \quad \dot{x} = g(x),$$

se dice que estos sistemas son topológicamente equivalentes en una vecindad del origen si existe un homeomorfismo $H: E_1 \rightarrow E_2$ tal que:

- H mapea trayectorias del sistema $\dot{x} = f(x)$ en trayectorias del sistema $\dot{x} = g(x)$.
- H preserva la orientación temporal; es decir, si una trayectoria del primer sistema se dirige hacia el origen cuando $t \rightarrow \infty$, la imagen bajo H tendrá el mismo comportamiento temporal en el segundo sistema.

En este caso, se dice que las funciones f y g son topológicamente equivalentes.

Ejemplo 1.3. Consideremos los siguientes sistemas lineales de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = Ax \quad \text{y} \quad \dot{y} = By,$$

donde las matrices están definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

definimos la aplicación $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante

$$H(x) = Rx,$$

donde las matrices R y R^{-1} son:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

observemos que se cumple la relación de semejanza:

$$A = R^{-1}BR,$$

de esta relación se deduce que:

$$\dot{y} = R\dot{x} = RAx = RAR^{-1}y = By.$$

Por tanto, si $x(t) = e^{At}x_0$ es solución del primer sistema, se tiene que:

$$H(x(t)) = Re^{At}x_0 = e^{Bt}Rx_0 = e^{Bt}H(x_0),$$

dado que esta relación se cumple para cualquier condición inicial, se concluye que:

$$H \circ e^{At} = e^{Bt} \circ H.$$

Por lo tanto, la transformación H mapea trayectorias del sistema $\dot{x} = Ax$ en trayectorias del sistema $\dot{y} = By$, preservando la orientación temporal. En este caso, H corresponde a una combinación lineal que rota y escala el espacio, mostrando que ambos sistemas son topológicamente equivalentes.

Sistemas tipo silla topológicamente equivalentes

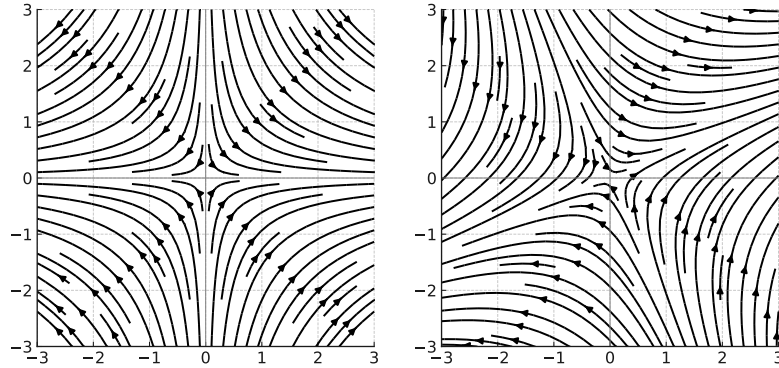


Figura 1.8: Flujos topológicamente equivalentes.

Observe que la matriz R puede interpretarse como una transformación geométrica que combina una rotación de $\pi/4$ con un escalamiento. Esta interpretación visual puede ayudar a comprender por qué los sistemas comparten la misma estructura cualitativa.

La siguiente definición formaliza el concepto de estabilidad de un punto de equilibrio, un elemento crucial para comprender el Teorema de Hartman-Grobman".

Definición 1.14. Sea ϕ_t el flujo de (1.1) definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Un punto de equilibrio x_0 de (1.1) es estable si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo x en una

vecindad de (x_0) , $N_\delta(x_0)$, tenemos que:

$$\phi_t(x) \in N_\epsilon(x_0),$$

decimos que el punto de equilibrio es inestable si no es estable y x_0 es asintóticamente estable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0.$$

Teorema 1.6. (*Teorema de Hartman-Grobman*) Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene el origen, sea $f \in C^1(E)$ y sea φ_t el flujo del sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x).$$

Supongamos que $f(0) = 0$ y que la matriz Jacobiana $A = Df(0)$ no tiene valores propios con parte real igual a cero. Entonces, existe un homeomorfismo H de un subconjunto abierto U que contiene el origen sobre un conjunto abierto V que también contiene el origen, tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene el cero, y para todo $t \in I_0$ se cumple:

$$H \circ \varphi_t(x_0) = e^{At} \circ H(x_0).$$

Ver en [19], Teorema 1, p. 121, la demostración de este teorema.

Observación 1.7. El Teorema de Hartman-Grobman establece que, en una vecindad del origen, el comportamiento cualitativo del sistema no lineal se asemeja al de su sistema linealizado. Aunque las trayectorias del sistema no lineal pueden diferir en forma específica, sus propiedades topológicas (como la convergencia, divergencia y curvatura general) son equivalentes bajo la transformación H . Este resultado es especialmente útil para estudiar la estabilidad local de sistemas dinámicos.

Cabe destacar que el teorema no implica que el punto de equilibrio sea estable o inestable, sino que su comportamiento es topológicamente equivalente al del sistema linealizado.

Una cuestión fundamental es determinar bajo qué condiciones un punto de equilibrio no hiperbólico puede ser estable, asintóticamente estable o inestable. Un método útil que proporciona una respuesta parcial a esta pregunta fue desarrollado por Liapunov en su tesis doctoral de 1892 [15].

Capítulo 2

Cálculo fraccionario

El cálculo fraccionario es una extensión del cálculo diferencial e integral que permite definir derivadas e integrales de orden no entero, es decir, de orden fraccionario o incluso complejo. Esta rama de las matemáticas surge de la inquietud por extender las ideas clásicas del cálculo a un contexto más general.

Los orígenes del cálculo fraccionario se remontan a una correspondencia histórica en 1695 entre Gottfried Wilhelm Leibniz y Guillaume de L'Hôpital, en la que discutieron la posibilidad de extender el concepto de derivada a órdenes fraccionarios. En dicha carta, Leibniz planteó la intrigante cuestión sobre el significado de una derivada de orden $1/2$. Su reflexión culminó en la famosa cita: *“Esto podrá llevar a una paradoja de la que, algún día, surgirán consecuencias muy útiles”*.

Durante el siglo XVIII, matemáticos como Leonhard Euler y Joseph Fourier exploraron ideas relacionadas con el cálculo fraccionario, particularmente en el contexto de series infinitas, integrales generalizadas y problemas de transferencia de calor. Estas investigaciones, aunque preliminares, sentaron las bases para una nueva forma de análisis que desafiaba la noción clásica de derivada e integral como operadores de orden entero. Sin embargo, fue en el siglo XIX cuando se formalizaron rigurosamente sus fundamentos, gracias a las contribuciones fundamentales de Joseph Liouville y Bernhard Riemann, quienes introdujeron definiciones precisas de derivadas e integrales de orden fraccionario. Estos aportes consolidaron las bases teóricas del cálculo fraccionario, permitiendo no solo su desarrollo formal dentro del análisis matemático, sino también su aplicación en diversos campos científicos, desde la física y la ingeniería hasta la biología y la economía.

A partir de estos desarrollos teóricos, surgieron distintas maneras de definir y operar con derivadas de orden fraccionario. A lo largo del siglo XX y hasta la actualidad, se han propuesto diversas formulaciones que responden a distintas necesidades teóricas y prácticas. Entre las más utilizadas se encuentran:

- **Derivada de Riemann-Liouville:** Se define como una extensión de la integral de orden arbitrario:

$${}_{RL}D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

donde $n = [\alpha]$ y Γ es la función gamma. Esta formulación es adecuada para problemas puramente matemáticos, aunque puede presentar dificultades al tratar condiciones iniciales en aplicaciones físicas.

- **Derivada de Caputo:** Introducida como una alternativa más práctica para el modelado de sistemas reales, esta derivada permite incorporar condiciones iniciales en términos de derivadas clásicas:

$${}_CD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

lo que la hace especialmente útil en contextos de ingeniería, física y biología.

Estas formulaciones, junto con el interés creciente en diversas disciplinas, han permitido que el cálculo fraccionario se aplique en múltiples campos, entre ellos:

- **Modelado de sistemas viscoelásticos,** donde permite describir materiales con propiedades intermedias entre sólidos y líquidos, capturando de manera precisa su comportamiento dependiente del tiempo.
- **Procesos de difusión anómala,** que aparecen en medios heterogéneos o con estructuras fractales, y no pueden ser representados adecuadamente mediante modelos clásicos.
- **Control de sistemas dinámicos,** proporcionando herramientas para diseñar controladores robustos en presencia de memoria o efectos heredados en el sistema.
- **Electroquímica y biología,** en el análisis de la transferencia de carga en sistemas complejos y en la dinámica de procesos celulares, donde los efectos no locales y la dependencia del historial del sistema son relevantes.

En suma, el cálculo fraccionario ha pasado de ser una idea especulativa de Leibniz a una herramienta matemática con aplicaciones concretas en diversas áreas científicas. Su desarrollo muestra cómo preguntas fundamentales pueden derivar en teorías de gran utilidad práctica.

2.1. Funciones especiales

En esta sección, se estudian varias funciones especiales que desempeñan un papel fundamental en las matemáticas avanzadas y en el cálculo fraccionario. En particular, se analizan la función Gamma, la función Beta y las funciones de Mittag-Leffler con uno y dos parámetros. Estas funciones no solo son esenciales en la teoría del cálculo fraccionario, sino que también tienen aplicaciones significativas en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. La función Gamma generaliza el concepto de factorial a los números complejos, mientras que la función Beta, estrechamente relacionada con la función Gamma, aparece en múltiples disciplinas. Por ejemplo, en física se emplea en mecánica cuántica y teoría de campos; en estadística, en el análisis de supervivencia y modelos de riesgo; en ingeniería, en la modelización de fenómenos de transferencia de calor y masa; y en biología, en modelos de crecimiento y en la descripción de distribuciones de tamaños poblacionales.

Por otro lado, las funciones de Mittag-Leffler constituyen una generalización de la función exponencial y son fundamentales en el estudio del cálculo fraccionario, en particular en la resolución de ecuaciones diferenciales de orden no entero. Para un análisis más detallado de estos conceptos, se recomienda consultar [4], [12] y [13].

Definición 2.1. La función Gamma se define mediante la siguiente integral impropia:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (2.1)$$

donde $z \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(z) > 0$.

Para garantizar la convergencia de la integral impropia ver [26]. La función Gamma es una extensión del factorial a los números complejos, cumpliendo la relación de recurrencia:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Además, para los números naturales se cumple que $\Gamma(n+1) = n!$.

Nota 2.1. La extensión analítica de la función Gamma permite definirla en todo el plano complejo, salvo en los enteros no positivos, donde presenta polos simples. Estos corresponden a singularidades aisladas en las que la función tiende a infinito de forma controlada, caracterizándose por ser de orden uno. Para una descripción detallada de esta extensión, véase [1], una referencia clásica en el estudio de funciones especiales.

En particular, dentro del dominio real positivo, la función Gamma toma valores exactos en ciertos puntos que resultan especialmente útiles en aplicaciones matemáticas y físicas. Algunos de estos valores notables son:

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$
- $\Gamma(1) = 1.$
- $\Gamma(2) = 1! = 1.$
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Antes de continuar con el desarrollo principal, se presentan dos resultados fundamentales relacionados con la función Gamma, que se enuncian a continuación:

Lema 2.1. Sea $\Gamma(z)$ la función Gamma. Entonces, se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Gamma(\alpha + 1) = 1.$$

Demostración. Apliquemos el teorema de la convergencia dominada. Fijemos a $\alpha > -1$. Para $\alpha \in (-1, 1)$ podemos escribir

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt. \quad (2.2)$$

Para cada $t > 0$ se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} t^\alpha = 1.$$

Puesto que

$$t^\alpha = e^{\alpha \log t} \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha \log t = 0.$$

De otro lado, para $\alpha \in (0, 1)$ y $t > 0$,

$$0 < t^\alpha \leq 1.$$

Por tanto, si $f_\alpha(t) = t^\alpha e^{-t}$, entonces se tiene que

$$0 \leq |f_\alpha(t)| = t^\alpha e^{-t} \leq e^{-t} \quad \forall t > 0, \forall \alpha \in (0, 1),$$

además la función $g(t) = e^{-t}$ es integrable en $(0, \infty)$:

$$\int_0^\infty e^{-t} dt = 1 < \infty.$$

Luego g sirve como función dominante y se cumple con las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue o sea se puede intercambiar límite e integral en (2.2):

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Gamma(\alpha + 1) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = \int_0^\infty \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} t^\alpha \right) e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Gamma(\alpha + 1) = 1.$$

□

Lema 2.2. Sea $\Gamma(z)$ la función Gamma. Entonces, Γ es continua en el semiplano abierto $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Demostración. Sea z_0 un punto fijo en el semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$, y elíjase $0 < \varepsilon < \operatorname{Re}(z_0)$. Para todo $z \in B_\varepsilon(z_0)$, se tiene

$$\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(z_0) - \varepsilon > 0.$$

Consideramos la representación integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

válida para todo z en dicha vecindad. Sea $f_z(t) := t^{z-1} e^{-t}$. Mostraremos que $f_z(t)$ converge puntualmente a $f_{z_0}(t)$ para $t > 0$, y que $\{f_z(t)\}$ está dominado por una función

integrable independiente de z . En efecto, para todo $t > 0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_z(t) = t^{z_0-1} e^{-t} = f_{z_0}(t).$$

Ahora, escribamos $z = x + iy$. Entonces,

$$|f_z(t)| = |t^{z-1} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t} \leq t^{\operatorname{Re}(z_0)-\varepsilon-1} e^{-t} =: g(t).$$

Dado que $\operatorname{Re}(z_0) - \varepsilon > 0$, se tiene que $g \in L^1(0, \infty)$, ya que

$$\int_0^\infty g(t) dt = \Gamma(\operatorname{Re}(z_0) - \varepsilon) < \infty.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, se concluye que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \int_0^\infty f_z(t) dt = \int_0^\infty f_{z_0}(t) dt = \Gamma(z_0).$$

□

La función Gamma aparece de forma natural en las definiciones de derivadas fraccionarias, tales como la derivada de Riemann-Liouville y la derivada de Caputo. En estos contextos, su presencia permite generalizar el operador diferencial a órdenes no enteros, gracias a sus propiedades analíticas y de interpolación continua del factorial.

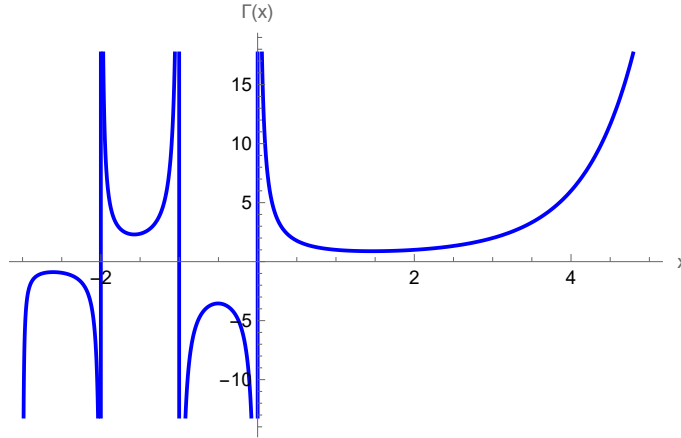


Figura 2.1: Función $\Gamma(x)$, con $-3 < x < 5$.

La Figura 2.1 muestra el comportamiento de la función Gamma real $\Gamma(x)$ en el intervalo $-3 < x < 5$. Se observa que la función presenta polos simples en los enteros

no positivos, donde diverge a infinito, lo que refleja la imposibilidad de extender el factorial a esos puntos. Para valores reales positivos, la función es suave y continua, y decrece rápidamente para $0 < x < 1$, alcanzando un mínimo y creciendo luego de forma exponencial.

Definición 2.2. La función Beta, denotada por $\beta(x, y)$, se define mediante la siguiente integral impropia:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

donde $x, y \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(x) > 0$ y $\text{Re}(y) > 0$. Para la convergencia de la integral impropia. ver [26]. La función Beta está relacionada con la función Gamma mediante la identidad:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

En particular, la función Beta admite valores exactos en ciertos casos especiales que resultan de gran utilidad. Algunos de estos valores notables son:

- $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$
- $\beta(1, 1) = 1.$
- $\beta(x, 1) = \frac{1}{x}.$

La función Beta es utilizada en el cálculo de probabilidades, especialmente en la distribución Beta, y en problemas de combinatoria y geometría diferencial.

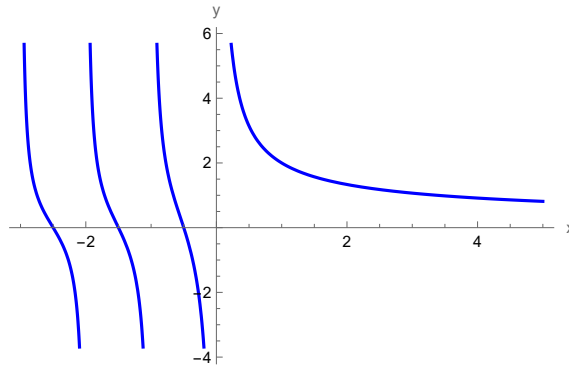


Figura 2.2: Función $\beta(x, y)$, para $-3 < x < 5$ e $y = \frac{1}{2}$.

La Figura 2.2 muestra la gráfica de la función $\beta(x, y)$ para valores de x en el intervalo $(-3, 5)$, con y fijo igual a $1/2$. Esta función presenta un comportamiento decreciente para $x > 0$, mientras que para $x < 0$ se observan múltiples discontinuidades verticales, lo que indica la presencia de singularidades asociadas a valores de x donde la función deja de estar definida. Este tipo de comportamiento es característico de funciones especiales como la función Beta, las cuales están definidas mediante integrales impropias que divergen cuando los parámetros toman valores no positivos. En este caso, la elección de $y = 1/2$ resalta el contraste entre la región de convergencia (cuando $x > 0$) y la región donde la función no es integrable debido a la aparición de exponentes negativos en la integral que la define.

En el contexto del análisis de ecuaciones diferenciales fraccionarias, además de la función beta, otro herramienta fundamental es la función de Mittag-Leffler. Estas funciones generalizan a la exponencial clásica y juegan un papel central en la solución de ecuaciones que involucran derivadas de orden no entero.

Definición 2.3. La función de Mittag-Leffler de un parámetro $\alpha > 0$ se define mediante la siguiente serie infinita:

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \text{ donde } t \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Debido al comportamiento asintótico de la función Gamma, la serie converge absolutamente para todo valor complejo de t , por lo que la función de Mittag-Leffler es una función entera. Para más detalles sobre la convergencia de esta serie, ver [12]. Un caso particular de gran relevancia se presenta cuando $\alpha = 1$, ya que en esta situación la función de Mittag-Leffler coincide exactamente con la función exponencial.

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

Esto demuestra que la función de Mittag-Leffler generaliza la función exponencial, lo que la hace especialmente relevante en el estudio del cálculo fraccionario y en la modelización de sistemas dinámicos con memoria y efectos heredados.

Definición 2.4. La función de Mittag-Leffler de dos parámetros, denotada por $E_{\alpha, \beta}(t)$, se define mediante la serie infinita:

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (2.4)$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Debido al comportamiento asintótico de la función Gamma, esta serie converge absolutamente para cualquier valor $t \in \mathbb{C}$, definiendo una función entera. Para una demostración rigurosa de la convergencia absoluta, ver [12]. En particular, si $\beta = 1$ se tiene que:

$$E_{\alpha,1}(t) = E_{\alpha}(t),$$

además, algunos casos particulares son

$$E_{1,1}(t) = e^t,$$

$$E_{1,2}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^t - 1}{t},$$

$$E_{1,3}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+2)!} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^t - 1 - t}{t^2},$$

y

$$E_{2,1}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cosh(t),$$

$$E_{2,2}(t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(t)}{t},$$

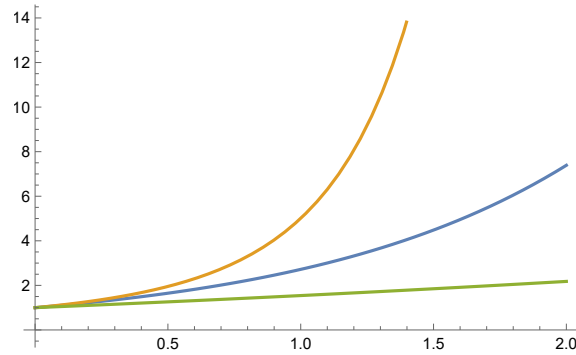


Figura 2.3: Mittag-Leffler con un parámetro.

La Figura 2.3 muestra el comportamiento de la función de Mittag-Leffler con un parámetro, definida en (2.3). Esta función constituye una generalización de la exponen-

cial clásica, la cual se recupera en el caso particular $\alpha = 1$, es decir, cuando $E_1(x) = e^x$. En la gráfica se representan las funciones $E_{1/2}(x)$, $E_1(x)$ y $E_2(x)$ en el intervalo $x \in [0, 2]$, donde se pueden apreciar los siguientes comportamientos:

- $E_{1/2}(x)$ (curva naranja): Exhibe un crecimiento más rápido que el exponencial, debido a que el denominador $\Gamma(k/2 + 1)$ crece más lentamente que $\Gamma(k + 1)$. Por ende, los términos de la serie decrecen más lentamente y su suma crece más rápidamente.
- $E_1(x)$ (curva azul): Corresponde a la función exponencial clásica e^x .
- $E_2(x)$ (curva verde): Muestra un crecimiento más lento, ya que $\Gamma(2k + 1)$ crece mucho más rápido, lo que reduce significativamente los términos de orden superior.

En síntesis, al aumentar el parámetro α , la función $E_\alpha(x)$ muestra un crecimiento más amortiguado. Este comportamiento es esencial en el análisis de soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias, permitiendo interpolar entre dinámicas sub-exponenciales y super-exponenciales según el valor de α .

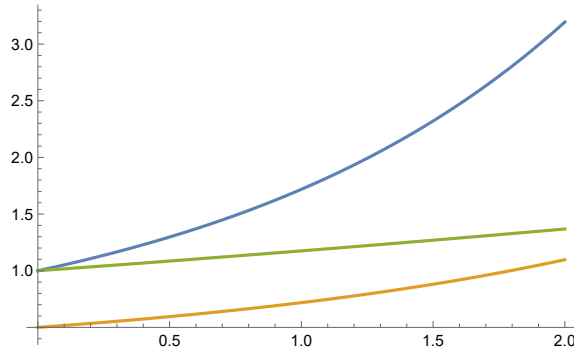


Figura 2.4: Mittag-Leffler con 2 parámetros.

La Figura 2.4 representa la función de Mittag-Leffler generalizada con dos parámetros (2.4). Esta expresión extiende aún más la función exponencial, permitiendo una flexibilidad adicional en la modelación de fenómenos que involucran memoria o efectos retardados. En ella, también se muestran las funciones $E_{1,2}(x)$, $E_{1,3}(x)$ y $E_{2,2}(x)$ en el intervalo $x \in [0, 2]$, destacando los siguientes aspectos:

- $E_{1,2}(x)$ (curva azul): Presenta un crecimiento más rápido entre las tres, ya que $\Gamma(k + 2)$ penaliza moderadamente los términos de orden superior.

- $E_{1,3}(x)$ (curva naranja): Su crecimiento es más lento que $E_{1,2}(x)$ debido al aumento en el parámetro β , lo cual reduce el valor inicial de la función.
- $E_{2,2}(x)$ (curva verde): Es la más amortiguada, como resultado de un valor alto tanto en α como en β , lo cual disminuye significativamente los primeros términos de la serie.

Por tanto, ambas figuras evidencian cómo los parámetros α y β regulan la tasa de crecimiento de la función de Mittag-Leffler. Estas funciones son herramientas fundamentales en el estudio de sistemas dinámicos fraccionarios, ya que permiten modelar comportamientos intermedios entre regímenes exponenciales y polinomiales, capturando con mayor precisión efectos de memoria o retardos.

Definición 2.5. Sean $\alpha, \beta > 0$. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la función de Mittag-Leffler evaluada en A está definida por medio de la siguiente serie convergente:

$$E_{\alpha,\beta}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

En particular, si tomamos $\beta = 1$, obtenemos

$$E_{\alpha}(A) := E_{\alpha,1}(A).$$

Además, para el caso $\alpha = \beta = 1$, se cumple que

$$E_{1,1}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = e^A.$$

Observación 2.1. En contraste con la función exponencial, la función de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}$ no es multiplicativa en general. Es decir, para $\alpha \in (0, 1)$, no se cumple la identidad:

$$E_{\alpha,1}(At^{\alpha}) \cdot E_{\alpha,1}(As^{\alpha}) \neq E_{\alpha,1}(A(t+s)^{\alpha}),$$

salvo en casos muy particulares.

Proposición 2.1. Sea $\alpha > 0$. Entonces, la derivada respecto a t de la función de Mittag-Leffler con un parámetro satisface:

$$\frac{d}{dt}[E_{\alpha}(t)] = \frac{1}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(t).$$

Demostración. Por definición, tenemos:

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

cuya convergencia se analiza mediante el criterio del cociente. Al calcular el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \right| = 0,$$

se deduce que el radio de convergencia es infinito, dado el comportamiento asintótico de la función Gamma. Esto garantiza que $E_\alpha(t)$ es analítica en todo el plano complejo. En virtud del Teorema 8.1 de Rudin [24, p. 185], podemos derivar término a término esta serie, obteniendo:

$$\frac{d}{dt}[E_\alpha(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Haciendo el cambio de índice $m = k - 1$, es decir, $k = m + 1$, tenemos:

$$\frac{d}{dt}[E_\alpha(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1) t^m}{\Gamma(\alpha(m+1) + 1)},$$

usando la propiedad de la función Gamma, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, se sigue que:

$$\Gamma(\alpha(m+1) + 1) = \Gamma(\alpha m + \alpha + 1) = (\alpha m + \alpha)\Gamma(\alpha m + \alpha),$$

así, la derivada puede reescribirse como:

$$\frac{d}{dt}[E_\alpha(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1) t^m}{(\alpha m + \alpha)\Gamma(\alpha m + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{\Gamma(\alpha m + \alpha)}.$$

Se concluye que:

$$\frac{d}{dt}[E_\alpha(t)] = \frac{1}{\alpha} E_{\alpha, \alpha}(t).$$

□

2.2. Derivada e integral de orden fraccionario

A continuación, presentamos algunas definiciones fundamentales del cálculo fraccionario, un área de las matemáticas que generaliza el concepto de derivadas e integrales a órdenes no enteros.

Para definir una integral fraccionaria primero nos motivamos en resultados de una integral entera. Para una función f que es Riemann-integrable sobre el intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se define el operador integral como

$$I_a f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau, \quad (2.5)$$

para cada $t \in [a, b]$. Al aplicar este operador de manera iterada sobre una función, se logra obtener la fórmula integral de Cauchy para integrales iteradas [20, p. 64]

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.6)$$

para cada $t \in [a, b]$. Cabe destacar que, en el caso particular en que $n = 1$, la expresión anterior coincide con la ecuación (2.5). Dado que la función factorial, para números enteros, puede extenderse al conjunto de los números complejos mediante la función Gamma [4]. Podemos reescribir (2.6) como:

$$I_a^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

De esta manera, se extiende la noción de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, la cual se presenta a continuación.

Definición 2.6. Sea $f(t)$ continua sobre el intervalo $[a, b]$, definimos el operador integral fraccionario o integral de Riemann-Liouville de orden α , con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ como:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (2.8)$$

En algunos libros esta integral es denotada por ${}_a D_t^{-\alpha} f(t)$. Note que cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, se obtiene (2.7).

Teorema 2.1. Sea $f(t)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces se cumple:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} {}_a I_t^\alpha f(t) = f(t).$$

Demostración. Con el propósito de analizar el comportamiento de la expresión (2.8) en el límite cuando $\alpha \rightarrow 0^+$, consideremos una descomposición de la función $f(\tau)$ de la forma:

$$f(\tau) = f(t) + [f(\tau) - f(t)].$$

Esta expresión permite reescribir la integral de Riemann–Liouville dada en (2.8) como la suma de dos términos, a saber:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} [f(\tau) - f(t)] d\tau.$$

Analicemos el primer término. Realizando el cambio de variable $u = t - \tau$, esto implica:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau = \frac{f(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} u^{\alpha-1} du = \frac{f(t)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} \right).$$

Aplicando la identidad $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, se deduce que:

$$\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Luego, por Lema 2.1 se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} = 1,$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = f(t).$$

Ahora, con el fin de estimar el segundo término de la expresión, consideramos un valor arbitrario $\delta > 0$. Este nos permite descomponer la integral correspondiente de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} [f(\tau) - f(t)] d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} [f(\tau) - f(t)] d\tau.$$

Esta partición separa el dominio de integración en dos regiones, una en la que $|t - \tau| \geq \delta$, y otra en la que $|t - \tau| < \delta$. Analizando por separado, tenemos que

- Para $|t - \tau| \geq \delta$, dado que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y por tanto acotada, entonces existe una constante $M > 0$ tal que

$$M := \sup_{\tau \in [a, t]} |f(\tau) - f(t)| < \infty.$$

Con esto se puede estimar del primer término de la integral como sigue:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} [f(\tau) - f(t)] d\tau \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau, \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u = t - \tau$, esta integral se evalúa como

$$\frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left(-\frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_{t-a}^\delta \right) = \frac{M(a^\alpha - (t-\delta)^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Finalmente, dado que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{a^\alpha - (t-\delta)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = 0,$$

se concluye que el primer término tiende a cero, cuando $\alpha \rightarrow 0^+$.

- Para $|t - \tau| < \delta$, dado que f es continua sobre el compacto $[a, b]$, lo cual garantiza que es uniformemente continua. En particular, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que, si $|t - \tau| < \delta$, entonces se cumple que $|f(\tau) - f(t)| < \varepsilon$. Con esto, podemos acotar el segundo término de la integral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} [f(\tau) - f(t)] d\tau \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau, \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau. \end{aligned}$$

Análogamente al caso anterior, realizando el cambio de variable $u = t - \tau$, esta integral se evalúa como

$$\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_\delta^0 (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \left(-\frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_\delta^0 \right) = \frac{\varepsilon((t-\delta)^\alpha - t^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Dado que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(t-\delta)^\alpha - t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = 0,$$

se concluye que el segundo término también tiende a cero cuando $\alpha \rightarrow 0^+$. Por lo tanto, considerando los límites de ambos términos, se concluye que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} {}_a I_t^\alpha f(t) = f(t),$$

□

Teorema 2.2 (Ley de exponentes). *Sean $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$ y $f(t)$ continua sobre $[a, b]$, entonces*

$${}_a I_t^\alpha {}_a I_t^\mu f(t) = {}_a I_t^{\alpha+\mu} f(t).$$

Demostración. Utilizando la definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville obtenemos

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\mu ({}_a I_t^\alpha f(t)) &= I_t^\mu \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t (t-\sigma)^{\mu-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\sigma (\sigma-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) d\sigma, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^t (t-\sigma)^{\mu-1} \left(\int_a^\sigma (\sigma-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) d\sigma, \end{aligned}$$

intercambiemos el orden de integración. Para esto, notemos que el dominio de integración es el triángulo en el plano (σ, τ) dado por $a \leq \tau \leq \sigma \leq t$. Así, por lo tanto

$${}_a I_t^\mu ({}_a I_t^\alpha f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^t f(\tau) \left(\int_\tau^t (t-\sigma)^{\mu-1} (\sigma-\tau)^{\alpha-1} d\sigma \right) d\tau, \quad (2.9)$$

ahora, haciendo el cambio de variable $u = \sigma - \tau$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-\sigma)^{\mu-1} (\sigma-\tau)^{\alpha-1} d\sigma &= \int_0^{t-\tau} (t-(\tau+u))^{\mu-1} u^{\alpha-1} du, \\ &= \int_0^{t-\tau} (t-\tau-u)^{\mu-1} u^{\alpha-1} du, \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\mu-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.9) finalmente concluimos

$$\begin{aligned}
 {}_a I_t^\mu ({}_a I_t^\alpha f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\mu-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)} d\tau, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+\mu-1} f(\tau) d\tau, \\
 &= {}_a I_t^{\alpha+\mu} f(t).
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1. Sea $f(t) = 1$ y $\alpha = \frac{1}{2}$. □

$$\begin{aligned}
 {}_0 I_t^{\frac{1}{2}}(1) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} d\tau, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t u^{-1/2} du, \quad (\text{con } \tau = t - u), \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Observación 2.2. Observe que, si aplicamos nuevamente ${}_0 I_t^{\frac{1}{2}}$ al resultado del Ejemplo 2.1, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 {}_0 I_t^{\frac{1}{2}} {}_0 I_t^{\frac{1}{2}}(1) &= {}_0 I_t^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2} \right), \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \tau^{1/2} d\tau, \\
 &= \frac{2}{\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) t, \\
 &= t, \\
 &= {}_0 I_t^1(1),
 \end{aligned}$$

donde $B(x, y)$ es la función Beta. Este resultado concuerda con el Teorema 2.2.

A partir de la definición anterior, al inicio del siglo XIX, Riemann y Liouville utilizaron este concepto para definir lo que hoy se conoce como la derivada fraccionaria de orden α de Riemann-Liouville.

Definición 2.7. Sea $\alpha > 0$ y $f(t)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α se define como:

$${}_R L D_t^\alpha f(t) := D^n {}_0 I_t^{n-\alpha} f(t), \quad (2.10)$$

donde $t \in (a, b]$, $n = [\alpha] \in \mathbb{N}$; es decir, el menor entero mayor o igual a α , y $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ es la derivada ordinaria de orden n . Así

$${}_R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds. \quad (2.11)$$

Esta definición requiere que la integral fraccionaria sea convergente, lo cual está garantizado por la continuidad o la integrabilidad local de $f(t)$. Para más detalles sobre la convergencia de la integral fraccionaria y propiedades adicionales, puede consultarse [12, p. 87]. Algunos casos particulares son los siguientes:

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, esta definición coincide con la derivada ordinaria.

$${}_R D_t^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

En efecto, de la definición tomando $\alpha = n$ se tiene

$${}_R D_t^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_0 I_t^{n-n} f(t)) = \frac{d^n}{dt^n} ({}_0 I_t^0 f(t)).$$

Por el Teorema 2.1, el operador ${}_0 I_t^0$ es exactamente la identidad. Como f es continua, tenemos ${}_0 I_t^0 f = f$ y, por consiguiente,

$${}_R D_t^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t).$$

- Cuando $0 < \alpha < 1$, entonces $n = 1$ y la definición se reduce a:

$${}_R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds.$$

Es importante destacar que la derivada fraccionaria generaliza el concepto de derivada convencional, dicha derivada nos permite el estudios de diversos fenómenos como: procesos de difusión anómala, sistemas viscoelásticos, modelos de crecimiento biológico y tumoral y procesos financieros [5], [18] y [23].

Observe que si $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\alpha \in (0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_t^\alpha k &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} k ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t -k u^{-\alpha} du, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\frac{k t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right), \\ &= \frac{k t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Por lo que la derivada de Riemman-Liouville, para $\alpha \in (0, 1)$, es una constante diferente de 0.

Teorema 2.3. Sea $\alpha > 0$ y sea $f(t)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces, se cumple la siguiente identidad, que expresa la relación inversa entre la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la integral fraccionaria de Riemann-Liouville:

$${}_{RL}D_t^\alpha ({}_aI_t^\alpha f(t)) = f(t).$$

Este resultado establece claramente que el operador de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es el inverso del operador de integral fraccionaria de Riemann-Liouville, bajo condiciones adecuadas de continuidad. La demostración rigurosa y detallada de este resultado se encuentra en [12, p. 74].

El principal problema con las condiciones iniciales en sistemas que involucran la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es que estas condiciones no tienen una interpretación física clara y directa [2], [7]. Así es que a inicios del siglo XIX, el físico y matemático italiano Michele Caputo, inspirado por las limitaciones de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en la modelización y estudio de ciertos problemas físicos, propuso una definición alternativa y más simple para la derivada fraccionaria.

Definición 2.8. Sea $\alpha > 0$ y $f(t)$ continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. La derivada fraccionaria de Caputo de orden α se define como:

$${}_CD_t^\alpha f(t) := {}_0I_t^{n-\alpha} D^n f(t), \quad (2.12)$$

es decir,

$${}_0I_t^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds, \quad (2.13)$$

donde $t \in (a, b]$, $n = \lceil \alpha \rceil \in \mathbb{N}$ y $f^n(s) = \frac{d^n f}{ds^n}$ es la derivada ordinaria de orden n de f . Para asegurar la existencia y la convergencia absoluta de esta integral, se requiere que la derivada ordinaria $f^{(n)}(t)$ sea continua en $[a, b]$ ver [20, p. 78]. Algunos casos particulares son los siguientes:

- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, se recupera la derivada ordinaria:

$${}_CD_t^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

En efecto, de la definición tomando $\alpha = n$ se tiene

$${}_CD_t^n f(t) = {}_0I_t^{n-n} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_0I_t^0 \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right).$$

Por el Teorema 2.1, el operador ${}_0I_t^0$ es exactamente la identidad. Como f es continua, tenemos ${}_0I_t^0 f = f$ y, por consiguiente,

$${}_R D_t^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t).$$

- Si $0 < \alpha < 1$, entonces $n = 1$ y la definición se simplifica a:

$${}_CD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds.$$

Las derivadas de Riemann-Liouville y Caputo no coinciden, más concretamente, si la función $f(t)$ esta definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $\alpha > 0$ se puede probar que

$${}_R D_t^\alpha f(t) - {}_C D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}, \quad (2.14)$$

donde, $n = \lceil \alpha \rceil \in \mathbb{N}$ [12]. Note que la derivada fraccionaria de Caputo coincide con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, si y solo si

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{n-1}(0) = 0.$$

Ejemplo 2.2. Sea $f(t) = t^n$ con $\alpha \in (0, 1)$, luego

$${}_CD_t^\alpha(t^n) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{ns^{n-1}}{(t-s)^\alpha} ds, \quad (2.15)$$

haciendo el cambio de variable $u = \frac{s}{t}$, obtenemos

$$\begin{aligned} {}_CD_t^\alpha(t^n) &= \frac{n}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{(tu)^{n-1}}{(t-tu)^\alpha} t du, \\ &= \frac{n}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{(tu)^{n-1}}{(t-tu)^\alpha} t du, \\ &= \frac{nt^{n-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{(1-u)^\alpha} du, \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{(1-u)^\alpha} du &= \beta(n, 1-\alpha), \\ &= \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$${}_CD_t^\alpha(t^n) = \frac{\Gamma(n)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

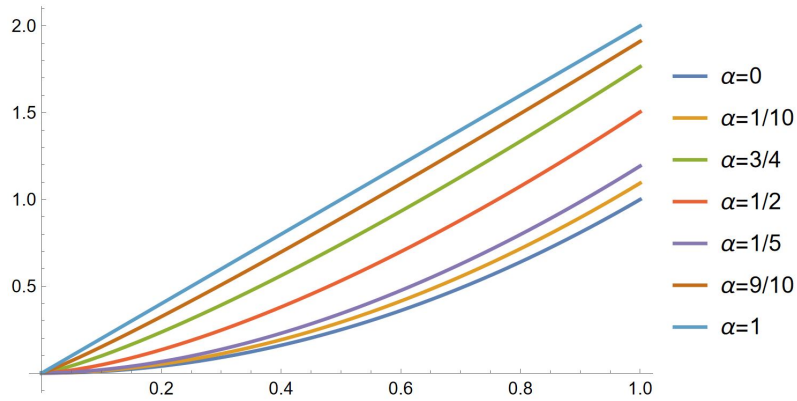


Figura 2.5: $f(t) = t^2$.

La Figura (2.5) ilustra el comportamiento de la derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha \in [0, 1]$ aplicada a la función $f(t) = t^2$. Se observa que, al disminuir el orden α , la derivada fraccionaria se aleja del comportamiento de la derivada entera clásica y se aproxima a una función más suave. En particular, para $\alpha = 1$ se recupera la derivada

ordinaria $\frac{d}{dt} t^2 = 2t$, mientras que para $\alpha = 0$ se tiene ${}_CD^0 f(t) = f(t)$, es decir, la función original.

Los casos intermedios de α generan una transición gradual entre estos dos extremos, reflejando la naturaleza no local de la derivada fraccionaria y su capacidad para modelar procesos con memoria. Esta representación gráfica permite visualizar de manera intuitiva cómo el orden fraccionario influye en la dinámica de funciones suaves, lo cual resulta particularmente relevante en el estudio de sistemas dinámicos fraccionarios donde intervienen fenómenos de tipo disipativo o con efectos históricos.

Proposición 2.2. Sean $f(t)$, $g(t)$ funciones continuas sobre $[a, b]$, con $n - 1 < \alpha, \mu < n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

i.

$${}_CD_t^\alpha k = 0 \quad k \in \mathbb{R},$$

ii.

$${}_CD_t^\alpha ({}_0I_t^\alpha f(t)) = f(t),$$

iii.

$${}_0I_t^\alpha ({}_CD_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k,$$

iv.

$${}_CD_t^\alpha ({}_CD_t^\mu f(t)) = {}_CD_t^{\alpha+\mu} f(t),$$

v.

$${}_CD_t^\alpha (\lambda f(t) + \beta g(t)) = \lambda {}_CD_t^\alpha f(t) + \beta {}_CD_t^\alpha g(t),$$

vi.

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_CD_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t).$$

Demostración. i. Sea $\alpha > 0$ y $f(t) = k$ con $k \in \mathbb{R}$, utilizando la definición de derivada fraccionaria de Caputo obtenemos

$${}_CD_t^\alpha k = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} (k) ds = 0.$$

- ii. Sea $\phi = I^\alpha f(t)$, es fácil probar de manera recursiva que $D^k \phi = 0$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$. Luego, por (2.14) se tiene que

$${}_C D_t^\alpha ({}_0 I_t^\alpha f(t)) = {}_{RL} D_t^\alpha ({}_0 I_t^\alpha f(t)) = f(t).$$

iii.

$${}_0 I_t^\alpha ({}_C D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Sea $n = \lceil \alpha \rceil$, de modo que $n-1 < \alpha \leq n$. Para demostrar la identidad, comenzamos calculando

$${}_0 I_t^\alpha ({}_C D_t^\alpha f(t)) = {}_0 I_t^\alpha ({}_0 I_t^{n-\alpha} (f^{(n)}(t))).$$

Luego, utilizando el Teorema 2.2, se sigue inmediatamente que

$${}_0 I_t^\alpha ({}_0 I_t^{n-\alpha} (\cdot)) = {}_0 I_t^n,$$

y por tanto

$${}_0 I_t^\alpha ({}_C D_t^\alpha f(t)) = {}_0 I_t^n (f^{(n)}(t)).$$

Cuando n es un entero positivo, se tiene la conocida relación

$${}_0 I_t^n (f^{(n)}(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Sustituyendo este resultado en la igualdad anterior, se concluye que

$${}_0 I_t^\alpha ({}_C D_t^\alpha f(t)) = {}_0 I_t^n (f^{(n)}(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k,$$

que es precisamente la identidad requerida.

iv. A partir de (2.13) obtenemos

$$\begin{aligned} {}_C D_t^\alpha ({}_C D_t^\mu f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n} ({}_C D_s^\mu f(s)) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^s (s-p)^{n-\mu-1} \frac{d^n}{dp^n} f(p) dp \right) ds, \end{aligned}$$

intercambiando el orden de integración, donde el dominio es el triángulo en el

plano (s, p) dado por $0 \leq p \leq s \leq t$,

$${}_CD_t^\alpha({}_CD_t^\mu f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\mu)} \int_0^t \frac{d^n}{dp^n}(f(p)) \left(\int_p^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-p)^{n-\mu-1} ds \right) dp,$$

ahora, haciendo el cambio de variable $s = p + (t-p)r$ obtenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\mu)} \int_0^t \frac{d^n}{dp^n}(f(p)) (t-p)^{2n-\alpha-\mu-1} \left(\int_0^1 (1-r)^{n-\alpha-1} r^{n-\mu-1} dr \right) dp, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\mu)} \int_0^t \frac{d^n}{dp^n}(f(p)) (t-p)^{2n-\alpha-\mu-1} \beta(n-\mu, n-\alpha) dp, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\mu)} \int_0^t \frac{d^n}{dp^n}(f(p)) (t-p)^{2n-\alpha-\mu-1} \left(\frac{\Gamma(n-\mu)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha-\mu)} \right) dp, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha-\mu)} \int_0^t (t-p)^{n-\alpha-\mu-1} \frac{d^n}{dp^n}(f(p)) dp, \\ &= {}_CD_t^{\alpha+\mu} f(t). \end{aligned}$$

v. Sean f y g continuas, con $\alpha > 0$. De la definición (2.13) tenemos que

$$\begin{aligned} &{}_CD_t^\alpha(\lambda f(t) + \beta g(t)) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n}(\lambda f(s) + \beta g(s)) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(\lambda \frac{d^n}{ds^n}(f(s)) + \beta \frac{d^n}{ds^n}(g(s)) \right) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \lambda \frac{d^n}{ds^n}(f(s)) ds + \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \beta \frac{d^n}{ds^n}(g(s)) ds \right), \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n}(f(s)) ds + \frac{\beta}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n}(g(s)) ds, \\ &= \lambda {}_CD_t^\alpha f(t) + \beta {}_CD_t^\alpha g(t). \end{aligned}$$

vi. Se sigue directamente de las definiciones (2.13) y (2.1).

□

Observación 2.3. En particular, cuando $0 < \alpha < 1$, iii, implica que

$${}_0I_t^\alpha {}_CD_0^\alpha f(t) = f(t) - f(0).$$

2.3. Sistema dinámico fraccionario de Caputo

En esta sección, estudiaremos los sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario utilizando la derivada de Caputo. Comenzamos por introducir las definiciones y conceptos fundamentales que nos permitirán comprender el comportamiento dinámico de los sistemas modelados.

La derivada de Caputo representa una extensión natural de las derivadas convencionales, permitiendo un análisis más preciso de fenómenos complejos. Su uso es particularmente ventajoso en el estudio de sistemas dinámicos de orden fraccionario, ya que su formulación es más intuitiva y facilita la imposición de condiciones iniciales en términos de valores clásicos, lo que la hace especialmente útil en la modelización de sistemas físicos.

En contraste, la derivada de Riemann–Liouville, aunque fundamental en la teoría del cálculo fraccionario, presenta ciertas dificultades en aplicaciones prácticas. En particular, su dependencia de la integral fraccionaria hace que la formulación de condiciones iniciales sea menos directa y, en muchos casos, más compleja de interpretar en términos físicos [9].

Una de las motivaciones clave para el uso del cálculo fraccionario en sistemas dinámicos es su capacidad para capturar fenómenos con efectos de memoria y herencia. A diferencia de las derivadas de orden entero, que describen procesos locales en el tiempo, las derivadas fraccionarias incorporan la historia completa del sistema en su evolución. Este rasgo no local resulta esencial para modelar una amplia variedad de procesos reales, como la difusión anómala, el comportamiento viscoelástico, la biología de poblaciones y el control de sistemas con dinámicas heredadas.

En particular, consideraremos ecuaciones diferenciales fraccionarias del tipo:

$${}_CD_a^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = x_0,$$

donde ${}_CD_a^\alpha$ denota la derivada de Caputo de orden $\alpha \in (0, 1)$. Estudiaremos tanto su definición formal como los aspectos cualitativos y cuantitativos del comportamiento de sus soluciones.

Definición 2.9. Sea $I = [0, T]$ con $T > 0$ y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo. Fijemos órdenes $0 < \alpha_j < 1$ para $j = 1, \dots, n$. Sean

$$f_j: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto f_j(t, x),$$

funciones continuas y local-Lipschitz en su segunda variable. El problema de valor inicial fraccionario de Caputo asociado queda definido por el sistema

$$\begin{cases} {}_C D_t^{\alpha_1} x_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ {}_C D_t^{\alpha_2} x_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ {}_C D_t^{\alpha_n} x_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad t \in I,$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$x_j(0) = x_{j0}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{con } x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^\top \in \Omega.$$

En el caso particular si $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \cdots \alpha_n$, el sistema se suele escribir como:

$$\begin{cases} {}_C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) & \alpha \in (0, 1), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $f(t, x(t)) = (f_1(t, x(t)), f_2(t, x(t)), \dots, f_n(t, x(t)))^T$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, $x(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Al igual que en el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales, los sistemas que incorporan la derivada fraccionaria de Caputo satisfacen un resultado fundamental de existencia y unicidad de soluciones, basado en el enfoque de Picard. Este resultado garantiza, bajo hipótesis adecuadas de regularidad y continuidad, que el problema de valor inicial asociado admite una única solución local, la cual puede expresarse mediante una ecuación integral de tipo Volterra. En particular, para derivadas de orden $\alpha \in (0, 1)$, se establece el siguiente teorema, cuya demostración se desarrolla en detalle a continuación. Para versiones generales de este resultado pueden encontrarse en [9] y [12].

Teorema 2.4. Sea $\alpha \in (0, 1)$ y considérese el siguiente problema de valor inicial para un sistema autónomo con derivada de Caputo:

$$\begin{cases} {}_C D_t^\alpha x(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.17)$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y satisface una condición de Lipschitz en Ω . Entonces, el problema (2.17) admite una única solución continua en un intervalo $[0, T]$, la cual está dada por la siguiente ecuación integral de Volterra:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(x(s)) ds. \quad (2.18)$$

Demostración. Consideremos el problema de valor inicial dado por (2.17) donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y satisface una condición de Lipschitz en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sabemos que el problema anterior es equivalente a la ecuación integral de Volterra (2.18). Establezcamos un intervalo $[0, T]$ tal que la solución permanezca en un subconjunto compacto $D \subset \Omega$, y definamos el espacio de funciones continuas

$$C([0, T], \mathbb{R}^n),$$

con la norma del supremo:

$$\|x\| := \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|.$$

Definimos el operador de Picard:

$$\mathcal{T}(x)[t] := x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(x(s)) ds.$$

La idea es probar que $\mathcal{T}$ tiene un punto fijo en una bola cerrada de radio $R > 0$ en $C([0, T], \mathbb{R}^n)$, la cual corresponderá a la única solución del problema integral, y por tanto, del problema fraccionario original. Definimos una sucesión de funciones por:

$$x_0(t) := x_0, \quad \text{constante},$$

y para $k \geq 0$, definimos recursivamente:

$$x_{k+1}(t) := x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(x_k(s)) ds.$$

Luego, sea $L > 0$ una constante de Lipschitz de f en $D \subset \Omega$, es decir:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

Queremos mostrar que $\{x_k\}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotadas. Observemos que si $\|f(x)\| \leq M$ para todo $x \in D$, entonces para cada k ,

$$\|x_{k+1}(t) - x_0\| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha.$$

Luego,

$$\|x_{k+1}(t)\| \leq \|x_0\| + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha := R.$$

Así, si tomamos T suficientemente pequeño, se puede asegurar que $x_k(t) \in D$ para todo k , y por tanto la sucesión está bien definida. Analicemos la diferencia:

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(x_k(s)) - f(x_{k-1}(s))\| ds.$$

Aplicando la condición de Lipschitz:

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|x_k(s) - x_{k-1}(s)\| ds.$$

Tomando el supremo en $t \in [0, T]$, obtenemos:

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{LT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x_k - x_{k-1}\|.$$

Definamos

$$q := \frac{LT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Entonces,

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq q \|x_k - x_{k-1}\|.$$

Si $q < 1$, lo cual se puede asegurar tomando T suficientemente pequeño, la sucesión $\{x_k\}$ es contractiva, y por lo tanto es de Cauchy en $C([0, T], \mathbb{R}^n)$. Por ultimo, como $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach, la sucesión converge uniformemente a una función $x(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, y esta función es solución de la ecuación integral (2.18). Por lo tanto, $x(t)$ es solución del problema original en el sentido de Caputo. La unicidad se sigue de la

contracción: si x y y son dos soluciones, se repite el argumento con la condición de Lipschitz y se concluye que $\|x - y\| = 0$, por lo que $x = y$. $\square$

Ahora, para la noción de flujo, tengamos en cuenta que en los sistemas dinámicos ordinarios, la evolución temporal está gobernada por un flujo ϕ_t que satisface la propiedad semigrupo:

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s.$$

Sin embargo, en los sistemas fraccionarios con derivada de Caputo, esta propiedad no se mantiene debido a la dependencia no local del operador. Para esto, basta ver el siguiente contraejemplo en el caso escalar lineal. Considérese

$${}_C D_t^\alpha x(t) = \lambda x(t), \quad x(0) = x_0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La solución es

$$x(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha) x_0,$$

donde E_α es la función de Mittag–Leffler. Supóngase válida la propiedad de semigrupo. Entonces, para todo $s, t \geq 0$,

$$E_\alpha(\lambda(t+s)^\alpha) x_0 = E_\alpha(\lambda t^\alpha) E_\alpha(\lambda s^\alpha) x_0.$$

Dividiendo por $x_0 \neq 0$ y fijando $\lambda \neq 0$ se llega a

$$E_\alpha(\lambda(t+s)^\alpha) = E_\alpha(\lambda t^\alpha) E_\alpha(\lambda s^\alpha) \quad \forall s, t \geq 0. \quad (2.19)$$

Sin embargo, para $\alpha \in (0, 1)$ la identidad (2.19) es *falsa* (puede comprobarse, por ejemplo, evaluando en $t = s = 1$ y usando el hecho de que E_α no es multiplicativa). La única posibilidad para que (2.19) se cumpla es $\alpha = 1$, caso en el cual $E_1(z) = e^z$ y la igualdad se reduce a la ley exponencial $e^{\lambda(t+s)} = e^{\lambda t} e^{\lambda s}$. Así, si $\alpha \in (0, 1)$, la hipótesis de existencia de un flujo conduce a una contradicción; por ende, las herramientas basadas en flujos y semigrupos (p. ej. teoría ergódica clásica, recurrencia de Poincaré, secciones de Poincaré, etc.) no se trasladan directamente al contexto fraccionario.

2.4. Análisis de estabilidad

Diversos estudios han abordado la estabilidad de sistemas de orden fraccionario, destacando su relevancia en el contexto de las ecuaciones de Caputo. Por ejemplo, el trabajo de Podlubny (1999) establece una base sólida para la comprensión de la estabilidad en sistemas de este tipo, señalando que "la teoría de sistemas de orden fraccionario abre nuevas oportunidades para modelar sistemas dinámicos complejos" (Podlubny, 1999) [20]. Esta perspectiva invita a investigar más a fondo los teoremas y definiciones que rigen la estabilidad en el ámbito de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

A lo largo de este capítulo, se presentarán definiciones claves y teoremas relacionados con la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, utilizando la derivada de Caputo como herramienta principal para el análisis. Se discutirá cómo estos conceptos se interrelacionan y se aplican en diferentes contextos, proporcionando una visión integral del estado actual de la investigación en esta área.

Definición 2.10. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante y sea $\alpha \in (0, 1)$. El sistema diferencial lineal fraccionario de Caputo asociado a A se define por

$$\begin{cases} {}_C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad t \in I = [0, T],$$

donde $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función absolutamente continua.

Esta función $x(t)$ describe la evolución temporal del sistema asociado al campo vectorial lineal $F(x) = Ax$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es constante.

Teorema 2.5. Sea $\alpha \in (0, 1)$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante. Para $t \geq 0$, considérese el siguiente problema de valor inicial fraccionario:

$$\begin{cases} {}_C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Entonces, la única solución está dada por

$$x(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha)x_0.$$

Demostración. Veamos que $x(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha)x_0$ es solución del sistema. Para esto, probaremos que:

$${}_CD_t^\alpha (E_{\alpha,1}(At^\alpha)x_0) = Ax(t).$$

Usando las propiedades de la derivada de Caputo, obtenemos:

$$\begin{aligned} {}_CD_t^\alpha (E_{\alpha,1}(At^\alpha)x_0) &= x_0 \sum_{k=0}^{\infty} {}_CD_t^\alpha \left(\frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right) \\ &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} {}_CD_t^\alpha (t^{\alpha k}) \\ &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{d}{ds} (s^{\alpha k}) ds \\ &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \alpha k s^{\alpha k - 1} ds. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{s}{t}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} {}_CD_t^\alpha (E_{\alpha,1}(At^\alpha)x_0) &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k \alpha k}{\Gamma(\alpha k + 1) \Gamma(1 - \alpha)} \int_0^1 (t - ut)^{-\alpha} (ut)^{\alpha k - 1} t du \\ &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k \alpha k t^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + 1) \Gamma(1 - \alpha)} \int_0^1 (1 - u)^{-\alpha} u^{\alpha k - 1} du \\ &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k \alpha k t^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + 1) \Gamma(1 - \alpha)} \beta(\alpha k, 1 - \alpha), \end{aligned}$$

luego, aplicando las propiedades de la función beta, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 {}_C D_t^\alpha (E_{\alpha,1}(At^\alpha)x_0) &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k \alpha k t^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + 1) \Gamma(1 - \alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha k) \Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} \\
 &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k \alpha k t^{\alpha k - \alpha}}{\alpha k \Gamma(\alpha k)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} \\
 &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} \\
 &= x_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+1} t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)} \quad (\text{con el cambio } j = k - 1) \\
 &= x_0 A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)} \\
 &= Ax(t).
 \end{aligned}$$

Finalmente, por la unicidad del Teorema (2.4), se concluye que $x(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha)x_0$ es la única solución del sistema. $\square$

Definición 2.11. Un punto η es llamado equilibrio del sistema fraccionario de Caputo (2.17), si y solo si, $f(\eta) = 0$.

Definición 2.12. Sea $\eta \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio del sistema fraccionario de Caputo (2.17). Además, sea $\alpha \in (0, 1)$ y consideremos la matriz jacobiana $Df(\eta)$ evaluada en dicho equilibrio. Decimos que el punto de equilibrio η es hiperbólico fraccionario si todos los valores propios λ de la matriz $Df(\eta)$ cumplen simultáneamente las condiciones siguientes:

$$|\lambda| \neq 0 \quad \text{y} \quad |\arg(\lambda)| \neq \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Aquí, $\arg(\lambda)$ denota el argumento principal de λ en el plano complejo. Cuando $\alpha = 1$, esta definición coincide con el concepto clásico de equilibrio hiperbólico en sistemas dinámicos ordinarios

Observación 2.4. En el caso de ser $\alpha = 1$ la definición coincide con la de puntos no hiperbólicos de un sistema dinámico de orden ordinario, ya que en este caso $|\arg(\lambda)| \neq \pi/2$, es decir, la parte real de los valores propios de la matriz $Df(\eta)$ es diferente de cero.

Definición 2.13. Sea η un punto de equilibrio del sistema fraccionario con derivada de Caputo (2.10). Decimos que el punto de equilibrio η es:

1. Estable si, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda condición inicial x_0 que satisfaga:

$$\|x_0 - \eta\| < \delta,$$

la solución $x(t)$ del sistema cumple que:

$$\|x(t) - \eta\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

2. Asintóticamente estable si además de ser estable, existe un $\gamma > 0$ tal que para toda condición inicial x_0 que satisfaga:

$$\|x_0 - \eta\| < \gamma,$$

se verifica la condición adicional:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \eta.$$

3. Globalmente asintóticamente estable, si es asintóticamente estable y la condición de convergencia se cumple para toda condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \eta, \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

La norma $\|\cdot\|$ es considerada como la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, aunque otras normas equivalentes pueden ser utilizadas sin afectar esta definición. Esta definición generaliza naturalmente los conceptos clásicos de estabilidad y estabilidad asintótica conocidos para sistemas ordinarios, manteniendo su esencia y relevancia en el contexto fraccionario.

El siguiente lema constituye un resultado fundamental para la transformación de problemas de valor inicial fraccionarios, lo cual simplifica considerablemente el estudio de la existencia, unicidad y estabilidad de soluciones en sistemas dinámicos fraccionarios.

Lema 2.3 (Transformada de Laplace de Caputo). *Sea $\alpha > 0$, $n - 1 < \alpha \leq n$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $y(x) \in C^n(\mathbb{R}^+)$, $y^{(n)}(x) \in L_1(0, b)$ para algún $b > 0$ y existen las transformadas de*

Laplace $(\mathcal{L}y)(s)$ y $\mathcal{L}(D^n y)(s)$. Además,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (D^k y)(t) = 0 \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Entonces, la transformada de Laplace para la derivada fraccionaria de Caputo cumple:

$$(\mathcal{L}^C {}_C D_0^\alpha y)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (D^k y)(0), \quad (2.20)$$

en particular, si $0 < \alpha \leq 1$, entonces:

$$(\mathcal{L}^C {}_C D_0^\alpha y)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1} y(0). \quad (2.21)$$

Ver en [12], Teorema 7.1, p. 314, la demostración de este lema.

Teorema 2.6. Sea $0 < \alpha < 1$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante real. Considerése el sistema lineal fraccionario de Caputo

$${}_C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad t \geq 0.$$

Definamos la matriz característica

$$\Delta(s) = s^\alpha I - A, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Si todas las raíces de la ecuación característica

$$\det(\Delta(s)) = 0,$$

satisfacen

$$\operatorname{Re}(s) < 0,$$

entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Demostración. Sea $0 < \alpha < 1$ y considérese el sistema lineal fraccionario

$$\begin{cases} {}_CD_t^\alpha x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t), \\ {}_CD_t^\alpha x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t), \\ \vdots \\ {}_CD_t^\alpha x_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \quad x_i(0) = x_{i0}. \quad (2.22)$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ definamos

$$X_i(s) = \mathcal{L}\{x_i(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} x_i(t) dt.$$

Aplicando el Lema (2.3) a cada ecuación se obtiene

$$\begin{cases} s^\alpha X_1(s) - s^{\alpha-1}x_{10} = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \cdots + a_{1n}X_n(s), \\ s^\alpha X_2(s) - s^{\alpha-1}x_{20} = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + \cdots + a_{2n}X_n(s), \\ \vdots \\ s^\alpha X_n(s) - s^{\alpha-1}x_{n0} = a_{n1}X_1(s) + a_{n2}X_2(s) + \cdots + a_{nn}X_n(s). \end{cases}$$

Estas n ecuaciones pueden agruparse como

$$\begin{pmatrix} s^\alpha - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s^\alpha - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s^\alpha - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix} = s^{\alpha-1} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}.$$

Sea $\Delta(s) = s^\alpha I - A$. Multiplicando la igualdad anterior por s se llega a

$$\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix} = \Delta^{-1}(s) s^\alpha \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

La hipótesis del teorema implica que todas las raíces de $\det(\Delta(s)) = 0$ satisfacen $\operatorname{Re}(s) < 0$; por consiguiente $\Delta(s)$ es invertible para $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ y sus polos permanecen en el semiplano izquierdo. Asimismo, $\lim_{s \rightarrow 0^+} \Delta^{-1}(s) = (-A)^{-1} = -A^{-1}$, ya que A es invertible bajo

la misma condición espectral. De (2.23) resulta entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s X_i(s) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

pues $\alpha > 0$. Como $sX_i(s)$ no tiene polos en $\text{Re}(s) \geq 0$ (distinto, a lo sumo, de $s = 0$), las condiciones del Teorema del valor final de transformadas de Laplace se cumplen y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s X_i(s) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto, el equilibrio $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable. $\square$

Corolario 2.1. *Supongamos que $\alpha \in (0, 1)$ y consideremos el sistema lineal fraccionario dado por:*

$${}_C D_t^\alpha x(t) = Ax(t),$$

donde $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. *Si todas las raíces de la ecuación característica $\det(\lambda I - A) = 0$ satisfacen:*

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2},$$

entonces la solución del sistema es globalmente asintóticamente estable.

2. *Si todas las raíces satisfacen:*

$$|\arg(\lambda)| \geq \frac{\alpha\pi}{2},$$

y además las raíces que cumplen la igualdad $|\arg(\lambda)| = \pi/2$ tienen multiplicidad geométrica igual a su multiplicidad algebraica, entonces la solución del sistema es estable (no necesariamente asintóticamente).

Demostración. Consideremos la ecuación característica del sistema fraccionario:

$$\det(s^\alpha I - A) = 0,$$

donde podemos hacer el cambio de variable $\lambda = s^\alpha$. Entonces, cada raíz λ corresponde a una raíz $s = \lambda^{1/\alpha}$ en el dominio complejo.

- **Caso 1:** Supongamos que todas las raíces cumplen estrictamente $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$.

Esto implica que, al considerar $s = \lambda^{1/\alpha}$, se tiene:

$$|\arg(s)| = \frac{|\arg(\lambda)|}{\alpha} > \frac{\pi}{2}.$$

Luego, todas las raíces s se ubican estrictamente en el semiplano complejo izquierdo (es decir, tienen parte real negativa), esta condición implica que la solución del sistema lineal fraccionario cumple:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0,$$

y dado que el sistema es lineal y el punto de equilibrio $x = 0$ es el único posible, esta estabilidad es global y asintótica.

- **Caso 2:** Supongamos ahora que todas las raíces cumplen la condición más débil:

$$|\arg(\lambda)| \geq \frac{\alpha\pi}{2},$$

y aquellas raíces que cumplen la igualdad tienen multiplicidad geométrica igual a su multiplicidad algebraica. En este escenario, las raíces s asociadas pueden ubicarse sobre la línea imaginaria; es decir, con parte real cero. Esta ubicación de las raíces genera soluciones estables (no divergentes ni convergentes a cero necesariamente). Bajo estas condiciones, la solución del sistema sigue siendo estable, aunque no necesariamente asintóticamente estable.

□

Nota 2.2. Observemos que cuando $\alpha = 1$ recuperamos el resultado clásico de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Nota 2.3. La región de estabilidad esta delimitada por las semirectas $\pm\alpha\pi/2$ dibujadas en el semiplano $Re > 0$, concretamente está es la región solida que se muestra la siguiente Figura:

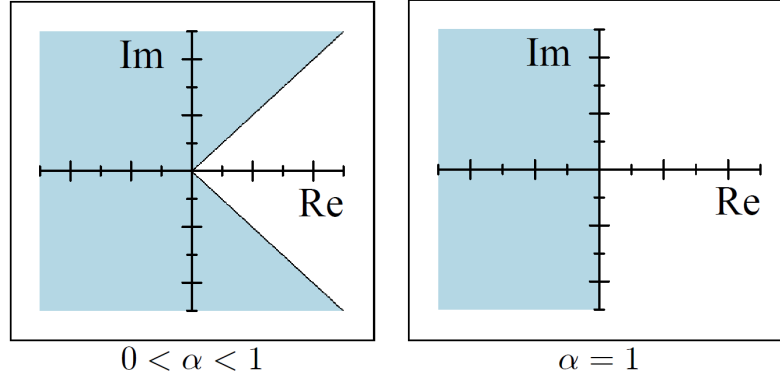


Figura 2.6: Regiones de estabilidad.

En el estudio del comportamiento asintótico de sistemas dinámicos fraccionarios con derivada de Caputo, resulta esencial extender adecuadamente las nociones clásicas de estabilidad y estructura local en torno a los puntos de equilibrio. En particular, conceptos como atractor, repulsor y punto silla pueden definirse rigurosamente en este contexto, teniendo en cuenta las modificaciones necesarias que impone la naturaleza no local del operador fraccionario. A continuación, se presentan definiciones formales que capturan estas ideas para sistemas de orden fraccionario $\alpha \in (0, 1)$, destacando los valores propios de la matriz jacobiana y su relación con la estabilidad de las soluciones.

Definición 2.14. Sea $\eta \in \Omega$ un punto de equilibrio, y sea $A = Df(\eta)$ la matriz jacobiana evaluada en η . Se dice que η es un punto silla fraccionario, si los valores propios de la matriz A contiene al menos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1 \text{ con } |\arg(\lambda_1)| &< \frac{\pi\alpha}{2} \quad (\text{dirección inestable}), \\ \exists \lambda_2 \text{ con } |\arg(\lambda_2)| &> \frac{\pi\alpha}{2} \quad (\text{dirección estable}). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3. Considérese el sistema fraccionario lineal en $\mathbb{R}^2$ dado por

$${}_CD_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz A son $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$, y por tanto, $|\arg(\lambda_{1,2})| = \frac{\pi}{3}$. Aplicando el Teorema (2.6), se concluye que el sistema es localmente asintóticamente es-

table si y solo si

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}.$$

En este caso, se deduce que el sistema será asintóticamente estable únicamente para órdenes $\alpha < \frac{2}{3}$. Para $\alpha = 0,6$, el origen actúa como un atractor, mientras que para $\alpha = 0,7$, el origen deja de ser estable, y las soluciones tienden a divergir.

Este ejemplo pone de manifiesto una diferencia estructural importante entre los sistemas clásicos y los fraccionarios: en presencia de los valores propios con parte real positiva, la estabilidad del sistema fraccionario puede preservarse si el orden α es suficientemente pequeño. En contraste, tal comportamiento no es posible en sistemas ordinarios de primer orden, donde cualquier autovalor con parte real positiva implica inestabilidad.

Ejemplo 2.4. Considérese ahora el sistema fraccionario lineal definido por

$${}_CD_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_{1,2} = \pm i$, de modo que $|\arg(\lambda_{1,2})| = \frac{\pi}{2}$. Nuevamente, por el criterio del Teorema (2.6), la estabilidad asintótica se alcanza si y solo si

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\alpha\pi}{2} \iff \alpha < 1.$$

Por lo tanto, el sistema es asintóticamente estable para todo $\alpha \in (0, 1)$, y deja de serlo precisamente en el caso clásico $\alpha = 1$. Para distintos valores de $\alpha \in (0, 1)$, incluyendo $\alpha = 0,9$ y $\alpha = 0,95$. En ambos casos, el origen actúa como atractor, lo que contrasta con el comportamiento del sistema ordinario ($\alpha = 1$), en el cual las soluciones describen órbitas cerradas (centro) y no son asintóticamente estables.

Este ejemplo refuerza la idea de que los sistemas fraccionarios con derivada de Caputo pueden exhibir estabilidad asintótica en situaciones donde el sistema clásico no la presenta.

Definición 2.15. Sean f y g campos vectoriales de clase C^1 definidos sobre abiertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Sean $\varphi_{t,f}$ y $\varphi_{t,g}$ los flujos generados por f y g respectivamente. Diremos que f y g son localmente topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo

$h: U \rightarrow V$ tal que:

$$h \circ \varphi_{t,f}(x) = \varphi_{t,g} \circ h(x), \quad \text{para todo } x \in B(x_0, r) \subset U,$$

donde $x_0 \in U$ y $B(x_0, r)$ es una vecindad abierta de x_0 en U . En otras palabras, las trayectorias del sistema generado por f son mapeadas, mediante h , en las trayectorias del sistema generado por g , preservando la orientación temporal.

Teorema 2.7 (Teorema de Hartman–Grobman para sistemas diferenciales fraccionarios [25]). *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene el origen, sea $f \in C^1(E)$, y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal dado por (2.16). Supóngase que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no posee valores propios con parte real nula. Entonces, existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene el origen sobre un conjunto abierto V que también contiene el origen, tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero, y para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$ se cumple:*

$$H \circ \phi_t(x_0) = E_\alpha(At^\alpha)H(x_0), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Nota 2.4. La demostración del teorema anterior es atribuible a [13]. Es importante señalar que, tras realizar una revisión exhaustiva de dicha demostración, se han detectado errores formales significativos. En particular, aunque se introduce adecuadamente la noción de un "flujo fraccionario" mediante la inclusión de un operador auxiliar para corregir la ausencia del semigrupo clásico, la invertibilidad de dicho operador auxiliar no es debidamente justificada. Además, en una de las ecuaciones fundamentales del argumento existe un error que imposibilita alcanzar la conclusión buscada por los autores. Asimismo, la demostración del teorema de linealización usa resultados aun no probados que el autor considero intuitivamente ciertos, emplea de forma directa las técnicas y enfoques utilizados en el caso entero, sin antes asegurar que los operadores involucrados mantengan las propiedades necesarias, especialmente la invertibilidad y los dominios de definición adecuados. Esto conduce a una brecha lógica, al asumir implícitamente propiedades análogas a las de un semigrupo clásico, que no están necesariamente garantizadas en el contexto fraccionario.

Observación 2.5. Este teorema es una extensión natural del teorema clásico de Hartman–Grobman a sistemas fraccionarios. La equivalencia topológica implica que el comportamiento cualitativo local de las trayectorias del sistema no lineal coincide con el del

sistema linealizado, preservando la estructura de estabilidades e inestabilidades locales.

Ejemplo 2.5. Consideremos el sistema fraccionario no lineal con derivada de Caputo de orden $\alpha = 1/2$ dado por:

$$\begin{cases} {}_C D_t^{\frac{1}{2}} x_1(t) = x_1 + x_2 + \frac{\sqrt{\pi}}{b} x_1^2 + x_3, \\ {}_C D_t^{\frac{1}{2}} x_2(t) = -x_1 + x_2 + \frac{\sqrt{\pi}}{b} x_1^2 - x_3, \\ {}_C D_t^{\frac{1}{2}} x_3(t) = x_3^2 - \frac{b\sqrt{\pi}}{2} x_3. \end{cases} \quad (2.24)$$

donde $b > 0$ es una constante. A continuación, determinamos los puntos de equilibrio resolviendo el siguiente sistema:

$$x_1 + x_2 + \frac{\sqrt{\pi}}{b} x_1^2 + x_3 = 0, \quad -x_1 + x_2 + \frac{\sqrt{\pi}}{b} x_1^2 - x_3 = 0, \quad x_3^2 - b \frac{\sqrt{\pi}}{2} x_3 = 0.$$

Es sencillo verificar que los puntos de equilibrio son:

$$\eta_1 = (0, 0, 0), \quad \eta_2 = \left(-\frac{\sqrt{\pi b}}{2}, -\frac{\pi^{3/2} b}{4}, \frac{\sqrt{\pi b}}{2} \right).$$

Luego, realizamos la linealización en cada equilibrio:

- En η_1 : la matriz de linealización es

$$Df(\eta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -b \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -b \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\lambda_2 = 1 + i$, y $\lambda_3 = 1 - i$.

Como $\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$. Observamos que:

$$|\arg(\lambda_1)| = \pi > \frac{\pi}{4}, \quad |\arg(\lambda_{2,3})| = \frac{\pi}{4}.$$

Dado que se cumple la igualdad en algunos valores propios y no se contradicen

las hipótesis del Teorema 2.6, concluimos que η_1 es estable (pero no necesariamente asintóticamente estable).

- En η_2 : la matriz de linealización es

$$Df(\eta_2) = \begin{pmatrix} 1 - \pi & 1 & 1 \\ -1 - \pi & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -b\frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son

$$\lambda_1 = 2b\sqrt{\pi}, \quad \lambda_{2,3} = 2 - \pi \pm i\sqrt{\pi^2 + 4\pi + 4}.$$

Observamos claramente:

$$|\arg(\lambda_1)| = 0 < \frac{\pi}{4}, \quad |\arg(\lambda_{2,3})| > \frac{\pi}{4}.$$

La presencia de un valor propio con argumento cero (parte real positiva) implica que el punto η_2 es inestable.

Capítulo 3

Modelo fraccionario para la fiebre del dengue

El modelado de brotes epidémicos, como la fiebre del dengue, se ha beneficiado de ecuaciones diferenciales fraccionarias, que mejoran la aproximación a las dinámicas de transmisión. Para ejemplificar esto, estudiemos el modelo de Diethelm [8] introduce un modelo de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario con derivadas de Caputo con $\alpha \in (0, 1)$, diferenciando órdenes para humanos α_h y mosquitos α_m . Este enfoque simula con mayor precisión el brote de 2009 en Cabo Verde, superando el modelo clásico de primer orden.

La fiebre del dengue, una enfermedad viral transmitida principalmente por mosquitos *Aedes aegypti* y *Aedes albopictus*, ha experimentado un crecimiento significativo en su magnitud y propagación en las últimas dos décadas, según la Organización Mundial de la Salud afectando a más de 2.5 mil millones de personas en zonas tropicales. En ausencia de vacunas, comprender su dinámica de transmisión es vital para diseñar estrategias de control, enfocadas actualmente en la gestión de vectores [16]. Modelos matemáticos recientes sugieren que los vectores del dengue podrían expandirse hacia nuevas áreas, como Europa Central y del Norte, en las próximas décadas [6].

Los modelos clásicos de ecuaciones de primer orden, aunque útiles, no logran replicar con precisión brotes reales. Como alternativa, se proponen ecuaciones de orden fraccional, cuyo enfoque permite capturar mejor las complejidades de la transmisión, ajustándose más fielmente a los datos empíricos. Diethelm [8] ofrece una aproximación precisa que contribuye al control y prevención del dengue en regiones vulnera-

bles.

Iniciaremos con una breve revisión del modelo matemático clásico utilizado para describir la dinámica de los procesos de infección y recuperación. Este modelo se fundamenta en ecuaciones diferenciales de primer orden. Sin embargo, estudios recientes [21] han señalado que dicho modelo no logra ajustarse adecuadamente a los datos estadísticos obtenidos en un brote real de la enfermedad. En consecuencia, proponemos una versión modificada del sistema de ecuaciones, en la cual utilizamos ecuaciones diferenciales de orden fraccionario utilizando la derivada fraccionaria de Caputo [3], [16].

3.1. Modelo clásico

El modelo matemático que describe la dinámica de una epidemia de fiebre del dengue se basa en la descomposición de la población humana en tres grupos: susceptibles, infectados y resistentes o recuperados, mientras que la población de mosquitos hembras se divide en dos grupos: infectados y susceptibles. Consecuentemente, notemos que:

$N_h(t)$ = número total de humanos,

$R_h(t)$ = número de humanos que han adquirido resistencia contra la infección,

$I_h(t)$ = número de humanos infectados,

$S_h(t)$ = número de humanos susceptibles,

$N_m(t)$ = número total de mosquitos hembras,

$I_m(t)$ = número de mosquitos hembras infectados,

$S_m(t)$ = número de mosquitos hembras susceptibles.

Todos ellos considerados en el instante de tiempo t . Notemos que:

$$N_h(t) = R_h(t) + S_h(t) + I_h(t) \quad \text{y} \quad N_m(t) = S_m(t) + I_m(t),$$

por lo que generalmente R_h , I_h , S_h , I_m , y S_m son funciones independientes que necesitan ser descritas, mientras que las otras dos, N_m y N_h , dependen de estas cinco funciones. Dado que los mosquitos machos no juegan un papel en el proceso, de ahora en adelante hablaremos simplemente de "mosquito" cuando nos referimos a "mosquitos hembras".

El modelo clásico [17], consiste en un sistema de cinco ecuaciones diferenciales ordinarias para las cinco funciones independientes, que toma la forma siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_h}{dt} = \mu_h (N_h - S_h) - \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_m, \\ \frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_m - (\mu_h + \gamma) I_h, \\ \frac{dR_h}{dt} = \gamma I_h - \mu_h R_h, \\ \frac{dS_m}{dt} = A - \frac{\beta_m b}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m S_m, \\ \frac{dI_m}{dt} = \frac{\beta_m b}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m I_m. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

En este sistema, μ_h denota la tasa de mortalidad per cápita de los humanos, y μ_m es el valor correspondiente para los mosquitos. Además, γ representa la tasa de recuperación de los humanos, es decir, el recíproco del intervalo de tiempo promedio entre la infección y la inmunización, y b es la tasa de picaduras, o sea, el número promedio de picaduras por mosquito por día. Las probabilidades de transmisión de humano a mosquito y viceversa se denotan por β_m y β_h , respectivamente. Finalmente, m denota el número de fuentes de sangre alternativas (no humanas) disponibles para los mosquitos, y A es una tasa constante de reclutamiento para los mosquitos. Una característica particular de este sistema es:

$$\begin{aligned} \frac{dN_h}{dt} &= \frac{dS_h}{dt} + \frac{dR_h}{dt} + \frac{dI_h}{dt}, \\ &= \mu_h (N_h - S_h - I_h - R_h) = 0. \end{aligned}$$

Es decir, el número total de seres humanos es constante. De manera similar, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dN_m}{dt} &= \frac{dS_m}{dt} + \frac{dI_m}{dt}, \\ &= A - \mu_m (S_m + I_m), \\ &= A - \mu_m N_m. \end{aligned}$$

El objetivo es ahora utilizar este enfoque para modelar el brote de la enfermedad que ocurrió en las islas de Cabo Verde en el año 2009. Por lo tanto, las Ecuaciones (3.1) pueden considerarse un modelo adecuado para representar la epidemia. Además, se sabe que los humanos son la única fuente de sangre para los mosquitos en este sistema, por

tanto podemos asumir que $m = 0$. También, en observaciones generales han mostrado que el número total de mosquitos N_m también permanece constante [17], lo cual implica que $A = \mu_m N_m$. Los demás parámetros también han sido identificados, de hecho, los siguientes valores son apropiados [21]:

$$\begin{aligned}\mu_h &= \frac{1}{71.365}, & \mu_m &= \frac{1}{10}, \\ \beta_h &= 0,36, & \beta_m &= 0,36, \\ b &= 0,7, & \gamma &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Luego, el sistema (3.1) puede resolverse con estos parámetros, sujeto a las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}S_h(0) &= 55784, & I_h(0) &= 216, & R_h(0) &= 0, \\ S_m(0) &= 168000, & I_m(0) &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Observemos el número de humanos infectados I_h en el brote de Cabo Verde de 2009:

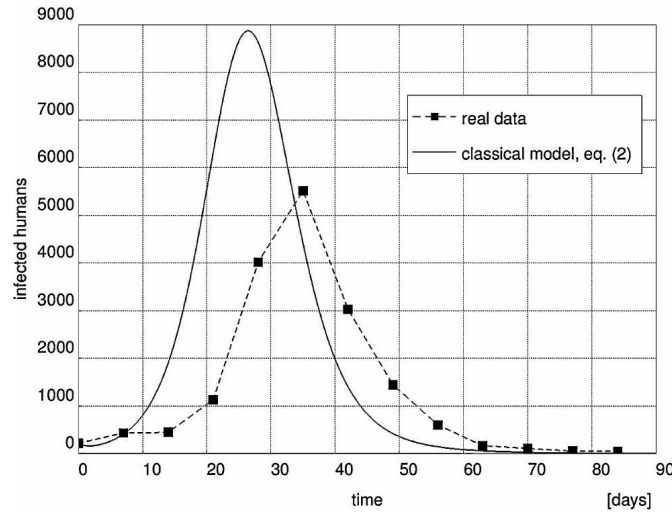


Figura 3.1: Comparación de los resultados obtenidos mediante el modelo clásico. Figura adaptada de [8].

lo que refleja el hecho de que la población de mosquitos en esta isla remota estaba inicialmente sana, y que el virus fue introducido en el ecosistema por humanos infectados que viajaron. Sin embargo, resulta obtenidos con el sistema clasico solo proporciona una correspondencia pobre con los datos reales de infectados. Por tanto, busca-

remos ahora modificaciones del modelo que conduzcan a resultados más precisos.

3.2. Modelo fraccionario

En los últimos años, se ha observado que los modelos basados en derivadas de orden fraccionario ofrecen una mejor concordancia entre los datos medidos y los simulados en comparación con los modelos clásicos basados en derivadas de orden entero. Esto ha motivado a algunos investigadores a modificar modelos tradicionales para incorporar derivadas fraccionarias.

Un primer intento en esta dirección fue realizado por Pooseh [21], quienes propusieron reemplazar las primeras derivadas en un modelo original por derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville del orden $\alpha \in (0, 1)$. Sin embargo, este enfoque presenta dos problemas principales. Primero, las ecuaciones diferenciales resultantes no permiten que las funciones constantes resuelvan la ecuación, lo que va en contra de la suposición de que ciertas cantidades (como N_h y N_m) deben permanecer constantes. Segundo, las derivadas de Riemann-Liouville no son compatibles con condiciones iniciales clásicas, lo que puede llevar a situaciones sin solución. Para resolver estos problemas, Diethelm [8] se sugiere optar por la derivada fraccionaria de Caputo las cual fue definida en el capítulo anterior, está permiten manejar estas situaciones de manera más adecuada.

Luego, dado que no encontramos motivos para suponer que los mosquitos deban seguir el mismo comportamiento que los humanos, introducimos dos órdenes distintos para los operadores diferenciales: α_h y α_m . El primero se utiliza para describir la evolución de los humanos, mientras que el segundo se aplica a los mosquitos. De esta forma, sustituimos el sistema (3.1) por:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_C D_t^{\alpha_h} S_h = \mu_h (N_h - S_h) - \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_m, \\ {}_C D_t^{\alpha_h} I_h = \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_m - (\mu_h + \gamma) I_h, \\ {}_C D_t^{\alpha_h} R_h = \gamma I_h - \mu_h R_h, \\ {}_C D_t^{\alpha_m} S_m = A - \frac{\beta_m b}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m S_m, \\ {}_C D_t^{\alpha_m} I_m = \frac{\beta_m b}{N_h + m} S_m I_h - \mu_m I_m. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Este es el sistema que usaremos para modelar nuestro problema. Note que en el ca-

so que $\alpha_h = 1$ y $\alpha_m = 1$, el sistema (3.3) se reduce al sistema clásico (3.1). Hasta ahora no hemos mencionado cómo elegir los órdenes de los operadores diferenciales, es decir, los valores α_h y α_m , ya que Diethelm [8] hace un estudio totalmente empírico. Primeramente, dados los datos reales se resuelve el sistema (3.3) variando los parámetros α_h y α_m ; específicamente, utilizan $\alpha_h, \alpha_m \in \{j/100 : j = 1, 2, \dots, 100\}$. Una comparación de los resultados demostró que se obtuvo una aproximación particularmente buena con $\alpha_h = 1$ y α_m en el rango de $[0,75, 0,8]$.

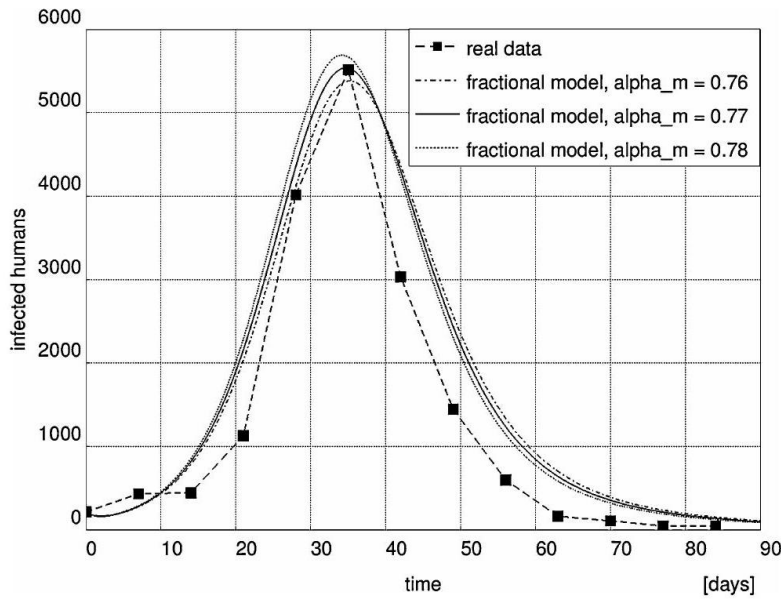


Figura 3.2: Soluciones correspondientes para $\alpha_h = 1$ y $\alpha_m \in \{0,76, 0,77, 0,78\}$

Note que estas soluciones numéricas ofrecen una aproximación significativamente más precisa a los datos reales mostrados en la Figura 3.1). Los valores menores de α_m ajustan mejor los datos en la fase inicial de la epidemia, antes del pico de infecciones, mientras que valores mayores de α_m resultan en una mejor aproximación en la fase posterior del brote.

Luego, para mejorar la precisión del modelo, Diethelm [8] hizo más experimentos numéricos adicionales variando ciertos parámetros. Observamos que los órdenes de las ecuaciones para los grupos humanos se modelan adecuadamente al fijar $\alpha_h = 1$, lo cual preserva los valores de μ_h, β_h, b y γ sin ajustes. Además, como β_m es una probabilidad, no depende del orden α_m . Por tanto, solo el parámetro μ_m requería ajuste, para lo cual exploraron valores en el rango $\mu_m \in \{j/1000 : j = 40, 41, \dots, 245\}$ y probamos in-

teracciones con $\alpha_m \in \{j/100 : j = 60, 61, \dots, 100\}$. Encontrando una mejor precisión con $\alpha_m = 0,95$ y $\mu_m = 0,196$,

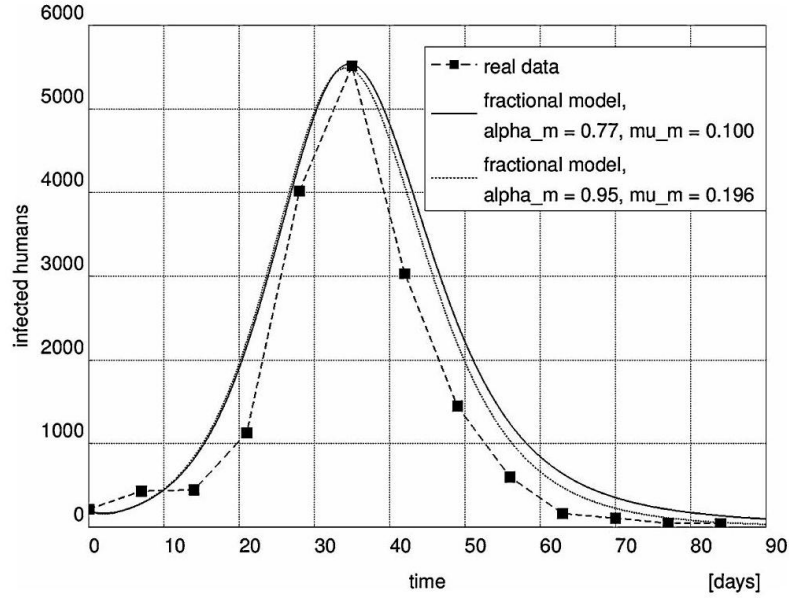


Figura 3.3: Comparación de los resultados obtenidos mediante el modelo de orden fraccionario.

Aquí se observa que ambos modelos fraccionales coinciden hasta el pico de infecciones, y la fase posterior se ajusta mejor con estos parámetros modificados. Siguiendo la investigación propuesta por Diethelm [8], nos propusimos analizar los puntos de equilibrio y examinar la estabilidad del sistema en nuestro estudio, confirmando empíricamente los resultados obtenidos, teniendo en cuenta todas las condiciones dadas. Considerando el sistema:

$$\begin{cases} {}^C D_t^1 S_h = \left(\frac{1}{71.365}\right) ((56000) - S_h) - \frac{(0,36)(0,7)}{(56000)} S_h I_m, \\ {}^C D_t^1 I_h = \frac{(0,36)(0,7)}{(56000)} S_h I_m - \left(\left(\frac{1}{71.365}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\right) I_h, \\ {}^C D_t^1 R_h = \left(\frac{1}{3}\right) I_h - \left(\frac{1}{71.365}\right) R_h, \\ {}^C D_t^{\frac{3}{4}} S_m = \left(\frac{1}{10}\right) (16800) - \frac{(0,36)(0,7)}{(56000)} S_m I_h - \left(\frac{1}{10}\right) S_m, \\ {}^C D_t^{\frac{3}{4}} I_m = \frac{(0,36)(0,7)}{(56000)} S_m I_h - \left(\frac{1}{10}\right) I_m. \end{cases} \quad (3.4)$$

Note que el único punto de equilibrio del sistema (3.4) es $\eta = (56000, 0, 0, 16800, 0)$,

punto de equilibrio libre de infección. La matriz de la linealización asociada a este punto de equilibrio es:

$$D(f(\eta)) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{71 \cdot 365}\right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{(0,36)(0,7)}{(5600)} (5600) \\ 0 & -\left(\left(\frac{1}{71 \cdot 365}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\right) & 0 & 0 & \frac{(0,36)(0,7)}{(5600)} (5600) \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right) & -\left(\frac{1}{71 \cdot 365}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(0,36)(0,7)}{(5600)} (16800) & 0 & -\left(\frac{1}{10}\right) & 0 \\ 0 & \frac{(0,36)(0,7)}{(5600)} (16800) & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{10}\right), \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios asociados son: $\lambda_1 = 0,229$, $\lambda_{2,3} = -1.4012 \times 10^{-2}$, $\lambda_4 = -0,1$ y $\lambda_5 = -0,67733$, notando que todos los $|\arg(\lambda_i)| > \frac{3\pi}{8}$, siendo así un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable.

En conclusión, a partir de los datos obtenidos del brote de fiebre del dengue en las islas de Cabo Verde en 2009, se observó que un modelo basado en ecuaciones diferenciales no lineales de orden fraccionario, utilizando la derivada de Caputo, logra simular la dinámica de la epidemia con una precisión considerablemente mayor en comparación con los enfoques clásicos que emplean derivadas de primer orden. Este resultado no solo se corrobora con la observación empírica de los datos, sino que también está respaldado por la teoría investigada, que demuestra que los modelos de orden fraccionario pueden capturar de manera más efectiva los fenómenos complejos y las irregularidades en los datos epidémicos, superando las limitaciones de los modelos tradicionales.

Bibliografía

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55. Courier Corporation, 1965.
- [2] AHMAD, B., NTOUYAS, S. K., AND ALSAEDI, A. Fractional order differential systems involving right caputo and left riemann–liouville fractional derivatives with nonlocal coupled conditions. *Boundary value problems 2019* (2019), 1–12.
- [3] BALEANU, D., DIETHELM, K., SCALAS, E., AND TRUJILLO, J. J. *Fractional calculus: models and numerical methods*, vol. 3. World Scientific, 2012.
- [4] BELL, W. W. *Special functions for scientists and engineers*. Courier Corporation, 2004.
- [5] CALSIN CARI, A. J. Modelo sird para covid-19 con derivada fraccional de caputo para la región de tacna-2021.
- [6] CAMINADE, C., MEDLOCK, J. M., DUCHEYNE, E., MCINTYRE, K. M., LEACH, S., BAYLIS, M., AND MORSE, A. P. Suitability of european climate for the asian tiger mosquito *aedes albopictus*: recent trends and future scenarios. *Journal of the Royal Society Interface* 9, 72 (2012), 2708–2717.
- [7] CHIKRII, A., AND MATYCHYN, I. Riemann–liouville, caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. *Advances in dynamic games: theory, applications, and numerical methods for differential and stochastic games* (2011), 61–81.
- [8] DIETHELM, K. A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever. *Nonlinear Dynamics* 71 (2013), 613–619.

-
- [9] DIETHELM, K., AND FORD, N. J. Analysis of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 265, 2 (2002), 229–248.
- [10] FARKAS, M. *Periodic Motions*. Springer, New York, 1994.
- [11] HIRSCH, M. W., SMALE, S., AND DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2013.
- [12] KILBAS A.A., SRIVASTAVA H.M., T. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, first ed., vol. 1 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science, 2006.
- [13] LEBEDEV, N. Special functions and their applications.
- [14] LIOUVILLE, J. Mémoire sur la théorie des Équations aux différentielles. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 24 (1832), 32–35.
- [15] LYAPUNOV, A. Probleme général de la stabilité du mouvement. Available in original or various reprints and translations.
- [16] MACHADO, J. T., KIRYAKOVA, V., AND MAINARDI, F. Recent history of fractional calculus. *Communications in nonlinear science and numerical simulation* 16, 3 (2011), 1140–1153.
- [17] NISHIURA, H., ET AL. Mathematical and statistical analyses of the spread of dengue.
- [18] OLIVEIRA, F. A., FERREIRA, R. M., LAPAS, L. C., AND VAINSTEIN, M. H. Anomalous diffusion: A basic mechanism for the evolution of inhomogeneous systems. *Frontiers in Physics* 7 (2019), 18.
- [19] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed. Springer, New York, 2013.
- [20] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations, An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, first ed., vol. 198 of *Academic Press*. Nonlinear Dynamics, 1998.

-
- [21] POOSEH, S., RODRIGUES, H. S., AND TORRES, D. F. Fractional derivatives in dengue epidemics. In *AIP Conference Proceedings* (2011), vol. 1389, American Institute of Physics, pp. 739–742.
- [22] RIEMANN, B. Über die darstellbarkeit einer function durch eine trigonometrische reihe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40 (1854), 36–68.
- [23] ROSS, B. The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica* 4, 1 (1977), 75–89.
- [24] RUDIN, W., ET AL. *Principles of mathematical analysis*, vol. 3. McGraw-hill New York, 1964.
- [25] SAYEVAND, K., AND PICHAGHCHI, K. Successive approximation: A survey on stable manifold of fractional differential systems. *Fractional Calculus and Applied Analysis* 18, 3 (2015), 621–641.
- [26] WHITTAKER, E., AND WATSON, G. The gamma function. *A Course of Modern Analysis* (1996), 243–275.