# Teoría de Nudos: Invariantes y generalizaciones

## Un encuentro entre la combinatoria, el álgebra y la topología

O'Bryan Cárdenas Andaur
Universidad de Valparaíso

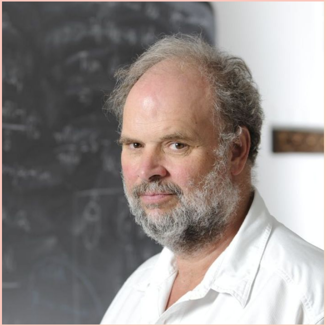
# Índice

# Homenaje



John Conway (1937 - 2020)

Vaughan Jones (1952 - 2020)



## Nudos y Links

**Nudos y Links**

Un nudo es una incrustación de $S^2$ en $\mathbb{R}^3$.

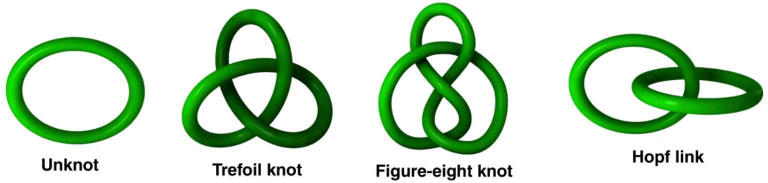
## Nudos y Links

Un nudo es una incrustación de $S^2$ en $\mathbb{R}^3$.
Un link o enlace es la incrustación de varias copias disjuntas de $S^2$ en $R^3$.

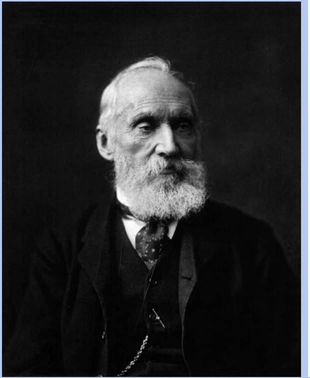
## Nudos y Links

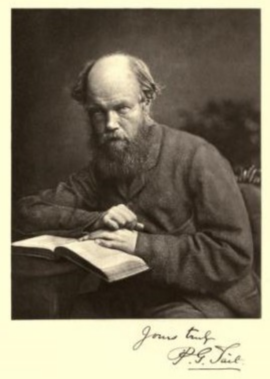
Un nudo es una incrustación de $S^2$ en $\mathbb{R}^3$.

Un link o enlace es la incrustación de varias copias disjuntas de $S^2$ en $R^3$.



## Teoría atómica (1860)





Lord Kelvin y Peter Tait: "Los átomos son eter anudados"

## Tablas de Tait

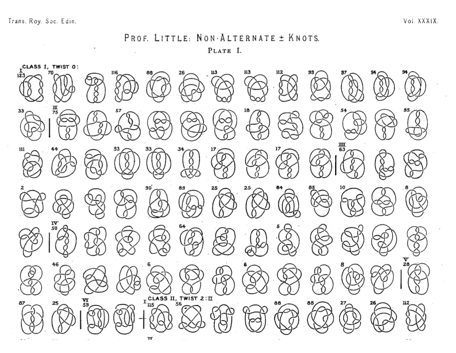




Tabla períodica de Tait

¿Cómo se clasificaban los nudos en las tablas de Tait?

**¿Cómo se clasificaban los nudos en las tablas de Tait?**

**Respuesta:** Mediante Primalidad, Quiralidad (... y 3 conjeturas)

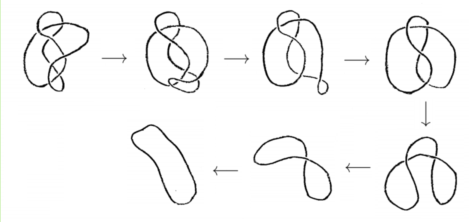
### Equivalencia de Nudos y Links en $\mathbb{R}^3$

**Equivalencia de Nudos y Links en $\mathbb{R}^3$**

Dos nudos (o links) se dicen equivalentes si es posible llevar uno en el otro mediante una deformación continua.

### Equivalencia de Nudos y Links en $\mathbb{R}^3$

Dos nudos (o links) se dicen equivalentes si es posible llevar uno en el otro mediante una deformación continua.



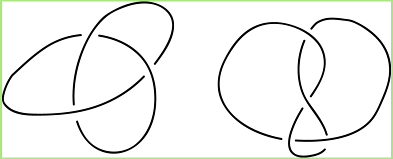
## Diagrama de nudos o links

**Diagrama de nudos o links**

Dado un nudo o link, es posible obtener (no de forma única) un diagrama, realizando una proyección en un plano de este, de forma tal que en cada cruce se distinga que arco está más lejos del plano.

## Diagrama de nudos o links

Dado un nudo o link, es posible obtener (no de forma única) un diagrama, realizando una proyección en un plano de este, de forma tal que en cada cruce se distinga que arco está más lejos del plano.



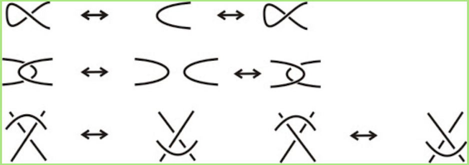
Equivalencia de diagramas de Nudos y Links en $\mathbb{R}^2$

### Equivalencia de diagramas de Nudos y Links en $\mathbb{R}^2$

Dos diagramas de nudos (o links) se dicen equivalentes si es posible llevar uno en el otro mediante una cantidad finita de los siguientes movimientos:

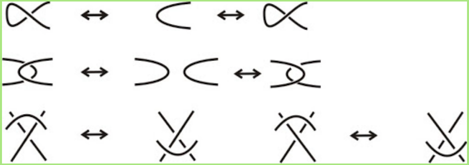
## Equivalencia de diagramas de Nudos y Links en $\mathbb{R}^2$

Dos diagramas de nudos (o links) se dicen equivalentes si es posible llevar uno en el otro mediante una cantidad finita de los siguientes movimientos:



## Equivalencia de diagramas de Nudos y Links en $\mathbb{R}^2$

Dos diagramas de nudos (o links) se dicen equivalentes si es posible llevar uno en el otro mediante una cantidad finita de los siguientes movimientos:



## Teorema de Reidemeister (1927)

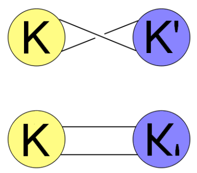
Dos diagramas de nudos (o links) provienen del mismo nudo (o link) si existe una sucesión finita de movimientos $R_1, R_2, R_3$ que lleve uno en el otro.

**Diagrama reducido**

Un diagrama de nudo (o link) se dice reducido si no existen cruces del siguiente tipo

### Diagrama reducido

Un diagrama de nudo (o link) se dice reducido si no existen cruces del siguiente tipo



Suma conexa de Nudos

### Suma conexa de Nudos

1.- Dadas las proyecciones no conexas de cada nudo, determinar un rectángulo en que un par de lados opuestos sean segmentos de arco de nudos distintos.

**Suma conexa de Nudos**

1.- Dadas las proyecciones no conexas de cada nudo, determinar un rectángulo en que un par de lados opuestos sean segmentos de arco de nudos distintos.

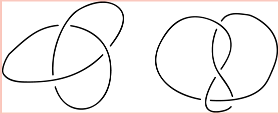
2.-Eliminar los segmentos de arcos anteriores y agregar los segmentos de arco que forman el otro par de lados del rectángulo.

**Suma conexa de Nudos**

1.- Dadas las proyecciones no conexas de cada nudo, determinar un rectángulo en que un par de lados opuestos sean segmentos de arco de nudos distintos.

2.-Eliminar los segmentos de arcos anteriores y agregar los segmentos de arco que forman el otro par de lados del rectángulo.

**Ejemplo**

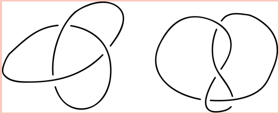


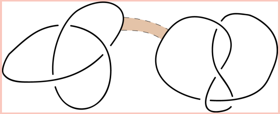
## Suma conexa de Nudos

1.- Dadas las proyecciones no conexas de cada nudo, determinar un rectángulo en que un par de lados opuestos sean segmentos de arco de nudos distintos.

2.-Eliminar los segmentos de arcos anteriores y agregar los segmentos de arco que forman el otro par de lados del rectángulo.

## Ejemplo



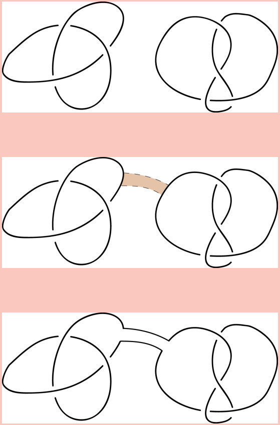


## Suma conexa de Nudos

1.- Dadas las proyecciones no conexas de cada nudo, determinar un rectángulo en que un par de lados opuestos sean segmentos de arco de nudos distintos.

2.-Eliminar los segmentos de arcos anteriores y agregar los segmentos de arco que forman el otro par de lados del rectángulo.

## Ejemplo



Nudos Primos

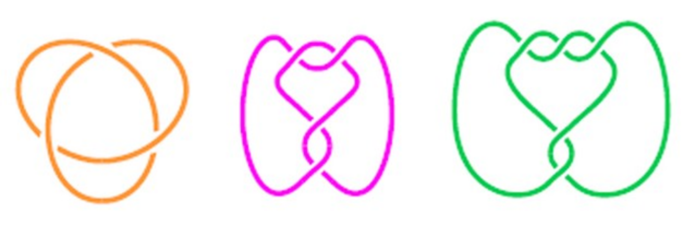
## Nudos Primos

Un nudo se dice primo si no existen 2 nudos no triviales tales que la suma conexa de estos forme el nudo original.

## Nudos Primos

Un nudo se dice primo si no existen 2 nudos no triviales tales que la suma conexa de estos forme el nudo original.

## Ejemplos



### Nudos Quirales y Anfiquirales

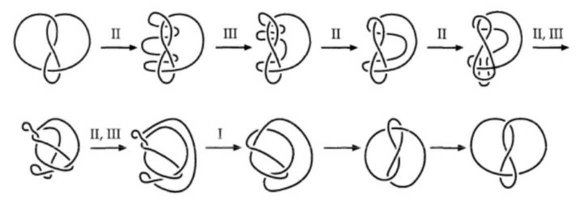
### Nudos Quirales y Anfiquirales

Un nudo se dice quiral si no es equivalente a su imagen reflejada. Análogamente se puede dar la definición considerando su diagrama en lugar del nudo. En caso contrario, se dice anfiquiral.

## Nudos Quirales y Anfiquirales

Un nudo se dice quiral si no es equivalente a su imagen reflejada. Análogamente se puede dar la definición considerando su diagrama en lugar del nudo. En caso contrario, se dice anfiquiral.

## Ejemplos



**Nudos Alternantes**

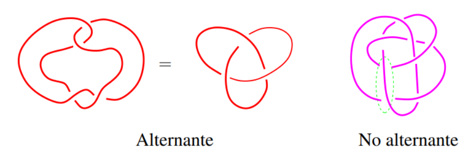
**Nudos Alternantes**

Un nudo se dice alternante si posee un diagrama, el cual, al ser orientado, se recorre alternadamente con cruces positivos y negativos.

## Nudos Alternantes

Un nudo se dice alternante si posee un diagrama, el cual, al ser orientado, se recorre alternadamente con cruces positivos y negativos.

## Ejemplos



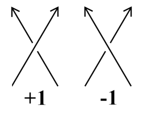
Writhe

## Writhe

Para un nudo o link $K$ orientado, el writhe se define como

$$w(K) = \sum sig(c_i)$$

donde, cada $c_i$ toma $\pm 1$ según la siguiente convención

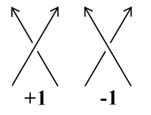


### Writhe

Para un nudo o link $K$ orientado, el writhe se define como

$$w(K) = \sum sig(c_i)$$

donde, cada $c_i$ toma $\pm 1$ según la siguiente convención



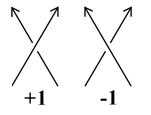

### Movimientos Flype

## Writhe

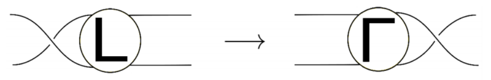
Para un nudo o link $K$ orientado, el writhe se define como

$$w(K) = \sum sig(c_i)$$

donde, cada $c_i$ toma $\pm 1$ según la siguiente convención




## Movimientos Flype



## Conjeturas de Tait (sXIX)

### Conjeturas de Tait (sXIX)

1. Cualquier diagrama reducido alternante de un nudo o link tiene el menor número de cruces posibles. (Probada por L.Kauffman, K.Murasugi y M.Thistlethwaite en 1987)

### Conjeturas de Tait (sXIX)

1. Cualquier diagrama reducido alternante de un nudo o link tiene el menor número de cruces posibles. (Probada por L.Kauffman, K.Murasugi y M.Thistlethwaite en 1987)
2. Todo nudo o link alternante anfiqueral tiene writhe nulo. (Probada por L.Kauffman en 1987 y M.Thistlethwaite en 1988)

### Conjeturas de Tait (sXIX)

1. Cualquier diagrama reducido alternante de un nudo o link tiene el menor número de cruces posibles. (Probada por L.Kauffman, K.Murasugi y M.Thistlethwaite en 1987)
2. Todo nudo o link alternante anfiqueral tiene writhe nulo. (Probada por L.Kauffman en 1987 y M.Thistlethwaite en 1988)
3. Todos los diagramas alternantes de un mismo nudo (o link) tienen igual número de cruces. (Probada por M.Thistlethwaite y W.Menasco en 1991)

Trenzas

## Trenzas

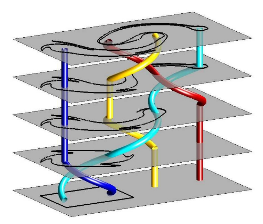
Consideremos dos planos paralelos en el espacio y fijemos $2n$ puntos en ellos $\{p_1, \ldots, p_n\}$ en el primero y $\{p'_1, \ldots, p'_n\}$ en el segundo).

### Trenzas

Consideremos dos planos paralelos en el espacio y fijemos $2n$ puntos en ellos $\{p_1, \ldots, p_n\}$ en el primero y $\{p'_1, \ldots, p'_n\}$ en el segundo).Llamaremos $n$-trenza o trenza de $n$ hebras al objeto que resulta de unir los puntos $p_i$ con los puntos $p'_i$ mediante $n$ curvas simples y disjuntas con la condición de que cualquier plano paralelo a los anteriores ubicado entre ellos intersecte a cada curva una sola vez.

## Trenzas

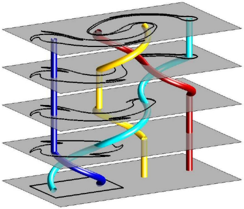
Consideremos dos planos paralelos en el espacio y fijemos $2n$ puntos en ellos $\{p_1, \ldots, p_n\}$ en el primero y $\{p'_1, \ldots, p'_n\}$ en el segundo).Llamaremos $n$-trenza o trenza de $n$ hebras al objeto que resulta de unir los puntos $p_i$ con los puntos $p'_i$ mediante $n$ curvas simples y disjuntas con la condición de que cualquier plano paralelo a los anteriores ubicado entre ellos intersecte a cada curva una sola vez.



### Diagramas de trenzas

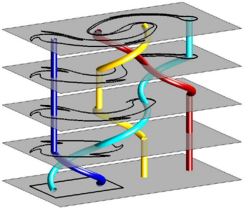
### Diagramas de trenzas

De forma similar al caso de los nudos y links, podemos definir los diagramas de *n*-trenzas



## Diagramas de trenzas

De forma similar al caso de los nudos y links, podemos definir los diagramas de $n$-trenzas



## Notación

Al conjunto de $n-$trenzas se le denotará por $B_n$.

## Producto de trenzas

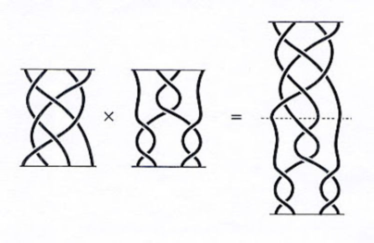
**Producto de trenzas**

Dadas dos trenzas de $n$ hebras, es posible definir un producto de ellas uniendo el final de las hebras de la primera con el comienzo de las hebras de la segunda.

## Producto de trenzas

Dadas dos trenzas de *n* hebras, es posible definir un producto de ellas uniendo el final de las hebras de la primera con el comienzo de las hebras de la segunda.

## Ejemplo



**Propiedades del producto de trenzas**

**Propiedades del producto de trenzas**

1. Posee neutro

**Propiedades del producto de trenzas**

1. Posee neutro
2. Posee inverso

**Propiedades del producto de trenzas**

1. Posee neutro
2. Posee inverso
3. Es asociativo

**Teorema de Artin (1925)**

**Teorema de Artin (1925)**

Sea $n$ un entero positivo. El grupo de $n$-trenzas, denotado $B_n$, es el grupo con la siguiente presentación

**Teorema de Artin (1925)**

Sea $n$ un entero positivo. El grupo de $n$-trenzas, denotado $B_n$, es el grupo con la siguiente presentación

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \;;\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \text{ si } |i-j| > 1 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j, \text{ si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle,$$

donde los $\sigma_k$ son las $n$-trenzas elementales.

### Teorema de Artin (1925)

Sea $n$ un entero positivo. El grupo de $n$-trenzas, denotado $B_n$, es el grupo con la siguiente presentación

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \; ; \; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \text{ si } |i-j| > 1 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j, \text{ si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle ,$$

donde los $\sigma_k$ son las $n$-trenzas elementales.

### Generadores

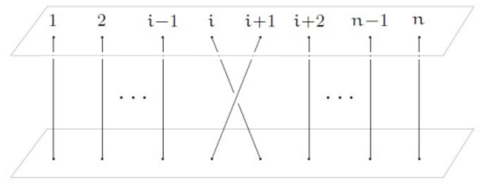
### Teorema de Artin (1925)

Sea $n$ un entero positivo. El grupo de $n$-trenzas, denotado $B_n$, es el grupo con la siguiente presentación

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \;;\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \text{ si } |i-j| > 1 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j, \text{ si } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle,$$

donde los $\sigma_k$ son las $n$-trenzas elementales.

### Generadores



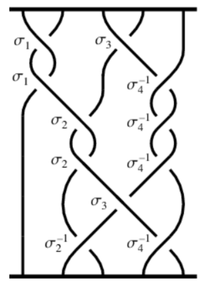
## Ejemplo

### Ejemplo

Así, cada trenza puede ser escrita como una palabra si la escribimos como el producto de sus generadores en orden, por ejemplo, la siguiente imagen corresponde a la trenza $\sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_4^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_4^{-1}$:

## Ejemplo

Así, cada trenza puede ser escrita como una palabra si la escribimos como el producto de sus generadores en orden, por ejemplo, la siguiente imagen corresponde a la trenza $\sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_4^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_4^{-1}$:



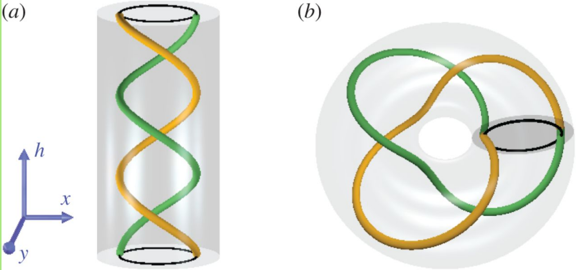
Cerradura de una trenza

### Cerradura de una trenza

A cada trenza en $B_n$ es posible hacerle una operación llamada *cerradura*, la cual consiste en conectar los extremos de la trenza por fuera de ella

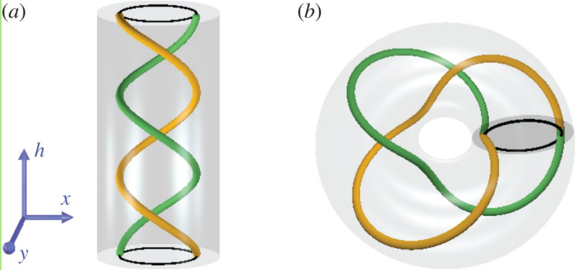
## Cerradura de una trenza

A cada trenza en $B_n$ es posible hacerle una operación llamada *cerradura*, la cual consiste en conectar los extremos de la trenza por fuera de ella



## Cerradura de una trenza

A cada trenza en $B_n$ es posible hacerle una operación llamada *cerradura*, la cual consiste en conectar los extremos de la trenza por fuera de ella




Al cerrar una trenza, obtenemos un link (o nudo).

**Teorema de Alexander (1923**

**Teorema de Alexander (1923**

Cada nudo o link puede obtenerse como la cerradura de una $n$-trenza para algún $n$.

**Teorema de Alexander (1923**

Cada nudo o link puede obtenerse como la cerradura de una *n*-trenza para algún *n*.

**Observación:** El teorema de Alexander asegura que la función cerradura es sobreyectiva sobre $\mathfrak{L}$

### Teorema de Markov (1935

Teorema de Markov (1935

La clausura de dos trenzas $\alpha$ y $\beta$ se corresponde con el mismo nudo o links si y solo si $\alpha$ y $\beta$ son Markov equivalentes ($\sim_M$), es decir, es posible obtener una de la otra a partir de un número finito de los siguientes movimientos (de Markov):

**Teorema de Markov (1935**

La clausura de dos trenzas $\alpha$ y $\beta$ se corresponde con el mismo nudo o links si y solo si $\alpha$ y $\beta$ son Markov equivalentes ($\sim_M$), es decir, es posible obtener una de la otra a partir de un número finito de los siguientes movimientos (de Markov):

1. Conjugación (M1): Sustituir $\beta$ por $\gamma\beta\gamma^{-1}$

### Teorema de Markov (1935

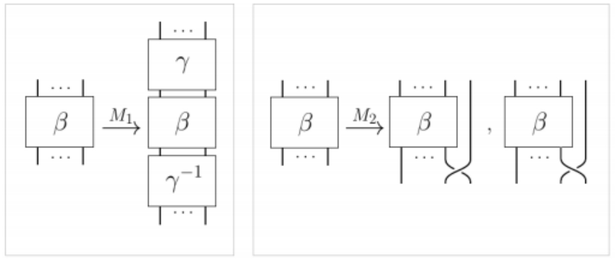
La clausura de dos trenzas $\alpha$ y $\beta$ se corresponde con el mismo nudo o links si y solo si $\alpha$ y $\beta$ son Markov equivalentes ($\sim_M$), es decir, es posible obtener una de la otra a partir de un número finito de los siguientes movimientos (de Markov):

1. Conjugación (M1): Sustituir $\beta$ por $\gamma\beta\gamma^{-1}$
2. Estabilización (M2): Sustituir $\beta$ por $\beta\sigma^{\pm 1}$

## Teorema de Markov (1935

La clausura de dos trenzas $\alpha$ y $\beta$ se corresponde con el mismo nudo o links si y solo si $\alpha$ y $\beta$ son Markov equivalentes ($\sim_M$), es decir, es posible obtener una de la otra a partir de un número finito de los siguientes movimientos (de Markov):

1. Conjugación (M1): Sustituir $\beta$ por $\gamma\beta\gamma^{-1}$
2. Estabilización (M2): Sustituir $\beta$ por $\beta\sigma^{\pm 1}$



# Encuentro entre tres mundos

$$\mathfrak{L}/\sim \xleftrightarrow{\text{T.Reidemeister}} \mathfrak{D}/\sim_R \xleftrightarrow{\text{T.Markov}} \mathfrak{B}_\infty/\sim_M$$

Topología — Combinatoria — Álgebra

# Problemas de la Teoría de Nudos



- Dado un nudo $K$ ¿Es $K$ equivalente al no nudo?

- Dado un nudo $K$ ¿Es $K$ equivalente al no nudo?
- Dados dos nudos $K_1$ y $K_2$ ¿Son equivalentes o pertenecen a clases de equivalencia distintas?

# Problemas de la Teoría de Nudos



- Para resolver (parcialmente) los problemas anteriores se recurre al estudio y búsqueda de invariantes.

**Invariante**

- Para resolver (parcialmente) los problemas anteriores se recurre al estudio y búsqueda de invariantes.

**Invariante**

Sea $A$ un conjunto con elementos fácilmente comparables. Un invariante de links (o nudos) es una función $f : D(L) \longrightarrow A$, tal que si $L_1 \sim L_2$, entonces $f(L_1) = f(L_2)$.

En particular, revisaremos dos tipos de invariantes

- Invariantes no polinomiales (Sesión de ejercicios 1)
- Invariantes polinomiales (Charla de mañana)

¡Gracias por su atención!

Merci de votre attention !

Thanks for your attention!