Capítulo 1

Los Números Reales

Introducción del Capítulo

Existe tres manera de construir los numeros reales, una de ellas necesita primero construir los naturales, después los enteros y los racionales ambos se construyen con una relación de equivalencia en el producto cartesiana del anterior. Finalmente se construyen el conjunto de las sucesiones en los racionales para dar paso bajo una relación de equivalencia al conjunto de los numeros reales que satisface las propiedades que a continuación presentaremos

La anterior construction anterior demanda un tiempo que no se dispone para la exposición de este texto por ello, a continuación presentaremos los números reales $\mathbb{R}$, de manera axiomática, esto es, aceptaremos que existe un conjunto, el de los números reales, el cual bajo las operaciones de suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ verifica ciertas propiedades.

1.1 Introducción

Veremos algunas de las propiedades que satisfacen algunos conjuntos notables, de modo de reconocerlas después en el conjunto de los números reales.

Consideremos en primer lugar el conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

llamado conjunto de los **Números Naturales**, este conjunto provisto de la operación producto $(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

1 **Clausura:** Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n \cdot m$ es un único elemento en $\mathbb{N}$.

2 **Asociatividad:** Para todo $n, m, r \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(n \cdot m) \cdot r = n \cdot (m \cdot r).$$

3 **Existencia de neutro:** Existe $e = 1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n.$$

4 **Conmutatividad:** Para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Pero en $\mathbb{N}$ no se verifica la propiedad de **existencia de inverso multiplicativo**, esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$ no existe un elemento $n' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \cdot n' = 1.$$

Si consideramos ahora la operación suma $(+)$ en $\mathbb{N}$, tenemos que esta verifica (1), (2), (3) y (4). Del mismo modo, no cumple la propiedad del inverso aditivo, esto es, dado $n \in \mathbb{N}$ no existe un elemento $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n + m = 0.$$

Consideremos ahora el conjunto de los **Números Enteros**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

este conjunto lo podemos expresar en términos del conjunto anterior, esto es

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^-,$$

$$\mathbb{N}^- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto bajo la suma verifica las siguientes propiedades:

1 **Clausura:** Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $a + b$ es un único elemento en $\mathbb{Z}$.

2 **Asociatividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3 **Existencia de neutro:** Existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbb{Z}$

$$0 + a = a + 0 = a.$$

4 **Existencia de elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $(-a) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

5 **Conmutatividad:**Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a + b = b + a.$$

Ahora bien, si consideramos la operación producto $(\cdot)$ en $\mathbb{Z}$ esta verifica (1),(2),(3) y (5). Sin embargo no se verifica (4) pues en general para $a \in \mathbb{Z}$ no existe $a^{'} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a \cdot a^{'} = 1.$$

El hecho de que $\mathbb{Z}$ con la operación suma $(+)$ satisface las propiedades antes mencionadas se resume diciendo que $\mathbb{Z}$ con la suma es un grupo.

Consideremos

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

el cual recibe el nombre de conjunto de los **Números Racionales.**

Se definen en él las siguientes operaciones:

a Suma

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

b Producto

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Con estas operaciones se tiene que, $\mathbb{Q}$ con $(+)$ y $\mathbb{Q} - \{0\}$ con $(\cdot)$ son grupos, es decir, satisfacen las propiedades de **clausura, asociatividad, existencia de neutro y existencia de inverso**, además se verifica la **conmutatividad**.

Otro conjunto notable es el conjunto de los **Números Irracionales** que usualmente es denotado por $\mathbb{I}$.

Algunos ejemplos de números irracionales son:

$$\pi, \quad e, \quad \sqrt{2}.$$

Observación: El conjunto $\mathbb{I}$ con la operación $(+)$ no satisface la propiedad de clausura, en efecto, consideremos los irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, tenemos que $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, el cual es un número racional ($0 = \frac{0}{1}$ por ejemplo), de esto es evidente que $\mathbb{I}$ no es un grupo.

1.2 Estructura de Grupo

Ahora estableceremos las secuencias de propiedades que permiten generalizar los ejemplos dados en la sección anterior, para ello necesitamos considerar un conjunto no vacío, donde se define la operación binaria, que habitualmente se denota por $+$ y $\cdot$, cuyo significado es dado dos elementos obtengo un único elemento en el mismo conjunto.

Definición 1.2.1 Sea G un conjunto no vacío. Diremos que $*$ es una operación binaria o clausura en G si para todo a, b en G existe un único $a * b$ en G, es decir

$$(\forall a, b \in G)(\exists!\, c \in G)(a * b = c).$$

$\diamondsuit$

Definición 1.2.2 Un **grupo** es un conjunto no vacío G y una operación binaria $*$, tal que para todo a, b y c en G se cumplen los siguientes:

a **Asociatividad:** Para todo a, b, c en G, se cumple

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

En símbolos

$$(\forall a, b, c \in G)(a * (b * c) = (a * b) * c).$$

b **Existencia de elemento neutro:** Existe e elemento neutro de G, tal que para todo a en G, se cumple

$$a * e = a = e * a.$$

En símbolos

$$(\exists\, e \in G)(\forall a \in G)(a * e = a = e * a).$$

c **Existencia de elemento inverso:** Para todo a en G, existe b en G, tal que

$$a * b = e = b * a.$$

En símbolos

$$(\forall a \in G)(\exists\, b \in G)(a * b = e = b * a).$$

En adelante diremos que $(G, *)$ es un grupo, para indicar que G con la operación $*$ es un grupo.

d Diremos que G es un **grupo abeliano** o conmutativo, si y sólo si $(G, *)$ es un grupo y satisface la propiedad de **conmutatividad**, esto es:

$$(\forall a, b \in G)(a * b = b * a).$$

$\Diamond$

Proposición 1.2.3 *Sea G un grupo entonces*

a El elemento neutro $e \in G$ es único.

b El inverso de un elemento es único.

Ejemplo 1.2.4 Los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ con la suma habitual de números son grupos abelianos. Con la multiplicación usual el conjunto $\mathbb{Q} - \{0\}$ es también un grupo abeliano. $\square$

Ejemplo 1.2.5 Sea X un conjunto no vacío y definamos

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{Q}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{Q} \mid f \text{ es una función}\}$$

el conjunto de todas las funciones de X en $\mathbb{Q}$. "La definición del concepto **función** será visto con detalle en el capítulo siguiente", y la operación suma $(+)$ definida por:

$$\begin{array}{rcrcl} f + g & : & X & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & x & \longmapsto & (f+g)(x) := f(x) + g(x) \end{array}$$

entonces $\mathcal{F}(X, \mathbb{Q})$ es un grupo. La demostración sera vista en el capítulo de funciones $\square$

1.3 Números Reales $\mathbb{R}$

En esta sección, daremos los axiomas que define la estructura aditiva y multiplicativa de los Número Reales, y partir de ellas la definición de potencia multiplicativa. Colocando en relieve las propiedades que nos permite resolver los problemas lineales en los Números Reales.

1.3.1 Axiomas de $\mathbb{R}$ como cuerpo

Existe un conjunto que denotaremos por $\mathbb{R}$ que es no vacío, cuyos elementos serán llamados **números reales**, en el cual están definidas las operaciones binarias suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, que satisfacen las siguientes propiedades o axiomas

Axioma 1.3.1 $0, 1 \in \mathbb{R},\ 0 \neq 1.$

Axioma 1.3.2 $(\mathbb{R}, +)$ *es un grupo abeliano.*

Axioma 1.3.3 $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano.*

Axioma 1.3.4 *Distributividad:*

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c).$$

Ya que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o $\mathbb{R}$ satisface estos axiomas o propiedades con las operaciones binarias dadas, se dice que $\mathbb{R}$ es un **cuerpo**.

Notación: Si no hay peligro de confusión, en adelante anotaremos sólo "ab", para referirnos al producto "$a \cdot b$", con $a, b \in \mathbb{R}$.

Observación: La propiedad Distributiva, también se le denomina **Factorización**, en los casos cuando se usa de derecha a izquierda, para ello ambos sumando deben tener un factor en común.

Proposición 1.3.5 *En $\mathbb{R}$ tenemos que:*

a El neutro aditivo es un número real único.

b El neutro multiplicativo es un número real único.

c El inverso aditivo de un número real es único.

d El inverso multiplicativo de un número real no nulo es único.

Demostración. Supongamos que 0 y $0'$ son neutros aditivos, luego $0 + 0' = 0$, ya que 0 es el neutro, del mismo modo $0 + 0' = 0'$, y además la suma es única, luego

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

Ahora supongamos que dado $a \in \mathbb{R}$, los números $b,\ b'$ son los inversos, luego $a + b' = 0$ y $b + a = 0$, de la propiedad asociatividad tenemos

$$\begin{array}{rcl} b + (a + b') & = & (b + a) + b' \\ b + 0 & = & 0 + b' \\ b & = & b' \end{array}$$

Las otras proposiciones se demuestran de manera similar ■

Notación: $-a$ denota el inverso aditivo de a para todo $a \in \mathbb{R}$ y b^{-1} denota el inverso multiplicativo de b, con $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Observación: Un técnica de demostración bastante utilizada, es llamada **método del absurdo**. Este método es muy útil para demostrar que proposiciones del tipo $p \Rightarrow q$ son verdaderas. Notemos las siguientes equivalencias

$$\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}.$$

El propósito es suponer que la proposición $p \wedge \overline{q}$ es verdadera, a partir de ella y con pasos deductivos, llegar a una contradicción, esto significa que la proposición $p \wedge \overline{q}$ debe ser falsa y por lo tanto, su negación $\overline{p \wedge \overline{q}}$ es verdadera, de este modo se tiene que $p \Rightarrow q$ es verdadero.
Ejemplo 1.3.6 Dada $m \in \mathbb{Z}$, demostrar que se cumple
Si m^2 es par, entonces m es par. □

Demostración. La proposición es una implicación, donde $p : m^2$ par y $q : m$ impar. Procedamos por absurdo.

Supongamos $p : m^2$ par y $\overline{q} : m$ impar son verdaderas. Como m es impar entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m = 2k + 1$$

de esto tenemos que

$$\begin{aligned} m^2 &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

luego $m^2 = 2k' + 1$, con $k' = 2k^2 + 2k$, $k' \in \mathbb{Z}$ de donde obtenemos que m^2 es un número impar, lo que contradice nuestro supuesto de que m^2 es par, así

$$m^2 \text{ par } \Rightarrow m \text{ par.}$$ ■

Proposición 1.3.7 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

a $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

b $-(-a) = a$.

c $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \quad a \neq 0, b \neq 0$.

d $(a^{-1})^{-1} = a$.

e $a \cdot 0 = 0$.

f $-(ab) = (-a)b = a(-b)$.

g $(-a)(-b) = ab$.

h $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$.

Demostración.

a Sean a y b números reales, entonces también lo es $a+b$ y como $(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano, entonces existe $-(a+b)$ inverso aditivo de $a+b$ por lo tanto

$$(a+b)+(-(a+b))=0.$$

Por otra parte, también existen $-a$ y $-b$ tales que:

$$\begin{aligned}(a+b)+(-a)+(-b) &= (a+(-a))+(b+(-b))\\ &= 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

de esta última igualdad podemos concluir que $(-a)+(-b)$ es también inverso de $a+b$ y luego por unicidad del inverso tenemos que

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

b Como $(-a)$ es un número real y $(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano, entonces existe $-(-a)$ inverso aditivo de $(-a)$ tal que

$$(-a)+(-(-a))=0.$$

Por otro lado

$$(-a)+a=0,$$

de estas igualdades obtenemos que $-(-a)$ y a son inversos de $(-a)$, luego por unicidad del inverso se tiene que

$$-(-a)=a.$$

c Análoga a (a), cambiando de notación aditiva a notación multiplicativa.

d Análoga a (b), cambiando de notación aditiva a notación multiplicativa.

e Como 0 es neutro aditivo se tiene que:

$$0=0+0,$$

entonces por distributividad tenemos

$$a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$$

luego,

$$a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0.$$

Ahora, sumando a ambos lados de la igualdad anterior el inverso aditivo de $a\cdot 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}a\cdot 0+(-(a\cdot 0)) &= a\cdot 0+a\cdot 0+(-(a\cdot 0))\\ 0 &= a\cdot 0+(a\cdot 0+(-(a\cdot 0)))\\ 0 &= a\cdot 0+0\\ 0 &= a\cdot 0\end{aligned}$$

así,

$$a\cdot 0=0.$$

f Es claro que

$$ab + (-(ab)) = 0.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= (a + (-a))b \\ &= 0 \cdot b \\ &= 0 \quad \text{(por item anterior)} \end{aligned}$$

Tenemos entonces que tanto $(-a)b$ como $-(ab)$ son inversos de ab, luego por unicidad del inverso se tiene que

$$-(ab) = (-a)b$$

Además, por conmutatividad en la anterior igualdad, se tiene

$$\begin{aligned} -(ab) &= -(ba) \\ &= (-b)a \\ &= a(-b) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(-a)b = -(ab) = a(-b).$$

g Notemos que

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -(a(-b)) \quad \text{(usando (f))} \\ &= -(-(ab)) \quad \text{(usando (f))} \\ &= ab \quad \text{(usando (b))} \end{aligned}$$

luego,

$$(-a)(-b) = ab.$$

h ($\Rightarrow$) Observemos que

$$(ab = 0) \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

es una proposición del tipo $p \Rightarrow (q \vee r)$, la cual es equivalente a $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r$, que es lo que usaremos para probar esta parte de la demostración.

Supongamos entonces $a \neq 0$, luego existe a^{-1} tal que

$$\begin{aligned} ab = 0 \;\Rightarrow\; a^{-1}ab &= a^{-1}0 \\ \Rightarrow\; 1 \cdot b &= 0 \\ \Rightarrow\; b &= 0. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Claramente si $a = 0 \vee b = 0$ se tiene que $ab = 0$.

Concluyendo así la demostración.

■

Notación: También debemos tener presente

$$a \cdot b^{-1} = ab^{-1} = \frac{a}{b} = a : b$$

Con la notación anterior, y las propiedades demostrada tenemos

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \qquad \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\left(\frac{-a}{b}\right)$$

Ejemplo 1.3.8 Reemplazar $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{1}{3}$ en

$$x = \frac{ab - a}{a + 1}$$

$\square$

Solución.

$$x = \frac{ab-a}{a+1} = \frac{\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2}+1} = \frac{\frac{-1}{6} - \frac{-1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-1+3}{6}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

1.3.2 Potencias Enteras

Definición 1.3.9 Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define la potencia real de base a y exponente n por:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{veces}}$$

Más precisamente, sea $a \in \mathbb{R}$, se define por recurrencia

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Además para el caso $a \neq 0$, se define

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= (a^{-1})^n = \frac{1}{(a)^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{n-veces}}} \end{aligned}$$

$\lozenge$

Teorema 1.3.10 *Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces:*

a $a^{m+n} = a^m a^n$.

b $a^n b^n = (ab)^n$.

c $(a^n)^m = a^{nm}$.

d $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

e $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Demostración. Probaremos sólo (a) quedando las demás propiedades como ejercicio. Procederemos por inducción como sigue.

Sea $p(n) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n); \quad n \in \mathbb{N}_0$

$$p(0) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+0} = a^m a^0)$$

lo cual es verdadero por definición de potencia.

Supongamos $p(n)$ verdadero y demostremos que $p(n+1)$ es verdadero.

$$p(n+1) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n+1} = a^m a^{n+1})$$

$$\begin{array}{rcll} a^{m+n+1} & = & a^{m+n}a & \text{(definición de potencia)} \\ & = & (a^m a^n)a & \text{(hipótesis de inducción)} \\ & = & a^m(a^n a) & \text{(asociatividad)} \\ & = & a^m a^{n+1} & \text{(definición de potencia)} \end{array}$$

tenemos entonces que

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n)$$

es verdadero por teorema de inducción.

Sea $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}_0$, luego

$$\begin{array}{rcl} a^{m+n} & = & a^{m-(-n)} \\ & = & a^{-(-m+(-n))} \\ & = & (a^{-1})^{-m+(-n)} \\ & = & (a^{-1})^{-m}(a^{-1})^{-n} \\ & = & a^m a^n \end{array}$$

de este modo podemos concluir que

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n). \qquad \blacksquare$$

Observación: Las tres primeras propiedades antes mencionadas son válidas para el caso $a = 0$ o $b = 0$, siempre que las expresiones que las definen tengan sentido en $\mathbb{R}$, es decir, que $n, m \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo 1.3.11 Simplificar completamente, para los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ donde estén bien definida la siguiente expresión:

$$X = \left(\frac{a^{-3}b}{a^2b^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{a^2b}\right)^{-3}.$$

$\square$

Solución.

$$\begin{array}{rcl} X & = & \left(\frac{a^{-3}b}{a^2b^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{a^2b}\right)^{-3} \\ & = & \left(\dfrac{\frac{b}{a^3}}{\frac{a^2}{b^4}}\right)^{-2} : \left(\dfrac{\frac{1}{a^2b}}{a^2b}\right)^{-3} \\ & = & \left(\frac{b^5}{a^5}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{(a^2b)^2}\right)^{-3} \\ & = & \left(\frac{a^5}{b^5}\right)^{2} : (a^2b)^6 \\ & = & \frac{a^{10}}{b^{10}} : a^{12}b^6 = \frac{a^{10}}{a^{12}b^{16}} = \frac{1}{a^2b^{16}}. \end{array}$$

De este modo se tiene que

$$X = \frac{1}{a^2b^{16}}.$$

1.3.3 Productos Notables

Los productos notables, corresponden a una factorización de una expresión algebraica, que son de uso habitualmente en los diferentes problemas desarrollados en este capítulo, la demostración de estas propiedades, se obtiene de las propiedades de potencias y los axiomas de los números reales. Los de uso más frecuente se listas a continuación

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

a $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

b $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

c $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

d $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

e $(\forall m \in \mathbb{Z}^+)(\, a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})\,)$.

Ejemplo 1.3.12 Simplificar completamente, para los valores de $a \in \mathbb{R}$ donde estén bien definida la siguiente expresión:

$$X = \frac{\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a} - \dfrac{a}{1-a}}.$$

□

Solución. Sea $a \in \mathbb{R}$, tal que la expresión está bien definida, luego podemos simplificar.

$$\begin{aligned} X &= \frac{\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a} - \dfrac{a}{1-a}} \\ &= \frac{\dfrac{a^2 + (1-a)^2}{a(1-a)}}{\dfrac{(1-a)^2 - a^2}{a(1-a)}} \\ &= \frac{a^2 + (1-a)^2}{a(1-a)} \frac{a(1-a)}{(1-a)^2 - a^2} \\ &= \frac{a^2 + (1-a)^2}{(1-a)^2 - a^2} \\ &= \frac{2a^2 - 2a + 1}{1 - 2a}. \end{aligned}$$

1.3.4 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición 1.3.13 Una ecuación lineal en la variable x, es una expresión del tipo

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$\Diamond$

Encontrar el conjunto solución para una ecuación de este tipo, corresponde a determinar $x \in \mathbb{R}$ de modo que la igualdad en anterior se verifique.

Determinemos ahora la solución de esta ecuación

$$\begin{array}{rrcl} & ax+b & = & 0 \\ \Leftrightarrow & ax & = & -b \\ \Leftrightarrow & x & = & -\dfrac{b}{a}. \end{array}$$

Luego el conjunto solución de la ecuación lineal $ax + b = 0$ es

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

Ejemplo 1.3.14 Determinar la solución de la ecuación

$$\frac{1}{4}x - 3 = \frac{5}{4} + 7x.$$

$\square$

Solución 1. Primero debemos llevar esta ecuación a la forma dada anteriormente, obteniendo

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{1}{4}x-3 & = & \frac{5}{4}+7x \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4}x-7x & = & \frac{5}{4}+3 \\ \Leftrightarrow & \frac{1-28}{4}x & = & \frac{5+12}{3} \\ \Leftrightarrow & -\frac{27}{4}x & = & \frac{17}{3} \\ \Leftrightarrow & x & = & -\frac{68}{81} \end{array}$$

ahora despejando tenemos que la solución esta dada por

$$x = -\frac{68}{81}.$$

o bien el conjunto solución es

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{68}{81} \right\}$$

Ejemplo 1.3.15 Determinar la solución de la ecuación

$$4x - 3\pi = 5\sqrt{2} - 8x.$$

$\square$

Solución 2. Primero debemos llevar esta ecuación a la forma dada anteriormente, obteniendo

$$\begin{array}{rrcl} & 4x-3\pi & = & 5\sqrt{2}-8x \\ \Leftrightarrow & 4x+8x & = & 3\pi+5\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & 12x & = & 3\pi+5\sqrt{2} \end{array}$$

ahora despejando tenemos que la solución esta dada por

$$x=\frac{3\pi+5\sqrt{2}}{12}.$$

o bien el conjunto solución es

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{3\pi+5\sqrt{2}}{12}\right\}$$

Observación: Por el momento estamos usando el resultado, que nos entrega la existencia de la raíz cuadrada de un número no negativo, en particular $\sqrt{2}$.

Ejemplo 1.3.16 Determine el valor de $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ de modo que la solución de la ecuación lineal

$$7\lambda x+3\lambda=4$$

sea igual a $-\frac{3}{5}$. □

Solución 3. Primero determinemos la solución del ejemplo, esto es

$$\begin{array}{rrcl} & 7\lambda x+3\lambda & = & 4 \\ \Leftrightarrow & 7\lambda x & = & 4-3\lambda \end{array}$$

como $\lambda \neq 0$ luego, la solución de la ecuación es:

$$x=\frac{4-3\lambda}{7\lambda}$$

Pero ella debe cumplir con:

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{4-3\lambda}{7\lambda} & = & -\frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & 20-15\lambda & = & -21\lambda \\ \Leftrightarrow & 6\lambda & = & -20 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\lambda=-\frac{10}{3}.$$

Definición 1.3.17 Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right|$$

donde a_{ij}, b_i y $x_j \in \mathbb{R}, \quad \forall i=1,2,\ldots,m, \forall j=1,2,\ldots,n.$ ◊

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, consiste en determinar todas las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisface todas las ecuaciones.

Observación: En general el proceso para resolver un sistema de ecuaciones lineales, es recursivo, y consiste en escoger una variable en una ecuación y eliminar esta variable en las otras ecuaciones lineales, amplificando y restando cada ecuación de modo que el coeficiente sea cero de la variable escogida, obteniendo un nuevo sistema omitiendo la ecuación con la cual se comenzó.

Se continua de la misma manera, es decir, se escoge una variable de alguna ecuación y se eliminar la variable, hasta obtener un sistema que cada ecuación tiene una variable que no aparece en las otras y la últimas una igualdad de números o contener una variable. De acuerdo a ello se tiene que el conjunto solución es del siguiente modo

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales cumple una de las tres posibilidades siguientes:

a El conjunto solución tiene sólo un elemento.

b El conjunto solución tiene infinitos elementos.

c El conjunto solución es vacío.

Ejemplo 1.3.18 Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} x - 5y & = & -3 \\ 3x - y & = & 8 \end{array}\right|$$

□

Solución 4. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} x - 5y & = & -3 \\ 3x - y & = & 8 \end{array}\right|$$

Si multiplicamos por -5 la segunda ecuación y la sumamos con la primera se obtiene la ecuación

$$-14x = -43$$

de donde $x = \dfrac{43}{14}$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos $y = \dfrac{17}{14}$.

Luego el sistema tiene única solución, y esta es

$$x = \frac{43}{14},\ y = \frac{17}{14}$$

o de manera equivalente

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{43}{14}, \frac{17}{14} \right) \right\}.$$

Ejemplo 1.3.19 Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x-y+z &=& 0 \end{array}\right|$$

$\square$

Solución 5. Multiplicando la segunda ecuación por -1 y sumándola con la primera obtenemos la ecuación

$$2y = 1$$

de donde $y = \dfrac{1}{2}$.

Luego reemplazando obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} x+z &=& \frac{1}{2} \\ x+z &=& \frac{1}{2} \end{array}\right|$$

Como ambas ecuaciones son iguales, se tiene que $x = \dfrac{1}{2} - z$, donde $z \in \mathbb{R}$ es arbitrario, así el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones y el conjunto solución lo podemos expresar del siguiente modo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} &=& \left\{ \left(\dfrac{1}{2} - z,\ \dfrac{1}{2},\ z \right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \\ &=& \left\{ (x,\ y,\ z) \mid (\exists t \in \mathbb{R})(x = \dfrac{1}{2} - t \wedge y = \dfrac{1}{2} \wedge z = t) \right\} \end{array}$$

Ejemplo 1.3.20 Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} -2x+y+z &=& 0 \\ x-2y+z &=& 0 \\ x+y-2z &=& -2 \end{array}\right|$$

$\square$

Solución 6. Dado el sistema ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} -2x+y+z &=& 0 \\ x-2y+z &=& 0 \\ x+y-2z &=& -2 \end{array}\right|$$

De la primera ecuación escogemos la variable y y eliminemos de las otras reemplazando en el sistema de ecuación se tiene que

$$\left.\begin{array}{rcr} -3x+3z &=& 0 \\ 3x-3z &=& -2 \end{array}\right|$$

Simplificando, obtenemos $x - z = 0$, eliminando en la tercer ecuación obtenemos que $0 = -2$, lo cual es claramente una contradicción, en consecuencia el sistema tiene solución vacía.

1.3.5 Problemas de Planteo

Comenzaremos recordando algunos conceptos que serán de gran utilidad para la resolución de problemas:

a Se dice que y es el q por ciento de x, si y sólo si

$$y = \frac{q}{100}x.$$

b La razón entre los números $a : b$ es el cociente

$$\frac{a}{b}.$$

Se llama **proporción** a una igualdad entre dos razones, por ejemplo

$$a : b = c : d$$

la cual se lee a es a b como c es a d.

a Se dice que a es **directamente proporcional** a b si y sólo si existe una constante k tal que

$$a = kb.$$

b Se dice que a es **inversamente proporcional** a b si y sólo si existe una constante k tal que

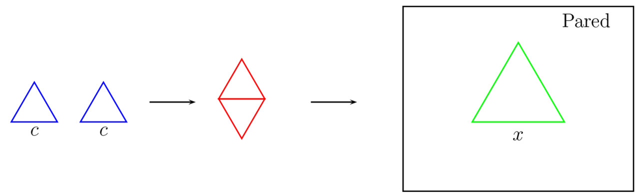
$$a = k\frac{1}{b}.$$

La constante k (en ambos casos) es llamada factor de proporcionalidad.

c Sea T un triángulo equilátero de lado a.

$$\begin{array}{lcccl} \text{Altura de} & : & h & = & \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \\ \text{área de} & : & A & = & \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}. \end{array}$$

Ejemplo 1.3.21 Para concluir un trabajo, un albañil corta dos pedazos de cerámica siendo cada uno un triángulo equilátero de base c. Al unir estos pedazos por uno de sus lados, se forma un rombo el cual al ser pegado en la pared no alcanza a cubrir la superficie deseada por el maestro, quedando por rellenar un espacio con una cerámica cuya forma debe ser también un triángulo equilátero, pero de área igual al 60% del rombo. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de esta última cerámica para que se tenga el trabajo terminado?.



□

Solución 1. Sea x la longitud del lado de la cerámica que buscamos.

Se tiene que el área del rombo es dos veces el área de los triángulos equiláteros de lado c, esto es

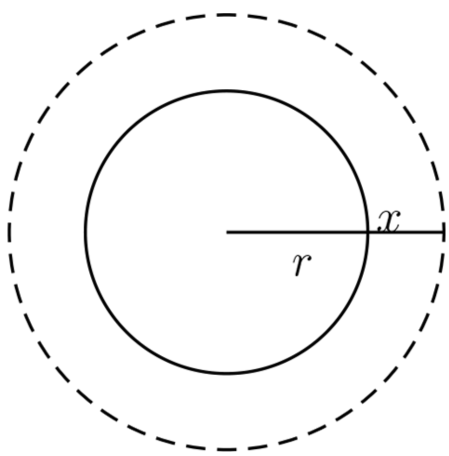
$$\text{Área del rombo} = 2\left(\frac{c^2\sqrt{3}}{4}\right),$$

pero el área del triángulo de lado x es el 60% del área del rombo, o sea

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{60}{100}\frac{c^2\sqrt{3}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = \frac{6}{5}c^2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \sqrt{\frac{6}{5}}\,c.$$

Así la longitud del lado es $x = c\sqrt{\frac{6}{5}}$.

Ejemplo 1.3.22 En que tanto por ciento debe aumentarse el radio de una circunferencia para que su área aumente en un 30%.



□

Solución 2. Sean $A = \pi r^2$ el área de la circunferencia de radio r y x la longitud del radio que debemos aumentar para que su área aumente en un 30%.

Debemos ver que tanto por ciento es x de r.

Tenemos que el área de la circunferencia más el 30% de la misma está dada por

$$1,3\pi r^2 = \pi(r+x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1.3}r = r + x \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{1,3}-1\right) r \approx 0.14r$$

De aquí tenemos que x es aproximadamente el 14% de r, con lo cual concluimos que el radio debe aumentar en un $100(\sqrt{1,3}-1)\%$ para obtener un 30% más de área.

Ejemplo 1.3.23 Dos personas A y B se encuentran realizando un trabajo. Si A realiza el trabajo en 3 horas y B realiza el trabajo en 5 horas. ¿Cuánto tiempo demoraran en hacer el trabajo juntos?. $\square$

Solución 3. Sean T el trabajo y x el tiempo (en horas) que demorarán en hacer el trabajo los dos obreros.

Como A demora 3 horas en realizar el trabajo, tenemos que en una hora A realiza $\frac{T}{3}$ del trabajo, razonando del mismo modo se tiene que B realiza $\frac{T}{5}$ del trabajo en una hora.

De acuerdo a esto podemos concluir que en una hora ambos realizan $\frac{T}{3} + \frac{T}{5} = \frac{8T}{15}$ del trabajo.

Luego tenemos que el trabajo total esta dado por la siguiente ecuación

$$\frac{8T}{15}x = T \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}$$

simplificando obtenemos que $x = 1.875$ horas. Por lo tanto tenemos que los obreros demoran 1.875 horas en realizar el trabajo juntos.

Ejemplo 1.3.24 Un número entero positivo de dos cifras excede en 18 a seis veces la suma de sus cifras. Si la cifra de las decenas excede en 5 a la de las unidades, ¿cuál es el número?. $\square$

Solución 4. Sea x la cifra de las unidades e y la cifra de las decenas, en primer lugar tenemos que el número buscado es [1] $N = 10y + x$, ahora bien de acuerdo a la información del problema tenemos que

$$10y + x = 6(x + y) + 18 \text{ y que } y = x + 5.$$

En consecuencia tenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} -5x + 4y & = & 18 \\ x - y & = & -5 \end{array}\right|$$

multiplicando la segunda ecuación por 4 y sumándola con la primera obtenemos que $x = 2$ y con esto que $y = 7$.

Por lo tanto el número buscado es $N = 7 \cdot 10 + 2 = 72$.

Ejemplo 1.3.25 Una pareja de estudiantes universitarios debe resolver un determinado problema. Después que el primero de ellos a trabajado durante 7 horas en la resolución del problema y el segundo a trabajado durante 4 horas en la solución del mismo, juntos han completado $\frac{5}{9}$ de la solución total. Si ellos siguieran trabajando juntos durante 4 horas más, solo les quedaría por resolver $\frac{1}{18}$ del problema. ¿Cuánto tardaría cada uno en resolver completamente el problema?. $\square$

Solución 5. Sea s la solución del problema. Denotemos por x la cantidad de horas que tardaría el primer estudiante en resolver el problema y denotemos por "y" la cantidad de

[1] Si un número N tiene n cifras $N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}$ ordenados de izquierda a derecha entonces $N = N_{n-1}10^{n-1} + \cdots + N_1 10 + N_0$

horas que tardaría el segundo estudiante en dar solución al problema. Entonces en una hora el primer estudiante realiza $\frac{s}{x}$ de la solución completa mientras que el segundo realiza en el mismo tiempo $\frac{s}{y}$ de la solución completa.

De acuerdo a la información del problema tenemos que

$$7\frac{s}{x} + 4\frac{s}{y} = \frac{5s}{9}.$$

Ahora bien como ellos trabajarán juntos durante 4 horas, realizarán $\frac{4s}{x} + \frac{4s}{y}$ de la solución, que es igual a

$$s - \left(\frac{5s}{9} + \frac{s}{18}\right) = \frac{7s}{18}$$

así se tiene que

$$\frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} = \frac{7s}{18}$$

luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{7s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{5s}{9} \\ \frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{7s}{18} \end{array}\right|$$

simplificando obtenemos,

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} & = & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} & = & \frac{7}{18} \end{array}\right|$$

resolviendo tenemos que $x = 18$ e $y = 24$. Por lo tanto el primer estudiante tarda 18 horas en dar solución al problema, mientras el segundo tarda 24 horas en realizar la misma tarea.**Observación:** Recuerde que en este tipo de problema se asume que, las personas trabajan todo el tiempo igual "proporcional", y que el trabajo todo el tiempo es igual "proporcional".

1.4 $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado

La construcción de $\mathbb{R}$ como cuerpo ordenado, se puede caracterizar con una relación de orden total o a través del cono positivo, en esta presentación hemos escogido la segunda es por ello definimos los siguiente axiomas.

1.4.1 Axiomas de Orden

Existe un subconjunto de $\mathbb{R} - \{0\}$, el cual sera denotado por $\mathbb{R}^+$. Los elementos de este subconjunto se llaman números reales positivos y cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 1.4.1 *La suma es cerrada, esto es si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$.*

Axioma 1.4.2 *El producto es cerrado, esto es si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $ab \in \mathbb{R}^+$.*

Axioma 1.4.3 *Ley de Tricotomía.*
Si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$a \in \mathbb{R}^+ \ \veebar \ a = 0 \ \veebar \ -a \in \mathbb{R}^+.$$

Observación: Los axiomas recién dados nos permiten ordenar totalmente los números reales y aún más graficar este orden en una recta, llamada recta real.

Proposición 1.4.4 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces se verifican:*

i *Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces $a^2 \in \mathbb{R}^+$, en particular $1 \in \mathbb{R}^+$.*

ii *Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$.*

iii *Si $a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge b - c \in \mathbb{R}^+$ entonces $a - c \in \mathbb{R}^+$.*

iv *$b - a \in \mathbb{R}^+$ si y sólo si $(b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+$.*

v *Si $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}^+$ entonces $bc - ac \in \mathbb{R}^+$.*

vi *Si $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge -c \in \mathbb{R}^+$ entonces $ac - bc \in \mathbb{R}^+$.*

Demostración.

i Tenemos que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces por axioma

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces por axioma Axioma 1.4.2, $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$, es decir

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Si $-a \in \mathbb{R}^+$ entonces por axioma Axioma 1.4.1, $(-a)(-a) \in \mathbb{R}^+$ pero por proposición Proposición 1.3.7 parte (7), $(-a)(-a) = (-a)^2 = a^2$, luego $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

Así

$$a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+.$$

ii Procedamos por absurdo.

Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y supongamos que $a^{-1} \notin \mathbb{R}^+$, entonces

$$a^{-1} = 0 \quad \veebar \quad -(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+.$$

Supongamos $a^{-1} = 0$ entonces $aa^{-1} = 0$, pero $aa^{-1} = 1$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $a^{-1} \neq 0$.

Supongamos que $-(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+$. Como $a \in \mathbb{R}^+$ tenemos por axioma Axioma 1.4.2 que $-(a^{-1})a = -1 \in \mathbb{R}^+$, lo cual es una contradicción.

Luego tenemos que

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+.$$

iii Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{array}{rl} & a-b \in \mathbb{R}^{+} \wedge b-c \in \mathbb{R}^{+} \\ \Rightarrow & (a-b)+(b-c) \in \mathbb{R}^{+} \\ \Rightarrow & a+(-b+b)-c \in \mathbb{R}^{+} \\ \Rightarrow & a+0-c \in \mathbb{R}^{+} \\ \Rightarrow & a-c \in \mathbb{R}^{+}. \end{array}$$

iv Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{array}{rl} & b-a \in \mathbb{R}^{+} \\ \Leftrightarrow & b-a+0 \in \mathbb{R}^{+} \\ \Leftrightarrow & b-a+c-c \in \mathbb{R}^{+} \\ \Leftrightarrow & (b+c)+(-a-c) \in \mathbb{R}^{+} \\ \Leftrightarrow & (b+c)+(a+c) \in \mathbb{R}^{+}. \end{array}$$

v Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{array}{rl} & b-a \in \mathbb{R}^{+} \wedge c \in \mathbb{R}^{+} \\ \Rightarrow & (b-a)c \in \mathbb{R}^{+} \\ \Rightarrow & bc-ac \in \mathbb{R}^{+}. \end{array}$$

vi Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{array}{rl} & b-a \in \mathbb{R}^{+} \wedge -c \in \mathbb{R}^{+} \\ \Rightarrow & (b-a)(-c) \in \mathbb{R}^{+} \\ \Rightarrow & (-bc)-(-ac) \in \mathbb{R}^{+} \\ \Rightarrow & ac-bc \in \mathbb{R}^{+}. \end{array}$$

■

Definición 1.4.5 Se define el conjunto de los números reales negativos como

$$\mathbb{R}^{-}=\{a \in \mathbb{R} \mid -a \in \mathbb{R}^{+}\}.$$

◊

Observación: Notemos que por el axioma 3 podemos descomponer $\mathbb{R}$ en la unión disjunta de $\mathbb{R}^{+}, \{0\}$ y $\mathbb{R}^{-}$, esto es

$$\mathbb{R}=\mathbb{R}^{+} \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} \mathbb{R}^{-}.$$

Definición 1.4.6 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que a es **mayor** que b ó b es menor que a si y sólo si

$$a-b \in \mathbb{R}^{+}$$

este hecho se anota como

$$a>b \quad \text{o bien} \quad b<a.$$

Diremos que a es **mayor o igual** que b o bien b es menor o igual que a si y sólo si a es mayor que b o a es igual a b, es decir

$$a>b \ \text{ o } \ a=b,$$

de modo abreviado anotaremos este hecho como sigue

$$a \geq b \ \text{ o bien } \ b \leq a.$$

$\diamondsuit$

Observación: De acuerdo a las notaciones precedentes, tenemos:

i $a \in \mathbb{R}^+$ si y sólo si $a > 0$.

ii $a \in \mathbb{R}^-$ si y sólo si $a < 0$.

Corolario 1.4.7 *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$

i Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ *entonces* $a^2 > 0$.

ii Si $a > 0$ *entonces* $a^{-1} > 0$.

iii Si $a > b \wedge b > c$ *entonces* $a > c$.

iv $b > a$ *si y sólo si* $b + c > a + c$.

v Si $b > a \wedge c > 0$ *entonces* $bc > ac$.

vi Si $b > a \wedge c < 0$ *entonces* $bc < ac$.

Notación: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, por comodidad se utilizara la siguiente notación $a \leq b \leq c$ para denotar $a \leq b \wedge b \leq c$.

Teorema 1.4.8 [Tricotomía]. *Para todo* $a, b \in \mathbb{R}$*, se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones*

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Demostración. Directa del axioma 3 y que $a - b \in \mathbb{R}$. ■

Observación: La relación $a \leq b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ es una **relación de orden total.** Pues se verifican que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

a Reflexividad
$$a \leq a.$$

b Antisimetría
$$(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b.$$

c Transitividad
$$(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c.$$

d Tricotomía
$$a < b \ \veebar \ a = b \ \veebar \ b < a.$$

Proposición 1.4.9 *Sean* $p, q \in \mathbb{Q}$ *con* $p < q$*, entonces existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $p < r < q$.

Demostración. Para la demostración debemos tener presente el corolario Corolario 1.4.7

$$\begin{aligned} p < q \quad &\Rightarrow \quad p + p < p + q \qquad \text{por corolario parte } iv \\ &\Rightarrow \quad 2p < p + q \\ &\Rightarrow \quad p < \frac{p+q}{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{array}{rcll} p < q & \Rightarrow & p + q < q + q & \text{por corolario parte } iv \\ & \Rightarrow & p + q < 2q & \\ & \Rightarrow & \dfrac{p+q}{2} < q. & \end{array}$$

Tenemos entonces que existe $r = \dfrac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$. ■

1.4.2 Raíz n-ésima

La existencia de la raíz n-ésima, se demuestra usando el axioma del supremo, que aún no hemos presentado, por ello asumiremos los siguientes resultados.

Proposición 1.4.10 *Dado a un número real positivo y un número natural n, existe un único b real positivo tal que*

$$a = b^n$$

en símbolos

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! b \in \mathbb{R}^+)(b^n = a).$$

Definición 1.4.11 El número b de la propiedad anterior se llama **raíz n-ésima** de a y se denota por

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \vee \quad b = a^{\frac{1}{n}}.$$

Más aún, si $m \in \mathbb{Z}$ se define

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m \text{ con } a > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N},$$

ahora bien si n resulta ser un número impar, podemos extender esta definición a bases negativas, esto es

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \quad a > 0.$$

◊

Observación: Si $a \geq 0$ podemos asegurar que

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

están bien definida y tiene sentido todas ellas

Proposición 1.4.12 *Si $a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ entonces*

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}.$$

Este hecho nos dice que las propiedades de potencia dadas en el Teorema se preservan para exponentes racionales.

Proposición 1.4.13 *Si n es un número natural par y $a < 0$, entonces no existe un número real b tal que*

$$a = b^n.$$

Demostración. Supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$a = b^n,$$

como n es par se tiene que $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ luego

$$a = b^{2k} = (b^k)^2.$$

Ahora si $b = 0$ entonces $a = 0$ y si $b \neq 0$, entonces $(b^k)^2 > 0$, es decir $a > 0$. Lo cual en ambos casos es una contradicción pues $a < 0$. ■

Proposición 1.4.14 *Si n es un número natural impar y $a < 0$, entonces existe un único número real b tal que*

$$a = b^n.$$

Demostración. Como $a < 0$, luego $-a > 0$, por la propiedad Proposición 1.4.10, se tiene que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$-a = b^n,$$

como n es impar se tiene que $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ luego

$$a = -(b^n) = -(b^{2k})b = ((-b)^2)^k(-b) = (-b)^n.$$

El cual debe ser único por la propiedad. ■

Ejemplo 1.4.15 $\sqrt{2}$ es irracional. □

Solución 1. En efecto procedamos por absurdo, es decir supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, esto es

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, de modo tal, que la fracción $\frac{p}{q}$ esta simplificada al máximo, ahora bien

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow \quad p^2 &= 2q^2 \end{aligned}$$

luego tenemos que p^2 es un número par, entonces por (**??**) p es par, es decir $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, luego tenemos que

$$p^2 = 4k^2$$

pero $p^2 = 2q^2$, por lo tanto $2q^2 = 4k^2$ de aquí que $q^2 = 2k^2$, lo cual nos dice que q^2 es un número par y nuevamente por (**??**) tenemos que q es par.

Hemos concluido entonces que p y q son pares lo que contradice el supuesto que la fracción $\frac{p}{q}$ estaba simplificada al máximo, de este modo obtenemos por absurdo que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Ejemplo 1.4.16 Simplificar completamente, para los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ donde estén bien definida la siguiente expresión:

$$X = \frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-b}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}(a+b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2(a^2+b^2)(a+b)^{-\frac{1}{2}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}}.$$

□

Solución 2.

$$\begin{aligned}
X &= \frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-b}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}(a+b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2(a^2+b^2)(a+b)^{-\frac{1}{2}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{(a+b)^3}}{\sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{(a-b)^3}}{\sqrt{a+b}} - \frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{\sqrt{(a+b)^4} + \sqrt{(a-b)^4} - 2a^2 - 2b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2 - 2a^2 - 2b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 - 2a^2 - 2b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} = 0
\end{aligned}$$

En este caso se tiene $X = 0$.

Observación: Racionalizar una fracción , consiste en obtener un expresión equivalente, en la cual el denominador correspondiente, no incluye expresiones con raíces. Para lograr este cometido se recurre a los Productos Notables.

Ejemplo 1.4.17 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

□

Solución 3.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 1.4.18 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

□

Solución 4. Para resolver este problema tenga presente

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Ejemplo 1.4.19 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

□

Solución 5.

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{\sqrt{2}+1}$$

Ejemplo 1.4.20 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$$

$\square$

Solución 6.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}} \\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2}} \\
&= \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.21 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$\square$

Solución 7.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4\cdot 2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

Ejemplo 1.4.22 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$$

$\square$

Solución 8. Para resolver este problema tenga presente

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}^3+1^3} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$$

Ejemplo 1.4.23 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$$

$\square$

Solución 9.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-1^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2(2+\sqrt{6})} \cdot \frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{6})}{2(4-6)} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(\sqrt{6}-2)}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.24 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$$

□

Solución 10.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})(2-\sqrt{2})}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.25 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}$$

□

Solución 11. Para resolver este problema tenga presente

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{8-4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.26 Para los valores de $a=\sqrt{3}$, $b=(-2)^{-1}$, $c=\frac{2}{-3}$.
Determine en forma exacta y racionalizada el valor de

$$A = \frac{1+\frac{a}{bc}}{\frac{1}{b}-\frac{a}{c}}$$

□

Solución 12. Simplifiquemos antes de reemplazar la expresión que la define

$$A = \frac{1+\frac{a}{bc}}{\frac{1}{b}-\frac{a}{c}} = \frac{\frac{bc+a}{bc}}{\frac{c-ba}{bc}} = \frac{bc+a}{c-ba}$$

Ahora reemplacemos los valores conocidos

$$A = \frac{(-2)^{-1}\cdot\frac{2}{-3}+\sqrt{3}}{\frac{2}{-3}-(-2)^{-1}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{-2\cdot -3}+\sqrt{3}}{\frac{2}{-3}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{3}+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}} = \frac{2+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}$$

Finalmente racionalizamos

$$A = \frac{2+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}\cdot\frac{3\sqrt{3}+4}{3\sqrt{3}+4} = \frac{(2+6\sqrt{3})(3\sqrt{3}+4)}{(3\sqrt{3})^2-4^2} = \frac{62+30\sqrt{3}}{11}$$

1.4.3 Ecuación de Segundo Grado

Definición 1.4.27 Se llama ecuación de segundo grado en la variable x a una expresión del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Además, se llama polinomio de segundo grado en la variable x a una expresión del tipo

$$ax^2 + bx + c \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

$\Diamond$

Ahora determinaremos las soluciones de la ecuación de segundo grado, para ello veamos lo siguiente

$$\begin{array}{rrcl} & ax^2 + bx + c & = & 0 \quad / \cdot 4a \\ \Leftrightarrow & 4a^2x^2 + 4abax + 4ac & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 - b^2 + 4ac & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (2ax + b)^2 & = & b^2 - 4ac \end{array}$$

Notemos que estas ecuación tiene solución o raíces en $\mathbb{R}$ propiedad Proposición 1.4.14 si y sólo si

$$b^2 - 4ac \geq 0.$$

y en este caso podemos calcular

$$\begin{array}{rrcl} & 2ax + b & = & \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\ \Leftrightarrow & 2ax & = & -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ \Leftrightarrow & x & = & \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{array}$$

Además note que, en el caso que el discriminante es no negativo, podemos factorizar el polinomio de segundo grado del siguiente modo

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Definición 1.4.28 El discriminante de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ o del polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ corresponde a la expresión

$$\triangle = b^2 - 4ac.$$

$\Diamond$

Teorema 1.4.29 *Considerando la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$o el polinomio $ax^2 + bx + c$, tenemos que:*

a *Si $\triangle > 0$, entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones o raíces distintas en $\mathbb{R}$*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}.$$

b *Si $\triangle = 0$, entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones raíces iguales en*

$\mathbb{R}$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

c *Si $\triangle < 0$, entonces la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene soluciones vacía o no tiene raíces en $\mathbb{R}$.*

Observación: Si denotamos $\mathcal{S}$ al conjunto solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, entonces tenemos que

a Si $\triangle > 0$, $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$.

b Si $\triangle = 0$, $\mathcal{S} = \{x_1\}$.

c Si $\triangle < 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Ejemplo 1.4.30 Determinar las raíces y factoricé el polinomio

$$5x^2 + 7x - 3.$$

□

Solución 1. Como $\triangle = (7)^2 + 60 = 109 > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales y distintas, a saber:

$$x_1 = \frac{-7+\sqrt{109}}{10}, \quad x_2 = \frac{-7+\sqrt{109}}{10}.$$

La factorización esta dada por

$$5x^2 + 7x - 3 = 5\left(x - \frac{-7+\sqrt{109}}{10}\right)\left(x - \frac{-7-\sqrt{109}}{10}\right)$$

Ejemplo 1.4.31 Determinar las raíces y factoricé el polinomio

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3.$$

□

Solución 2. En este caso $\triangle = (2\sqrt{3})^2 - 12 = 0$, luego la ecuación tiene una raíz real (dos raíces iguales)

$$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}.$$

La factorización es la siguiente

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = (x+\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = (x+\sqrt{3})^2$$

Ejemplo 1.4.32 Determinar, si existen las raíces de la ecuación

$$x^2 + x + 1.$$

□

Solución 3. Como $\triangle = -3 < 0$, tenemos que la ecuación no tiene raíces reales y por lo tanto no se puede factorizar en producto de factores lineales.

Ejemplo 1.4.33 Resolver la ecuación

$$\sqrt{x} + x = 12.$$

$\square$

Solución 4. La restricción del problema es $\mathbb{R}_0^+$ y usemos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ es decir $u^2 = x$.

Reemplazando tenemos que

$$u^2 + u - 12 = 0,$$

y su discriminate es $\triangle = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 > 0$, luego tenemos que

$$u = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

es decir

$$u = 3 \ \vee \ u = -4$$

pero volviendo a la variable original, tenemos una sola posibilidad

$$\sqrt{x} = 3$$

y por lo tanto $S = \{9\}$.

Ejemplo 1.4.34 Resolver la ecuación

$$x^2 - x = \frac{9}{x^2 - x}.$$

$\square$

Solución 5. La restricción del problema es $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, luego

$$\begin{aligned} (x^2 - x)^2 &= 9 \\ x^2 - x &= \pm\sqrt{9} \\ x^2 - x \mp 3 &= 0 \end{aligned}$$

Para la primera ecuación $x^2 - x - 3 = 0$, se tiene $\triangle = 13 > 0$. luego la solución es

$$S_1 = \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Para la segunda ecuación $x^2 - x + 3 = 0$, tenemos $\triangle = -11 < 0$. luego la solución es vacía

$$S_2 = \phi.$$

Con lo cual se obtiene que

$$S = S_1 \cup S_2 = S_1 \cup \phi = \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

1.4.4 Sistemas de Ecuaciones no Lineales.

Una herramienta de gran utilidad para la resolución de sistemas no lineales, es la propiedad anteriormente vista que dice, para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = 0 \text{ si y sólo si } x = 0 \vee y = 0$$

de otras manera, la necesidad de factorizar la expresión polinomial o algebraica no olvidado que debe estar igualada a cero.

Ejemplo 1.4.35 Resolver

$$\left.\begin{array}{rcl} (x-y)^2 & = & 9 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right|$$

□

Solución 1. De la primera ecuación $(x-y)^2 = 9$ tenemos los casos

$$x - y = 3 \quad \vee \quad x - y = -3.$$

a Si $x - y = 3$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y & = & 3 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right|$$

de donde $x = \dfrac{5}{2}$ y $y = -\dfrac{1}{2}$.

b Si $x - y = -3$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{rcr} x-y & = & -3 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right|$$

de donde $x = -\dfrac{1}{2}$ y $y = \dfrac{5}{2}$.

Por lo tanto existen dos soluciones para el sistema, estas son

$$(x,y) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

o bien

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right\}.$$

Ejemplo 1.4.36 Resolver

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-1 & = & 2zx \\ 4y & = & 2zy \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right|$$

□

Solución 2. De la segunda ecuación $4y = 2zy$ tenemos que

$$2y(z-2) = 0$$

de donde

$$y = 0 \quad \vee \quad z = 2.$$

a Supongamos $y = 0$, reemplazando en la tercera ecuación $x^2 + y^2 = 1$ obtenemos que

$$x^2 = 1$$

de donde

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -1.$$

luego, si $x = 1$, entonces $z = \frac{1}{2}$ y si $x = -1$, entonces $z = \frac{3}{2}$.

Así tenemos dos soluciones

$$(x, y, z) = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \quad (x, y, z) = \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right).$$

b Supongamos ahora $z = 2$, reemplazando en la primera ecuación $2x - 1 = 2zx$ se tiene que $x = -\frac{1}{2}$.

Luego reemplazando en la tercera ecuación y obtenemos que

$$y^2 - \frac{3}{4} = 0,$$

de donde

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tenemos entonces dos soluciones más

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), \quad (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right).$$

Por lo tanto existen cuatro soluciones para el sistema, estas son:

$$(x, y, z) = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \quad (x, y, z) = \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right)$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), \quad (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right).$$

o bien

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) \right\}.$$

Ejemplo 1.4.37 Resolver

$$\left.\begin{array}{rcl} y + 2z + wyz & = & 0 \\ x + 2z + wxz & = & 0 \\ 2x + 2y + wxy & = & 0 \\ xyz & = & \sqrt{5} \end{array}\right|$$

$\square$

Solución 3. Restando la segunda ecuación a la primera se tiene que

$$y - x + wz(y - x) = 0 \Leftrightarrow (y - x)(1 + wz) = 0$$

de donde

$$y = x \vee \left(w = -\frac{1}{z}, \text{con } z \neq 0\right)$$

a Supongamos $w = -\dfrac{1}{z}$, reemplazando en la primera ecuación tenemos que

$$2z = 0$$

con lo cual $z = 0$, esto es una contradicción pues $z \neq 0$, así el caso $1 + wz = 0$ no se puede dar.

b Supongamos entonces $x = y$, reemplazando en la tercera ecuación obtenemos

$$x(4 + wx) = 0$$

de donde

$$x = 0 \quad \vee \quad w = -\frac{4}{x}, \text{pues } x \neq 0$$

ahora si $x = 0$, lo reemplazamos en la cuarta ecuación obtenemos que $0 = \sqrt{5}$. Lo que claramente es una contradicción.

Ahora si $w = -\dfrac{4}{x}$, lo reemplazamos en la segunda ecuación tenemos que

$$x = 2z.$$

Finalmente sustituyendo $x = y$ y $x = 2z$ en la cuarta ecuación obtenemos que

$$\frac{x^3}{2} = \sqrt{5}$$

de donde $x = \sqrt[3]{2\sqrt{5}} = y$, $z = \dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}{2}$ y $w = -\dfrac{4}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}$

Así la solución al sistema es

$$(x, y, z, w) = \left(\sqrt[3]{2\sqrt{5}}, \sqrt[3]{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}{2}, -\frac{4}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}\right).$$

Proposición 1.4.38 *Sean $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ entonces tenemos que*

a Si n es impar entonces

$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

b Si n es par y $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ entonces

$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

Observación: Tenga presente las hipótesis de las propiedades, no hacerlo le puede significar mas de un problema o error, por ejemplo:

$$\sqrt{x} = -1 \leftrightarrow \sqrt{x}^2 = (-1)^2 \leftrightarrow x = 1$$

La primera ecuación tiene como conjunto solución a ϕ y la última ecuación tiene como conjunto solución a $\{1\}$. Por lo tanto, cuidado con la hipótesis.

Ejemplo 1.4.39 Resolver

$$\sqrt{3x+1} = 2$$

$\square$

Solución 4. La ecuación tiene la siguiente restricción:

$$3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

Como $\sqrt{3x+1} \geq 0$ y $2 \geq 0$, luego podemos aplicar la propiedad

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3x+1} & = & 2 \quad /(\ )^2 \\ 3x+1 & = & 4 \\ x & = & 1 \end{array}$$

Ejemplo 1.4.40 Resolver

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$$

$\square$

Solución 5. Las restricciones de la ecuación están dadas por:

$$(2x + 1 \geq 0 \wedge x - 3 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq -\tfrac{1}{2} \wedge x \geq 3)$$

Para aplicar la propiedad, ambas expresiones deben ser no negativas, por ello despejamos del siguiente modo

$$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$$

Así tenemos que $\sqrt{2x+1} \geq 0$ y $2 + \sqrt{x-3} \geq 0$, luego podemos elevar al cuadrado

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2x+1} & = & 2 + \sqrt{x-3} \quad /(\ )^2 \\ 2x+1 & = & 4 + 4\sqrt{x-3} + x - 3 \\ x & = & 4\sqrt{x-3} \end{array}$$

Por restricción, sabemos que $x \geq 3 > 0$, de este modo, volvemos aplicar la misma propiedad

$$\begin{array}{rcl} x & = & 4\sqrt{x-3} \quad /(\ )^2 \\ x^2 & = & 16(x-3) \\ x^2 - 16x + 48 & = & 0. \end{array}$$

Calculando el discriminante de la ecuación de segundo grado, obtenemos que $\triangle = 64 > 0$, luego las soluciones están dada por

$$x = \frac{16 \pm 8}{2}$$

Con lo cual

$$x = 12 \quad \text{o} \quad x = 4$$

Y considerando la restricción obtenemos el conjunto solución

$$S = \{4, 12\}$$

Ejemplo 1.4.41 Resolver

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 4$$

$\square$

Solución 6. La ecuación tiene la siguiente restricciones

$$(x + 1 \geq 0 \wedge x - 7 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq -1 \wedge x \geq 7)$$

es decir, la restricción es $x \geq 7$.

Como $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} \geq 0$ y $4 \geq 0$, luego podemos elevar al cuadrado

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} & = & 4 \quad /(\ )^2 \\ x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-7)} + x - 7 & = & 16 \\ 22 - 2x & = & 2\sqrt{(x+1)(x-7)} \\ 11 - x & = & \sqrt{(x+1)(x-7)} \end{array}$$

Además $\sqrt{(x+1)(x-7)} \geq 0$, luego tenemos $11 - x \geq 0$. Con lo cual tenemos que $x \leq 11$, así podemos elevar al cuadrado

$$\begin{array}{rcl} 11 - x & = & \sqrt{(x+1)(x-7)} \quad /(\ )^2 \\ 121 - 22x + x^2 & = & x^2 - 6x - 7 \\ 16x & = & 128 \\ x & = & 8 \end{array}$$

Considerando la restricción obtenemos

$$S = \{8\}$$

Ejemplo 1.4.42 Resolver

$$\sqrt{x+1} + x = 6$$

$\square$

Solución 7. La ecuación tiene la siguiente restricción

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

po ello, el conjunto restricción es

$$\mathcal{R} = [-1, \infty[$$

Como $\sqrt{x+1} \geq 0$, luego $6 - x \geq 0$, es decir, $6 \geq x$, elevando al cuadrado tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x+1} & = & 6 - x/()^2 \\ x+1 & = & 36 - 12x + x^2 \\ x^2 - 13x + 35 & = & 0 \end{array}$$

Su discriminante es $169 - 140 = 29 > 0$, luego tenemos

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Note que un de los valores es mayor que 6, y ambos son mayores que -1, luego se obtiene

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{13 - \sqrt{29}}{2} \right\}.$$

1.4.5 Valor Absoluto

Definición 1.4.43 Sea $x \in \mathbb{R}$, se define el valor absoluto de x como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\Diamond$

Observación: Note que se cumple $\sqrt{a^2} = |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4.44 Comprobar los siguientes valores

a $|-3| = 3$

b $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$

c $|3 - |\sqrt{3} - 2|| = |3 - (2 - \sqrt{3})| = |1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3}$

d $|\sqrt{5} - |2 - \sqrt{5}|| = 2$

$\square$

Proposición 1.4.45 *Sean $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}_0^+$ entonces:*

a $|a| \geq 0$.

b $|a| = |-a|$.

c $|ab| = |a||b|$.

d $|a|^2 = |a^2| = a^2$.

e $-|a| \leq a \leq |a|$.

f $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

g $\sqrt{a^2} = |a|$.

h $|a| = c \Leftrightarrow (a = c \vee a = -c)$.

i $|a| = |b| \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b)$.

Ejemplo 1.4.46 Resolver la siguiente ecuación

$$|x| = 3$$

$\square$

Solución 1. De la propiedad anterior item h, tenemos que

$$x = 3 \ \vee \ x = -3$$

Luego el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \{3, -3\}$$

Ejemplo 1.4.47 Resolver la siguiente ecuación

$$|x - 3| = \sqrt{3} - 1$$

$\square$

Solución 2. Como $\sqrt{3} - 1 > 0$, de la propiedad anterior item h, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} x - 3 = \sqrt{3} - 1 & \vee & x - 3 = -(\sqrt{3} - 1) \\ x = \sqrt{3} + 2 & \vee & x = -\sqrt{3} + 4 \end{array}$$

Luego el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \{\sqrt{3} + 2, -\sqrt{3} + 4\}$$

Ejemplo 1.4.48 Resolver la siguiente ecuación

$$|2x - 7| = \sqrt{5} - 3$$

$\square$

Solución 3. Como $\sqrt{5} - 3 < 0$, luego por propiedad anterior item a, tenemos que el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \phi$$

Ejemplo 1.4.49 Resolver la siguiente ecuación

$$|3 - x| = 3x - 1$$

$\square$

Solución 4. Como $|3 - x| \geq 0$, luego tenemos que $3x + 1 \geq 0$ y por lo tanto $x \geq -\frac{1}{3}$, ahora de la propiedad anterior item h, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} 3 - x = 3x - 1 & \vee & 3 - x = -(3x - 1) \\ -4x = -4 & \vee & 2x = -2 \\ x = 1 & \vee & x = -1 \end{array}$$

Note que uno de los valores no cumple la restricción, luego el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

Ejemplo 1.4.50 Resolver la siguiente ecuación

$$||x-1|-3| = 5$$

$\square$

Solución 5. De la propiedad anterior item h, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |x-1|-3=5 & \vee & |x-1|-3=-5 \\ |x-1|=8 & \vee & |x-1|=-2 \end{array}$$

Como $0 \leq |x-1| = -2 < 0$ es una contradicción, luego continuamos con la otra igualdad

$$\begin{array}{rcl} & |x-1|=8 & \\ x-1=8 & \vee & x-1=-8 \\ x=9 & \vee & x=-7 \end{array}$$

Luego el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \{-7, 9\}$$

Ejemplo 1.4.51 Resolver la siguiente ecuación

$$||x-1|-3x| = 2$$

$\square$

Solución 6. Podemos aplicar la propiedad anterior item h y tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |x-1|-3x=2 & \vee & |x-1|-3x=-2 \\ |x-1|=2+3x & \vee & |x-1|=-2+3x \end{array}$$

Lo resolveremos por caso

Primer Caso $|x-1| = 2+3x$

Como $0 \leq |x-1| = 2+3x$, luego tenemos que $x \geq -\frac{2}{3}$ y ahora aplicamos la propiedad

$$\begin{array}{rcl} x-1=2+3x & \vee & x-1=-(2+3x) \\ -2x=3 & \vee & 4x=-1 \\ x=-\frac{3}{2} & \vee & x=-\frac{1}{4} \end{array}$$

Luego tenemos,

$$\mathcal{S}_1 = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

Segundo Caso $|x-1| = -2+3x$

Como $0 \leq |x-1| = -2+3x$, luego tenemos que $x \geq \frac{2}{3}$ y ahora aplicamos la propiedad

$$\begin{array}{rcl} x-1=-2+3x & \vee & x-1=-(-2+3x) \\ -2x=-1 & \vee & 4x=3 \\ x=\frac{1}{2} & \vee & x=\frac{3}{4} \end{array}$$

Luego tenemos

$$\mathcal{S}_2 = \left\{\frac{3}{4}\right\}$$

Así el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$$

Ejemplo 1.4.52 Resolver la siguiente ecuación

$$|2x - 7| - |x| = 2$$

□

Solución 7. Despejando tenemos

$$|2x - 7| = |x| + 2$$

Ahora podemos aplicar la propiedad anterior item h y tenemos que

$$\begin{aligned} 2x - 7 = |x| + 2 &\quad \vee \quad 2x - 1 = -(|x| + 2) \\ |x| = 2x - 9 &\quad \vee \quad |x| = -1 - 2x \end{aligned}$$

Lo resolveremos por caso

Primer Caso $|x| = 2x - 9$

Como $0 \leq |x| = 2x - 9$, luego tenemos que $x \geq \frac{9}{2}$ y ahora usamos la propiedad

$$\begin{aligned} x = 2x - 9 &\quad \vee \quad x = -(2x - 9) \\ x = 9 &\quad \vee \quad 3x = 9 \\ x = 9 &\quad \vee \quad x = 3 \end{aligned}$$

Luego tenemos,

$$\mathcal{S}_1 = \{9\}$$

Segundo Caso $|x| = -1 - 2x$

Como $0 \leq |x - 1| = -1 - 2x$, luego tenemos que $x \geq -\frac{1}{2}$ y ahora usamos la propiedad

$$\begin{aligned} x = -1 - 2x &\quad \vee \quad x = -(-1 - 2x) \\ 3x = -1 &\quad \vee \quad -x = 1 \\ x = -\tfrac{1}{3} &\quad \vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\mathcal{S}_2 = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

Así el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3},\ 9\right\}$$

1.4.6 Inecuaciones

En la secciones anteriores, hemos resuelto problemas donde figura el símbolo de igualdad en la función proposición, lo que hemos llamado ecuación. Ahora emprenderemos el desafió de resolver problemas donde aparece el símbolo de desigualdad, llamadas inecuaciones.

Para ello, a continuación formalizamos algunos conceptos que ya hemos utilizados anteriormente.

a **Conjunto Restricción**

Llamaremos conjunto restricción de una expresión que involucra términos $P(x)$ y $Q(x)$ al conjunto $\mathcal{R}$ de los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales cada término de la expresión esta definido en $\mathbb{R}$. Los términos $P(x)$ y $Q(x)$ son tales que al menos uno de ellos involucra la variable x.

b **Conjunto Solución**

Llamaremos conjunto solución de la ecuación $P(x) = Q(x)$ o de la inecuación $P(x) \leq Q(x)$ al subconjunto $\mathcal{S}$ de los x en $\mathcal{R}$ que satisfacen la ecuación o inecuación, es decir

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid P(x) = Q(x)\} \quad \vee \quad \mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid P(x) \leq Q(x)\}.$$

Intervalos en $\mathbb{R}$: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$ se denotan

$$\begin{array}{rlrl}
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}; &]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}; \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}; &]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}; \\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}; &]a,\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}; \\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}; & [a,\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.
\end{array}$$

Una inecuación lineal, es decir, una inecuación de uno de los siguientes tipos

$$ax + b \leq 0 \text{ o bien } ax + b < 0 \text{ o bien } ax + b \geq 0 \text{ o bien } ax + b > 0$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$

Veamos un caso particular de resolver la inecuación $ax + b \leq 0$ significa despejar la variable para ello

$$ax + b \leq 0 \text{ si y sólo si } ax \leq -b$$

para concluir necesitamos saber el signo de a. Veamos dos ejemplos

Ejemplo 1.4.53 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$3x + 5 \leq 10.$$

□

Solución 1. En este caso $\mathcal{R}$ es todo $\mathbb{R}$, ahora bien

$$\begin{array}{rrcl}
 & 3x + 5 & \leq & 10 \\
\Leftrightarrow & 3x & \leq & 5 \\
\Leftrightarrow & x & \leq & \dfrac{5}{3}.
\end{array}$$

Tenemos entonces que

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq \frac{5}{3} \right\} = \left] -\infty, \frac{5}{3} \right].$$

Ejemplo 1.4.54 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$8 - 5x \leq -6.$$

□

Solución 2. En este caso $\mathcal{R}$ es todo $\mathbb{R}$, ahora bien

$$\begin{array}{rrcl} & 8-5x & \leq & -6 \\ \Leftrightarrow & -5x & \leq & -14 \\ \Leftrightarrow & x & \geq & \dfrac{14}{5}. \end{array}$$

Tenemos entonces que

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq \frac{14}{5} \right\} = \left[\frac{14}{5}, \infty \right[.$$

1.4.7 Factores lineales

Proposición 1.4.55 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$*

a $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$.

b $ab \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$.

c $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$.

d $ab \leq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \leq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \geq 0)$.

Demostración. Demostraremos sólo el primer item, ya que, la demostración de los otros ítemes, es análoga y se dejará como ejercicio.

($\Rightarrow$) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y suponemos que $ab > 0$

Primer caso. Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$, luego por axioma (2) y asociatividad se tiene que $a^{-1}(ab) = b \in \mathbb{R}^+$ y en consecuencia

$$ab \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+$$

$$ab > 0 \Rightarrow a > 0 \wedge b > 0.$$

Segundo caso. Si $a \in \mathbb{R}^-$ entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}^-$, luego por axioma (2) y asociatividad se tiene que $a^{-1}(ab) = b \in \mathbb{R}^-$ y en consecuencia

$$ab \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^-$$

por lo tanto

$$ab > 0 \Rightarrow a < 0 \wedge b < 0$$

tenemos entonces que $ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$.

($\Leftarrow$) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y suponemos que $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

Claramente por el axioma (2)

$$(a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$$

y la otra posibilidad

$$(a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^-)$$

luego tenemos que

$$ab = (-a)(-b) \in \mathbb{R}^+.$$

En consecuencia

$$[(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)] \Rightarrow ab > 0. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 1.4.56 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$(x-3)(x+5) \geq 0.$$

$\square$

Solución 1. El conjunto restricción de la inecuación es $\mathcal{R} = \mathbb{R}$, ahora bien obtenemos que:

$$\begin{array}{rcl} (x-3)(x+5) \geq 0 & \Leftrightarrow & (x-3 \geq 0 \wedge (x+5) \geq 0) \vee (x-3 \leq 0 \wedge (x+5) \leq 0) \\ & \Leftrightarrow & (x \geq 3 \wedge x \geq -5) \vee (x \leq 3 \wedge x \leq -5) \\ & \Leftrightarrow & (x \geq 3) \vee (x \leq -5). \end{array}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid (x-3)(x+5) \geq 0\} =]-\infty, -5] \cup [3, \infty[.$$

Observación: La resolución de la inecuación $(x-3)(x+5) \geq 0$, se puede resumir en la siguiente tabla

	$]-\infty,-5[$	-5	$]-5,3[$	3	$]3,\infty[$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-3)(x+5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donde el signo $+$ y $-$ indican que el factor es positivo o negativo en el intervalo analizado, y en la última fila se anota el signo del producto.

Ahora observando la última fila de la tabla tenemos que, la solución a la inecuación

$$(x-3)(x+5) \geq 0$$

es $\mathcal{S} =]-\infty, -5] \cup [3, \infty[$.

Ejemplo 1.4.57 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{2x-5}{3x+9} \geq 0.$$

$\square$

Solución 2. El conjunto restricción de la inecuación es

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+9 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-3\},$$

ahora bien notando que a y a^{-1} ambos son negativos o positivos, de otro modo el signo de a y a^{-1} es el mismo, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-5}{3x+9} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2x-5 \geq 0 \wedge (3+9)^{-1} > 0) \vee (2x-5 \leq 0 \wedge (3x+9)^{-1} < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (2x-5 \geq 0 \wedge 3x+9 > 0) \vee (2x-5 \leq 0 \wedge 3x+9 < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 5/2 \wedge x > -3) \vee (x \leq 5/2 \wedge x < -3) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 5/2) \vee (x < -3).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{R} \;\middle|\; \frac{2x-5}{3x+9} \geq 0 \right\} =]-\infty, -3[\cup [5/2, \infty[.$$

De otro modo, tenemos

	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,5/2[$	$5/2$	$]5/2,\infty[$
$2x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$3x+9$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{2x-5}{3x+9}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

El conjunto solución de la inecuación es

$$\mathcal{S} =]-\infty, -3[\cup [5/2, \infty[.$$

Observación: Recuerde que una expresión del tipo $ax+b$, con $a \neq 0$ en un punto es cero, y en los intervalos complementarios es positivo o negativo, lo que se resumen en la siguiente tabla:

	$]-\infty,-b/a[$	$-b/a$	$]-b/a,\infty[$	
$ax+b$	$-$	0	$+$	si $a>0$
$ax+b$	$+$	0	$-$	si $a<0$

Ejemplo 1.4.58 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0.$$

$\square$

Solución 3. La restricción de la inecuación es $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-49 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-7, 7\}$, ahora bien

$$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(4-2x)(x+3)}{(x+7)(x-7)} \leq 0.$$

Consideremos la tabla formada por todos los factores involucrados

	$]-\infty,-7[$	-7	$]-7,-3[$	-3	$]-3,2[$	2	$]2,7[$	7	$]7,\infty[$
$4-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+7$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

Observando la tabla tenemos que $\dfrac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0$ en $]-\infty,-7[\cup[-3,2]\cup]7,\infty[$, luego

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap (]-\infty,-7[\cup[-3,2]\cup]7,\infty[) =]-\infty,-7[\cup[-3,2]\cup]7,\infty[.$$

1.4.8 Inecuaciones con factores no lineales

Proposición 1.4.59 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$*

i $(a < b \wedge c < d) \Rightarrow ac < bd$.

ii $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$.

Demostración.

a Inmediato del corolario Corolario 1.4.7 parte 5.

b ($\Rightarrow$) De anterior item es claro que

$$(a < b \wedge a < b) \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Continuando con este proceso, se prueba inductivamente, ya que

$$(a < b \wedge a^n < b^n) \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}.$$

($\Leftarrow$)Sea

$$L = (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

entonces se tiene que

$$a^n - b^n = (a-b)L.$$

Ahora bien como $a, b \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $L \in \mathbb{R}^+$ y así por corolario Corolario 1.4.7 parte 2 $L^{-1} \in \mathbb{R}^+$. Por hipótesis tenemos que $a^n < b^n \Leftrightarrow a^n - b^n < 0$, es decir

$$(a-b)L < 0$$

pero $L^{-1} > 0$, luego $(a-b)LL^{-1} < 0$, de donde

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$$

concluyendo así la demostración.

■

Corolario 1.4.60 *Para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$*

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Demostración. Como a y $b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a = (\sqrt[n]{a})^n$ y $b = (\sqrt[n]{b})^n$, luego de acuerdo a la proposición anterior tenemos que

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n \Leftrightarrow a < b.$$ ■

Ejemplo 1.4.61 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$x - 5 \leq \sqrt{x^2 - 2}.$$

$\square$

Solución 1. Veamos primero la restricción de la inecuación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R} & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \geq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2} \vee x \leq -\sqrt{2}\} \\ & = &]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[. \end{array}$$

Ahora debemos analizar los casos $x - 5 \geq 0 \wedge x - 5 < 0$, esto es

a Supongamos $x - 5 \leq 0$ y $x \in \mathcal{R}$, es decir

$$x \in \mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap]-\infty, 5] =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 5]$$

como $x - 5 \leq 0$ y $0 \leq \sqrt{x^2 - 2}$, para $x \in \mathcal{R}_1$ la desigualdad $x - 5 \leq \sqrt{x^2 - 2}$ se satisface. Luego la solución en este caso está dada por

$$\mathcal{S}_1 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 5].$$

b Supongamos ahora $x - 5 \geq 0$ y $x \in \mathcal{R}$, es decir

$$x \in \mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap [5, \infty[= [5, \infty[$$

ahora bien como $x - 5 \geq 0$ y $\sqrt{x^2 - 2} \geq 0$ para $x \in \mathcal{R}_2$, podemos elevar al cuadrado la desigualdad dada, así

$$\begin{array}{rrcl} & x - 5 & \leq & \sqrt{x^2 - 2} \\ \Leftrightarrow & x^2 - 10x + 25 & \leq & x^2 - 2 \\ \Leftrightarrow & x & \geq & \dfrac{27}{10} \end{array}$$

luego la solución en este caso está dada por

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{R}_2 \cap \left[\frac{27}{10}, \infty\right[= [5, \infty[.$$

Tenemos entonces que la solución de la inecuación es

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[.$$

Ejemplo 1.4.62 Resolver la inecuación

$$\sqrt{x - 3} - \sqrt{2x + 1} \leq 1$$

$\square$

Solución 2. La restricciones son $x-3\geq 0 \ \wedge\ 2x+1\geq 0$, es decir, $x\geq 3 \ \wedge\ x\geq -\frac{1}{2}$, luego el conjunto restricción de la inecuación es

$$\mathcal{R}=[3,\infty[.$$

Para poder elevar al cuadrado, debemos tener seguridad que los términos son no negativos

$$\begin{array}{rcl}\sqrt{x-3}-\sqrt{2x+1} & \leq & 1\\ \sqrt{x-3} & \leq & 1+\sqrt{2x+1}\ \ ()^2\\ x-3 & \leq & 1+2\sqrt{2x+1}+2x+1\\ -x-5 & \leq & 2\sqrt{2x+1}\end{array}$$

Considerando la restricción tenemos que

$$x\geq 3\Leftrightarrow -x-5\leq -8$$

Por lo cual obtenemos que,

$$\underbrace{-x-5}_{-}\leq\underbrace{\sqrt{2x+1}}_{+}$$

de este modo la desigualdad se cumple siempre.

Así el conjunto solución es

$$S=[3,\infty[.$$

Proposición 1.4.63 *Dado el polinomio cuadrático ax^2+bx+c, tenemos que:*

a Si $\triangle=b^2-4ac<0$ y $a>0$, entonces

$$ax^2+bx+c>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

b Si $\triangle=b^2-4ac<0$ y $a<0$, entonces

$$ax^2+bx+c<0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Demostración. Dada la polinomio de segundo grado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl}(4a)(ax^2+bx+c) & = & 4a^2x^2+4abx+4ac\\ & = & (2ax)^2+2(2ax)b+b^2-b^2+4ac\\ & = & (2ax+b)^2+4ac-b^2\end{array}$$

De este modo tenemos

$$ax^2+bx+c=\frac{(2ax+b)^2+4ac-b^2}{4a}$$

Supongamos ahora que $\triangle<0$ y $a>0$, entonces se tiene que las expresiones $(2ax+b)^2$ y $4ac-b^2$ son siempre positivas, de lo cual se obtiene que $(2ax+b)^2+(4ac-b^2)>0$, es decir,

$$ax^2+bx+c>0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Análogamente se obtiene que si $\triangle<0$ y $a<0$, entonces $ax^2+bx+c<0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$ ■

Ejemplo 1.4.64 Resolver la siguiente inecuación

$$x^2 + 2x + 7 > 0$$

$\square$

Solución 3. Para resolver la ecuación cuadráticas

$$x^2 + 2x + 7 > 0$$

veamos su discriminate

Tenemos que $\triangle = -24 < 0; a = 1 > 0$. Usando la propiedad Proposición 1.4.63 tenemos que

$$S = \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.4.65 Resolver la siguiente inecuación

$$2x^2 + 2x + 3 < 0$$

$\square$

Solución 4. Para resolver la ecuación cuadráticas

$$2x^2 + 2x + 3 < 0$$

veamos su discriminate

Tenemos que $\triangle = -20 < 0; a = 2 > 0$. Usando la propiedad Proposición 1.4.63 tenemos que

$$S = \phi$$

Ejemplo 1.4.66 Resolver la siguiente inecuación

$$-x^2 + 2x - 4 > 0$$

$\square$

Solución 5. Para resolver la ecuación cuadráticas

$$-x^2 + 2x - 4 > 0$$

veamos su discriminate

Tenemos que $\triangle = -12 < 0; a = -1 < 0$. Usando la propiedad Proposición 1.4.63 tenemos que

$$S = \phi$$

Ejemplo 1.4.67 Resolver la siguiente inecuación

$$-x^2 - 3x - 5 < 0$$

$\square$

Solución 6. Para resolver la ecuación cuadráticas

$$-x^2 - 3x - 5 < 0$$

veamos su discriminate

Tenemos que $\triangle = -11 < 0; a = -1 < 0$. Usando la propiedad Proposición 1.4.63 tenemos que

$$S = \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.4.68 Resolver la inecuación

$$\frac{\sqrt{2} \cdot x}{x+1} < -\frac{1}{x}$$

□

Solución 7. La restricciones son $x+1 \neq 0 \ \wedge \ x \neq 0$, luego el conjunto de restricción es

$$\mathcal{R} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

La resolución del problema lo tenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{\sqrt{2}x}{x+1} &< -\tfrac{1}{x} \\ \tfrac{\sqrt{2}x}{x+1} + \tfrac{1}{x} &< 0 \\ \tfrac{\sqrt{2}x^2+x+1}{x(x+1)} &< 0 \end{aligned}$$

Como $\triangle(\sqrt{2}x^2 + x + 1) = 1 - 4\sqrt{2} < 0; a = \sqrt{2} > 0$, luego se tiene que

$$\sqrt{2}x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathcal{R}.$$

Para continuar con el desarrollo, utilizaremos una tabla

	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,0[$	0	$]0,\infty[$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt{2}x^2+x+1$	$+$		$+$		$+$
$\frac{\sqrt{2}x^2+x+1}{x(x+1)}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

así se obtiene que

$$S =]-1, 0[$$

Ejemplo 1.4.69 Resolver la inecuación

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x}{x-1} \leq 2$$

□

Solución 8. La restricciones son $x+1 \neq 0 \ \wedge \ x-1 \neq 0$, luego el conjunto de restricción es

$$\mathcal{R} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

La resolución o búsqueda de la solución del problema, la obtenemos de lo tenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{2x-1}{x+1} + \tfrac{x}{x-1} &\leq 2 \\ \tfrac{2x-1}{x+1} + \tfrac{x}{x-1} - 2 &\leq 0 \\ \tfrac{(2x-1)(x-1)+x(x+1)-2(x^2-1)}{x^2-1} &\leq 0 \\ \tfrac{x^2-2x+3}{x^2-1} &\leq 0 \end{aligned}$$

Como $\triangle(x^2-2x+3)=4-12=-8<0;\ a=1>0$, luego tenemos que

$$x^2-2x+3>0, \forall x \in \mathcal{R}.$$

Para concluir el desarrollo usaremos una tabla

	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,\infty[$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x+3	$+$		$+$		$+$
$\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

así tenemos que

$$S=]-1,1[$$

1.4.9 Inecuaciones con Valor absoluto

Teorema 1.4.70 *Sean $x,y\in\mathbb{R}$ entonces:*

a $|x|\leq y \Leftrightarrow (-y\leq x\leq y)$.

b $|x|\geq y \Leftrightarrow (y\geq x \vee x\leq -y)$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $|x|\leq y$.
Como $x\leq |x| \wedge |x|\leq y$, entonces por transitividad

$$x\leq y.$$

Además

$$|x|\leq y \Leftrightarrow -y\leq -|x|$$

pero por Proposición Proposición 1.4.45 parte (e) tenemos que

$$-|x|\leq x$$

y nuevamente por transitividad

$$-y\leq x$$

Luego tenemos que $-y\leq x\leq y$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $-y\leq x\leq y$.

a [Caso 1:] Si $x\geq 0$ entonces $|x|=x$

además

$$x\leq y$$

luego

$$|x|\leq y.$$

b [Caso 2:] Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ es decir, $-|x| = x$

además
$$-y \leq x$$
luego
$$-y \leq -|x| \Leftrightarrow |x| \leq y.$$

En consecuencia
$$|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$$
con lo cual la demostración está terminada.

Demostremos ahora la segunda parte, usando la equivalencia
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q})$$

Aplicándola en la primera parte obtenemos
$$|x| > y \Leftrightarrow (x > y \vee x < -y)$$

la cual puede ser extendida a
$$|x| \geq y \Leftrightarrow (x \geq y \vee x \leq -y)$$

Así la demostración concluye. ■

Observación: Notemos que el teorema precedente es válido para todo $y \in \mathbb{R}$, sin embargo el caso en que $y < 0$ nos permite proceder de manera más rápida, es decir, si $y < 0$ entonces la proposición $|x| < y$ es falsa, y la proposición $|x| > y$ es verdadera.

El hecho de asegurar que la expresión $|x| < y$ es falsa, se traduce diciendo que el conjunto solución de dicha inecuación es
$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Análogamente si la expresión $|x| > y$ es verdadera, su conjunto solución es
$$\mathcal{S} = \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.4.71 Resolver la inecuación
$$|x| < -2$$

Solución

Considere la observación anterior, luego el conjunto solución es $\mathcal{S} = \emptyset$.

Pero si consideramos la inecuación
$$|x| > -2$$
tenemos que la solución es $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. □

Ejemplo 1.4.72 Determinar el conjunto solución de la inecuación
$$|x + 2| \geq 3.$$

Solución
Aplicando el teorema anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} |x+2| \geq 3 &\Leftrightarrow x+2 \geq 3 \vee x+2 \leq -3 \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -5 \\ &\Leftrightarrow x \in [1,\infty[\cup]-\infty,-5] \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} -]-5,1[. \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución de la inecuación $|x+2| \geq 3$ está dado por

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} -]-5,1[.$$

$\square$

Ejemplo 1.4.73 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$|x+\sqrt{2}| \leq \pi.$$

Solución
De acuerdo al teorema precedente se tiene que:

$$\begin{aligned} |x+\sqrt{2}| \leq \pi &\Leftrightarrow -\pi \leq x+\sqrt{2} \leq \pi \\ &\Leftrightarrow -\pi-\sqrt{2} \leq x \leq \pi-\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow x \in [-\pi-\sqrt{2}, \pi-\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución de la inecuación esta dado por

$$\mathcal{S} = [-\pi-\sqrt{2}, \pi-\sqrt{2}].$$

$\square$

Ejemplo 1.4.74 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$|x-\sqrt{2}| \leq \sqrt{x^2-3}.$$

$\square$

Solución 1. La restricción se obtiene de

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt{3}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{3} \vee x \leq -\sqrt{3}\} \\ &=]-\infty,-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3},\infty[. \end{aligned}$$

Ahora elevando al cuadrado en la desigualdad (**??**) se tiene

$$\begin{aligned} |x-\sqrt{2}|^2 &\leq x^2-3 \\ \Leftrightarrow x^2-2\sqrt{2}x+2 &\leq x^2-3 \\ \Leftrightarrow 5 &\leq 2\sqrt{2}x \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{5}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Tenemos así que el conjunto solución de la inecuación (??) está dado por

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \left[\frac{5}{2\sqrt{2}}, \infty\right[= \left[\frac{5}{2\sqrt{2}}, \infty\right[.$$

Ejemplo 1.4.75 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{4-|x-2|}}{(x-1)(x^2-x+2)} \geq 0.$$

□

Solución 2. La restricción de

$$\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{4-|x-2|}}{(x-1)(x^2-x+2)} \geq 0.$$

es $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4-|x-2| \geq 0 \wedge x-1 \neq 0 \wedge x^2-x+2 \neq 0\}$. Analicemos cada caso:

a

$$\begin{array}{rrcl} & 4-|x-2| & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & |x-2| & \leq & 4 \\ \Leftrightarrow & -4 \leq x-2 & \wedge & x-2 \leq 4 \\ \Leftrightarrow & -2 \leq x & \wedge & x \leq 6 \\ \Leftrightarrow & x \in [-2,6]. & & \end{array}$$

b

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

c Debemos encontrar los $x \in \mathbb{R}$ de modo que $x^2-x+2 \neq 0$, ahora bien como el discriminante de la ecuación cuadrática es $\triangle = -7 < 0$ y $a = 1 > 0$ tenemos por Propiedad Proposición 1.4.63 parte (1) que la ecuación $x^2-x+2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, lo cual en particular nos asegura que $x^2-x+2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Recuerde que el conjunto restricción corresponde a la intersección de los casos anteriores, ya que cada una de ella debe cumplirse, entonces que $\mathcal{R} = [-2,6] - \{1\}$.

Resolveremos la inecuación, con el apoyo de una tabla, pero antes analicemos algunos factores, $\sqrt{4-|x-2|} \geq 0$ y $x^2-x+2 > 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$, basta sólo resolver la inecuación

$$\frac{(x^2-2x-3)}{(x-1)} \geq 0 \tag{1.1}$$

para tener que

$$\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{4-|x-2|}}{(x-1)(x^2-x+2)} \geq 0.$$

Resolvamos entonces inecuaciones

$$\frac{(x^2-2x-3)}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)(x+1)}{x-1} \geq 0. \tag{1.2}$$

Consideremos ahora la siguiente tabla

	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,3[$	3	$]3,\infty[$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

De esto es claro que (**??**) se satisface en $[-1,1[\cup[3,\infty[$, luego la solución a la inecuación es

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap ([-1,1[\cup[3,\infty[) = [-1,1[\cup[3,6].$$

Ejemplo 1.4.76 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$|x-1| + |x-2| \leq |x-3|$$

$\square$

Solución 3. Sea x que cumple

$$|x-1| + |x-2| \leq |x-3|$$

Para dar solución a este problema consideremos la siguiente tabla, que nos ayuda en la clasificación de los casos que debemos estudiar.

	$]-\infty,1[$	$]1,2[$	$]2,3[$	$]3,\infty[$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$

Note que esta tabla no permite resolver la inecuación como en el ejemplo anterior, pero gracias a la definición de valor absoluto podemos obtener la siguiente información:

	$]-\infty,1[$	$]1,2[$	$]2,3[$	$]3,\infty[$
$\|x-1\|$	$-(x-1)$	$x-1$	$x-1$	$x-1$
$\|x-2\|$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$	$x-2$
$\|x-3\|$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$x-3$

Esto nos sugiere estudiar los siguientes casos cuatro casos:

a Consideremos $x \in]-\infty,1]$, luego reemplazando se tiene

$$\begin{array}{lrcl} & -(x-1) + (-(x-2)) & \leq & -(x-3) \\ \Leftrightarrow & 1-x+2-x & \leq & 3-x \\ \Leftrightarrow & x & \geq & 0. \end{array}$$

Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_1 =]-\infty,1] \cap [0,\infty[= [0,1].$$

b Consideremos $x \in]1,2]$, luego reemplazando se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & x-1+(-(x-2)) & \leq & -(x-3) \\ \Leftrightarrow & x-1+2-x & \leq & 3-x \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 2. \end{array}$$

Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_2 =]1,2] \cap]-\infty, 2[=]1,2].$$

c Consideremos $x \in]2,3]$, luego reemplazando se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & x-1+x-2 & \leq & -(x-3) \\ \Leftrightarrow & 2x-3 & \leq & 3-x \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 2. \end{array}$$

Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_3 =]2,3] \cap]-\infty, 2[= \emptyset.$$

d Consideremos $x \in]3,\infty[$, luego reemplazando se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & x-1+x-2 & \leq & x-3 \\ \Leftrightarrow & 2x-3 & \leq & x-3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 0. \end{array}$$

Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_4 =]3,\infty[\cap]-\infty, 0] = \emptyset.$$

Tenemos entonces que la solución de la inecuación es

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 = [0,2].$$

Teorema 1.4.77 [Desigualdad Triangular]. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ entonces*

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Demostración. Tenemos por Propiedad Proposición 1.4.45 parte (f) que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}$$

luego sumando, se tiene que

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

así

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

■

Corolario 1.4.78 *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *entonces* $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demostración. Notemos que $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$

De lo cual se obtiene

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Por otro lado $|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|$

$$\begin{array}{rcl} |y| - |x| & \leq & |y - x| \\ \Leftrightarrow |y| - |x| & \leq & |x - y| \\ \Leftrightarrow |x| - |y| & \geq & -|x - y|. \end{array}$$

Luego, tenemos que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Leftrightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|. \qquad \blacksquare$$

1.4.10 Ejercicios

Resolver las siguientes inecuaciones

a $\dfrac{x}{x+1} \leq 1$

b $(3x + 1)(x + 2) > 0$

c $(x + 1)(x + 2) < (x + 1)(4x - 7)$

d $\dfrac{2x - 1}{x + 1} + \dfrac{x}{x - 1} < 2$

e $\dfrac{x^2(x^2 + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x^2 + 3)} \geq 0$

f $\sqrt{3x + 1} < 2$

g $\sqrt{2x + 5} \leq 3 - x$

h $\sqrt{x - 3} \geq 7 - 2x$

i $\sqrt{\sqrt{2 + 1} - 1} < \sqrt{x}$

j $|5x - 7| > 2 - x$

k $|3x - 5| > x + 2$

l $|2x - 1| - |x - 2| < 3x - 7$

m $||2x - 1| - x| < 3x - 5$

n $\sqrt{2x + 1} < |x| + 3$

Solución. El Conjunto solución en cada caso es:

a $S =]-1, \infty[$

b $S =]-\infty, -2[\cup]-1/3, \infty[$

c $S =]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$

d $S =]-1, 1[$

e $S =]-\infty, -2] \cup \{0\} \cup]-1, \infty[$

f $S = [1/3, 5/3[$

g $S = [-5/2, 4 - \sqrt{12}[$

h $S = [13/4, \infty[$.

i $S =]0, \infty[$.

j $S =]-\infty, 5/4[\cup]3/2, \infty[$

k $S = [3/4, 7/2]$

l $S =]4, \infty[$

m $S =]2, \infty[$

n $v]-1/2, \infty[$

1.5 Axioma del Supremo

Definición 1.5.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \phi$ y $c \in \mathbb{R}$. Se dice que

a c es una **cota superior** de A, si y sólo si

$$(\forall a \in A)(a \leq c).$$

b a es una **cota inferior** de A, si y sólo si

$$(\forall a \in A)(a \geq c).$$

c A es un **conjunto acotado superiormente**, si y sólo si existe una cota superior para el conjunto A.

d A es un **conjunto acotado inferiormente**, si y sólo si existe una cota inferior para el conjunto A.

e A es un **conjunto acotado**, si y sólo si A es acotado superior e inferiormente se dice que

$\Diamond$

Observación: Si $A = \emptyset$, se dice que A es un conjunto acotado.

Definición 1.5.2 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \phi$ y $L \in \mathbb{R}$.
Se dice que L es el **supremo** de A, si y sólo si, las dos condiciones siguientes se satisfacen:

a L es una cota superior de A.

b Si L' es una cota superior de A, entonces $L \leq L'$.

$\Diamond$

Notación: Si existe el supremo se denota por $\sup(A) = L$.
Observación: Note que por definición, $\sup(A)$ es la menor de las cotas superiores de A.
Definición 1.5.3 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \phi$ y $L \in \mathbb{R}$.
Se dice que L es el **ínfimo** de A, si y sólo si, las dos condiciones siguientes se satisfacen:

a L es una cota inferior de A.

b Si L' es una cota inferior de A, entonces $L' \leq L$.

$\Diamond$

Notación: Si existe el ínfimo, se denota por $\inf(A) = L$.
Observación: Note que por definición, $\inf(A)$ es la mayor de las cotas inferiores de A.
Ejemplo 1.5.4 Consideremos los conjuntos $A =]-\infty, 5]$ y $B =]7, \infty[$, en este caso tenemos que el conjunto A no es acotado inferiormente, pues no existe $r \in \mathbb{R}$ de modo que $r \leq a$ para todo $a \in A$, en cambio el conjunto B si es acotado inferiormente pues existe $r = 7 \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq b$ para todo $b \in B$. Análogamente podemos ver que el conjunto A es acotado superiormente y el conjunto B no lo es.
Además que todo $r \in [5, \infty[$ es una cota superior para A, luego tenemos que el conjunto de todas las cotas superiores de A es $[5, \infty[$, el $sup(A) = 5$. Del mismo modo tenemos que todo $r' \in]-\infty, 7]$ es una cota inferior para B, luego el conjunto de todas las cotas inferiores de B es $]-\infty, 7]$, el $\inf(B) = 7$. $\square$

Ejemplo 1.5.5 Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq \sqrt{2}\}$. Determine el conjunto de cotas superiores e inferiores del conjunto A. $\square$

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq \sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x-3 \leq \sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2}+3 \leq x \leq \sqrt{2}+3\} \\ &= [-\sqrt{2}+3, \sqrt{2}+3]. \end{aligned}$$

De acuerdo a esto podemos ver que A es un conjunto acotado superior e inferiormente pues existen $r = \sqrt{2}+3$ y $r' = -\sqrt{2}+3$ de modo que $r' \leq a \leq r$ para todo $a \in A$. Además el conjunto de todas las cotas inferiores está dado por $]-\infty, -\sqrt{2}+3]$ y el de las cotas superiores está dado por $[\sqrt{2}+3, \infty[$.
Teorema 1.5.6 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $L \in \mathbb{R}$ cota superior de A. Entonces,$L = \sup(A)$ si y sólo si $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x \in A)(x > L - \epsilon)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Procedamos por absurdo, esto es supongamos que
por hipótesis existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x \leq L - \epsilon, \quad \forall x \in A$$

esto nos entrega que $L-\epsilon$ es una cota superior de A (por definición de cota), pero $L = \sup(A)$, luego $L \leq L - \epsilon$ de aquí que $\epsilon \leq 0$, lo cual contradice $\epsilon > 0$.

($\Leftarrow$) Procediendo de la misma forma, sea L cota superior de A y supongamos que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x \in A)(x > L - \epsilon) \wedge L \neq \sup(A)$$

Como $L \neq \sup(A)$ y L es cota superior de A, entonces L no es la menor de las cotas superiores de A, esto es, existe $L^{'}$ cota superior de A tal que

$$L^{'} \leq L$$

luego existe $\epsilon > 0$ tal que

$$L^{'} + \epsilon = L$$

pero por hipótesis, existe $x \in A$ tal que

$$x > L - \epsilon$$

De este modo tenemos que

$$x > L^{'}, \quad x \in A$$

lo cual es una contradicción pues $L^{'}$ es una cota superior de A. ■

Teorema 1.5.7 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $L \in \mathbb{R}$ cota inferior de A. Entonces,$L = \inf(A)$ si y sólo si $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x \in A)(x < L + \epsilon)$.*

Demostración. Ejercicio (análogo a la demostración del teorema anterior). ■

1.5.1 Axioma del Supremo

El conjunto de los números reales con el axioma del supremo recibe el nombre de **cuerpo ordenado y completo**, o **cuerpo totalmente ordenado** lo cual caracteriza $\mathbb{R}$, y es el siguiente

Axioma 1.5.8 [Axioma del Supremo]. *Si $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado superiormente, entonces el supremo de A existe y es un elemento de $\mathbb{R}$.*

Proposición 1.5.9 *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado.*

Demostración. Supongamos por absurdo que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Luego por el axioma del supremo existe $\sup(\mathbb{N}) = L, L \in \mathbb{R}$, esto es $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(n > L - \epsilon)$

En particular si consideramos $\epsilon = 1 > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > L - 1$$

es decir,

$$n + 1 > L$$

pero $n + 1 \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción pues $L = \sup(\mathbb{N})$. ■

Teorema 1.5.10 [Propiedad arquimediana].

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists\, n \in \mathbb{N})(x < n).$$

Demostración. Procedamos por absurdo, esto es

$$(\exists\, x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(x \geq n).$$

Es claro que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, luego tenemos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 1.5.11 *La propiedad arquimediana la podemos expresar de manera equivalente como sigue*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})\left(\frac{1}{n} < \epsilon\right).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el número real $\dfrac{1}{\epsilon}$, entonces por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

de donde

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

concluyendo así la demostración. ■

Ejemplo 1.5.12 Sea

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Demostrar que $\sup(A) = \dfrac{1}{2}$. □

Solución 1.

a En primer lugar demostremos que $L = \dfrac{1}{2}$ es una cota superior de A.

Claramente

$$2n < 2n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{2n}{2n+1} &< 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \frac{n}{2n+1} &< \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

así

$$x_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo cual se tiene que $L = \dfrac{1}{2}$ es cota superior de A.

b Solo nos queda demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x_n \in A)(x_n > \frac{1}{2} - \epsilon)$, lo que equivale a probar la existencia de $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} - \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el número real $\frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$, ahora bien por Teorema Teorema 1.5.10 tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{rrcl}
 & n & > & \dfrac{1-2\epsilon}{4\epsilon} \\
\Leftrightarrow & 4n\epsilon & > & 1 - 2\epsilon \\
\Leftrightarrow & 2n\epsilon & > & \dfrac{1}{2} - \epsilon \\
\Leftrightarrow & n & > & n - 2n\epsilon + \dfrac{1}{2} - \epsilon \\
\Leftrightarrow & n & > & 2n\left(\dfrac{1}{2} - \epsilon\right) + \dfrac{1}{2} - \epsilon \\
\Leftrightarrow & n & > & (2n+1)\left(\dfrac{1}{2} - \epsilon\right) \\
\Leftrightarrow & \dfrac{n}{2n+1} & > & \dfrac{1}{2} - \epsilon.
\end{array}$$

Así

$$(\forall \epsilon > 0)\left(\exists\, x_n = \frac{n}{2n+1} \in A\right)\left(x_n > \frac{1}{2} - \epsilon\right).$$

Luego

$$\sup(A) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 1.5.13 Sea

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Demostrar que $\inf(A) = 0$. □

Solución 2.

a En primer lugar demostremos que $L = 0$ es una cota inferior de A.

Es evidente que

$$0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$0 < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo cual se tiene que $L = 0$ es cota inferior de A.

b Solo nos queda demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists x_n \in A)(x_n < \epsilon)$, este hecho es clara consecuencia del Corolario Corolario 1.5.11, así

$$(\forall \epsilon > 0)\left(\exists\, x_n = \frac{1}{n} \in A\right)(x_n < \epsilon).$$

Luego
$$\inf(A) = 0.$$

Teorema 1.5.14 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$. Entonces, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Claramente si $x < 0 < y$ existe $p = 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$ y el teorema queda demostrado en este caso.

Supongamos ahora que $0 < x < y$. Sea
$$\epsilon = y - x > 0$$
luego por la corolario de propiedad arquimediana tenemos
$$\frac{1}{n} < \epsilon = y - x$$

Dado $nx \in \mathbb{R}$, nuevamente por la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$m > nx.$$
Sea m el mínimo que satisface $m > nx$, luego
$$m - 1 \leq nx$$
así tenemos
$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y.$$
Por lo tanto
$$x < \frac{m}{n} < y,$$
es decir, existe $p = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.

Por otra parte. Supongamos que $x < y < 0$, entonces $0 < -y < -x$ y por lo anterior existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que
$$-y < p < -x.$$
Luego
$$x < -p < y$$
y como $-p \in \mathbb{Q}$ queda completa la demostración. ■

Definición 1.5.15 Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ es **denso** en $\mathbb{R}$ si y sólo si entre dos números reales cualesquiera existe algún elemento de X. ♢

Observación: De acuerdo al teorema y definición anteriores claramente el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$.

1.6 Ejercicios Propuestos

1. **Grupos**

   a En $\mathbb{Z}$ se define la operación $*$ por:

   $$x * y = xy + x + y.$$

   Decida si $\mathbb{Z}$ bajo esta operación es un grupo.

   b Sean $G = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Z}\}$ y $*$ la operación definida por:

   $$(x, y) * (x', y') = (xx', y + y')$$

   Decida si G bajo esta operación es un grupo.

   c Sea $G = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, se define la suma

   $$(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') = (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$$

   Demuestre que G bajo esta operación es un grupo abeliano.

   d Sea G un grupo. Demuestre que para todo $a, b \in G$, la ecuación

   $$ax = b$$

   tiene única solución.

   e Sea G un grupo y H un subconjunto no vacío de G. Se dice que H es un subgrupo de G si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen

   i $(\forall a, b \in H)(ab \in H)$

   ii $(\forall a \in H)(a^{-1} \in H)$

   De acuerdo a esto demuestre que:

   A $(\mathbb{Q}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

   B $Z = \{g \in G \mid (\forall h \in G)(gh = hg)\}$ es un subgrupo de G.

2. **Resolver las siguientes ecuaciones**

   a $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{x+3}$

   b $\sqrt{x-3} + x = 6$

   c $\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{27 - 3x^2} = |x| + 5$

   d $\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x} = |x-3|$

   e $\sqrt{\sqrt{x}+3} - \sqrt{\sqrt{x}-3} = \sqrt{2\sqrt{x}}$

   f $x + \sqrt{6 - 4x^2 - x} = 4x^2$

   g $\sqrt{|x+1| - 6} = 8x - x^2 - 15$

   h $x - 1 = \sqrt{x^2 - x + 2}$

i $||2x+3|-|x-3||=|3x+2|+x$

j $||2x+1||=2x$

k $\dfrac{x-5}{x^2-9}+\dfrac{x+3}{x-3}=1$

l $\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{x+2}{x-2}=1$

m $\dfrac{x+m}{m}-\dfrac{x+n}{n}=\dfrac{m^2+n^2}{mn}-2$

n $\left(\dfrac{x+\frac{b-x}{1+bx}}{1-\frac{x(b-x)}{1+bx}}-\dfrac{b-\frac{b-x}{1-bx}}{1-\frac{b(b-x)}{1-bx}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{b}{x}-\dfrac{x}{b}\right)=\dfrac{2}{b}$

3. **Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones**

a $\left.\begin{array}{rcl} x+3y & = & 4 \\ 2x+7y & = & 15 \end{array}\right|$

b $\left.\begin{array}{rcl} 2x+3z & = & 4 \\ 2x-6y+7z & = & 15 \\ x-2y+5z & = & 10 \end{array}\right|$

c $\left.\begin{array}{rcl} x+4y+3z & = & 1 \\ 2x+5y+4z & = & 4 \\ x-3y-2z & = & 5 \end{array}\right|$

d $\left.\begin{array}{rcl} 4x+y-2z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \\ 11x-4y+-z & = & 0 \end{array}\right|$

e $\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 4 \\ 3x+4y & = & 9 \end{array}\right|$

f $\left.\begin{array}{rcl} x^2+xy+y^2 & = & 13 \\ x+y & = & 4 \end{array}\right|$

g $\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} & = & \dfrac{25}{12} \\ x^2-y^2 & = & 7 \end{array}\right|$

h $\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2+2x & = & 13 \\ 3x+2y^2 & = & 4 \end{array}\right|$

i $\left.\begin{array}{rcl} x & = & 2wx \\ y & = & 4wy \\ z & = & wz \\ 2x^2+4y^2+z^2 & = & 8 \end{array}\right|$

j $\left.\begin{array}{rcl} 2x-wy & = & 0 \\ 2y-wx & = & 0 \\ z+wz & = & 0 \\ z^2+xy-4 & = & 0 \end{array}\right|$

k $\begin{array}{rcl|} 2(y+z)+wyz & = & 0 \\ 2(x+z)+wxz & = & 0 \\ 2(y+x)+wyx & = & 0 \\ xyz & = & 64 \\ \hline \end{array}$

l $\begin{array}{rcl|} x+w(x-3) & = & 0 \\ y+w(y-4) & = & 0 \\ z & = & wz \\ (x-3)^2+(y-4)^2 & = & z^2 \\ \hline \end{array}$

m $\begin{array}{rcl|} yz & = & w(y+z) \\ xz & = & w(x+z) \\ xy & = & w(y+x) \\ xy+xz+yz & = & 5 \\ \hline \end{array}$

4. Considere la igualdad
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$$
   i Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ está definida.
   ii Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ que la satisfacen.

5. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   i $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}>\frac{1}{2}\right)$
   ii $(\forall a, b \in \mathbb{R})\,(a^2+b^2 \geq 2ab)$
   iii $(\forall a \in \mathbb{R})\left(0 \leq a \Rightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 \leq a\right)$
   iv $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}\right)$
   v $(\forall a, b \in \mathbb{R}^-)(a<b \Rightarrow a^2>b^2)$
   vi $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}-\{0\})\left(x<y \Rightarrow \frac{x}{y}<1\right)$
   vii $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)(x \leq y \Rightarrow x \leq 2y)$
   viii $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)(x \leq y \Rightarrow y^{-1} \leq x^{-1})$
   ix $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x+y=1 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4})$
   x $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(0 \leq x \leq y \Rightarrow \frac{x}{y+1} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{x+1}{y+1})$
   xi $(\forall x, y \in \mathbb{R})(|y-x|=|y+x|) \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$
   xii $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(2x+4y=1 \Rightarrow x^2+y^2 \geq \frac{1}{20})$
   xiii $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((2 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 2) \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3)$
   xiv $(\forall x, y \in \mathbb{R})x^3+y^3 \geq x^2-xy+y^2$
   xv $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq b, n \in \mathbb{N})\left(\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n}\right)$

xvi $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|)$

6. Considere en $\mathbb{R}$ la ecuación $m + \sqrt{x} = x$, con $m \in \mathbb{R}$.

   i Determine todos los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación tiene solución.

   ii Encuentre la solución para $m = -\dfrac{1}{8}$

7. Determine en los siguientes casos condiciones sobre el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que las ecuaciones

   i $x^2 + \lambda x + 3 = 0$

   ii $x^2 - 2(\lambda+1)x + 3 = 0$

   iii $x^2 + 2(\lambda+1)x + 3\lambda = 0$

   iv $\lambda x^2 - 2x + 3\lambda = 0$

   tengan

   A Soluciones reales y distintas.

   B Soluciones reales e iguales.

   C No tengan solución.

8. **Simplificar al máximo las siguientes expresiones**

   a $\frac{a^2}{b} - \frac{a^2-b^2}{a+b} : \frac{a-b}{b} + \frac{b}{a}$

   b $\dfrac{1}{a+2-\frac{a+1}{a-\frac{1}{a}}}$

   c $(a^2-b^2) : \left[\left(\dfrac{a^2+ab}{b^2+ab}\right) : \left(\dfrac{a^2-ab}{b^2-ab}\right)\right]$

   d $\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}\right)\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}\right)$

   e $\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{a^2}{b^3}\right) : \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a}{b^2}\right)}{\left(\frac{a+2b}{a+b}+\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{a+2b}{a}-\frac{a}{a+b}\right)}$

   f $\left(\dfrac{\dfrac{a+b}{2}-a}{\dfrac{a+b}{2}-b}\right)^3 - \dfrac{\dfrac{a+b}{2}-2a+b}{\dfrac{a+b}{2}+a-2b}$

   g $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x+1}}{x^3-1} - \dfrac{\dfrac{x^2+1}{x^4-x^3}-\dfrac{1}{x^3-x^2}}{x^3+1}$

   h $\dfrac{\left(\frac{x(x+y)+y(y-x)}{y^2-x^2}\right)\left(\frac{(x+2y)x+y^2}{xy}\right)}{\frac{y^2+x(x+2y)}{y(x+2y)}}$

i $\dfrac{3x+2}{\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{1-x}}$

j $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+3}}$

k $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

l $\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+3x-1}-6x}{3x-\sqrt{x^2+x+1}}$

m $\dfrac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}}}$

n $\dfrac{x}{\sqrt[n]{x^m}+\sqrt[m]{a^n}}$, n, m pares.

o $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}-1}\cdot\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x-1}}$

9. **Problemas de planteo**

a Si $a:b=2:3$ y $x=\dfrac{3a^2-2b+b^2}{3a+2b}$, expresar a en tanto % de x.

b Para la altura del centro de gravedad de un tronco de cono rige la fórmula siguiente:

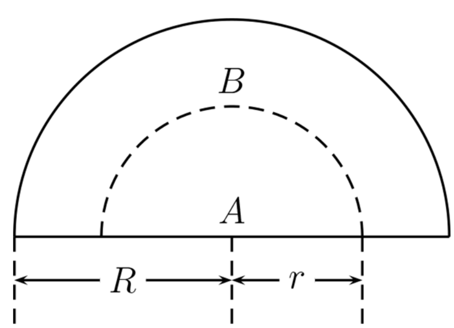
$$X=\frac{R^2+2Rr+3r}{4(R^2+Rr+r^2)}\cdot b$$

¿Qué tanto % de b mide X, si r mide 50% de R ?.

c En un triángulo rectángulo se sabe que el cateto mayor mide 96% de la hipotenusa. ¿Qué tanto % de la hipotenusa mide el cateto menor?.

d La ley de Newton nos da $F=m\cdot a$. ¿Qué tanto % aumenta la aceleración a, si la fuerza F aumenta en 42% y la masa disminuye en 4% ?.

e Las áreas A y B de la figura (**??**) están en la razón $2:3$. Expresar r en tanto % de R.



f ¿En qué tanto % hay que aumentar el radio de una esfera para que su volumen aumente en 33.1% ?.

g Los diámetros de dos cilindros son entre si como $3:4$ y sus alturas como $5:6$. ¿Qué tanto % del volumen del mayor mide el volumen del menor?.

h Determinar dos números enteros consecutivos cuya suma de cuadrados se 128.525.

i Si A hace un trabajo en tres horas y B lo hace en cinco horas. ¿Cuánto tiempo demoran en hacer el trabajo ambos juntos?.

j Hallar tres números consecutivos tales que si el menor se divide entre 20, el mediano entre 27 y el mayor entre 41, la suma de los cocientes es 9.

k A tiene el doble de dinero que B. Si A le da a B 34 pesos. A tendrá los $5/11$ de lo que tenga B. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?.

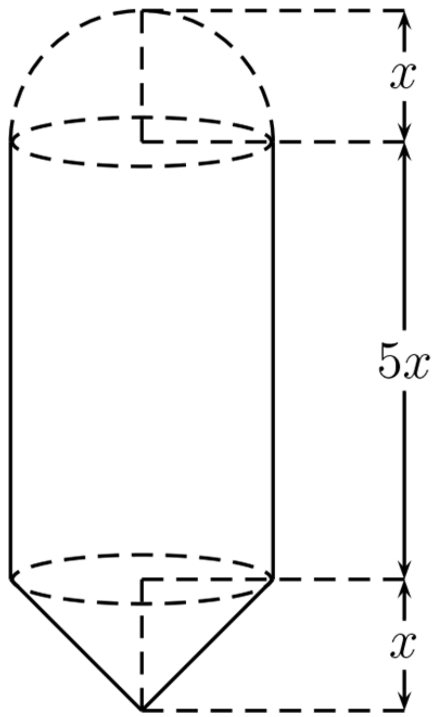
l Dos trabajadores uno de los cuales empieza a trabajar uno y medio días después que el otro, pueden completar un trabajo en 7 días. Si cada uno de ellos hiciera el trabajo individualmente, el primero habría necesitado 3 días más que el segundo que empezó después. ¿Cuántos días tardará cada obrero en realizar el trabajo individualmente?.

m Un ingeniero contrata a un técnico para una cierta labor. Para esto le ofrece un sueldo anual de $500.000 y un lingote de oro. Al cabo de siete meses el técnico termina su trabajo, por lo que recibe $250.000 y el lingote de oro. ¿Cuál es el valor del lingote?.

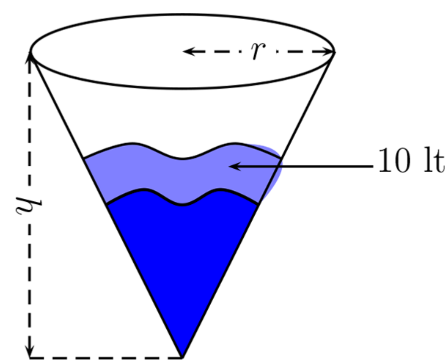
n Un cierto número de estudiantes deben acomodarse en una residencial. Si se ubicaran dos estudiantes por habitación entonces quedarían dos estudiantes sin pieza. Si se ubicaran tres estudiantes por habitación entonces sobrarían dos piezas. ¿Cuántas habitaciones disponibles hay en la residencial y cuántos estudiantes deben acodarse en ella?.

o Cuando el precio de una marca popular de artículos de video es $300 por unidad, una tienda vende 15 unidades a la semana. Sin embargo cada vez que el precio se reduce en $10 las ventas aumentan en 2 unidades a la semana. ¿Qué precio de venta debe ponerse para obtener ingresos semanales de $7.000 ?.

p El cuerpo de la figura (**??**) está formado por una semiesfera, un cilindro y un cono. Calcular x, si el volumen total mide $112,5\pi[cm^3]$.



q Un estanque con cierta cantidad de agua tiene forma de cono invertido. Al agregarle 10 litros, como muestra la figura (**??**), el nivel de agua sube en un 20%. Si la base del cono fuese reducida en un 40%, manteniendo la misma altura resultaría un cono que estaría lleno con la cantidad de agua inicial.



Sabiendo que la altura del estanque es 50 cm. Calcular el radio inicial y el volumen de agua contenido en un comienzo.

10. **Resolver las siguientes inecuaciones**

 a $\dfrac{x-1}{1-x} \leq 2x$

 b $(x+2)(x+1) \leq 0$

 c $\dfrac{x+3}{x} \leq 2$

d $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}\leq 0$

e $x-\dfrac{2x-3}{x}\geq 1-3x$

f $\dfrac{34}{x-4}\leq \dfrac{2}{x-1}-5$

g $\dfrac{x-2}{x+2}\geq \dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x-1}{x^2-4}$

h $\dfrac{13-5x}{x^2+x+1}\leq \dfrac{2}{x-2}$

11. **Resolver las siguientes inecuaciones**

a $\dfrac{2(3|x+26|)}{155(x+6)}<\dfrac{533}{155(5x-1)}$

b $\sqrt{-4x^2+25}\leq 3$

c $\dfrac{\sqrt{2x-1}(x+1)}{(x^2+1)(x-2)}\geq 0$

d $\sqrt{\sqrt{1-x}+1}\leq x-1$

e $\sqrt{2-x}-2\sqrt{x}\leq \sqrt{x-2}$

f $\sqrt{x-2}+3\sqrt{3x+1}\leq \sqrt{5x-2}$

g $\sqrt{1-|x|}>1-3x$

h $\dfrac{x^2+2x+24}{\sqrt{2x+1}(x^2+x+5)}\geq 0$

i $1-\left|\dfrac{1}{x}\right|\geq x$

j $\sqrt{2-|x^2-x|}\leq \sqrt{3}$

k $\dfrac{x}{|x+2|}\leq \dfrac{2}{x(x+2)}$

l $|2-|x-1||\leq 1$

m $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geq |x-3|$

n $\dfrac{||x+3|-2|}{||x|-1|}\geq 2$

o $|x+1|+||x-1|+3|\leq |x+2|+8$

p $\left|1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right|\geq 1$

q $\dfrac{|x-1|-|x+1|}{|x^2-1|}\leq \dfrac{|x-1|}{x+1}$

r $\dfrac{|x-1|(\sqrt{x+3}+|x|)}{|x+3|-|x-4|} \geq 0$

s $3x+1+|x-1| < \sqrt{x}$

12. **Axioma del Supremo**

a Determine el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos

a $A = [-2,3[\cup]5,\sqrt{42}[$

b $A =]-3,0[\cup]\sqrt{4},6]$

c $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$

d $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$

e $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|x|+1} < 2\right\}$

f $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x+1} < 2\right\}$

g $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x}{2} \leq |x-1| \leq \dfrac{9}{2}\right\}$

b Sean

i $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7 < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$

ii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$ y $B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < \dfrac{-1-x(x+1)}{x+1}\right\}$

Encuentre en cada caso (si existen) el Supremo e ínfimo correspondientes a los conjuntos $A, B, A \cup B$ y $A \cap B$.

c Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$ acotado. Se define

$$\begin{aligned} \alpha + A &= \{\alpha + a \mid a \in A\}. \\ \alpha \cdot A &= \{\alpha a \mid a \in A\}. \end{aligned}$$

Demuestre que

i $\alpha + \sup(A) = \sup(\alpha + A)$

ii $\alpha + \inf(A) = \inf(\alpha + A)$

iii Si α es positivo, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$

iv Si α es positivo, entonces $\inf(\alpha A) = \alpha \inf(A)$

v Si α es negativo, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \inf(A)$

vi Si α es negativo, entonces $\inf(\alpha A) = \alpha \sup(A)$

d Sean A, B dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ y

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Demuestre que:

i $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

ii $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$

e Demuestre que si

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{2n}{n+3},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

entonces el $\sup(A) = 2$.

f Demuestre que si

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{2}{3n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

entonces el $\inf(A) = 0$.

g Determine y demuestre si existe el supremo y el ínfimo de

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{2}{n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

h Determine y demuestre si existe el supremo y el ínfimo de

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = (-1)^n \frac{5}{2n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$