Universidad de Valparaíso
CHILE

Apuntes de Cálculo Integral

Daniel Jiménez Briones.

Versión Preliminar.

2021

Valparaíso, 2021.

Índice general

Capítulo 1

Cálculo Integral

1.1. Integral Indefinida

Definición 1 *Sea f una función y F una función derivable tal que satisface la ecuación diferencial $F^{'}(x) = f(x)$, entonces se dice que F es una primitiva o antiderivada de f.*

Proposición 1 *Sea f una función continua en $[a, b]$ entonces f tiene una primitiva.*

Teorema 2 (Valores Extremos) *Sea f una función continua en $[a, b]$, entonces*

1. *f alcanza su valor máximo en $[a, b]$, es decir, existe $h \in [a, b]$ tal que $f(h) = M_h$ y se tiene que para todo $x \in [a, b],\ f(x) \leq M_h$.*

2. *f alcanza su mínimo valor en $[a, b]$, es decir, existe $k \in [a, b]$ tal que $f(k) = N_k$ y se tiene que para todo $x \in [a, b],\ f(x) \geq N_k$.*

Proposición 3 *Sea F, G dos funciones tales que*

$$\textit{Si } F'(x) = G'(x) \textit{ entonces } F(x) = G(x) + C$$

Definición 2 (Integral Indefinida) *Si F es una función tal que $F'(x) = f(x)$ entonces se define la integral indefinida de f igual a $F + C$, y lo denotamos por:*

$$\int f(x)dx := F(x) + C$$

De otro modo

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

Teorema 4 *Sea f, g dos funciones con primitivas,entonces*

1. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2. $\displaystyle\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, *con* $\lambda \in \mathbb{R}$

Algunas Integrales Elementales

$$\begin{aligned}
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad , n \neq -1 \\
\int x^{-1} dx &= \ln \mid x \mid + C \\
\int e^x dx &= e^x + C \\
\int \operatorname{sen}(x) dx &= -\cos(x) + C \\
\int \cos(x) dx &= \operatorname{sen}(x) + C \\
\int \sec(x) dx &= \ln \mid \sec(x) + \tan(x) \mid + C \\
\int \csc(x) dx &= \ln \mid \csc(x) + \cot(x) \mid + C \\
\int \tan(x) dx &= \ln \mid \sec(x) \mid + C \\
\int \cot(x) dx &= \ln \mid \operatorname{sen}(x) \mid + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 1 *Calcular*

$$\int \left(3x + 5x^4 - 6\sin x\right) dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \int \left(3x + 5x^4 - 6\sin x\right) dx \\
= \; & 3\int x dx + 5\int x^4 dx - 6\int \sin x dx \\
= \; & \frac{3}{2}x^2 + x^5 + 6\cos x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 2 *Calcular*

$$\int \left(x^5 - \sqrt{25x^4} - 6\cos x\right) dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \int \left(x^5 - \sqrt{25x^4} - 6\cos x\right) dx \\
= \; & \int \left(x^5 - \sqrt{25x^4} - 6\cos x\right) dx \\
= \; & \frac{1}{6}x^6 - \frac{5}{3}x^3 - 6\sin x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 3 *Calcular*

$$\int \left(\ln x + 6\csc x + x^4 + 7x^5\right) dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \int \left(\ln x + 6\csc x + x^4 + 7x^5\right) dx \\
= & \int \ln x dx + 6\int \csc x dx + \int x^4 dx + \int 7x^5 dx \\
= & \ x\ln x - x + 6\ln\left(\csc x - \cot x\right) + \frac{1}{5}x^5 + \frac{7}{6}x^6 + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 4 *Calcular*

$$\int \left(\frac{3}{x} + 9e^x + \sqrt[7]{x^5}\right) dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{3}{x} + 9e^x + \sqrt[7]{x^5}\right) dx \\
= & \int \frac{3}{x} dx + \int 9e^x dx + \int \sqrt[7]{(x^5)}\, d \\
= & \ 3\ln x + 9e^x + \frac{7}{12}\left(\sqrt[7]{x}\right)^{12} + C
\end{aligned}$$

Teorema 5 (Sustitución) *Sea g una función continuamente diferenciable tal que $g(y) = x$ entonces*

$$\int f(x)dx = \int f(g(y))g'(y)dy$$

Ejemplo 5 *Usando este método integre:*

$$\int \left(\cos\left(x^5 + 5x^7\right)\right)\left(5x^4 + 35x^6\right) dx$$

Solución: *Notemos que*

$$\frac{d}{dx}\sin(x^5 + 5x^7) \quad = \left(\cos\left(x^5 + 5x^7\right)\right)\left(5x^4 + 35x^6\right)$$

Así, $\int \left(\cos\left(x^5 + 5x^7\right)\right)\left(5x^4 + 35x^6\right) dx = \sin(x^5 + 5x^7) + C$

La técnica es visualizar una variable nueva u que permita ver más simple la integral en el caso anterior $u = x^5 + 5x^7$, por lo tanto $du = (5x^4 + 35x^6)\, dx$ y así la integral inicial se puede escribir mucho mas simple como

$$\int \left(\cos\left(x^5 + 5x^7\right)\right)\left(5x^4 + 35x^6\right) dx = \int \cos u du = \sin u + C = \sin\left(x^5 + 5x^7\right) + C$$

Ejemplo 6 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Solución: *Consideremos el cambio de variable* $x = \tan(u)$*, luego tenemos que* $dx = \sec^2(u)du$*, reemplazando tenemos*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{\sec^2(u)du}{(\tan^2(u)+1)^2} \\
&= \int \frac{\sec^2(u)du}{(\sec^2(u))^2} \\
&= \int \cos^2(u)du \\
&= \frac{1}{2}\int (\cos(2u)+1)du \\
&= \frac{1}{4}\sin(2u) + \frac{1}{2}u + C \\
&= \frac{1}{4}\sin(2\arctan(x)) + \frac{1}{2}\arctan(x) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 7 *Usando este método anterior integre*

1. $\int \left(\sin\left(x^5+7x^{15}\right)\right)\left(x^4+21x^{14}\right)dx$ *escoja* $u = x^5+7x^{15}$

2. $\int 4\frac{\ln^3 x}{x}dx$ *escoja* $u = \ln x$

3. $\int \left(\sec\sqrt{x}\right)\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ *escoja* $u = \sqrt{x}$

4. $\int \left(1+\tan^2\left(x^4+4x^3\right)\right)\left(x^3+3x^2\right)dx$ *escoja* $u = x^4+4x^3$

5. $\int \tan x dx$ *escoja* $u = \sec x.$

Ejercicio 8 *Determinar en cada caso las integrales Indefinida*

1. $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

2. $\int a^x dx, \qquad 1 \neq a > 0$

3. $\int \frac{2^x}{1+4^x}dx$

4. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{8x^2+1}}dx$

6. $\displaystyle\int \sqrt[p]{x^q}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx$

8. $\displaystyle\int 4\cos(3y)dy$

9. $\displaystyle\int \cos^2(2y)\operatorname{sen}(2y)dy$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{sen}^4(x))}$

11. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{2+\cos(2x)}}dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+2}dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx$

14. $\displaystyle\int \frac{2x-\sqrt{\operatorname{arc\,sen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\displaystyle\int \frac{e^x+2x}{\sqrt{e^x+x^2+16}}dx$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x(3+e^{-x})}dx$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{3-\ln^2(x)}}dx$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-2x+x^2}}dx$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

Teorema 6 (Integración por Parte) *Sean f, g dos funciones derivables y continuas, entonces se tiene:*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Ejemplo 9 *Usando este método integre*

$$\int x\cos(x)dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int x\cos(x)dx &= \int x\sin'(x)dx \\
&= x\sin x - \int x'\sin(x)dx \\
&= x\sin x - \int 1\sin(x)dx \\
&= x\sin(x) - (-\cos(x)) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 10 *Usando este método integre*

Solución:

$$\begin{aligned}
\int x\sin(x)dx &= -\int x\cos'(x)dx \\
&= -\left(x\cos x - \int x'\cos(x)dx\right) \\
&= -x\cos(x) + \int 1\cos(x)dx \\
&= -x\cos(x) + \sin(x) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 11 *Usando este método integre*

$$\int 2x\ln(x)dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int 2x\ln(x)dx &= \int \ln(x)(x^2)'dx \\
&= x^2\ln x - \int \ln'(x)(x^2)dx \\
&= x^2\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x^2dx \\
&= x^2\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 12

1. $\displaystyle\int \ln(x)dx$

2. $\displaystyle\int x^2 e^x dx$

3. $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}(x)dx$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln(x))dx$

5. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2\arctan(x)}{1+x^2}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}dx$

8. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

Teorema 7 (Algoritmo de la División) *Sean $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, polinomios, entonces existe $D(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que*

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

con $R(x) = 0$ o bien $gr(R(x)) < gr(Q(x)$.

De otro modo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Ejemplo 13 *Calcular*

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x+2}dx$$

Solución: *Aplicando el algoritmo de la división tenemos $x^2+3x+1 = (x+2)(x+1)-1$, de este modo tenemos*

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x+2}dx = \int (x+1)dx + \int \frac{-1}{x+2}dx = \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + C$$

Teorema 8 (Fracciones Parciales) *Sea $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ una fracción tal que $gr(R(x)) \leq gr(Q(x))$*

1. *Sea a una raíz de $Q(x)$ y n su multiplicidad en $Q(x)$ entonces, su descomposición en fracciones parciales aparecen términos de la forma*

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

donde $A_1, \cdots, A_n$ son constantes reales.

2. *Si $(ax^2+bx+c)^n$ es un factor irreducible con $\Delta < 0$, $n \in \mathbb{N}$ entonces en la descomposición en fracciones parciales aparecen términos de la forma*

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

donde $A_1, \cdots, A_n$ y $B_1, \cdots, B_n$ son constantes reales

Ejemplo 14 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{(x+1)(2x+1)}$$

Solución: *Usando el teorema de Fracciones parciales*

$$\frac{1}{(x+1)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1}$$

De otro modo, amplificando se tiene

$$1 = A(2x+1) + B(x+1)$$

luego $A + B = 1$ y $2A + B = 0$, de lo cual se obtiene $A = -1$ y $B = 2$.

$$\frac{1}{(x+1)(2x+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{2x+1}$$

Y la integral.

$$\int \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = -\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{2x+1} = -\ln(x+1) + \ln(2x+1) + C$$

Ejemplo 15 *Calcular*

$$\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}$$

Solución: *Usando el teorema de Fracciones parciales*

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

De otro modo, amplificando se tiene

$$x^2 - 3x + 2 = A(x^2+2x+1) + Bx(x+1) + Cx$$

luego $A+B=1$, $2A+B+C=-3$ *y* $A=2$, *de lo cual se obtiene* $A=2$, $B=-1$ *y* $C=-6$.

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-6}{(x+1)^2}$$

Y la integral.

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)} &= 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - 6\int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= 2\ln(x) - \ln(x+1) + \frac{6}{x+1} + D \end{aligned}$$

Ejemplo 16 *Calcular las integrales*

$$\int \frac{(x^2+x-2)dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

Solución: *Usando el teorema de Fracciones Parciales*

$$\frac{(x^2+x-2)dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

De otro modo, amplificando se tiene

$$x^2+x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

luego $A+B=1$, $B+C=1$ *y* $A+C=-2$, *de lo cual se obtiene* $A=-1$, $B=2$ *y* $C=-1$.

$$\frac{x^2+x-2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2+1}$$

Y la integral.

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2+x-2)dx}{(x+1)(x^2+1)} &= -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\ln(x+1) + \ln(x^2+1) - \arctan(x) + D \end{aligned}$$

Ejemplo 17 *Calcular las integrales*

$$\int \frac{(x^3+x-1)dx}{(x^2+1)^2}$$

Solución: *Usando el teorema de Fracciones Parciales*

$$\frac{(x^3+x-1)dx}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

De otro modo, amplificando se tiene

$$x^3+x-1 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)$$

luego $A = 1$, $B = 0$, $A + C = 1$ *y* $D = -1$, *de lo cual se obtiene* $C = 0$.

$$\frac{(x^3 + x - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{-1}{(x^2 + 1)^2}$$

Y la integral.

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^3 + x - 1)dx}{(x^2 + 1)^2} &= -\int \frac{xdx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{4}\sin(2\arctan(x)) + \frac{1}{2}\arctan(x) + G\end{aligned}$$

Integrales de la forma

$$\int R(\mathrm{sen}(x), \cos(x))dx$$

Donde R es una función racional, utilizando la sustitución

$$t = \tan(\frac{x}{2}),\ \mathrm{sen}(x) = \frac{2t}{1 + t^2},\ \cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

Ejemplo 18 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{2 + \cos(x) + \mathrm{sen}(x)}$$

Solución: *Consideremos* $t = \tan(\frac{x}{2})$, *luego tenemos que*

$$2 + \cos(x) + \mathrm{sen}(x) = 2 + \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{t^2 + 2t + 3}{1 + t^2}$$

Reemplazando tenemos

$$\int \frac{dx}{2 + \cos(x) + \mathrm{sen}(x)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{t^2+2t+3}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{t^2 + 2t + 3}$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{2dt}{t^2 + 2t + 3} &= \int \frac{2dt}{(t + 1)^2 + 2} \\ &= \int \frac{2dt}{(t + 1)^2 + 2} \\ &= \int \frac{\sqrt{2}dy}{y^2 + 1} \\ &= \sqrt{2}\arctan(y) + C \\ &= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(t + 1)\right) + C \\ &= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)\right) + C\end{aligned}$$

Ejercicio 19 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{(2-\cos(x))(3-\cos(x))}$$

Observación: Un caso particular, de la situación anterior, es cuando la función racional cumple con

$$R(\operatorname{sen}(x),\cos(x)) = R(-\operatorname{sen}(x),-\cos(x))$$

en cuyo caso podemos utilizar la sustitución

$$\tan(x)=t,\ \operatorname{sen}(x)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\ \cos(x)=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}},\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

Ejemplo 20 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{(2+\cos^2(x))}$$

Solución: *Usemos el cambio de variable sugerido* $t=\tan(x)$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2+\cos^2(x))} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{(2+\frac{1}{t^2+1})} \\
&= \int \frac{dt}{2t^2+3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dz}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(z) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}t\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan(x)\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 21 *Calcular*

$$\int \frac{(\cos(2x)dx)}{(\cos^4(x)+\operatorname{sen}^4(x))}$$

Integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx^2+dx+e}}$$

Utilizar la sustitución

$$\frac{1}{t}=ax+b,\quad \frac{-dt}{t^2}=adx$$

Ejemplo 22 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$$

Solución: *Consideremos el cambio de variables*

$$\frac{1}{t} = 2x-3, \quad \frac{-dt}{t^2} = 2dx$$

Luego reemplazando en el denominador y obtenemos

$$(2x-3)\sqrt{x(4-x)} = \frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{2t}+\frac{3}{2})(-\frac{1}{2t}+\frac{5}{2})} = \frac{1}{2t^2}\sqrt{(1+3t)(5t-1)}$$

y en la integra obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{15t^2+2t-1}} \\
&= \int \frac{dt}{\frac{4}{\sqrt{15}}(\sqrt{(\frac{15}{4}t+\frac{1}{4})^2-1})} \\
&= \frac{\sqrt{15}}{4}\frac{4}{15}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{15}}\ln(z+\sqrt{z-1})+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left(\frac{15}{4}t+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{15}{4}t-\frac{3}{4}}\right)+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left(\frac{15}{4(2x+3)}+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{15}{4(2x+3)}-\frac{3}{4}}\right)+C
\end{aligned}$$

Ejercicio 23 *Calcular*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$$

Integrales que contienen

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

el cambio de variable a considerar $ax^2+bx+c = (z-x)^2$

Ejemplo 24 *calcular*

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$

Consideremos el cambio de variable $x^2-x+1 = (z-x)^2$ *luego*

$$x = \frac{z^2-1}{2z-1}, \quad dx = -\frac{2z+2}{(2z-1)^2}dz, \quad \sqrt{x^2-x+1} = \frac{z^2-z+1}{2z-1}$$

Ahora reemplacemos

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}} \\
= & \int \frac{-\frac{2z+2}{(2z-1)^2}dz}{\frac{z^2-1}{2z-1}-\frac{z^2-z+1}{2z-1}} \\
= & -2\int \frac{(z+1)dz}{(z-2)(2z-1)} \\
= & 2\int \frac{dz}{2z-1} - 2\int \frac{dz}{z-2} \\
= & \ln(2z-1) - 2\ln(z-2) + C \\
= & \ln(2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1) - 2\ln(x+\sqrt{x^2-x+1}-2) + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 25 *calcular*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$
3. $\displaystyle\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$

Integrales de funciones inversas Sea $f(x)$ una función tal que $F'(x) = f(x)$ y $f^{-1}(x)$ exista y sea continua entonces

$$\int (f^{-1}(x))dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$$

Ejemplo 26

1. $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen}(x)dx = x \operatorname{arc\,sen}(x) + \sqrt{1-x^2}$
2. $\displaystyle\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln \mid 1+x^2 \mid$
3. $\displaystyle\int \ arcsinh(x)dx = x\ arcsinh(x) - \sqrt{1+x^2}$
4. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{x}}dx = x\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \arctan(\sqrt{\frac{1-x}{x}}) + C$
5. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}dx =$

Formula de Reducción

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n(x)dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)dx.$
   Para obtener la igualdad, la haremos utilizando integración por parte, con el siguiente cambio de variables $u = \operatorname{sen}^{n-1}(x)$ y $dv = \operatorname{sen}(x)dx$, luego $du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos(x)dx$ y $v = -\cos(x)$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^n(x)dx &= -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos^2(x)dx \\
\int \operatorname{sen}^n(x)dx &= -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)dx + ... \\
& \quad ... - (n-1)\int \operatorname{sen}^n(x)dx \\
n\int \operatorname{sen}^n(x)dx &= -\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)dx
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \tan^n(x)dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}(x) - \int \tan^{n-2}(x)dx$

3. $\displaystyle\int \sec^n(x)dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}(x)\tan(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(x)dx, \qquad n > 1$

Ejercicio 27

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3(x)\cos^6(x)}$

3. $\displaystyle\int \frac{\cos^7(x)dx}{\operatorname{sen}^5(x)}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4(x)\cos^6(x)}$

1.2. La integral de Riemann

Definición 3

1. Una partición del intervalo $[a, b]$ es un conjunto ordenado $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ tal que $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ y a los puntos t_k se llama punto de corte.

2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición del intervalo $[a,b]$ y sea*

$$M_k = sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$$

$$m_k = inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$$

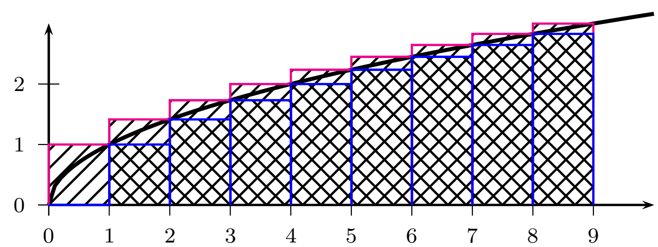
Llamaremos suma superior de f respecto a la partición P al número

$$\overline{s_p} = \sum_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1})$$

y llamaremos suma inferior de f

$$\underline{s_p} = \sum_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1})$$

En la gráfica la suma superior de f esta representada por los rectángulos rojos y la suma inferior de f por los rectángulos azules.



Proposición 9 *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ y $Q = \{s_0, \cdots, s_m\}$ dos particiones del intervalo $[a,b]$ entonces*

$$\underline{s_P} \leq \overline{s_Q}$$

Demostración 9 *Sea $L = \{l_0, \cdots, l_q\} = P \cup Q$ ordenado de menor a mayor entonces $\underline{s_P} \leq \overline{s_L}$ ya que*

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{q} m'_k(l_k - l_{k-1})$$

además $m_k \leq m_{k'}$ donde $l_k \in [t_{k-1}, t_k]$, además

$$\sum M'_k(l_k - l_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{m} M_k(s_k - s_{k-1})$$

ya que $M'_k \leq M_k$ donde $l'_k \in [s_{k-1}, s_k]$

es decir

$$\underline{s_P} \leq \underline{s_L} \leq \overline{s_L} \leq \overline{s_Q}$$

Definición 4 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \quad \inf\{\overline{s_Q} : Q \;\; \textit{partición de} \;\; [a, b]\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \quad \sup \;\; \{\underline{s_Q} : Q \;\; \textit{partición de} \;\; [a, b]\}.$$

La primera integral se denomina **integral superior** *y la segunda* **integral inferior**.

Proposición 10

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Definición 5 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funciónón acotada diremos que f es Riemann integrable si y sólo si*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

este valor común se llama integral de Riemann de f en $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 28 *Determine si las siguientes funciones es Riemann integrable*

1.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \\ 1 & si \;\; x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. $f(x) = \lambda$ *con* $x \in [0, 1]$

Definición 6 *Sea P_n la partición del intervalo $[a, b]$ definida por $t_k = a + (b - a)\frac{k}{n}$*

Proposición 11 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ entonces*

f es Riemann integrable si y sólo si $\forall \epsilon > 0, \exists P,$ partición de $[a, b] : \overline{s_P} - \underline{s_P} < \epsilon$

Corolario 1 *f es Riemann integrable si y sólo si*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}(\overline{s_{P_n}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\underline{s_{P_n}}) \;\; y \;\; \int_a^b f(x)dx = \inf(\overline{s_{P_n}}).$$

Demostración 11 $\underline{\Rightarrow}$

Sea f es Riemann integrable entonces $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(\overline{s_{P_n}}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\underline{s_P}) = A$ *y consideremos* $\epsilon > 0$ *entonces*

$$A - \frac{\epsilon}{2} < A < A + \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto existe P, Q tal que

$$A - \frac{\epsilon}{2} < \underline{s_P} < \underline{s_L} < \overline{s_L} < \overline{s_Q} < A + \frac{\epsilon}{2}$$

Luego

$$-\underline{s_L} < \frac{\epsilon}{2} - A \quad \wedge \quad \overline{s_L} < A + \frac{\epsilon}{2}$$

Entonces

$$\overline{s_L} - \underline{s_L} < \epsilon$$

$\underline{\Leftarrow}$

Supongamos válido que $\underline{\int_a^b} f(x)dx < \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Sea $\epsilon = \text{ínf}\{\overline{s_P}\} - \sup\{\underline{s_P}\} \neq 0$. *Por lo tanto existe una partición tal que* $\overline{s_Q} - \underline{s_Q} < \epsilon$ *entonces*

$$\overline{s_Q} \geq \text{ínf}\{\overline{s_P}\} \quad y \quad \underline{s_Q} \geq \sup\{\underline{s_P}\}$$

Además

$$\epsilon > \overline{s_Q} - \underline{s_Q} \geq \epsilon \qquad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Notación

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Ejemplo 29 *Sea $f(x) = x^3$, Demuestre que f es Riemann integrable en $[0, b]$.*
Solución: *Consideremos la partición* $t_k = b\frac{k}{n}$ *y* $t_k - t_{k-1} = \frac{b}{n}$.

Luego

$$\begin{aligned}
\overline{s_{p_n}} &= \sum \left(\frac{bk}{n}\right)^3 \cdot \frac{b}{n} \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum k^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} \\
&= \frac{b^4}{4} \left(\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{n^4}\right) \\
&= \frac{b^4}{4} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{s_{p_n}} &= \sum \left(\frac{b(k-1)}{n}\right)^3 \frac{b}{n} \\
&= \frac{b^4}{n^4} \sum (k-1)^3 \\
&= \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \\
&= \frac{b^4}{4} \left(1 + \frac{1-2n}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Además

$$\text{ínf}(\overline{s_{p_n}}) = \frac{b^4}{4} = \sup(\underline{s_{p_n}})$$

Por lo tanto

$$\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$$

Ejemplo 30 *Sea f una función decreciente en $[a,b]$. Demuestre que f es Riemann integrable.*
Solución: *Consideremos la partición $t_k = a + (b-a)\frac{k}{n}$ y $t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n}$.*

$$\overline{s_{p_n}} = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})$$

$$\underline{s_{p_n}} = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

Luego

$$\overline{s_{p_n}} - \underline{s_{p_n}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(t_{k-1}) - f(t_k)) = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b))$$

Sea $\epsilon > 0$, por propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{(b-a)(f(a)-f(b))}{\epsilon} < n$$

Entonces $\overline{s_{p_n}} - \underline{s_{p_n}} < \epsilon$ y por proposición anterior es Riemann Integrable.

Definición 7 *Sea P una partición de $[a,b]$, f una función acotada en $[a,b]$*

1. *Sea $l_k \in [t_{k-1}, t_k]$, se define la suma de Riemann como $\sum\limits_{k=1}^{n} f(l_k)(t_k - t_{k-1})$*

2. *Se define la norma de P, como el máximo valor de $t_k - t_{k-1}$ y se denota por $\parallel P \parallel$, es decir*

$$\parallel P \parallel = \text{máx}\{t_k - t_{k-1} \mid t_k, t_{k-1} \in P\}$$

Proposición 12 *Sea f una función acotada en $[a,b]$.*

f es Riemann integrable si y sólo si $\lim_{\|P\|\to 0}(\sum_{k=1}^{n} f(l_k)(t_k - t_{k-1}))$ existe.

Es decir, si existe I tal que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P = \{t_0, \cdots, t_n\} \ \text{partición})(\forall l_1, \cdots, l_n \ \text{puntos intermedios})$$

se tiene que

$$\| P \| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(l_k)(t_k - t_{k-1}) - I \right| < \epsilon.$$

Además $I = \int_a^b f(x)dx$

Ejemplo 31

1. *Veamos la Integral*

$$\int_0^b x^3 dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} \int_0^b x^3 dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \cdot \left(\left(\frac{b}{n}\right)^3 + \left(\frac{2b}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{nb}{n}\right)^3 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{n^4} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \right) \\ &= \frac{b^4}{4} \end{aligned}$$

2. *Veamos la Integral*

$$\int_0^b e^x dx$$

Solución: *Debemos tener presente que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.*

Ahora veamos

$$\begin{aligned} \int_0^b e^x dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n}(e^{\frac{b}{n}} + e^{\frac{2b}{n}} + \cdots + e^{\frac{nb}{n}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} e^{\frac{b}{n}} \frac{e^{\frac{nb}{n}} - 1}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= (e^b - 1) \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \frac{e^{\frac{b}{n}}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= (e^b - 1) \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{b}{n}}}{\frac{e^{\frac{b}{n}} - 1}{\frac{b}{n}}} \\ &= e^b - 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 32 *Sea f Riemann integrable en $[a,b]$ entonces f es Riemann integrable en $[c,d] \subseteq [a,b]$*

Proposición 13 *Sean f, g Riemann integrable en $[a,b]$ entonces*

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, *con* $c \in [a,b]$.

Definición 8 *Un conjunto A se dice que A es contable si y solo si existe una función biyectiva A con $\mathbb{N}$ o A es finito*

Ejemplo 33

1. $\mathbb{N}$ *es contable*

2.
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{2} & , \textit{ si } x = \textit{ es par} \\ \frac{1-x}{2} & , \textit{ si } x \neq \textit{ es impar} \end{array} \right. \end{array}$$

   Luego $\mathbb{Z}$ es contable.

3.
$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & (\frac{n(n+1)}{2} - x, \frac{n(n-1)}{2} - x), \quad \textit{con} \quad \frac{n(n-1)}{2} < x \leq \frac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

   Luego $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es contable.

Proposición 14 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, supongamos que f es discontinua sólo en un subconjunto contable de $[a,b]$ entonces f es Riemann Integrable en $[a,b]$*

Proposición 15 *Sea $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y supongamos que ambas funciones son Riemann integrables y que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b] - A$ en donde A es un conjunto contable entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Proposición 16 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y acotada en $[a,b]$ entonces la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad x \in [a,b]$$

es diferenciable y además $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Ejercicio 34 *En cada caso. Calcular $F'(x)$*

1. $F(x) = \displaystyle\int_a^x \operatorname{sen}(t)dt$
2. $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^2} \operatorname{sen}(t)dt$
3. $F(x) = \displaystyle\int_x^{4x^2} \cos(\sqrt{t})dt$

Proposición 17 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y suponga que existe una función g tal que $g'(x) = f(x)$, con $x \in [a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Proposición 18 *Sea $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \leq g(x)$ entonces:*

1. $f \geq 0$ *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. $f \geq 0$ *entonces* $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0 \text{ si y sólo si } f = 0\right)$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
4. $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |\, f(x)\,|\, dx$

Proposición 19 *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable y tal que g' sea continua y además $f : Rec(g) \to \mathbb{R}$ continua entonces*

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Ejemplo 35 *Calcular las integrales* $\displaystyle\int_1^4 2x\operatorname{sen}(x^2)dx$,

Solución: *Para ello usamos la sustitución $g(x) = x^2$, luego $g'(x) = 2x$ reemplazando obtenemos*

$$\begin{aligned}
\int_1^4 2x\operatorname{sen}(x^2)dx &= \int_1^4 \operatorname{sen}(g(x)) \cdot g'(x)dx \\
&= \int_1^{16} \operatorname{sen}(u)du \\
&= -\cos(16) + \cos(1)
\end{aligned}$$

Ejemplo 36 *Calcular las integrales* $\displaystyle\int_2^5 \frac{\ln(z)dz}{z}$.

Solución: *Para ello usamos la sustitución* $u = \ln(z)$, *luego* $du = \frac{1}{z}dz$ *reemplazando obtenemos*

$$\int_2^5 \frac{\ln(z)dz}{z} = \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} udu = \frac{1}{2}(\ln^2(5) - \ln^2(2)) = \frac{1}{2}\ln(10)\cdot\ln(\frac{5}{2})$$

Ejemplo 37 *Calcular*

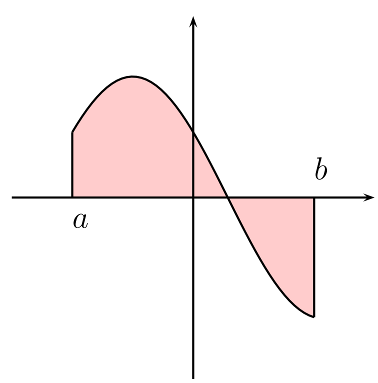
$$\int_{-3}^{4} x|x+1|dx$$

Solución: *Notemos que* $x+1<0$, *cuando* $x<-1$.

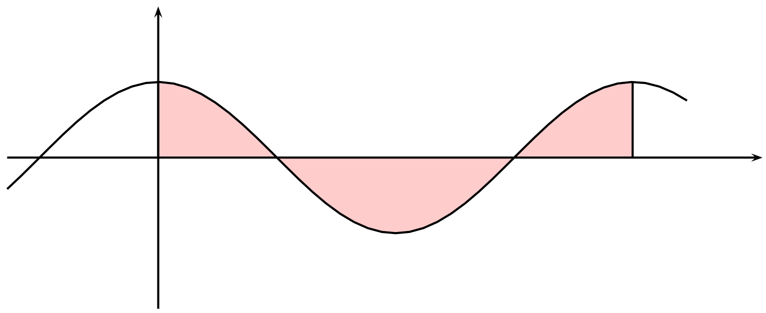
$$\begin{aligned}\int_{-3}^{4} x|x+1|dx &= \int_{-3}^{-1} x|x+1|dx + \int_{-1}^{4} x|x+1|dx\\ &= -\int_{-3}^{-1}(x^2+x)dx + \int_{-1}^{4}(x^2+x)dx\\ &= -(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-3}^{-1} + (\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{4} = 24{,}5\end{aligned}$$

1.3. Aplicación Integral Área

Sea f una función de Riemann integrable de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, se define el área encerrada por la curva y las rectas $x=a$; $x=b$; $y=0$ en $\int_a^b \mid f(x) \mid dx$, es decir, el área encerrada o achurada de la figura



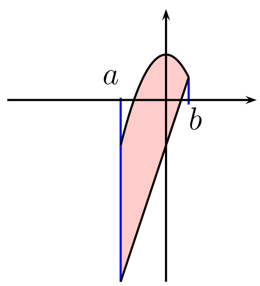
Ejemplo 38 *Hallar el área encerrada por las curvas* $y=\cos(x)$ *entre* 0 *y* 2π, *limitada por el eje* x



Ahora por simetría podemos calcular

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(x))dx = 4\,\mathrm{sen}(\pi/2) = 4$$

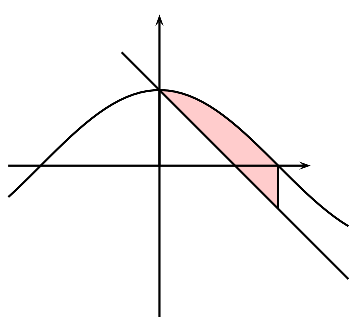
Proposición 20 *Dadas f, g dos funciones integrables tales que, para todo $x \in [a,b]$ se tiene que $f(x) \leq g(x)$*



entonces el área encerrada por las curvas es

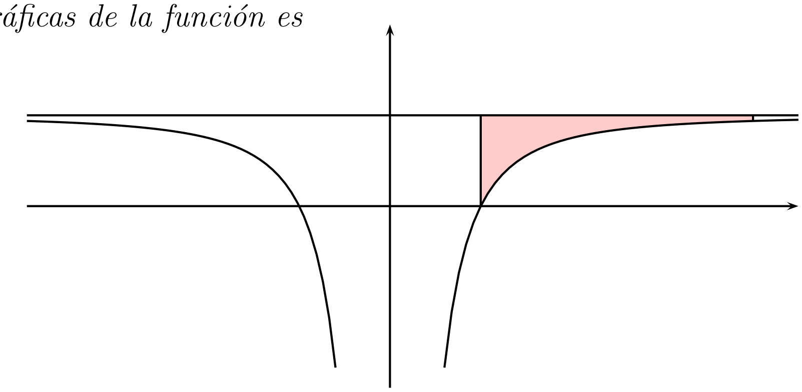
$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

Ejemplo 39 *Hallar el área encerrada por las curvas $y = \cos(x)$ y las rectas $y = -x + 1$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.*
Solución: *La gráficas de la función es*



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(x))dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x+1)dx = 1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}$$

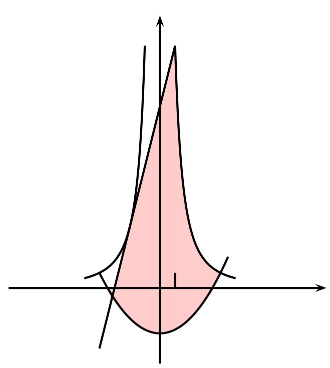
Ejemplo 40 *Hallar el área encerrada por las rectas* $y = 1; x = 1; x = 4$ *y la curva* $x^2y = x^2 - 1$
Solución: *La gráficas de la función es*



$$\int_1^4 1 \cdot dx - \int_1^4 1 - \frac{1}{x^2} = \int_1^4 \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^4 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 41 *Hallar el área encerrada por las curvas* $y = \frac{16}{x^2}$, $4y = x^2 - 12$, $y = 4x + 12$ *que contiene al origen*
Solución: *La ecuación* $\frac{16}{x^2} = 4x + 12$*, las soluciones son* $1, -2$*, la otra intersección es* $4\frac{16}{x^2} = x^2 - 12$ *y los puntos de intersección son* $-4, 4$*. Finalmente* $4(4x + 12) = x^2 - 12$*, nos entrega las soluciones* $8 \pm 2\sqrt{31}$*.*

La gráficas de la función es



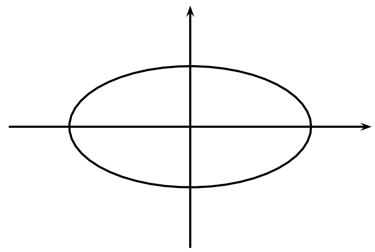
$$\int_{x_0}^1 \left(4x + 12 - \frac{x^2 - 12}{4}\right) dx + \int_1^4 \left(\frac{16}{x^2} - \frac{x^2 - 12}{4}\right) dx$$

1.3.1. Cálculo de área en coordenadas paramétricas

Dada la curva Γ, parametrizada en coordenadas paramétricas dada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, es decir, $\Gamma = \{(x(t), y(y)) \mid a \leq t \leq b \}$. Entonces el área limitada por Γ y eje x esta dada por

$$\int_a^b \mid y(t)x^{'}(t) \mid dt$$

Ejemplo 42 *Calcular el área limitada por la curva* $x = a\cos(t)$, $y = b\,\mathrm{sen}(t)$



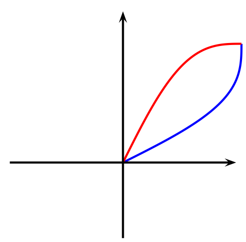
Basta calcular en el primer cuadrante.

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ba\,\mathrm{sen}^2(t)dt = \frac{4ba}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(2t)dt = 2ba(t-\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab \quad [u^2]$$

Ejemplo 43 *Calcule el área de la superficie limitada por la curva dada en forma paramétrica por*

$$\left\{\begin{array}{l} y = t \\ x = t+\mathrm{sen}(t) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t+\mathrm{sen}(t) \end{array}\right.$$

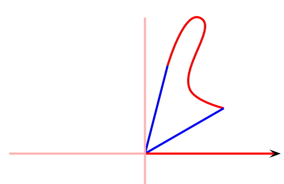
que contiene al punto $(1,1)$



$$\int_0^{\pi}(t+\mathrm{sen}(t))dt - \int_0^{\pi} t(1+\cos(t))dt = 4 \quad [u^2]$$

1.3.2. Cálculo de área en Coordenadas Polares

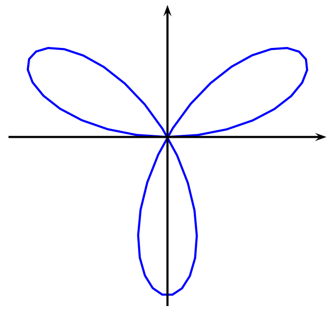
Sea $\gamma = \varphi(\theta)$ una curva en coordenadas polares



Se define el área de la superficie limitada por los rayos $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ y la curva $\gamma = \varphi(\theta)$ en coordenadas polares como

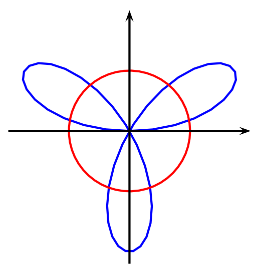
$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2 d\theta$$

Ejemplo 44 *Hallar el área limitada por la curva* $\gamma = 3\,\mathrm{sen}(3\theta)$



$$3\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{sen}^2(3\theta)=\frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos(6\theta))d\theta=\frac{3}{4}a^2(\theta-\frac{\mathrm{sen}(6\theta)}{6})\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

Ejemplo 45 *Hallar el área encerrada que es interior a la curva* $\gamma = 2\,\mathrm{sen}(3\theta)$ *y exterior al circulo* $\gamma = 1$



$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}}(2\,\mathrm{sen}(3\theta))^2d\theta-\frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}}1\cdot d\theta &= 6\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}}\mathrm{sen}^2(3\theta))d\theta-\frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}}d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}}(\frac{3}{2}-6\cos(6\theta))d\theta\\ &= (\frac{3}{2}\theta-\mathrm{sen}(6\theta))\Big|_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{5\pi}{18}}=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Ejemplo 46 *Calcular el área que esta limitada por las curvas* $\gamma = 1-\cos(\theta)$ *y* $\gamma = \cos(\theta)$

1.4. Integrales Impropias

Definición 9 *Sea* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *es continua*

1. *Se define la integrales impropias de primera especie de* f *a*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

siempre que exista el limite.

Si existe, se dice que la integral es convergente y en caso contrario se dice que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *diverge.*

2. *Se dice que la integrales* $\int_a^b f(x)dx$ *es impropias de segunda especie cuando* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$.

   Y esta definida por
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx.$$
   Si existe, se dice que la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ *es convergente, si no se dice que diverge.*

Ejemplo 47 *Analice el integral impropia* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$

Solución: *Veamos primero,*
$$\int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln(b)$$
Además $\lim\limits_{b\to\infty}\ln(b)$ *no existe, por ello la* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ *es divergente.*

Ejemplo 48 *Analice el integral impropia* $\displaystyle\int_1^\infty x^{-s}dx$*, con* $s \neq 1$

Solución: *Calculemos la integral*
$$\int_1^b x^{-s}dx = \frac{1}{1-s}(b^{1-s}-1)$$
Pero
$$\lim_{b\to\infty} b^{1-s} = \begin{cases} 0 & , \quad si \quad 1 < s \\ \nexists & , \quad si \quad 1 > s \end{cases}$$
Por lo tanto
$$\int_1^\infty x^{-s}dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & si \quad s < 1 \\ \nexists, & si \quad s > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 49 *Analice la siguiente integral*
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$$
Solución: *Para la siguiente integral, podemos hacerla una poco mas reducida los pasos*
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \arctan(x)|_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\arctan(b) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 50 *Analice la siguiente integral*

$$\int_{-\infty}^{1} e^x dx$$

Solución: *Para la siguiente integral, podemos hacerla una poco mas reducida los pasos*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{1} e^x dx &= \lim_{b\to -\infty} \int_{b}^{1} e^x dx \\ &= \lim_{b\to -\infty} e^x|_b^1 \\ &= \lim_{b\to -\infty} e - e^b = e\end{aligned}$$

Proposición 21 *Sean* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ *continua, tal que* $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$ *y* $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \infty$.
Si $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

1. *Si* $c \neq 0$
$\int_a^b g(x)dx$ *converge si y sólo si* $\int_a^b f(x)dx$ *converge*
2. *Si* $c = 0$
   a) *Si* $\int_a^b g(x)dx$ *converge entonces* $\int_a^b f(x)dx$ *converge*
   b) *Si* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge entonces* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge*

Proposición 22 *Sean* $A = [a, \infty[$ *o bien* $A = [a, b[$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ *funciones continua y que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$ *y la integral impropia de* $g(x)$ *es convergente entonces la integral impropia de* $f(x)$ *también es convergente. Además*

$$0 \leq \int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx$$

o bien

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Proposición 23 *Sean* $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R}^+$ *continua y suponga que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

1. *Si* $c \neq 0$

a) $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ *es convergente si y solo si* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *es convergente.*

2. *Si* $c = 0$

a) *Si* $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ *convergente entonces* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *converge.*

b) *Si* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *diverge entonces* $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ *diverge.*

Ejercicio 51 *Determine la convergencia o divergencia en cada una de las integrales*

1. $\displaystyle\int_0^\infty (3x+1)e^{-2x+5}dx$

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{3x^2+5x^6+e^x-1}}dx$

3. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x+e^{2x}}}dx$

Definición 10 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua y suponga que existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx \quad y \quad \int_c^\infty f(x)dx \quad \text{son convergente}$$

entonces diremos que la integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ *es convergente y anotaremos*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

Proposición 24 *El valor de la integral no depende de c*

Definición 11 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua. Entonces* $\lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^a f(x)dx$ *se le llama valor principal (v.p.) de Cauchy (en el caso que exista) y se anota*

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^a f(x)dx = \ v.p. \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

Ejemplo 52 *Calcular el valor principal si existe de*

$$v.p. \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(x)dx$$

Solución: *Veamos primero la integral* $\int_{-a}^a \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x)\mid_{-a}^a = 0.$

Por lo tanto

$$v.p. \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(x)dx = 0$$

Pero note que

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \operatorname{sen}(x)dx = \lim_{a\to\infty}(-\cos(a)+1) = \nexists$$

Ejercicio 53 *Determine si existe el valor principal de*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Proposición 25 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es convergente. Entonces v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es convergente y se tiene*

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Definición 12

1. *Sea $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continua, tal que $\lim\limits_{x\to a^+} \mid f(x) \mid = \infty$, $\lim\limits_{x\to b^-} \mid f(x) \mid = \infty$ y suponga que existe $c \in]a, b[$ tal que las integrales impropias $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ convergen, entonces*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$$
2. *Sea $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$ continua, tal que $\lim\limits_{x\to a^+} \mid f(x) \mid = \infty$ y suponga que existe $c \in]a, b[$ tal que las integrales impropias $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^\infty f(x)dx$ convergen entonces*
$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$
3. *Sea $f : [a, b] - \{c\} \to \mathbb{R}$ continua, tal que $\lim\limits_{x\to c} \mid f(x) \mid = \infty$ y las integrales impropias $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ son convergen, entonces*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

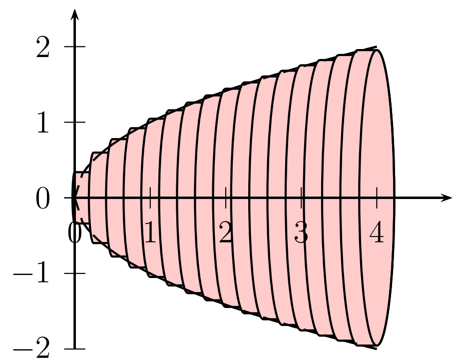
Observación: La definición anterior no depende del valor de c

1.5. Volumen Sólidos de Revolución

1.5.1. Sólido de Revolución entorno al eje x

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de Riemann integrable (continua), se define el volumen del sólido de revolución al girar la superficie limitada por la recta $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ entorno al eje x

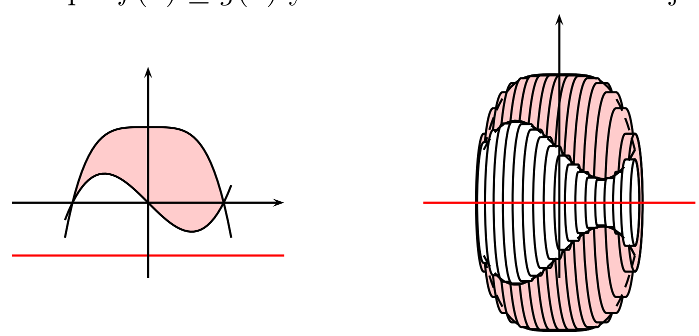
$$\pi \int_a^b f^2(x)dx$$



Observación: La idea intuitiva de esta definición esta en el hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum f^2(x_k) = \int_a^b f^2(x)dx$$

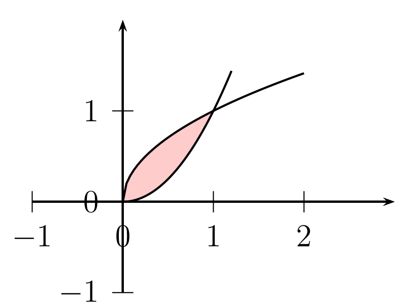
De otro modo para el calculo de volumen Consideremos el área encerrada por las curvas en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) \leq g(x)$ y lo rotaremos en torno al eje $y = c$



El Volumen entonces es

$$\pi \int_a^b \left|(g(x) - c)^2 - (f(x) - c)^2\right| dx$$

Ejemplo 54 *Dadas las curvas* $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$.



1. *Determinar el volumen del sólido de revolución al girar la superficie limitada por las curvas, entorno al eje $y = 0$*

   Solución: $\pi \int_0^1 (x - x^4)dx$

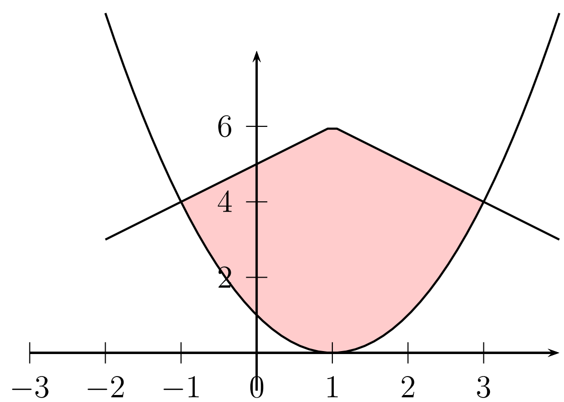
2. *Determinar el volumen del sólido de revolución al girar la superficie limitada por las curvas, entorno al eje $y = 2$*

   Solución: $\pi \int_0^1 (2 - x^2)^2 - (2 - \sqrt{x})^2 dx$

3. *Determinar el volumen del sólido de revolución al girar la superficie limitada por las curvas, entorno al eje $y = -3$*

   Solución: $\pi \int_0^1 (3 + \sqrt{x})^2 - (3 - x^2)^2 dx$

Ejemplo 55 *Dada la superficie encerrada por las curvas $y = (x-1)^2$ e $y = 6- \mid 1 - x \mid$.*



1. *Calcular el volumen al girar esta superficie entorno al eje $y = 0$.*

   Solución: *Calculemos los interceptos*

$$
\begin{array}{rcl}
(x-1)^2 & = & 6- \mid 1-x \mid \quad \text{sea} \quad u = \mid 1-x \mid \\
u^2 & = & 6-u \\
u^2+u-6 & = & 0 \\
u=-3 & \vee & u=2 \\
\mid 1-x \mid & = & 2 \\
1-x=2 & \vee & 1-x=-2 \\
x=-1 & \vee & x=3
\end{array}
$$

Además en 1, la función $y = 6- \mid 1 - x \mid$, se expresa mas simple.

Luego tenemos que

$$\pi\int_{-1}^{1}((x+5)^2-(x-1)^4)dx+\pi\int_{1}^{3}((-x+7)^2-(x-1)^4)dx$$

2. *Calcular el volumen al girar esta superficie entorno al eje $y=-5$*

$$\begin{aligned}&\pi\int_{-1}^{1}(x+10)^2-((x-1)^2+5)^2dx+\pi\int_{1}^{3}(-x+12)^2-((x-1)^2+5)^2dx\\&=\pi\int_{-1}^{1}(x+10)^2dx+\pi\int_{1}^{3}(-x+12)^2dx-\pi\int_{-1}^{3}((x-1)^2+5)^2dx\end{aligned}$$

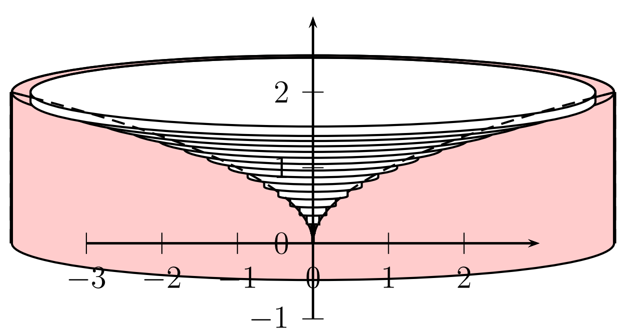
3. *Calcular el volumen al girar esta superficie entorno al eje $y=8$*

$$\pi\int_{-1}^{3}(8-(x-1)^2)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}(3-x)^2dx-\pi\int_{1}^{3}(1+x)^2dx$$

1.5.2. Sólido de revolución entorno al eje y

Se define el volumen del sólido de revolución de la superficie encerrada por las curvas $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ entorno al eje y

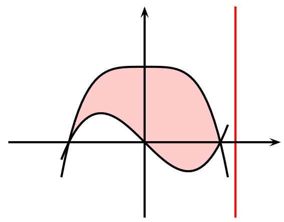
$$2\pi\int_{a}^{b}\mid xf(x)\mid dx$$



Observación: La idea intuitiva de esta definición esta en el hecho de que

$$\lim 2\pi\frac{1}{n}\sum t_kf(t_k)=2\pi\int_{a}^{b}xf(x)dx$$

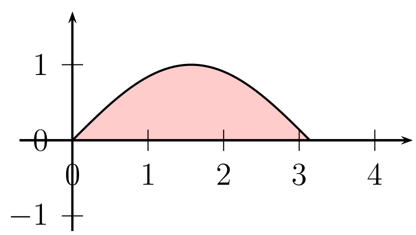
De otro modo para el calculo de volumen, consideremos el área encerrada por las curvas en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(x)\le g(x)$ y lo rotaremos en torno al eje $x=c$



El Volumen entonces es

$$2\pi \int_a^b (g(x) - f(x))|x - c|dx$$

Ejemplo 56 *Dada la región encerrada por* $y = \operatorname{sen}(x)$ *e* $y = 0$ *entre* 0 *y* π*, calcule el volumen del sólido revolución en cada caso*



1. *Calcular el volumen al girar esta superficie entorno al eje* $x = 0$

   Solución: $2\pi \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(x)dx$

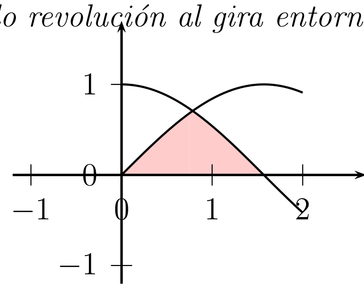
2. *Calcular el volumen al girar esta superficie entorno al eje* $x = -3$

   Solución: $2\pi \int_0^{\pi} (x + 3) \operatorname{sen}(x)dx$

3. *Calcular el volumen al girar esta superficie entorno al eje* $x = 7$

   Solución: $2\pi \int_0^{\pi} (7 - x) \operatorname{sen}(x)dx$

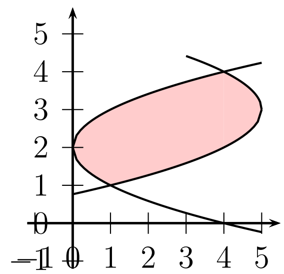
Ejemplo 57 *Dada la region limitada por* $y = \operatorname{sen}(x), \quad y = \cos(x)$ *entre* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$*.*
Calcule el volumen del sólido revolución al gira entorno a $x = 0$



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{sen}(x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x)dx$$

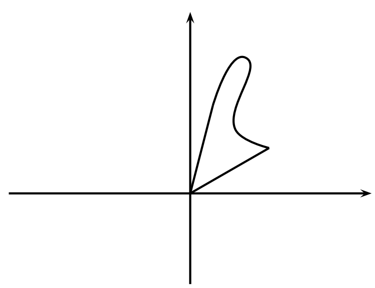
Ejercicio 58 *Dada la region limitada por* $x = (y-2)^2,\ \ x = 5-(y-3)^2$ *curvas, calcule el volumen del sólido de revolución entorno a*

1. *al eje* y
2. *al eje* x



1.5.3. Sólidos de Revolución Coordenadas Polares

Sea $r = \varphi(\theta)$ una curva en coordenadas polares



Se define el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la superficie limitada por los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y la curva $r = \varphi(\theta)$ con $\alpha \leq \theta \leq \beta$

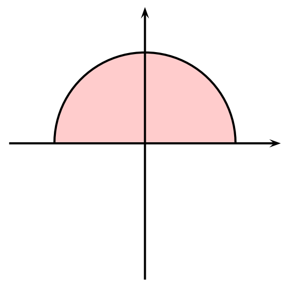
1. Entorno al eje polar

$$\frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \mid \varphi^3(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \mid d\theta$$

2. Entorno al eje perpendicular

$$\frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \mid \varphi^3(\theta)\cos(\theta) \mid d\theta$$

Ejemplo 59 *Dada la curva* $\gamma = a$, *girar entorno al eje polar.*

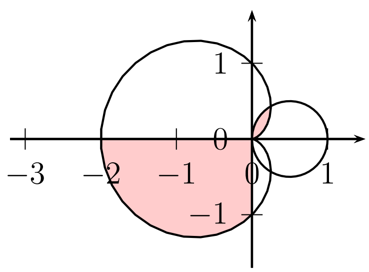


El volumen esta dado por $\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3\operatorname{sen}(\theta)d\theta$.

Ejemplo 60 *Dadas las curvas* $r = 1 - \cos(\theta)$, $r = \cos(\theta)$.

Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la superficie achurada el eje perpendicular y al eje polar.

Solución: *La gráfica de las curvas corresponde a:*



El volumen al girar respecto al eje perpendicular corresponde

$$\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos(\theta))^3\cos(\theta)d\theta + \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)^4 d\theta + \frac{2\pi}{3}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos(\theta))\cos(\theta)^3 d\theta$$

El volumen al girar respecto al eje polar corresponde a

$$\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos(\theta))^3\operatorname{sen}(\theta)d\theta + \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)^3\operatorname{sen}(\theta)d\theta + \frac{2\pi}{3}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(1-\operatorname{sen}(\theta))\cos(\theta)^3 d\theta$$

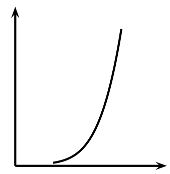
1.6. Longitud de una curva

1.6.1. En coordenadas cartesianas

Dada la curva $y = f(x)$, y $x \in [a, b]$, se define la longitud de la curva al número .

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx$$

Ejemplo 61 *Calcular la longitud de la curva* $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ *en el intervalo* $[1, 4]$



Solución: *Veamos primero la derivada y el cuadrado correspondiente*

$$y' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}; \qquad (y')^2 + 1 = \frac{1}{4}(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}) = \frac{1}{4}(x^2 + \frac{1}{x^2})^2$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} \int_1^4 \sqrt{(y')^2 + 1}dx &= \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 + \frac{1}{x^2})^2}dx \\ &= \int_1^4 \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{x^2})dx \\ &= \frac{4095}{384} \end{aligned}$$

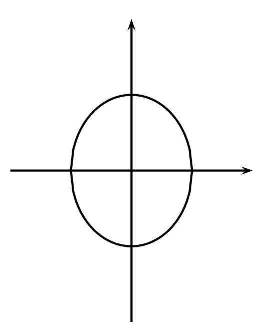
De este modo , el largo de la curva es $\frac{4095}{384}$.

1.6.2. En coordenadas paramétricas

Dada la curva $x = x(t)$ e $y = y(t)$ tenemos

$$\int_{x(a)}^{x(b)} \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

Ejemplo 62 *Dada la curva* $x(t) = r\cos(t)$, $y(t) = r\,\mathrm{sen}(t)$.
Determinar la longitud de la curva.

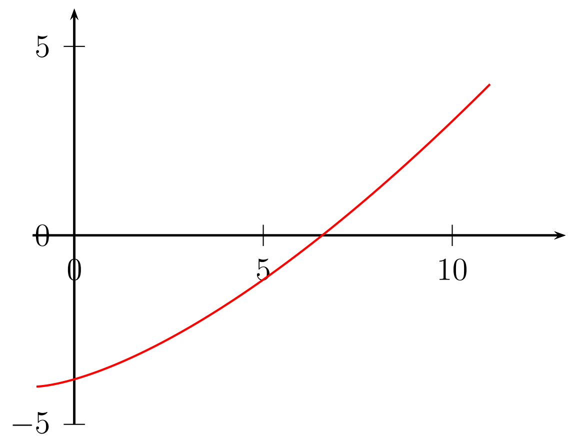


Solución: Veamos la primero

$$x'(t) = -r\,\mathrm{sen}(t), \;\; y'(t) = r\cos(t)$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t))}dt = (rt) \mid_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Ejemplo 63 *Dada la curva* $x(t) = 3t^2 - 1, \quad y(t) = t^3 - 4,$ *con* $0 \leq t \leq 2$
Determinara la longitud de curva



Solución: *Veamos la derivada*

$$x'(t) = 6t, \quad y'(t) = 3t^2$$

Luego reemplazando tenemos

$$\int_0^2 \sqrt{(6t)^2 + (3t^2)^2}dt = \int_0^2 3t\sqrt{4+t^2}dt = \frac{3}{2}\int_4^8 \sqrt{z}dz = 8(\sqrt{8}-1).$$

Luego la longitud de la curva pedida es $8(\sqrt{8}-1)$

1.6.3. En coordenadas polares

Dada la curva $r = \varphi(\theta)$ con $\alpha \leq \theta \leq \beta$ se define la longitud de la curva a

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)}d\theta$$

1.7. Area de una superficie de revolución

Es importante tener cuidada con las tapa, ya que la integrales mide solo los mantos

1.7.1. En coordenadas cartesianas

Dada la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ el area de la superficie del solido de revolución, que se obtiene al girar de superficie limitada por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, eje x , $x = a, x = b$

1. Entorno al eje x

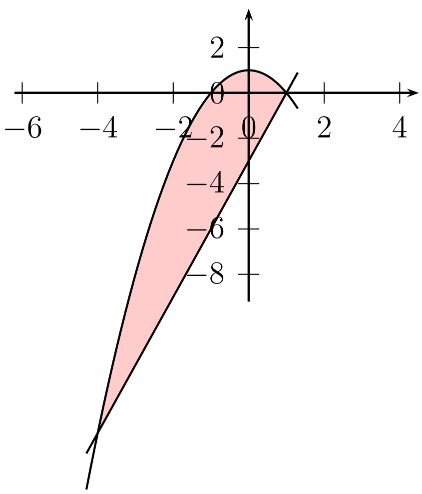
$$2\pi\int_a^b \mid f(x) \mid \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

2. Entorno al eje y

$$2\pi \int_a^b |\, x \,| \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Ejemplo 64 *Dada la región limitada por las curvas $y = 3x - 3$, $y = 1 - x^2$. Determinar el área de la superficie al girar entorno a*

1. *Entorno a $x = -3$*
2. *Entorno a $y = -4$*



Solución:

1. Entorno a $x = -3$

$$2\pi \int_{-2}^{1} (3 + x)\sqrt{1 + 4x^2}dx + 2\pi \int_0^1 (3 + x)\sqrt{10}dx + \pi(9 - 1)$$

2. Entorno a $y = -4$

$$2\pi \int_{-2}^{1} (5 - x^2)\sqrt{1 + 4x^2}dx + 2\pi \int_0^1 (1 + 3x)\sqrt{10}dx + 4\pi$$

1.7.2. En coordenadas paramétricas

1. Entorno al eje x, con $(x(t), y(t))$ y $t \in [a, b]$

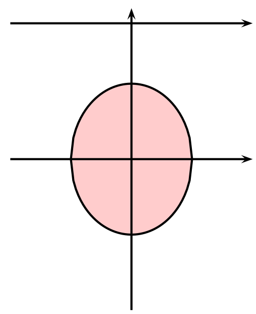
$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

2. Entorno al eje y, con $(x(t), y(t))$ y $t \in [a, b]$

$$2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

Ejemplo 65 *Dada la región limitada por las curvas* $x(t) = r\cos(t)$, $y(t) = r\operatorname{sen}(t)$, *con* $l > r$.

Determinar el área de la superficie al girar entorno a la recta $y = l$



Solución: Veamos la primera parte, sobre el eje x

$$2\pi\int_0^{\pi}(l - r\operatorname{sen}(t))\sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)}dt = 2\pi r(lt + r\cos(t)) \mid_0^{\pi} = 2\pi r(l\pi + 2r)$$

Veamos la segunda parte, bajo el eje x

$$2\pi r\int_{\pi}^{2\pi}(l + r\operatorname{sen}(t))\sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)}dt = 2\pi r(lt - r\cos(t)) \mid_{\pi}^{2\pi} = 2\pi r(l\pi)$$

Luego el área de la superficie corresponde

$$A_S = 2\pi r(\pi l + 2r + \pi l) = 4\pi r(\pi l + r)$$

1.7.3. En coordenadas polares

1. Entorno al eje polar, con $r = \varphi(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$

$$2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\sqrt{\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)}d\theta$$

2. Entorno al eje perpendicular, con $r = \varphi(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$

$$2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\theta)\cos(\theta)\sqrt{\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)}d\theta$$

Capítulo 2

Series Numéricas

2.1. Sucesiones Reales

Definición 13 *Una sucesión de números reales es una función del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.*

Notación 1 *Dada una sucesión, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, suele emplearse una notación especial para representarla. Dado $n \in \mathbb{N}$ suele representarse el número real $f(n)$ en la forma $x_n = f(n)$. La sucesión misma se representa por $f = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Cuando no hay posibilidad de confusión, escribimos simplemente $\{x_n\}$ en vez de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Conviene insistir en no confundir la sucesión con el recorrido.*

El número x_n se llama término n-ésimo de la sucesión; para $n = 1; 2; 3$ se habla respectivamente de primero, segundo, tercer término de la sucesión.

2.1.1. Sucesiones convergentes

Definición 14 *Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que converge a un número real x si, dado cualquier número real $\epsilon >0$, existe un número natural N tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que N se cumple que $|x_n - x| < \epsilon$. Simbólicamente:*

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(|x_n - x| < \epsilon$$

Se dice también que el número x es límite de la sucesión $\{x_n\}$, y se escribe $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Teniendo en cuenta que la desigualdad $|x_n - x| < \epsilon$ equivale a la doble desigualdad $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ o, lo que es igual, $x_n \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$, la definición anterior lo que dice es que $\{x_n\}$ converge a x cuando, dado cualquier intervalo abierto $]x - \epsilon, x + \epsilon[$, se verifica que todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante están en dicho intervalo.

Proposición 26 *El límite es único si existe.*

Ejemplo 66 *La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ es convergente a cero.*
Sea $r \in]-1, 1[$. La sucesión $\{r^n\}$ es convergente a cero.
La sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente.

Proposición 27 *Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones convergentes y $c \in \mathbb{R}$ entonces*

$$\lim(cy_n) = c \lim y_n$$

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$$

Además si $y_n \neq 0$ a partir de un $N_0 \in \mathbb{N}$

$$\lim(x_n \div y_n) = \lim x_n \div \lim y_n$$

Proposición 28 *Sean $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, sucesiones tales que $\lim x_n = A = \lim z_n$ y*

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((n > N) \Rightarrow (x_n \leq y_n \leq z_n)$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A$$

Ejemplo 67 *La sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$ es convergente a uno.*
Solución: *Considere la desigualdad $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$*

Definición 15 *Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:*

Acotada Superiormente *si su conjunto imagen está acotado superiormente, es decir, si hay un número $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Acotada Inferiormente *si su conjunto imagen está acotado inferiormente, es decir, si hay un número $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

Acotada *si su conjunto imagen está acotado Superiormente e Inferiormente, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

Creciente *si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Estrictamente Creciente *si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

Decreciente *si $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Estrictamente Decreciente *si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

Monótona *si es creciente o decreciente.*

Estrictamente monótona *si es estrictamente creciente o decreciente.*

Proposición 29 *Toda sucesión convergente está acotada.*
Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Ejercicio 68 *Determinar el límite de las siguiente sucesiones si existe.*

1. $x_n = \frac{3n+5}{4n-7}$, $n \in \mathbb{N}$
2. $x_n = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^+$
3. $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}^n$, $n \in \mathbb{N}$
4. $x_n = n(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$
5. $x_n = \sqrt{n^2+3n+8} - n$, $n \in \mathbb{N}$

Definición 16 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; dada una aplicación $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{g(n)}$ se representa por $\{x_{g(n)}\}$ y se dice que es una subsucesión de $\{x_n\}$. Observa que $\{x_n\}$ no es otra cosa que la composición de las aplicaciones $\{x_n\}$ y , g esto es, $\{x_{g(n)}\} = \{x_n\} \circ g$.*

Proposición 30 *Si $\{x_n\}$ converge a x, toda subsucesión de $\{x_n\}$ también converge a x.*

Ejemplo 69 *Estudiar la convergencia de*

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}, \qquad x_n = \frac{2n+(-1)^n(n+2)}{7n+3}$$

Teorema 31 *Sean $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $a, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. entonces son equivalente las siguiente afirmaciones:*

i. $\lim_{x\to a} f(x) = L$

ii. *Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ con $x_n \in A$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.*

Ejemplo 70 *Sea $\lim_{x\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^r - 1}{x_n} = r$$

2.2. Serie Numéricas

Definición 17 *Dada la sucesión reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se puede formar la "sucesión de sumas parciales"*

$$\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

llamada serie de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o ***serie numérica****.*

Notación 2 $\{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}_{n\in\mathbb{N}}$;

Ejemplo 71 *Algunos ejemplos de serie numéricas*

1. $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$

2. $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}(k)}{k!} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$

3. $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k}{k+1} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Definición 18 *Diremos que la serie $\sum a_n$ converge a S si y sólo si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a S es decir*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Notación:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

Definición 19 *Dada la sucesión de numeros reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,*

1. *Se dice que S la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S$.*

2. *Se dice que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge si y solo si $\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Ejemplo 72 *Dada la progresión geométrica $\{ar^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $r \in]-1,1[$, entonces la serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ar^n$ es convergente.*
Solución: *Para ello*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot r^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

luego el limites

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Por lo tanto $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$ converge a $\frac{a}{1-r}$ si $-1 < r < 1$. o bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = \frac{a}{1-r}$$

Ejercicio 73 *Determine la convergencia de la serie $\sum \left(\frac{-2}{3}\right)^n$.*

Ejemplo 74 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

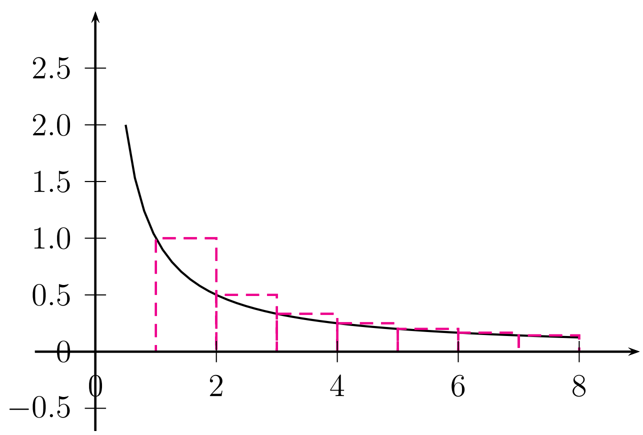
$$S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} \;\geq\; 1 + n\frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} \geq \lim_{n\to\infty} 1 + n\frac{1}{2} = +\infty$$

Luego $\mid S_n \mid_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge. Por lo tanto* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *diverge.*

De otro modo, consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$*, cuya gráfica es*



$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{x} = \ln(n)$$

de lo cual se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$$

Observación: Notemos que la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y la serie $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

Ejemplo 75 *Calcular donde convergente la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Solución: Veremos la suma parciales

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Calculando límite, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Teorema 32 (Álgebra de Serie) *Sean* $\sum a_n, \sum b_n$ *convergen y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *entonces.* $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ *converge y*

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n.$$

Corolario 2 *Si* $\sum a_n$ *converge y* $\sum b_n$ *diverge entonces* $\sum(a_n + b_n)$ *diverge.*

Ejemplo 76 *La serie* $\sum(\frac{1}{n} + \frac{1}{5^n})$ *diverge, ya que* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge y* $\sum \frac{1}{5^n}$ *converge.*

Teorema 33 (Serie Telescópica) *Sean* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de números reales tales que* $a_n = b_n - b_{n+1}$ *entonces*

$$\sum a_n \quad \text{converge si y sólo si} \quad \{b_n\} \quad \text{converge y} \quad \sum a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ejemplo 77 *Demuestre* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k+2)} = 2$,

Solución: Ya que $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, además $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$ y $b_1 = 1$.

Aplicando propiedad telescópica

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2}\right) \\ &= 2 - \frac{2}{n+2} \end{aligned}$$

Calculando el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} &= \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{2}{n+2} \\ &= 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = 2 \end{aligned}$$

Teorema 34 *Dada la sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Si la serie $\sum a_n$ *converge entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *no converge a cero entonces la serie* $\sum a_n$ *diverge*

Demostración 34 *Sea* $a_n = S_n - S_{n-1}$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Observación: Recuerde que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es diverge y que la sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ converge a cero, es decir, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Por ello el teorema anterior e solo un implicancia

Ejemplo 78 *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{2n-1}$ *diverge, ya que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2} \neq 0$.

Ejercicio 79 *Justifique la convergencia o divergencia de las siguientes series:*

1. $\sum (\frac{5}{2})^{n+3}$ *diverge.*
2. $\sum \cos(\frac{n\pi}{2})$ *diverge.*
3. $\sum \frac{n+\cos(n)}{2n-(-1)^n}$ *diverge.*

Definición 20 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *es convergente según Cauchy o es de Cauchy si y sólo si*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(m > n > N \Rightarrow \mid a_m - a_n \mid < \epsilon)$$

Ejemplo 80 *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $x_n = \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *converge ya que*

$$\begin{aligned}
\mid x_{n+p} - x_n \mid &= \mid \tfrac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n+p+1}}{n+p} \mid \\
&= \mid (\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}) + (\tfrac{1}{n+3} - \tfrac{1}{n+4}) + \cdots + \tfrac{(-1)^{n+p+1}}{n+p} \mid \\
&= \mid \tfrac{1}{n+1} - (\tfrac{1}{n+2} - \tfrac{1}{n+3}) - (\tfrac{1}{n+4}) - \tfrac{1}{n+5}) \cdots + \tfrac{(-1)^{n+p+1}}{n+p} \mid \\
&\leq \begin{cases} \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+p} & si \quad p \quad par \\ \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+p-1} + \tfrac{1}{n+p} & si \quad p \quad impar \end{cases} \\
&< \tfrac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ *entonces* $n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$.
De este modo la $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *es (convergente según) de Cauchy*

Teorema 35 (Criterio de Cauchy) *Dada la sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
$\sum a_n$ *converge si y sólo si* $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N}) \left(m \geq N \;\Rightarrow \left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \epsilon \right)$

Teorema 36 (Criterio de Comparación) *Sean* $\sum a_n, \sum b_n$ *dos serie de términos positivos, tal que* $(\exists M \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((n \geq M) \;\Rightarrow (a_n \leq b_n))$.
Entonces

1. *Si* $\sum b_n$ *converge entonces* $\sum a_n$ *converge*
2. *Si* $\sum a_n$ *diverge entonces* $\sum b_n$ *diverge*

Demostración 36 *1. Como* $a_n \leq b_n, \; \forall n > M$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{m} a_{n+k} \leq \sum_{k=1}^{m} b_{n+k} \; \forall n > M$$

Por lo tanto si $\sum b_n$ *converge, entonces*

$$|\sum_{k=1}^{m} b_{n+k}| < \epsilon \text{ } para \text{ } n \gg 0$$

luego

$$|\sum_{k=1}^{m} a_{n+k}| < \epsilon \text{ } para \text{ } n \gg 0$$

entonces $\sum a_n$ *converge, por criterio de Cauchy.*

Ejemplo 81

1. $\sum \frac{1}{n-1}$ *diverge pues*

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} \qquad \forall n \geq 2 \quad y \quad \sum \frac{1}{n} \text{ } diverge$$

2. $\sum \frac{1}{n!}$ *converge ya que*

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \geq 4 \quad y \quad \sum \frac{1}{2^n} \text{ } converge$$

3. $\sum \frac{|\operatorname{sen}(n)|}{3^n+4}$ *converge ya que*

$$\frac{|\operatorname{sen}(n)|}{3^n+4} \leq \frac{1}{3^n} \quad y \quad \sum \frac{1}{3^n} \text{ } converge$$

4. $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ *diverge ya que* $\ln(n) < n$.

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)} \qquad \forall n \geq 2 \quad y \quad \sum \frac{1}{n} \text{ } diverge$$

5. $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ *diverge ya que*

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n} \quad y \quad \sum \frac{1}{n} \text{ } diverge$$

6. $\sum \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$ *converge ya que*

$$\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2} < \frac{1}{n^2} \quad y \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ } converge.$$

7. $\sum \int\limits_{n-1}^{n} e^{-x^2}dx$ *converge ya que Para* $x > 1$*, se tiene que* $-x^2 < -x$*, luego* $e^{-x^2} < e^{-x}$

$$S_n = \int_1^n e^{-x^2}dx \leq \int_1^n e^{-x}dx = e^{-1} - e^{-n}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (e^{-1} - e^{-n}) &= 1 \\ \lim_{n\to\infty} S_n &= e^{-1}, \text{ } converge \end{aligned}$$

8. $\sum \frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{n^2}$ *converge pues*

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{n^2} < \frac{1}{n^2} \quad y \quad \sum \frac{1}{n^2}, \text{ converge}$$

Proposición 37 *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión y* $N \in \mathbb{N}$ *entonces* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ *convergen o divergen simultáneamente.*

Demostración 37 *Sean*

$$\begin{aligned} S_m &= a_1 + \cdots + a_m \\ R_n &= a_N + \cdots + a_n \\ \lambda &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} \end{aligned}$$

luego

$$S_n = \lambda + R_n, \text{ con } n \geq N$$

calculando límite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lambda + \lim_{n\to\infty} R_n$$

Por lo tanto ambas convergen o divergen simultáneamente.

Ejemplo 82 $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n-3}$ *diverge ya que Como se tiene que*

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Además

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge pues } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

2.3. Serie de Términos no Negativos

Definición 21 *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales,*
Se dice que la serie $\sum a_n$ *es de términos positivos si solo si* $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > 0)$.
Se dice que la serie $\sum a_n$ *es de términos no negativos si solo si* $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq 0)$.

Teorema 38 (Criterio de Comparación al límite) *Sean* $\sum a_n, \sum b_n$ *series de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}$$

entonces

1. *Si* $A \neq 0$ *ambas convergen o divergen simultáneamente.*

2. *Si* $A = 0$ *y* $\sum b_n$ *converge entonces* $\sum a_n$ *converge.*

3. *Si* $A = 0$ *y* $\sum a_n$ *diverge entonces* $\sum b_n$ *diverge.*

Demostración 38 *Como* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ *entonces existe* $n > 0$ *y*

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| \leq \frac{A}{2}$$

luego

$$n \gg 0 \quad \frac{-A}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} - A \leq \frac{A}{2}$$

entonces

$$n \gg 0 \quad 0 \leq \frac{A}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3A}{2} b_n$$

Ejemplo 83

1. $\sum \frac{3n}{n^2+2n+5}$ *diverge ya que* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n^2+2n+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+2n+5} = 3$$

2. $\sum \operatorname{sen}(\frac{1}{k})$ *diverge ya que* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ *converge pues* $\sum\limits_{n=3} \frac{1}{(n-2)!}$ *converge y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n!}}{\frac{1}{(n-2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n-1)} = 1$$

4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ *converge pues* $\sum\limits_{n=3} \frac{1}{n^2}$ *converge y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{e^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$$

5. $\sum \frac{n^3+5}{n^5+2n^3+1}$ *converge pues* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+5}{n^5+2n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+5n^2}{n^5+2n^3+1} = 1$$

Teorema 39 (Criterio de la Raíz) *Sea la serie $\sum a_n$ de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = R$$

entonces

1. $R < 1 \Rightarrow \sum a_n$ *converge.*
2. $R > 1 \Rightarrow \sum a_n$ *diverge.*
3. $R = 1$ *no da información.*

Ejemplo 84

1. $\sum \frac{n-2}{n2^n}$ *converge ya que*

$$\sum \frac{n-2}{n2^n} \leq \sum \frac{1}{2^n} \quad y \quad \lim \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$$

2. $\sum \frac{3}{2+\ln^n(n)}$ *converge ya que*

$$\sum \frac{3}{2+\ln^n(n)} \leq \sum \frac{3}{\ln^n(n)} = 3\sum \frac{1}{\ln^n(n)} \quad y \quad \lim \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n)}} = 0$$

Teorema 40 (Prueba de la Razón de D'Alembert) *Sea $\sum a_n$ serie de términos positivos y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R.$$

Entonces

1. *Si* $0 \leq R < 1$ *entonces* $\sum a_n$ *converge.*
2. *Si* $R > 1$ *entonces* $\sum a_n$ *diverge.*
3. *Si* $R = 1$ *falta información.*

Demostración 40

1. *Supongamos* $0 \leq R < 1$. *Sea* $r \in \mathbb{R}$ *tal que* $R < r < 1$ *como* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R$

$$\begin{array}{lllllll} \Rightarrow \; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \textit{tal que} \;\; n > N & ; & \frac{a_{n+1}}{a_n} & < & r & = & \frac{r^{n+1}}{r^n} \\ \Rightarrow \; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \textit{tal que} \;\; n > N & ; & \frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} & < & \frac{a_n}{r^n} & \leq & \frac{a_N}{r^N} \\ \Rightarrow \; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \textit{tal que} \;\; n > N & ; & 0 & \leq & a_n & \leq & \frac{a_N}{r^N} r^n \end{array}$$

Por lo tanto $\sum a_n$ converge por criterio de comparación.

2. *Supongamos* $R > 1$

$$\begin{array}{rlllllll} \Rightarrow & \exists N \in \mathbb{N} & \textit{tal que} & n > N & ; & \frac{a_{n+1}}{a_n} & > & 1 \\ \Rightarrow & \exists N \in \mathbb{N} & \textit{tal que} & n > N & ; & a_{n+1} & > & a_n \end{array}$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} > 0$. *Por lo tanto* $\sum a_n$ *diverge.*

Teorema 41 (Criterio de Raabe) . *Sea* $\sum a_n$ *serie de términos positivos tal que existe*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = R.$$

Entonces:

1. *Si* $R > 1$, *la serie* $\sum a_n$ *es convergente.*
2. *Si* $R < 1$, *la serie* $\sum a_n$ *an diverge.*

Ejemplo 85

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ *converge ya que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1} < 1.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(\frac{2}{5})^n$ *diverge ya que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(\frac{2}{5})^{n+1}}{n!(\frac{2}{5})^n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\cdot\frac{2}{5} = +\infty.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n\cdot 2^n}$ *converge ya que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n\cdot 2^n}{2n+3} = \frac{1}{2} < 1.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-3n}$ *converge ya que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{e^{3n}e^3} \cdot \frac{e^{3n}}{n^3} = \frac{1}{e^3} < 1.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n!)}$ *converge ya que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = 0 < 1.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ *converge ya que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3} < 1.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2(n+1)^2}$ *diverge ya que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^2(n+2)^2} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{n!} = +\infty.$

Ejemplo 86 *Para que valores de* $c \in \mathbb{R}$ *la serie converge*

$$\sum \frac{n(n+2)}{|1-c|^n}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+3)}{|1-c|^{n+1}}}{\frac{n(n+2)}{|1-c|^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)|1-c|} = \frac{1}{|1-c|} < 1$$

Note que para 0 y 2 la serie diverge. Por lo tanto $c \in \mathbb{R} - [0, 2]$

Teorema 42 (Criterio de la Integral) *Sea f función tal que existe $m \in \mathbb{N}$,*

1. *f es continua y positiva para todo $x \geq m$.*
2. *f es decreciente para todo $x \geq m$.*
3. *$f(n) = a_n$; $\forall n \geq m$.*

Entonces

1. *$\int\limits_m^\infty f(x)dx$ converge entonces $\sum\limits_{n=m}^\infty a_n$ converge.*
2. *$\int\limits_m^\infty f(x)dx$ diverge entonces $\sum\limits_{n=m}^\infty a_n$ diverge.*

Demostración 42 *Para*

$$\begin{array}{ccccccc} m & \leq & k & \leq & x & \leq & k+1 \\ f(k+1) & \leq & f(x) & \leq & f(k) & & \end{array}$$

Entonces

$$\int\limits_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leq \int\limits_k^{k+1} f(k)dx$$

Luego

$$f(k+1) \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \qquad \textit{(decreciente)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=m}^{m+n} f(k+1) \leq \int\limits_m^{m+n} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{m+n} f(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=m+1}^{m+n+1} a_k \leq \int\limits_m^{m+n} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{m+n} a_k$$

Ejemplo 87

1. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \textit{converge} & \textit{si} \;\; p > 1 \\ \textit{diverge} & \textit{si} \;\; p \leq 1 \end{cases}$

   Ya que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \textit{converge} & \textit{si} \;\; p > 1 \\ \textit{diverge} & \textit{si} \;\; p \leq 1 \end{cases}$$

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \ln(n)}$ *diverge. Ya que*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \ln(n)}$$

Y

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln(x)} = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{du}{u} \qquad \textit{diverge}$$

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p(n)}$ *converge si $p > 1$ pues*

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p(x)} \qquad \textit{converge} \quad \textit{si} \quad p > 1$$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{-3n}$ *converge pues*

$$\int_1^{\infty} x e^{-3x} dx \qquad \textit{converge}$$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3+n^2}$ *converge ya que*

$$\frac{1}{3+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geq 1 \quad y \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \ \textit{converge}$$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ *converge ya que*

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{e^{x^2}} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{du}{e^u} \qquad \textit{converge}$$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ *diverge ya que*

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx \qquad \textit{diverge}$$

2.4. Serie de Términos Alternados

Definición 22 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos.*
Entonces la serie $\sum(-1)^{n+1}a_n$ se llama serie alternada.

Ejemplo 88

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

2. $\sum \frac{\cos(n\pi)}{n^2+5}$

Proposición 43 (Prueba de Leibniz) *Sea $\{a_n\}$ monotamente decreciente a cero entonces $\sum(-1)^n a_n$ converge.*

Demostración 43

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Por lo tanto $\mid S_{2n} \mid$ creciente ya que $\{a_n\}$ es decreciente.
Pero

$$S_{2n} = (a_1 - a_{2n}) - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n-1})$$

Luego $\mid S_{2n} \mid$ es acotada por $a_1 - a_{2n}$. Entonces $\mid S_{2n} \mid$ converge.
Análogamente $\{S_{2n+1}\}$ converge y como $\lim(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim a_{2n+1} = 0$
Por lo tanto

$$\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} = \lim S_n$$

Luego

$$\sum(-1)^n a_n \quad converge$$

Ejemplo 89

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n &= 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 \\ &= 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 \end{aligned}$$

Definición 23 *Sea $\sum a_n$ una serie con signos alternados,*

Se dice que la serie $\sum a_n$ converge absolutamente si y solo si la serie $\sum |a_n|$ es convergente

Se dice que la serie $\sum a_n$ converge condicionalmente si y solo si la serie $\sum a_n$ es convergente y la serie $\sum |a_n|$ diverge

Ejemplo 90 *La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge condicionalmente.*

Ejercicio 91 *Determinar si la afirmación es verdadera o falsa*

1. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+3n+5}$ *converge absolutamente.*

2. $\sum \frac{(-1)^n}{n+5}$ *no converge absolutamente.*

3. $\sum \frac{\cos(n\pi)}{n+5}$ *converge condicionalmente.*

Definición 24 *Sea* $\sum \mu_n$ *una serie con signos alternados, designemos por* a_n *los términos positivos y* $-b_n$ *los términos negativos entonces* $\sum a_n$, $\sum b_n$ *se llaman series asociadas a* $\sum \mu_n$

Ejemplo 92 *Sea* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$, *luego*

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \quad y \quad \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

son las series asociados.

Teorema 44 *Sea* $\sum \mu_n$ *absolutamente convergente entonces* $\sum a_n, \sum b_n$ *convergen y* $\sum \mu_n = \sum a_n - \sum b_n$.

Ejemplo 93 *Sea* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \cdots$
Por lo tanto las series asociadas son

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Entonces convergen a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$$

Teorema 45 *Si* $\sum \mu_n$ *converge condicionalmente entonces* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *divergen*

Observación: Si $\sum a_n \quad \veebar \quad \sum b_n$ divergen entonces $\sum \mu_n$ diverge.

Teorema 46 *Sea* $\{a_n\}$ *una serie convergente. Suponga que, sin cambiar el orden de los elementos, se agrupan, insertando paréntesis, de modo que se obtiene otra serie* $\sum b_n$. *Entonces la serie* $\sum b_n$ *también es convergente y su suma es igual a* $\sum a_n$.

Ejemplo 94 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ *converge.*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Ya que $r = -\frac{1}{2}$, *pero*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) + \cdots + \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{2n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}
\end{aligned}$$

Luego obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{2}{3}$$

Corolario 3 *Si al insertar paréntesis en una serie $\sum a_n$ obtenemos una serie $\sum b_n$ que es divergente, entonces la serie $\sum a_n$ también es divergente.*

Si al retirar los paréntesis de una serie $\sum b_n$ obtenemos una serie $\sum a_n$ convergente entonces $\sum b_n$ es convergente y sus sumas coinciden.

Observación: Sólo se puede insertar paréntesis a series convergentes.

Ejemplo 95 *Determine la convergencia o divergencia de la serie $\sum \frac{1}{2n(2n-1)}$.*
Solución: *Veamos por el criterio de los parentesis*

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{2n(2n-1)} &= \sum \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots \\ &= \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Como la serie $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge entonces la $\sum \frac{1}{2n(2n-1)}$ es converge.

Ejercicio 96 *Comprueba la convergencia de las siguiente serie*

1. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
2. $\sum \cos(n\pi) \cdot \frac{(n+3)}{n^2+n+5}$.
3. $\sum \frac{1}{ne^n}$.

Teorema 47 *Sea $\sum \mu_n$ alternada.*

$$\sum \mid \mu_n \mid \quad \textit{converge entonces} \quad \sum \mu_n \quad \textit{converge.}$$

Ejemplo 97 $\sum(-1)^n \frac{n}{(n+1)2^n}$ *converge ya que* $\sum \frac{n}{(n+1)2^n}$ *converge por criterio de razón.*

Ejemplo 98 *La siguiente lista corresponde a la convergencia o divergencia de series numéricas*

1. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge pues es decreciente* $\mid \frac{1}{\sqrt{n}} \mid_{n \in \mathbb{N}}$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
2. $\sum \frac{(-1)^{n+1}n}{10n-1}$ *diverge pues* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{10n-1} \neq \frac{1}{10} \neq 0$.
3. $\sum \frac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ *converge pues* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+3)}}{\frac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}} = \frac{1}{2} < 1$.

4. $\sum n \cdot e^{-n^2}$ *converge pues* $\int_1^\infty xe^{-x^2}dx$ *converge.*

5. $\sum \frac{e^{\frac{1}{n}}}{x^2}$ *converge pues* $\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ *converge.*

6. $\sum \frac{\operatorname{arc\,tg}(n)}{n^2+1}$ *converge pues* $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg}(x)}{x^2+1}dx$ *converge.*

7. $\sum \ln(\frac{n+3}{n})$ *diverge pues* $\int_1^\infty \ln(\frac{x+3}{x})dx$ *diverge.*

8. $\sum \frac{1}{\ln^n(n)}$ *converge ya que* $\ln(n) > 2$ *pues* $n > e^2$

$$\frac{1}{\ln(n)} < \frac{1}{2} \quad \textit{por lo tanto} \quad \frac{1}{(\ln(n))^n} < \frac{1}{2^n}$$

$\sum \frac{1}{2^n}$ *converge.*

9. $\sum \frac{1}{\ln(e^n+e^{-n})}$ *diverge pues* $e^{2n}+1 < e^{3n}$*ya que*

$$1 < e^{3n} - e^{2n} = e^{2n}(e-1)$$

$$\frac{e^{2n}+1}{e^n} < e^{2n}$$

$$\ln(e^n + e^{-n}) < \ln(e^{2n}) = 2n\ln(e) = 2n$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\ln(e^n+e^{-n})} > \frac{1}{2n} \quad \textit{diverge.}$$

10. $\sum \frac{3^n n!}{n^n}$ *diverge pues* $\lim \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} > 1$ *diverge.*

11. $\sum \frac{1}{(2n+1)!}$ *converge pues* $(2n+1)! > n!$ *y* $\sum \frac{1}{n!}$ *converge.*

12. $\sum \frac{(n+3)!}{3!\cdot n!\cdot 3^n}$ *converge ya que*

$$\lim \frac{(n+4)!}{3!\cdot(n+1)!\cdot 3^{(n+1)}} \cdot \frac{3!\cdot n!\cdot 3^n}{(n+3)!} = \frac{1}{3} < 1$$

13. $\sum \frac{2^n}{n^3+1}$ *diverge ya que*

$$\lim \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)^3+1}\frac{n^3+1}{2^n} = 2 > 1$$

14. $\sum \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ *converge pues*

$$3(n+1)(n+2)(n+3) > (2n+1)n^2$$

15. $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ *diverge pues*

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln(x)} \quad \textit{diverge}$$

16. $\sum \frac{1}{n^2\ln(n)}$ *converge pues* $n^2\ln(n) > n^2$ *y* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

17. $\sum \frac{(2n)!}{2^n n^n}$ *converge pues*

$$\lim \frac{(2n+2)!}{2^{(n+1)}(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{2^n n^n}{(2n)!} = \frac{1}{e} < 1$$

18. $\sum \frac{n!}{(n+1)!-n}$ *diverge pues*

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= n!(n+1) = n!n + n! \\
(n+1)! &< n!(n+1) + n \\
(n+1)! - n &< n!(n+1) \\
\frac{1}{n!(n+1)} &< \frac{1}{(n+1)!-n} \\
\frac{1}{n+1} &< \frac{n!}{(n+1)!-n}
\end{aligned}$$

19. $\sum \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ *converge pues*

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{3}{2} > 1$$

por lo tanto converge. Otra forma

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+1}} \quad \textit{converge}$$

20. $\sum \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ *diverge pues*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} \quad \textit{divege}$$

21. $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ *diverge pues* $n^2 - 1 < n^3$ *por lo tanto* $\sqrt[3]{n^2-1} < n$

22. $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ *diverge pues* $n^2 + 1 < 8n^3$

23. $\sum \frac{n^2}{n!}$ *converge pues*

$$\lim \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = 0 < 1$$

Ejercicio 99 *Determine la convergencia de la siguiente serie numéricas*

1. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$
2. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{e^n}$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$
4. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3n}$
5. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(e^n - e^{-n})}$
6. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(1+\frac{1}{n})}$
7. $\sum (-1)^n \int\limits_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx$

Capítulo 3

Serie de Funciones

Definición 25 *Sean*

$$\begin{array}{rccc} f_n & : D \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) \end{array}$$

funciones, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, *llamaremos* ***serie de funciones*** *a la sucesión* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *la que denotaremos por* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Ejemplo 100

1. *Dada la sucesión de funciones*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n!} \end{array}$$

   Por lo tanto su serie de funciones es $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n!}$

2. *Dada la sucesión de funciones*

$$\begin{array}{rccc} f_n : &]-2,2[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{|\frac{x}{4}|(n^2+1)}{n^2+n+3} \end{array}$$

   Por lo tanto su serie de funciones es $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\frac{x}{4}|(n^2+1)}{n^2+n+3}$

3. *Dada la sucesión de funciones*

$$\begin{array}{rccc} f_n : &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x^n}{n!} \end{array}$$

   Por lo tanto su serie de funciones es $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Definición 26 *Se dice que la serie* $\sum f_n$ *converge puntualmente para* $x \in D$ *si y solo si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *con* x *fijo es convergente*

Ejemplo 101 *Justifique que la serie* $\sum \frac{|\frac{x}{2}|n^2}{n^4+5}$ *converge puntualmente para* $x \in \mathbb{R}$.

Ya que dado $x \in \mathbb{R}$ *fijo se tiene que*

$$0 \leq \frac{|\ \frac{x}{2}\ |\ n^2}{n^4+5} \leq \frac{|\ \frac{x}{2}\ |}{n^2}$$

Y la serie $\sum \frac{|x|}{2n^2}$ *converge, por lo tanto* $\sum \frac{|\frac{x}{2}|n^2}{n^4+5}$ *converge puntualmente para* $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 102 *Justifique que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{2^n+5}$ *converge puntualmente para* $x \in \mathbb{R}$.

Dado $x \in \mathbb{R}$ *(fijo)*

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{2^n+5} \leq \sum \frac{1}{2^n+5} \leq \sum \frac{1}{2^n} \quad \textit{converge.}$$

Ejemplo 103 *Justifique que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)3^n}$ *converge puntualmente para* $|\ x\ | < 2$.

Ya que

$$\sum \frac{|\ x\ |^n}{(n+1)3^n} \leq \sum \frac{2^n}{(n+1)3^n} = \sum \frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

La serie converge.

Proposición 48 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge puntualmente para todo* $x \in D$ *si y sólo si*

$$\exists f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \ \textit{función tal que}$$

$$(\forall x \in D)(\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N_{(x,\epsilon)} \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow |\ S_n(x) - f(x)\ | < \epsilon)$$

Ejemplo 104 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{2})^{n-1}$ *converge para todo* $x \in]-2, 2[$ *y converge a* $\frac{2}{2-x}$ *ya que*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-(\frac{x}{2})^n}{1-(\frac{x}{2})}$$

Por lo tanto

$$\left| S_n(x) - \frac{2}{2-x} \right| = \frac{|\ (\frac{x}{2})^n\ |}{|\ 1-(\frac{x}{2})\ |} < \epsilon$$

si y solo si

$$\left|\frac{x}{2}\right|^n < \frac{\epsilon}{2}\ |\ 2-x\ |$$

si y solo si

$$n\ln(\frac{x}{2}) < \ln(\frac{\epsilon}{2} \mid 2-x \mid)$$

por lo tanto

$$n > \frac{\ln(\frac{\epsilon}{2} \mid 2-x \mid)}{\ln(x)-\ln(2)}$$

Dado ϵ *y* x*, existe* $N_{(x,\epsilon)}$ *tal que para todo* $n > N$

$$n > \frac{\ln(\frac{\epsilon}{2} \mid 2-x \mid)}{\ln(x)-\ln(2)}$$

Observación: Note que N en ejemplo anterior depende de ϵ y x.

Ejemplo 105 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x}{2^n}$ *converge puntualmente a* $f(x) = 2x$ *para todo* $x \in [-3,3]$ *ya que*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{2^n} = x(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}) = x(2-\frac{1}{2^n})$$

Luego

$$\mid S_n(x) - 2x \mid = \left|\frac{x}{2^n}\right| = \frac{\mid x \mid}{2^n} \leq \frac{3}{2^n}$$

Por lo tanto

$$\frac{3}{2^n} < \epsilon \Longleftrightarrow \frac{\ln(\frac{3}{\epsilon})}{\ln(2)} < n$$

Observación: Notemos que en este ejemplo se tiene que dado ϵ, x existe N tal que $n > N$ de modo que $\mid S_n - 2x \mid < \epsilon$. y en el caso anterior N no depende de x.

Definición 27 (Convergencia Uniforme) *Se dice que la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente a* f *en* D*, si y sólo si*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_\epsilon \in \mathbb{N})(\forall x \in D)(\forall n \in N)(n > N \Rightarrow \mid S_n(x) - f(x) \mid < \epsilon).$$

En el ejemplo anterior tenemos una convergencia uniforme.

Ejemplo 106 $\sum nx^n$ *converge uniformemente a* $\frac{x}{(1-x)^2}$ *para* $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ *ya que*

$$\begin{array}{rcl|} S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} kx^k & = & x + 2x^2 + \cdots + nx^n \quad / \cdot x \\ xS_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} kx^{k+1} & = & x^2 + 2x^3 + \cdots + nx^{n+1} \\ \hline \end{array}$$

Restando las ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
(1-x)S_n(x) &= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + nx^{n+1} \\
(1-x)S_n(x) &= x\tfrac{1-x^n}{1-x} + nx^{n+1} \\
S_n(x) &= \tfrac{x}{(1-x)^2} - \tfrac{x^{n+1}}{(1-x)^2} + \tfrac{nx^{n+1}}{1-x} \\
&= \tfrac{x}{(1-x)^2} + \tfrac{n(1-x)-1}{(1-x)^2} \cdot x^{n+1} \\
\mid S_n(x) - \tfrac{x}{(1-x)^2} \mid &= \mid \tfrac{x^{n+1}}{(1-x)^2} \cdot (n(1-x)-1)) \mid \\
&= \tfrac{|x|^{n+1}}{|1-x|^2} \mid n(1-x) - 1 \mid \leq \tfrac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^2} \tfrac{3}{2} n = \tfrac{3n}{2^n}
\end{aligned}$$

Como la serie $\sum \frac{3n}{2^n}$ *es convergente, luego* ϵ *depende solamente de* n*.*

Observación:

1. Si la serie converge uniformemente entonces converge puntualmente.

2. El recíproco es falso.

Proposición 49 *Si* $\sum f_n$ *converge uniformemente en* $D \subseteq \mathbb{R}$ *a* f *y las funciones* f_n *son continuas en* D *entonces* f *es continua en* D*.*

Ejemplo 107 *El ejemplo anterior tenemos que* $\sum nx^n$ *converge uniformemente a* $\frac{x}{(1-x)^2}$ *para* $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ *y la funciones* x^n *son continua, luego* $\frac{x}{(1-x)^2}$ *es continua en* $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Proposición 50 *Si* $\sum f_n$ *converge a* f *en* $[a,b]$*,* f_n *diferenciables en* $[a,b]$ *y que* $\sum f'_n$ *converge uniformemente en* $[a,b]$*. Entonces*
$\sum f_n$ *converge uniformemente a* f *y* f *es diferenciable, además*

$$f'(x) = \sum f'_n(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Proposición 51 *Si* $\sum f_n$ *es una serie de funciones de Riemann integrables que convergen uniformemente a* $f(x)$ *en* $[a,b]$ *. Entonces*
f *es Riemann integrable y*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Ejemplo 108 $\sum \frac{x}{2^n}$ *converge uniformemente a* $f(x) = 2x$ *en* $x \in [-3,3]$ *y* $f_n(x) = \frac{x}{2^n}$ *son Riemann integrable. Por lo tanto*

$$\int_0^t 2xdx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{x}{2^n}dx \qquad t \in [-3,3]$$

Luego

$$x^2 \Big|_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{2^{n+1}} \Big|_0^t$$

$$t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^2}{2^{n+1}}$$

Por lo tanto $x^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{2^{n+1}} \quad \forall x \in [-3, 3]$.

Proposición 52 (Prueba M de Weierstrass) *Sea* $\sum f_n$ *una serie de funciones y* $\sum M_n$ *serie numérica convergente tal que* $| f_k(x) | \leq M_k \quad k \in \mathbb{N}, x \in D$.

Entonces $\sum f_n$ *converge uniformemente en* D.

Ejemplo 109 *La serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2x^2}{3+n^3x^2}$ *converge uniformemente en* $\mathbb{R}$, *ya que*

$$\left| \frac{2x^2}{3+n^3x^2} \right| \quad \leq \quad \left| \frac{2x^2}{n^3x^2} \right| \quad \leq \quad \frac{2}{n^3}$$

y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$ *converge.*

Ejemplo 110 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ *converge uniformemente en* $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ *ya que*

$$| nx^n | = n | x |^n \leq n \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ *converge.*

Ejemplo 111 *Dada la serie* $\sum 2^{3nx}$ *como* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3nx+3x}}{2^{3nx}} = 2^{3x}$ *y*

$$2^{3x} < 1 \qquad si \quad x < 0$$

$$2^{3x} \geq 1 \qquad si \quad x \geq 0$$

Por lo tanto $\sum 2^{3nx}$ *converge si* $x \in \mathbb{R}^-$

3.1. Series de Potencias

Las series mas importantes son del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots$$

donde $a = cte$ y $\{C_n\}$ es una sucesión. Las series de esta forma son llamadas series de potencias.

Notación: Se subentiende que $(x-a)^0 = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular para $x = a$.

Si $a = 0$ entonces la serie de potencia se denota por $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$.

Proposición 53 *Si la serie $\sum a_n x^n$ converge para $x = x_1$(serie numérica), entonces $\sum a_n x^n$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mid x \mid < \mid x_1 \mid$.*

Ejemplo 112 *La serie $\sum \frac{x^n}{2^n n^2}$ converge para $x = 2$, por lo tanto $\sum \frac{x^n}{2^n n^2}$ converge absolutamente para $x \in]-2, 2[$.*

Proposición 54 *Si la serie $\sum a_n x^n$ diverge para $x = x_1$ entonces $\sum a_n x^n$ diverge para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mid x \mid > \mid x_1 \mid$.*

Ejemplo 113 *Ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}$ diverge para $x = 3$.*

Por lo tanto diverge para

$$x \in]-\infty, -3[\cup]3, \infty[.$$

Teorema 55 *Toda serie del tipo $\sum a_n x^n$ se comporta de alguna de las tres maneras siguientes.*

1. *Converge sólo para $x = 0$*
2. *Converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.*
3. *Existe $R \in \mathbb{R}$ tal que converge absolutamente para todo x tal que $\mid x \mid < R$ y diverge para todo x tal que $\mid x \mid > R$.*

Definición 28 *El numero R se llama radio de convergencia y el intervalo $]-R, R[$ se llama intervalo de convergencia de la serie.*

Observación:

1. Como $\sum a_n (x-a)^n$ se puede obtener de $\sum a_n x^n$ cada proposición del teorema se aplica al termino general de la serie.
2. La herramienta elemental más utilizada para hallar el intervalo de convergencia es la prueba de la razón.

Ejemplo 114 *Determinar el radio de convergencia y discutir los extremo del intervalo de la serie $\sum \frac{x^n}{(2n+1)4^n}$*

Solución: Apliquemos teorema de la razón.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mid f_{n+1} \mid}{\mid f_n \mid} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mid x \mid^{n+1}}{(2n+3)4^{n+1}} \cdot \frac{(2n+1)4^n}{\mid x \mid^n} = \frac{\mid x \mid}{4}$$

Por lo tanto converge si $\frac{|x|}{4} < 1 \Leftrightarrow \mid x \mid < 4$

Si $x = 4$ entonces $\sum \frac{4^n}{(2n+1)4^n} = \sum \frac{1}{(2n+1)}$ diverge.

Si $x = -4$ entonces $\sum \frac{(-4)^n}{(2n+1)4^n} = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ converge.

Por lo tanto converge si $x \in [-4, 4[$

Ejemplo 115 *Determinar el radio de convergencia y discutir los extremo del intervalo de la serie* $\sum \frac{x^n}{n!}$

Solución: Apliquemos teorema de la razón.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{| f_{n+1} |}{| f_n |} = \lim_{n\to\infty} \frac{| x |^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{| x |^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{| x |}{n} = 0$$

Por lo tanto converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 116 *Determinar el radio de convergencia y discutir los extremo del intervalo de la serie* $\sum \frac{n!x^n}{2^n}$

Solución: Apliquemos teorema de la razón.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{| f_{n+1} |}{| f_n |} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \mid x \mid^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n! \mid x \mid^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2} \mid x \mid = +\infty$$

Por lo tanto diverge para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejemplo 117 *Determinar el radio de convergencia y discutir los extremo del intervalo de la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+4)^{2n-1}}{2n-1}$

Solución: Apliquemos teorema de la razón.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3x+4)^{2n-1}}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{| 3x+4 |^{2n-1}} = | 3x+4 |^2$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} | 3x+4 |^2 < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (3x+4)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 3x+4 < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -5 < 3x < -3 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{5}{3} < x < -1 \end{aligned}$$

Otra alternativa

$$3^2 \mid x + \frac{4}{3} \mid^2 < 1 \Leftrightarrow \mid x + \frac{4}{3} \mid^2 < \frac{1}{9} \Leftrightarrow \mid x + \frac{4}{3} \mid < \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, $R = \frac{1}{3}$, el intervalo es $]-\frac{5}{3}, -1[$ y $a = -\frac{4}{3}$
Si $x = -\frac{5}{3}$ entonces $\sum \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum \frac{-1}{2n-1}$ diverge.
Si $x = -1$ entonces $\sum \frac{1}{2n-1}$ diverge.

Proposición 56 *Las series* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *tienen el intervalo de convergencia común, es decir, tienen el mismo radio de convergencia.*

Proposición 57 *Si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tiene radio de convergencia* R *entonces la función limite es diferenciable en* $]-R, R[$ *y además, su derivada vale* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Proposición 58 *Una serie* $f(x) = \sum a_n x^n$ *converge con radio de convergencia* R *tiene derivada de todos los ordenes en* $]-R, R[$ *y*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Ejemplo 118 *Considere la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, *con* $t \in]-1, 1[$.

Hallar el valor de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3n(3x+1)^{n-1}$.

Solución: Sea $3x + 1 = t$ por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} -1 < & 3x+1 & < 1 \\ -2 < & 3x & < 0 \\ -\frac{2}{3} < & x & < 0 \end{array}$$

Luego $x \in]-\frac{2}{3}, 0[$, es decir, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3x+1)^n = -\frac{1}{3x}$, por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(3x+1)^{n-1} \cdot 3 = \frac{1}{3(x)^2} \qquad x \in]-\frac{2}{3}, 0[$$

Ejemplo 119 *Dada la serie* $\sum \frac{x^n \operatorname{sen}(n)}{n^2}$, *analice la converge de la serie en el intervalo* $[-1, 1]$.

Solución: Aplicamos teorema de comparación

$$\left| \frac{x^n \operatorname{sen}(n)}{n^2} \right| \leq \frac{|\, x \,|^n}{n^2}$$

y como $\sum \frac{|x|^n}{n^2}$ converge para $x \in [-1, 1]$
entonces $\sum \frac{x^n \operatorname{sen}(n)}{n^2}$ converge para $x \in [-1, 1]$

Proposición 59 *Si* $\sum a_n x^n$ *tiene radio de convergencia* R *y si* $r \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < r < R$ *entonces* $\sum a_n x^n$ *converge uniformemente en* $[-r, r]$.

Observación: Con lo cual, si $\sum a_n x^n$ converge a f función continua en $]-R, R[$, para encontrar dicho limite, basta encontrar la serie termino a termino en

$$[-r, r] \subset \ ]-R, R[.$$

Ejemplo 120 *Dada la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, *analice la converge de la serie en el intervalo* $[-1, 1]$.

Solución: Sea $t \in]-1,1[$

$$\int_0^t \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n dx$$

Por lo tanto

$$-\ln(1-x)\Big|_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^t$$

$$-\ln(1-t) + \ln(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Por lo tanto $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ para $x \in]-1,1[$

Si $x = -1$ entonces $\ln(2) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

Si $x = 1$ diverge.

Observación: Si la igualdad tiene sentido en el extremo esta es válida.

Ejemplo 121 *Dada la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$, *determine el intervalo de converge uniformemente*

Solución: Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ para $t \in]-1,1[$

Sea $-x^2 = t$ para $x \in]-1,1[$ por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \quad para \quad x \in]-1,1[$$

luego $t \in]-1,1[$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (-x^2)^n \\
\operatorname{arc\,tg}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^t \qquad t \in]-1,1[\\
\operatorname{arc\,tg}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \\
\operatorname{arc\,tg}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in]-1,1[
\end{aligned}$$

Observación: Note que esta serie nos dada una forma de escribir π

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arc\,tg}(1) & = & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(+1)^{2n+1}}{2n+1} \quad = \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ \frac{\pi}{4} & = & 1 - \frac{1}{3} + \cdots \end{array}$$

Ejemplo 122 *La serie* $\sum \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2+3n+1}$ *converge uniformemente para todo* $x \in \mathbb{R}$ *ya que*

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2+3n+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+3n+1} \leq \frac{1}{n^2}$$

y $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Ejemplo 123 *Determine el intervalo de convergencia de la serie* $\sum \frac{(3x+1)^n}{n^2+1}$.
Solución: *Veamos por el criterio del cuociente*

$$\lim \frac{|\ f_{n+1}(x)\ |}{|\ f_n(x)\ |} = \lim |\ 3x+1\ |$$

tenemos que

$$|\ 3x+1\ | < 1 \Leftrightarrow -1 < 3x+1 < 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 0$$

Si $x = -\frac{2}{3}$ *entonces* $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ *converge*
Si $x = 0$ *entonces* $\sum \frac{1}{n^2+1}$ *converge*
Por lo tanto converge uniformemente si $x \in [-\frac{2}{3}, 0]$

Ejemplo 124 *Determine el intervalo de convergencia de la serie* $\sum \frac{1}{n^2}(\frac{x}{1+x})^n$.
Solución: *Veamos por el criterio del cuociente*

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} & = & \lim\limits_{n\to\infty} |\ \frac{1}{(n+1)^2}(\frac{x}{1+x})^{n+1} n^2 (\frac{1+x}{x})^n\ | \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot |\ \frac{x}{1+x}\ | \\ & = & |\ \frac{x}{1+x}\ | \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} |\ \frac{x}{1+x}\ | < 1 & \Longleftrightarrow & -1 < \frac{x}{1+x} < 1 \\ & \Longleftrightarrow & -1 < 1 - \frac{1}{1+x} < 1 \\ & \Longleftrightarrow & -2 < -\frac{1}{1+x} < 0 \\ & \Longleftrightarrow & 2 > \frac{1}{1+x} > 0 \\ & \Longleftrightarrow & x > -\frac{1}{2} \end{array}$$

Si $x = -\frac{1}{2}$ *entonces*

$$\sum \frac{1}{n^2}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n = \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \textit{converge}$$

Por lo tanto converge absolutamente si $x \geq -\frac{1}{2}$, *es decir, converge uniformemente si* $x \geq -\frac{1}{2}$

Ejercicio 125

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{3n^2+5}$ *converge uniformemente para* $x \in \mathbb{R}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-3nx}}{n^2}$ *converge uniformemente para* $x \in \mathbb{R}_0^+$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\frac{x}{1+x^2})^n$ *converge uniformemente para* $x \in \mathbb{R}$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sec^2(nx)}{n}$ *diverge para todo* $x \in \mathbb{R}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{|x+1|^n}$ *converge si* $\mid x+1 \mid > 1$

Ejemplo 126 *Calcular el radio de convergencia de la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \mid x \mid < 1 \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad \mid x \mid < 1 \\ \frac{x}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \qquad \mid x \mid < 1 \end{aligned}$$

Observación: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(-\frac{1}{2})^n = \frac{-\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2})^2}$

Ejemplo 127 *Hallar una serie para* $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$

Solución: Sea $f(x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x})$
y como

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \mid x \mid < 1$$

y

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n \qquad \mid -2x \mid < 1 \Longleftrightarrow \mid x \mid < \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{1}{3}[\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n] \qquad \mid x \mid < \frac{1}{2}$$

Ejemplo 128 *Hallar una serie para* $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+x+1} &= \frac{x-1}{x^3-1} = \frac{x}{x^3-1} - \frac{1}{x^3-1} \\
&= -x\frac{1}{1-x^3} + \frac{1}{1-x^3} \\
&= -x\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}
\end{aligned}$$

Ejemplo 129 *Hallar una serie para* $f(x) = \ln(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})$

Solución:

$$\begin{aligned}
\ln(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}) &= \ln(\sqrt{1+x}) - \ln(\sqrt{1-x}) \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

Ejercicio 130 *Hallar una serie para las siguientes funciones*

1. $x\,\mathrm{sen}(x)$
2. $\mathrm{sen}(x+3)$
3. $f(x) = \frac{1}{2-x}$
4. $\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$
5. $\frac{15-5x}{6-5x-x^2}$

Solución: note lo siguiente

$$\frac{5x-15}{6-5x-x^2} = \frac{?}{x-1} + \frac{?}{x+6} = \frac{?}{1-x} + \frac{1}{6}\frac{?}{1+\frac{x}{6}}$$

Observación:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cdots)$$

3.2. Serie de Taylor

Definición 29 *Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciable en $x = c$ con $c \in]a,b[$. Diremos que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

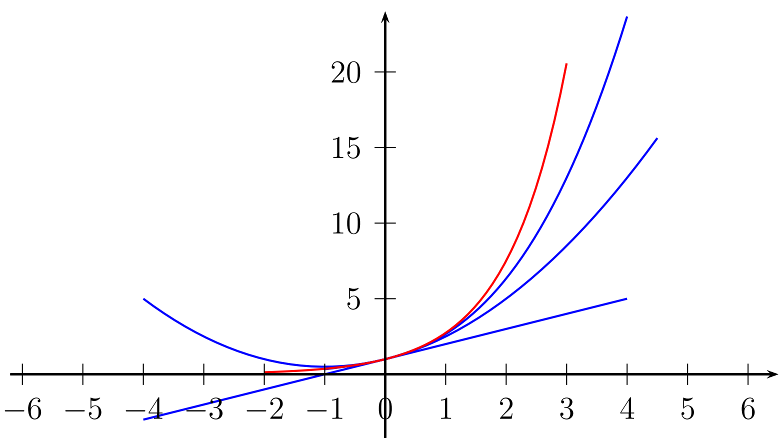
es la serie de Taylor de f en c.

Ejemplo 131 *Sea $f(x) = e^x$ en $x = 0$.*

Como $f(0) = 1$ y $f^{(n)}(0) = 1$ se tiene que: $g(x) = 1 + x$ es tal que $g(0) = 1$, $g'(0) = 1$ por lo tanto g coincide con f y f' en $x = 0$.

Sea $h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ se tiene que $h(0) = 1$, $h'(0) = 1$ y $h''(0) = 1$ por lo tanto h coincide en f, f', f'' en $x = 0$.

De este modo $h(x)$ es una mejor aproximación de f en el punto $(0,1)$



Por lo tanto

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

coincide con f y sus $n-$derivadas en $x = 0$

Definición 30

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ *se llama serie de Maclaurin.*

2. $p_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ *se llaman polinomios de Taylor.*

3. *Se desea saber si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^k$ *converge para $x \neq c$ y si converge a $f(x)$ lo cual no siempre es cierto.*

Ejemplo 132 *Si* $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
Note las siguiente cualidad de esta función
Solución: *Notemos primero que*

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{h\to\infty} \frac{e^{-h^2}}{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to\infty} \frac{h}{e^{h^2}} = 0$$

Además

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \qquad x \neq 0$$

Para la de segundo orden

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}}{x} = \lim_{h\to\infty} \frac{e^{-h^2} 2h^3}{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to\infty} \frac{2h^4}{e^{h^2}} = 0$$

Además

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) \qquad x \neq 0$$

En general tenemos que

$$f^{(n)}(0) = 0 \ \ y \ \ \sum_{n=0}^{\infty} 0 = \textit{serie de Taylor.}$$

Y converge a $f(x)$ *solo para* $x = 0$ *y converge para* $x \neq 0$ *pero no a* $f'(x)$.

Teorema 60 *Si* f *tiene derivadas de todos los ordenes en* $]c-R, c+R[$ *y existe* $M \in \mathbb{R}^+$ *(que puede depender de* x*) tal que* $| f^{(n)}(x) | \leq n! \cdot M^n$ *para todo* $x \in]c-R, c+R[, n \in \mathbb{N}$ *, entonces. La serie de Taylor de* f *en* c *converge a* $f(x)$ *para todo* $x \in]c-R, c+R[$ *y*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n} (x-c)^n$$

Ejemplo 133 *Como la serie de* e^x *en* $x = 0$ *es* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *y la sucesión* $\frac{|x^n|}{n!}$ *es tal que*

$$\lim \frac{| x |^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{| x |^n} = \lim \frac{| x |}{n+1} = 0$$

Por lo tanto $\frac{|x^n|}{n!}$ *acotada para todo* $x \in \mathbb{R}$ *luego*

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

Ejemplo 134 *Análogamente*

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

y

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Teorema 61 *Sea f función con derivada de orden n en el punto $x = 0$.*
Entonces existe un único polinomio $p(x)$ tal que $\deg(p(x)) \leq n$ que satisface las condiciones:

$$p(0) = f(0), \quad p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \quad k \in \{1, \cdots, n\}$$

este polinomio es

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

Análogamente para $x = x_0$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Ejemplo 135 *Sea $f(x) = e^x$ con $x = 1$ entonces*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!} (x - 1)^k$$

Observación: Se desearía conocer el error que se comete en la aproximación de f por un polinomio de Taylor $p(x)$ se llama error a la diferencia

$$R(x) = f(x) - p(x)$$

por lo tanto

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R(x)$$

y se llama formula de Taylor con resto.

Ejemplo 136 *Sea*

1.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ k \end{array} \right) x^k \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!} x^2 + \cdots \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ k \end{array} \right) (-x^2)^k \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!} x^4 \end{aligned}$$

Definición 31 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces se extiende la definición del binomial*

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}$$

Ejemplo 137

$$\begin{aligned} a^x &= e^{x\ln(a)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln(a))^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n(a)}{n!} x^n \end{aligned}$$

Ejemplo 138

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \end{aligned}$$

donde

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

y

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$$

Teorema 62 *Sea f función tal que $f(x) \geq 0$ y $f^{(n)}(x) \geq 0$ en $[a,b]$ para $n \in \mathbb{N}$. Si $x_0 \in]a,b[$ entonces para todo $x \in]a,b[$ tal que $\mid x - x_0 \mid \leq b - x_0$ la serie de Taylor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) \quad \textit{converge a} \;\; f(x)$$

Ejemplo 139 *Sea $f(x) = (1-x)^{-c}$ con $c > 0$ y $x < 1$ tenemos*

$$f'(x) = c(1-x)^{-c-1}, \cdots, f^{(n)}(x) = c(c+1)\cdots(c+n-1)(1-x)^{-c-n}$$

por lo tanto $f^n(x) \geq 0$ si $x < 1$ luego
si $x_0 = 0, a = -b, 0 < b < 1$ con $]-a,b[\subset]-1,1[$
se tiene que

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -c \\ k \end{pmatrix} (-x)^k$$

donde $x \in]-1,1[$ y $c > 0$

Si $c = -\alpha$ y $x = -x$ entonces $\alpha < 0$ y $-1 < x < 1$ se tiene

$$(\frac{1}{1+x})^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k \quad x \in]-1,1[\;\; y \;\; \alpha < 0$$

Teorema 63 *Sea f función con derivada $n+1$ en $]a,b[$ y tal que f^n es continua en $[a,b]$. Si x y x_0 son dos puntos distintos en $[a,b]$, existe c entre x y x_0 tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

por lo tanto

$$R(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Observación: Luego c depende de x y n.

Ejemplo 140 *Sea* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *por lo tanto*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}(x)^{n+1} \quad c \in [0, x]$$

Observación: Si $| f^{n+1}(t) | \leq M$ y $a < t < b$ entonces

$$| R(x) | \leq \frac{M \mid x - x_0 \mid^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ejemplo 141 *Sea* $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt$ *se tiene que*

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)t^{2n}}{n!} = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)t^{2k}}{k!} - \frac{f^5(c)}{5!}t^{10}$$

donde

$$\frac{f^5(c)}{5!}t^{10} = \frac{-e^c t^{10}}{5!}$$

con $-t < c < 0$ *y*

$$\left| \frac{-e^c t^{10}}{5!} \right| = \frac{e^c t^{10}}{5!} < \frac{t^{10}}{5!} < \frac{(\frac{1}{2})^{10}}{5!}$$

por lo tanto

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt \approx \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{(\frac{1}{2})^{10}}{5!}) dt$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{2!} - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \frac{1}{3!} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 \frac{1}{4!} - \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \frac{1}{5!}$$