Capítulo 4

Espacio Afín

4.1. Introducción:

El espacio afín, es un trio de la forma $(V, X, \cdot)$, en donde:

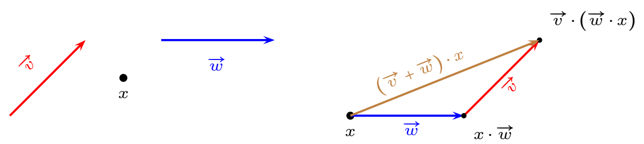
1. V es el espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$
2. X es el conjunto de puntos
3. $\cdot$ es una función dada por:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & V \times X & \to & X \\ & (\overrightarrow{v}, x) & \rightsquigarrow & \overrightarrow{v} \cdot x \end{array}$$

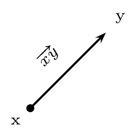
   y cumple con:

   a) $(\forall x \in X)\left(\overrightarrow{0} \cdot x = x\right)$

   b) $\left(\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V\right)(\forall x \in X)\left((\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \cdot x = \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{w} \cdot x)\right)$



   c) $(\forall x, y \in X)\left(\exists! \ \overrightarrow{xy} \in V\right)\left(\overrightarrow{xy} \cdot x = y\right)$, $\overrightarrow{xy}$ es el único vector que envia x en y.



Observación: Note que $\cdot$ es una acción del grupo $(V, +)$ en el conjunto X, la cual es transitiva y fiel.

Propiedad 4.1 *Sea $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, entonces*

1. $(\forall x \in X)\left(\forall \vec{v} \in V\right)\left(\overrightarrow{x\left(\vec{v}\cdot x\right)} = \vec{v}\right)$

2. $(\forall x, y \in X)\left(\forall \vec{v} \in V\right)\left(\overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\cdot y} = \overrightarrow{xy} - \vec{v}\right)$

3. $\left(\forall \vec{v} \in V\right)(\forall x, y \in X)\left(\overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\left(\vec{v}\cdot y\right)} = \overrightarrow{xy}\right)$

4. $(\forall x \in X)(\forall \vec{v} \in V)\left((\vec{v}\cdot x = x) \Rightarrow \vec{v} = 0\right)$

5. $(\forall x, y \in X)(\forall \vec{v} \in V)\left(\overrightarrow{x\left(\vec{v}\cdot y\right)} = \overrightarrow{xy} + \vec{v}\right)$

6. $\left(\forall \vec{v}, \vec{w} \in V\right)(\forall x, y \in X)\left(\overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\left(\vec{w}\cdot y\right)} = -\vec{v} + \overrightarrow{xy} + \vec{w}\right)$

Demostración:

1. Sean $x \in X$, $\vec{v} \in V$

$$\overrightarrow{x\left(\vec{v}\cdot x\right)}\cdot x = \vec{v}\cdot x$$

   Por unicidad son iguales

$$\overrightarrow{x\left(\vec{v}\cdot x\right)} = \vec{v}$$

2. Sean $x, y \in X$, $\vec{v} \in V$

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{xy} - \vec{v}\right)\left(\vec{v}\cdot x\right) &= \overrightarrow{xy}\cdot\left(-\vec{v}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right)\right)\\
&= \overrightarrow{xy}\cdot\left(\left(-\vec{v} + \vec{v}\right)\cdot x\right)\\
&= \overrightarrow{xy}\cdot\left(\vec{0}\cdot x\right)\\
\left(\overrightarrow{xy} - \vec{v}\right)\left(\vec{v}\cdot x\right) &= \overrightarrow{xy}\cdot x
\end{aligned}$$

   Luego $\left(\overrightarrow{xy} - \vec{v}\right)\left(\vec{v}\cdot x\right) = y$, entonces

$$\overrightarrow{xy} - \vec{v} = \overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)y}$$

   De lo cual se tiene

$$\overrightarrow{y\left(v\cdot x\right)} = \vec{v} + \overrightarrow{yx}$$

3. Sean $\vec{v} \in V$, $x, y \in X$

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\left(\vec{v}\cdot y\right)}\\
\vec{w}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right) &= \overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\left(\vec{v}\cdot y\right)}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right)\\
\vec{w}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right) &= \vec{v}\cdot y\\
-\vec{v}\cdot\left(\vec{w}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right)\right) &= -\vec{v}\cdot\left(\vec{v}\cdot y\right)\\
\left(-\vec{v} + \vec{w} + \vec{v}\right)\cdot x &= \left(-\vec{v} + \vec{v}\right)\cdot y\\
\vec{w}\cdot x &= y\\
\vec{w} &= \overrightarrow{xy}
\end{aligned}$$

4. Sean $\overrightarrow{v} \in V$, $x \in X$ tales que $\overrightarrow{v} \cdot x = x$, pero $\overrightarrow{0} \cdot x = x$ luego tenemos que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{0}$$

■

4.2. Espacio Afín Vectorial

Propiedad 4.2 *Sea V un $\mathbb{K}$- espacio vectorial, $X = V$ y*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & V \times V & \to & V \\ & \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) & \rightsquigarrow & \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \end{array}$$

entonces $(V, V, \cdot)$ es un espacio afín.

Demostración: Veamos si $\cdot$ cumple con las propiedades anteriores

1. $\left(\forall \overrightarrow{v} \in V\right)\left(\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\right)$

   Sea $\overrightarrow{v} \in V$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} & = & \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} \\ & = & \overrightarrow{v} \end{array}$$

2. $\left(\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x} \in V\right)\left(\overrightarrow{v} \cdot \left(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{x}\right) = \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) \cdot \overrightarrow{x}\right)$

   Sean $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x} \in V$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{v} \cdot \left(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{x}\right) & = & \overrightarrow{v} \cdot \left(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{x}\right) \\ & = & \overrightarrow{v} + \left(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{x}\right) \\ & = & \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) + \overrightarrow{x} \\ & = & \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) \cdot \overrightarrow{x} \end{array}$$

3. $\left(\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V\right)\left(\exists! \ \overrightarrow{w} \in V\right)(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y})$

   Sean $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} & = & \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{x} & = & \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{u} & = & \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} \end{array}$$

   Además, $\left(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\right) \in V$

$$\begin{array}{rcl} \left(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\right) \cdot \overrightarrow{x} & = & \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x} \\ & = & \overrightarrow{y} \end{array}$$

Luego al tomar $V = X$, entonces $(V, X, \cdot)$ es un espacio afín. ■

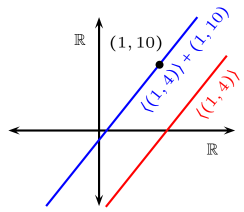
4.3. Subespacio Afín

Sea $(V,X,\cdot)$ un espacio afín y $\mathcal{U}\leq V$. Se define $S(x_0,\mathcal{U})=\left\{\overrightarrow{u}\cdot x_0 \mid \overrightarrow{u}\in\mathcal{U}\right\}$ en donde $S(x_0,\mathcal{U})$ se denomina subespacio afín, donde $\mathcal{U}$ es la dirección del subespacio afín.

Ejemplo 4.3 *Sea $V=X=\mathbb{R}^2$, el Espacio Afín, luego*

$$S\left((1,10),\langle(1,4)\rangle\right)$$

es un subespacio afín, con dirección $\langle(1,4)\rangle$



Notación:

1. Se dice que $S(x_0,\mathcal{U})$ es una recta afín si y sólo si $\dim\mathcal{U}=1$
2. Se dice que $S(x_0,\mathcal{U})$ es un plano afín si y sólo si $\dim\mathcal{U}=2$
3. Se dice que $S(x_0,\mathcal{U})$ es un hiperplano afín si y sólo si $\dim\mathcal{U}=\dim V-1$
4. $\dim\ (S(x_0,\mathcal{U})):=\ \dim\mathcal{U}$

Propiedad 4.4 *Sea $(V,X,\cdot)$ un espacio afín y para todo $x_0\in X$ entonces*

$$X=S(x_0,V)$$

Demostración: Sea $(V,X,\cdot)$ un espacio afín, y $x\in X$.

$$\begin{array}{cccc} t_x & V & \to & X \\ & \overrightarrow{v} & \mapsto & \overrightarrow{v}\cdot x \end{array}$$

Es una función, ya que $\overrightarrow{v}\cdot x$ es único. Además $t_x(\overrightarrow{v})=t_x(\overrightarrow{w})$, significa que $\overrightarrow{v}\cdot x=\overrightarrow{w}\cdot x$, pero es único, luego $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}$.
Por último, dado $y\in X$, existe $\overrightarrow{xy}\in V$ tal que $t_x(\overrightarrow{xy})=y$.
por ello tenemos que

$$S(x,V)=X.$$

■

Ejemplo 4.5 *En $V = X = \mathbb{R}^4$ espacio afín veectorial. Sea $\pi : 2x + 3y - 4z + w = 6$. Exprese π en términos de un subespacios afín.*

Solución: Sea $(x, y, z, w) \in \pi$, luego tenemos $w = 6 - 2x - 3y + 4z$, reemplazando obtenemos,

$$\begin{aligned} & (x, y, z, w) \\ = \;& (x, y, z, 6 - 2x - 3y + 4z) \\ = \;& (x, 0, 0, -2x) + (0, y, 0, -3y) + (0, 0, z, 4z) + (0, 0, 0, 6) \\ = \;& x(1, 0, 0, -2) + y(0, 1, 0, -3) + z(0, 0, 1, 4) + (0, 0, 0, 6) \end{aligned}$$

Denotemos

$$x_0 = (0, 0, 0, 6), \quad U = \langle (1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, -3), (0, 0, 1, 4) \rangle$$

Luego

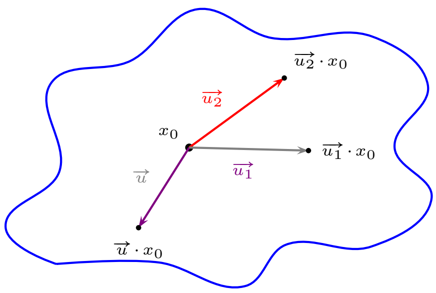
$$S(x_0, U) = (0, 0, 0, 6) + \langle (1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, -3), (0, 0, 1, 4) \rangle$$

□

Teorema 4.6 *Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín y $S(x_0, \mathcal{U})$ un subespacio afín, entonces*

$$\mathcal{U} = \left\{ \overrightarrow{xy} \mid x, y \in S(x_0, \mathcal{U}) \right\}$$

Demostración: Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín y $S(x_0, \mathcal{U})$ un subespacio afín



1. Veamos primero $\mathcal{U} \subseteq \left\{ \overrightarrow{xy} \mid x, y \in S(x_0, \mathcal{U}) \right\}$.

   Sea $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$, luego $\overrightarrow{u} \cdot x_0$, $x_0 \in S(x_0, \mathcal{U})$ ya que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{x_0 \left(\overrightarrow{u} \cdot x_0 \right)}$ envían x_0 en $\overrightarrow{u} \cdot x_0$ y la unicidad del vector tenemos

   $$\overrightarrow{x_0 \left(\overrightarrow{u} \cdot x_0 \right)} = \overrightarrow{u}$$

   de este modo se tiene

   $$\mathcal{U} \subseteq \left\{ \overrightarrow{xy} \mid x, y \in S(x_0, \mathcal{U}) \right\}.$$

2. Para la otra contención $\left\{ \overrightarrow{xy} \mid x, y \in S(x_0,\mathcal{U}) \right\} \subseteq \mathcal{U}$.

   Sean $x, y \in S(x_0,\mathcal{U})$, por demostrar $\overrightarrow{xy} \in \mathcal{U}$.

   Como $x, y \in S(x_0,\mathcal{U})$ se tiene que, existen $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in \mathcal{U}$ tal que

$$x = \overrightarrow{u_1} \cdot x_0 \qquad y = \overrightarrow{u_2} \cdot x_0$$

   Sea

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{xy} & = & \overrightarrow{w} & \\ \overrightarrow{\left(\overrightarrow{u_1} \cdot x_0\right)\left(\overrightarrow{u_2} \cdot x_0\right)} & = & \overrightarrow{w} & / \cdot \overrightarrow{u_1} \cdot x_0 \\ \overrightarrow{\left(\overrightarrow{u_1} \cdot x_0\right)\left(\overrightarrow{u_2} \cdot x_0\right)} \cdot \overrightarrow{u_1} \cdot x_0 & = & \overrightarrow{w} \cdot \left(\overrightarrow{u_1} \cdot x_0\right) & \\ \overrightarrow{u_2} \cdot x_0 & = & \left(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u_1}\right) \cdot x_0 & / - \overrightarrow{u_2} \cdot \\ x_0 & = & \left(-\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u_1}\right) \cdot x_0 & \end{array}$$

   Por unicidad

$$\begin{array}{rcl} -\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u_1} & = & \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{w} & = & \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1} \end{array}$$

   con $\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1} \in \mathcal{U}$, luego $\overrightarrow{w} \in \mathcal{U}$. ∎

Propiedad 4.7 *Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x, z \in X$ y $\mathcal{U}$ subespacios de V, entonces*

1. *Si $z \in S(x,\mathcal{U})$ entones $S(x,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{U})$.*
2. *Si $S(x,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{U})$ entones $\overrightarrow{xz} \in \mathcal{U}$.*

Demostración: Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x, z \in X$, $\mathcal{U} \leq V$, y $z \in S(x,\mathcal{U})$ luego tenemos que $z = \overrightarrow{u} \cdot x$, con $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$
Ahora bien, notemos que

$$\overrightarrow{w} \cdot z = \overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \cdot x) = (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}) \cdot x$$

por ello $S(z,\mathcal{U}) \subseteq S(x,\mathcal{U})$. análogamente, obtenemos que

$$(-\overrightarrow{u}) \cdot z = (-\overrightarrow{u}) \cdot (\overrightarrow{u} \cdot x) = (-\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}) \cdot x = x$$

y con ello la otra contención.

$$S(x,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{U}).$$

De $S(x,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{U})$, tenemos que $x \in S(z,\mathcal{U})$, luego existe $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$ que cumple con

$$\overrightarrow{u} \cdot z = x = \overrightarrow{xz} \cdot x$$

es decir, $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$. ∎

Propiedad 4.8 *Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x, w \in X$ y $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ subespacios de V, tales que $S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) \neq \varnothing$, entonces, existe $z \in X$, de modo que*

$$S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) = S(z,\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

Demostración: Sea $z \in S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W})$, luego por la propiedad anterior tenemos que

$$S(x,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{U}) \quad \wedge \quad S(w,\mathcal{W}) = S(z,\mathcal{W})$$

Ahora demostraremos que

$$S(z,\mathcal{U}) \cap S(z,\mathcal{W}) = S(z,\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

Para ello, sea $u \in S(z,\mathcal{U}) \cap S(z,\mathcal{W})$, luego tenemos por teorema 4.6 que

$$\overrightarrow{uz} \in \mathcal{U} \ \wedge \ \overrightarrow{uz} \in \mathcal{W},$$

de lo cual tenemos $\overrightarrow{uz} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, de este modo $u \in S(z,\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.
Para la otra contención, sea $u \in S(z,\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$, luego tenemos por teorema 4.6 que $\overrightarrow{uz} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, de lo cual tenemos $\overrightarrow{uz} \in \mathcal{U} \wedge \overrightarrow{uz} \in \mathcal{W}$, de este modo $u \in S(z,\mathcal{U}) \cap S(z,\mathcal{W})$. ■

Corolario 4.9 *Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x_i \in X$ y $\mathcal{U}_i$ subespacios de V, para todo $i \in I$ tales que $\cap_{i\in I} S(x_i,\mathcal{U}_i) \neq \varnothing$, entonces, existe $z \in X$, de modo que*

$$\cap_{i\in I} S(x_i,\mathcal{U}_i)) = S(z, \cap_{i\in I} \mathcal{U}_i)$$

Teorema 4.10 *Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x, w \in X$ y $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ subespacios de V, entonces $S(x,\mathcal{U}) = S(w,\mathcal{W})$ si y sólo si $\mathcal{U} = \mathcal{W} \ \wedge \ S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) \neq \varnothing$*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{U} = \mathcal{W} \wedge S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) \neq \varnothing$, por demostrar que $S(x,\mathcal{U}) = S(w,\mathcal{W})$.
Sea $z \in S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{U})$,

$$S(x,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{W}) = S(w,\mathcal{W})$$

Ahora supongamos que $S(x,\mathcal{U}) = S(w,\mathcal{W})$, por demostrar $\mathcal{U} = \mathcal{W}$ y
$S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) \neq \varnothing$
Por teorema anterior

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} & = & \left\{\overrightarrow{zw} \in V \mid z, w \in S(x,\mathcal{U})\right\} \\ & = & \left\{\overrightarrow{zw} \in V \mid z, w \in S(w,\mathcal{W})\right\} \\ & = & \mathcal{W} \end{array}$$

Además $S(x,\mathcal{U}) = S(w,\mathcal{W})$, se tiene entonces que $S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) \neq \varnothing$.

■

Grupo de las Traslaciones. Sea $(V, X, \cdot)$ un espacio afín y $\overrightarrow{a} \in V$

$$\begin{array}{rccl} t_{\overrightarrow{a}}: & X & \to & X \\ & x & \rightsquigarrow & t_{\overrightarrow{a}}(x) = \overrightarrow{a} \cdot x \end{array}$$

Se dice que $t_{\overrightarrow{a}}$ es una **traslación** en la dirección del vector $\overrightarrow{a}$, en el conjunto X.

Teorema 4.11 $t_{\overrightarrow{a}}$ *es una función biyectiva.*

Demostración:

i. $t_{\overrightarrow{a}}$ es inyectiva, sean $x, y \in X$ por demostrar $t_{\overrightarrow{a}}(x) = t_{\overrightarrow{a}}(y)$, entonces $x = y$ Para ello veamos

$$\begin{array}{rcl} t_{\overrightarrow{a}}(x) & = & t_{\overrightarrow{a}}(y) \\ \overrightarrow{a} \cdot x & = & \overrightarrow{a} \cdot y \\ -\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot x\right) & = & -\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot y\right) \\ \overrightarrow{0} \cdot x & = & \overrightarrow{0} \cdot y \\ x & = & y \end{array}$$

De este modo $t_{\overrightarrow{a}}$ es inyectiva.

ii. $t_{\overrightarrow{a}}$ es epiyectiva, por demostrar que Rec $(t_{\overrightarrow{a}}) = X$

La primera contención es evidente que Rec $(t_{\overrightarrow{a}}) \subseteq X$, basta demostrar que Rec $(t_{\overrightarrow{a}}) \supseteq X$.

Dado $x \in X$

$$\begin{array}{rcl} t_{\overrightarrow{a}}\left(-\overrightarrow{a} \cdot x\right) & = & \overrightarrow{a}\left(-\overrightarrow{a} \cdot x\right) \\ & = & \left(\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a})\right) \cdot x \\ & = & \overrightarrow{0} \cdot x \\ & = & x \end{array}$$

Luego $t_{\overrightarrow{a}}$ es epiyectiva, de este modo $t_{\overrightarrow{a}}$ es biyectiva. ∎

Notación:

$$\mathcal{T}(X) = \left\{t_{\overrightarrow{a}} \mid \overrightarrow{a} \in V\right\}$$

Propiedad 4.12 *Sea* $(V, X, \cdot)$ *un espacio afín, entonces*

$\mathcal{T}(X)$ *es un grupo, llamado el grupo de las traslaciones del espacio afín.*

Demostración: Consideremos las aplicación, que además cumple con:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(X) & \cong & (V, +) \\ t_{\overrightarrow{a}} & \leftrightarrow & \overrightarrow{a} \\ t_{\overrightarrow{a}}^{-1} & \leftrightarrow & -\overrightarrow{a} \\ t_{\overrightarrow{a}} \circ t_{\overrightarrow{b}} & \leftrightarrow & t_{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}} \end{array}$$

Además por unicidad tenemos $t_{\overrightarrow{a}}(x) = t_{\overrightarrow{b}}(x)$ se tiene que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$. ∎

Propiedad 4.13 *Sean* $(V, X, \cdot)$ *un espacio afín,* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u} \in V$ *y* $x_0 \in X$ *entonces*

$$t_{\overrightarrow{a}}(S(x_0, <\overrightarrow{u}>)) = S(\overrightarrow{a}\, x_0, <\overrightarrow{u}>)$$

es decir, $t_{\overrightarrow{a}}$ *respeta paralelismo de la rectas.*

Demostración: Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u} \in V$ y $x_0 \in X$

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{a}}(S(x_0, <\overrightarrow{u}>) &= t_{\overrightarrow{a}}(\{\alpha\overrightarrow{u} \cdot x_0 \mid \alpha \in K\}) \\ &= \{t_{\overrightarrow{a}}(\alpha\overrightarrow{u} \cdot x_0) \mid \alpha \in K\} \\ &= \{\overrightarrow{a} \cdot (\alpha\overrightarrow{u} \cdot x_0) \mid \alpha \in K\} \\ &= \{\alpha\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{a} \cdot x_0) \mid \alpha \in K\} \\ &= (S(\overrightarrow{a} \cdot x_0, <\overrightarrow{u}>) \end{aligned}$$

■

Corolario 4.14 *Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $\overrightarrow{a} \in V$, $\mathcal{U} \leq V$ y $x_0 \in X$ entonces*

$$t_{\overrightarrow{a}}(S(x_0, \mathcal{U})) = S(\overrightarrow{a}x_0, \mathcal{U}).$$

4.4. Sistema de Coordenadas

Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x_0 \in X$ y B una base ordenada del espacio vectorial V.
Se dice que (x_0, B) es un sistema de coordenada de X y las coordenada de $x \in X$ respecto al sistema de coordenadas (x_0, B), están dadas por:

$$[x]_{(x_0,B)} = [\overrightarrow{x_0x}]_B$$

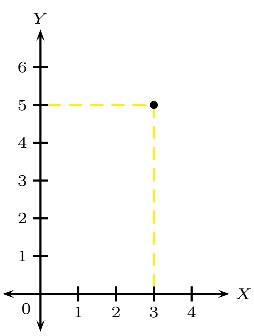
Ejemplo 4.15 *En espacio vectorial afín real, es decir, $V = X = \mathbb{R}^2$.*
Sean $x_0 = (1,1)$ y $B = \{(1,0),(0,1)\}$.
Determine las coordenadas del punto $[(3,5)]_{(x_0,B)}$

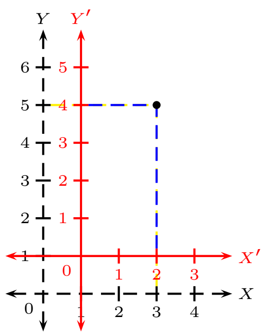
Solución:

$$\begin{aligned} [(3,5)]_{(x_0,B)} &= [\overrightarrow{(1,1)(3,5)}]_B \\ &= [\overrightarrow{(3,5)-(1,1)}]_B \\ &= [\overrightarrow{(2,4)}]_B \end{aligned}$$

$$[(3,5)]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

□





Ejemplo 4.16 *Sea (V,X) un espacio afín, $x_0 \in X$ y $B = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \cdots, \overrightarrow{a_n}\}$ base de V. Determine las coordenadas de*

$$[(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0]_{(x_0,B)}$$

Solución: Sea

$$\begin{aligned}
& [(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0]_{(x_0,B)} \\
= & [\overrightarrow{x_0(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0}]_{(B)} \\
= & \left[\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}\right]_B \\
= & [\overrightarrow{a_1}]_B + [\overrightarrow{a_2}]_B + [\overrightarrow{a_3}]_B + \cdots + [\overrightarrow{a_n}]_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0]_{(x_0,B)} \\
= & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$[(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Teorema 4.17 *Sean (V,X) un espacio afín, $x_0 \in X$ y B base de V tal que*

$$[\overrightarrow{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ y } [x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \text{ entonces } [\overrightarrow{v} \cdot x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{v} \cdot x]_{(x_0,B)} &= \left[\overrightarrow{x_0\left(\overrightarrow{v} \cdot x\right)}\right]_B \\
&= \left[\overrightarrow{v} + \overrightarrow{x_0x}\right]_B \\
&= [\overrightarrow{v}]_B + [\overrightarrow{x_0x}]_B \\
&= [\overrightarrow{v}]_B + [x]_{(x_0,B)}
\end{aligned}$$

De este modo se tiene

$$[\overrightarrow{v} \cdot x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

■

Ejemplo 4.18 *Sean* $(V, X, \cdot)$ *un espacio afín,* $x_0, x, y \in X$ *y* B *una base de* V *tales que*

$$[x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } [y]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Calcule $[\overrightarrow{xy}]_B$

Solución: Si $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0y} = -\overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{x_0y}$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} [\overrightarrow{xy}]_B &=& [-\overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{x_0y}]_B \\ &=& -[\overrightarrow{x_0x}]_B + [\overrightarrow{x_0y}]_B \\ &=& -[\overrightarrow{x}]_{(x_0,B)} + [\overrightarrow{y}]_{(x_0,B)} \end{array}$$

$$[\overrightarrow{xy}]_B = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$$

□

Observación: Tener un sistema de coordenadas para el espacio afín (V, X) significa que podemos representar cada punto de X mediante una matriz columna.

4.5. Ecuación de la Recta

Sean $(V, X, \cdot)$ espacio afín, $x_0 \in X$ y B base ordenada de V. Además sea l una recta afín tal que $l = S(x_0, \langle \overrightarrow{v} \rangle)$.
Si $y \in l$, entonces existe $t \in \mathbb{K}$ tal que $y = \left(t\overrightarrow{v}\right) \cdot x_0$

$$\begin{array}{rcl} [y]_{(x_0,B)} &=& [\left(t\overrightarrow{v}\right) \cdot x]_{(x_0,B)} \\ &=& [\overrightarrow{x_0\left(\left(t\overrightarrow{v}\right) \cdot x\right)}]_B \\ &=& [t\overrightarrow{v}]_B + [x]_{(x_0,B)} \\ &=& t \cdot [\overrightarrow{v}]_B + [x]_{(x_0,B)} \end{array}$$

Supongamos que

$$[\overrightarrow{v}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ [y]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ y } [x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

entonces tenemos ecuación paramétrica de la recta l en el sistema (x_0, B).

$$l : \left.\begin{array}{rcl} y_1 &=& t \cdot x_1 + a_1 \\ y_2 &=& t \cdot x_2 + a_2 \\ \vdots &=& \vdots \\ y_n &=& t \cdot x_n + a_n \end{array}\right\}$$

Despejando el parámetro t, obtenemos la ecuación simétrica de la recta l en el sistema (x_0, B).

$$l : \frac{y_1 - a_1}{x_1} = \frac{y_2 - a_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n - a_n}{x_n}$$

Ejemplo 4.19 *Sea* $V = X = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *base ordenada de* V*,* $x_0 = (1,2,3)$ *y* $l = S\left((2,1,0), \langle (2,3,1) \rangle\right)$.
Determine la ecuación paramétrica y simétrica de $[l]_{(x_0,\mathcal{B})}$

Solución:
Si $\overrightarrow{x} \in l$, entonces $\overrightarrow{x} = (2,1,0) + \alpha(2,3,1)$

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{x}]_{(x_0,\mathcal{B})} &= [(2,1,0) + \alpha(2,3,1)]_{(x_0,\mathcal{B})} \\
&= [(2,1,0)]_{(x_0,\mathcal{B})} + \alpha[(2,3,1)]_{\mathcal{B}} \\
&= [\overrightarrow{((1,2,3)\,(2,1,0))}]_{B} + \alpha[(2,3,1)]_{\mathcal{B}} \\
&= [(1,-1,-3)]_{\mathcal{B}} + \alpha[(2,3,1)]_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

$$[\overrightarrow{x}]_{(x_0,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

del cual se concluye la ecuación paramétrica

$$l : \begin{cases} x_1 = -\alpha + 2 \\ x_2 = 2\alpha + 2 \\ x_3 = \alpha - 3 \end{cases}$$

y la ecuación simétrica es

$$l : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$$

□

Ejercicio 4.20 *En* $V = X = \mathbb{R}^4$*, sean* $x = (1,2,1,2)$, $y = (1,3,1,1)$,

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

base ordenada de V *y* $x_0 = (1,-1,0,1)$.
Determine la ecuación paramétrica y simétrica de $[l_{xy}]_{(x_0,\mathcal{B})}$

Ejemplo 4.21 *Sean* $V = X = \mathbb{R}^3$ *y* $H = S\left((0,0,1), \langle (1,2,3),(-1,0,1) \rangle\right)$
Determine si H *es un hiperplano afín*

Solución:

$$\dim\left(\langle (1,2,3),(-1,0,1) \rangle\right) = 2, \text{ entonces } H \text{ es un hiperplano afín}$$

□

4.6. Formas Lineales

Sea (V, X) un espacio afín y $f : V \to \mathbb{K}$, entonces f es una forma lineal (f transformación lineal) si y sólo si

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \left(\forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V\right) \left(f(\alpha \overrightarrow{v_1} + \beta \overrightarrow{v_2}) = \alpha \cdot f(\overrightarrow{v_1}) + \beta \cdot f(\overrightarrow{v_2})\right)$$

Ejercicio 4.22 *Determine si las siguientes funciones son formas lineales*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, z, w) & \rightsquigarrow & 2x + y - w \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \rightsquigarrow & x \end{array}$$

Teorema 4.23 *Si f es una forma lineal no nula sobre el espacio afín (V, X), entonces*

$$ker\ f = \{\overrightarrow{v} \in V \mid f(\overrightarrow{v}) = 0\}$$

es un hiperplano.

Demostración: Como f es no nula, entonces existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ y $\overrightarrow{v} \in V$ tales que $f(\overrightarrow{v}) = \alpha$. Despejando y operando obtenemos que

$$\begin{array}{rcll} f(\overrightarrow{v}) & = & \alpha & / \cdot \frac{1}{\alpha}\ ,\ \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{\alpha} f(\overrightarrow{v}) & = & 1 & \\ f\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \overrightarrow{v}\right) & = & 1 & / \cdot \beta\ ,\ \beta \in \mathbb{K} \\ f\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \overrightarrow{v}\right) & = & \beta & \end{array}$$

todo elemento tiene preimagen, es decir

$$f \text{ es epiyectiva}$$

Por teorema de álgebra lineal, tenemos la siguiente igualdad

$$\dim V = \dim\ (\ker\ f) + \dim\ (\mathrm{Im}\ f)$$

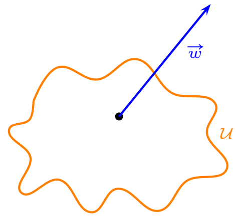
Supongamos $\dim V = n$ y como f es epiyectiva, entonces $\dim\ (\mathrm{Im}\ f) = 1$, entonces

$$n = \dim\ (\ker\ f) + 1, \text{ luego } \dim\ (\ker\ f) = n - 1$$

$$\ker\ f \text{ es un hiperplano.}$$

■

Teorema 4.24 *Sea $\mathcal{U} \leq V$ y $\mathcal{U}$ hiperplano, entonces existe una forma lineal f, tal que $ker\ f = \mathcal{U}$.*



Demostración:
Si dim $V = n$, entonces dim $\mathcal{U} = n - 1$.
Sea $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}}\}$ base de $\mathcal{U}$
Sea $\overrightarrow{w} \in V$ tal que $\overrightarrow{w} \notin \mathcal{U}$, entonces $V = \mathcal{U} + \langle \overrightarrow{w} \rangle$
Sea $\overrightarrow{v} \in V$, entonces existen únicos $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tales que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \alpha \overrightarrow{w}$$

Por lo anterior, se obtiene la función

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & \overrightarrow{v} & \rightsquigarrow & f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u} + \alpha \overrightarrow{w}) = \alpha \end{array}$$

que claramente es una forma lineal y ker $f = \mathcal{U}$. ∎

Observación: El teorema anterior, nos permite determinar la ecuación cartesiana de un hiperplano vectorial.
Con las notaciones anteriores $B = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$ otra base de V. Si $\overrightarrow{v} \in \ker f$ entonces

$$\overrightarrow{v} = x_1 \overrightarrow{w_1} + x_2 \overrightarrow{w_2} + \cdots + x_n \overrightarrow{w_n}$$

luego

$$\begin{array}{rcl} f(\overrightarrow{v}) & = & x_1 \cdot f(\overrightarrow{w_1}) + x_2 \cdot f(\overrightarrow{w_2}) + \cdots + x_n \cdot f(\overrightarrow{w_n}) \\ & = & \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n \\ 0 & = & \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n \end{array}$$

esta última, es la forma general de la ecuación cartesiana de un hiperplano vectorial con respecto a la base B.

4.7. Ecuación de un Hiperplano Afín

Sea $S(x_0, \mathcal{U})$ un hiperplano afín y (x_0, B) un sistema de coordenadas en X. Supongamos

$$[x_1]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ y } [x]_{(x_0,B)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sea $x \in S(x_0, \mathcal{U})$, entonces

$$\begin{array}{rcl} [\overrightarrow{x_1 x}]_B & = & [\overrightarrow{x_1 x_0} + \overrightarrow{x_0 x}]_B \\ & = & [\overrightarrow{x_0 x}]_B - [\overrightarrow{x_0 x_1}]_B \\ & = & [x]_{(x_0,B)} - [x_1]_{(x_0,B)} \end{array}$$

finalmente

$$[\overrightarrow{u}]_B = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

Como $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es hiperplano, entonces tenemos que existe $\alpha_i \in K$, tal que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot (x_1 - a_1) + \alpha_2 \cdot (x_2 - a_2) + \cdots + \alpha_n \cdot (x_n - a_n) &= 0 \\ \alpha_1 \cdot x_1 - \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot x_2 - \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n - \alpha_n \cdot a_n &= 0 \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n$$

Ecuación hiperplano afín

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = d$$

Ejemplo 4.25 *Sea $V = X = \mathbb{R}^3$. Si $B = \{(1,1,0),(1,0,1)(1,0,0)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$, $S_1 = S((1,1,1),\langle(2,1,3),(0,1,-1)\rangle)$ y $x_0 = (1,2,3)$.*
Determine la ecuación cartesiana del hiperplano afín $[S_1]_{(x_0,B)}$.

Solución:
Sea $(x,y,z) \in S_1$, entonces $(x,y,z) = (1,1,1) + \alpha(2,1,3) + \beta(0,1,-1)$,luego:

$$\begin{aligned} [(x,y,z)]_{(x_0,B)} &= [(1,1,1)]_{(x_0,B)} + \alpha[(2,1,3)]_B + \beta[(0,1,-1)]_B \\ &= [\overrightarrow{(1,2,3)(1,1,1)}]_B + \alpha[(2,1,3)]_B + \beta[(0,1,-1)]_B \\ &= [(0,-1,-2)]_B + \alpha[(2,1,3)]_B + \beta[(0,1,-1)]_B \end{aligned}$$

$$[(x,y,z)]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de otro modo

$$[(x,y,z)]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} -1 + \alpha + \beta \\ -2 + 3\alpha - \beta \\ 3 - 2\alpha \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \alpha + \beta \\ y_1 &= -2 + 3\alpha - \beta \\ z_1 &= 3 - 2\alpha \end{aligned}$$

del cual se concluye que la ecuación del hiperplano afín es

$$x_1 + y_1 + 2z_1 = 3.$$

□

Ejercicio 4.26 *Sea* $V = X = \mathbb{R}^3$. *Si* $B = \{(1,1,1),(1,1,0)(1,0,0)\}$ *base ordenada de* $\mathbb{R}^3$, $U = \langle(1,2,1),(0,1,2)\rangle$ *y* $x_0 = (3,1,2)$.
Determine la ecuación cartesiana del hiperplano afín $[S(((1,1,1),U)]_{(x_0,B)}$.

Ejercicio 4.27 *Sea* π_1 *un plano en* $\mathbb{R}^3$, *cuya ecuación en el sistema* (x_0,B) *es* $x+y-z=5$, *con* $x_0 = (1,2,3)$ *y* $B = \{(1,1,0),(1,1,1)(1,0,0)\}$ *base*
Determine la ecuación cartesiana del hiperplano afín

$$[(\pi_1)]_{((1,3,1),\{(1,3,2),(2,3,1),(2,1,3)\})}.$$

4.8. Paralelismo en un Espacio Afín

Sea (V,X) un espacio afín, $S_1 = S(x,\mathcal{U})$ y $S_2 = S(y,\mathcal{W})$ subespacios afines.
Se dice que

$$S_1 \parallel S_2 \text{ si y sólo si la } \mathcal{U} \leq \mathcal{W} \text{ o bien } \mathcal{W} \leq \mathcal{U}.$$

Ejemplo 4.28 *Determine si* S_1 *y* S_2 *son paralelos donde*

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y+z=1\} \\ S_2 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y+z=-7\} \end{array}$$

Solución:
$S_1 : x = 1-2y-z$, entonces

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) & = & (1-2y-z,y,z) \\ (x,y,z) & = & (1,0,0)+(-2y,y,0)+(-z,0,z) \\ (x,y,z) & = & (1,0,0)+y(-2,1,0)+z(-1,0,1) \end{array}$$

entonces

$$S_1 = S\left((1,0,0),\langle(-2,1,0),(-1,0,1)\rangle\right)$$

Análogamente

$$S_2 = S\left((7,0,0)\langle(-2,1,0),(-1,0,1)\rangle\right)$$

Luego $S_1 \parallel S_2$

□

Teorema 4.29 *Sean* (V,X) *un espacio afín,* S_1,S_2 *subespacio afines tal que dim* $S_1 =$ *dim* S_2, *entonces*

$$S_1 \parallel S_2, \textit{ si y sólo si existe } t \textit{ traslación tal que } t(S_1) = S_2.$$

Demostración: Supongamos $S_1 \parallel S_2$, por demostrar que existe t traslación tal que $t(S_1) = S_2$
Ya que $\mathcal{U} = \mathcal{W}$, tenemos

$$\begin{array}{lllll} S_1 & = & S(x,\mathcal{U}) & = & S(x,\mathcal{W}) \\ S_2 & = & S(y,\mathcal{W}) & = & S(y,\mathcal{U}) \end{array}$$

Sea $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{xy}$, luego $t_{\overrightarrow{v}}(x) = y$ y por lo tanto

$$t_{\overrightarrow{v}}(S(x,\mathcal{U})) = S(\overrightarrow{v} \cdot x,\mathcal{U}) = S(y,\mathcal{W})$$

Ahora supongamos que existe t traslación tal que $t(S_1) = S_2$, por demostrar $S_1 \parallel S_2$.
Sea $S_1 = S(x,\mathcal{U})$ y $t_{\overrightarrow{v}}(S_1) = t_{\overrightarrow{v}}(S(x,\mathcal{U})) = S(\overrightarrow{v} \cdot x,\mathcal{U}) = S_2$, luego ambos tienen la misma dirección por lo tanto $S_1 \parallel S_2$. ∎

Teorema 4.30 *Sea (V,X) un espacio afín, S_1 y S_2 hiperplanos afines, entonces*

$$S_1 \parallel S_2, \textit{ si y sólo si } S_1 = S_2 \vee S_1 \cap S_2 = \varnothing$$

Demostración:
Supongamos $S_1 \parallel S_2$, por demostración $S_1 = S_2 \vee S_1 \cap S_2 = \varnothing$

i) Si $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ listo

ii) Ahora $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, entonces existe $z \in X$ tal que $z \in S_1 \cap S_2$ como $S_1 \cap S_2$. entonces

$$\begin{array}{lllll} S_1 & = & S(x,\mathcal{U}) & = & S(z,\mathcal{U}) \\ S_2 & = & S(y,\mathcal{U}) & = & S(z,\mathcal{U}) \end{array}$$

Por lo tanto $S_1 = S_2$

Ahora supongamos $S_1 = S_2 \vee S_1 \cap S_2 = \varnothing$, por demostrar $S_1 \parallel S_2$.

i) Si $S_1 = S_2$, entonces $S_1 \parallel S_2$ listo

ii) Caso $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, por absurdo

Supongamos que $S_1 \cap S_2 = \varnothing \ \wedge \ S_1 \not\parallel S_2$, $S_1 = S(x,\mathcal{U})$, y $S_2 = S(y,\mathcal{W})$. Como $\mathcal{U},\mathcal{W}$ son hiperplanos distintos se tiene que $V = \mathcal{U} + \mathcal{W}$.
$\overrightarrow{xy} \in V$, existe $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{W}$

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$$

$$\begin{array}{rcll} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \cdot x & = & y & / - \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u} \cdot x & = & -\overrightarrow{w} \cdot y & \end{array}$$

de donde $\overrightarrow{u} \cdot y = -\overrightarrow{w} \cdot x \in S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ Por lo tanto

$$S_1 \parallel S_2.$$

■

Definición 4.31 *Sea (V, X) un espacio afín y $S = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq X$.*
Se dice que S es linealmente independiente si y sólo si

$$(\sharp(S) = 1) \vee (\sharp(S) > 1 \wedge \{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\}) \text{ es linealmente independiente.}$$

Definición 4.32 *Sea (V, X) un espacio afín y $S = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq X$.*
Se define el subespacio afín generado por S es

$$S(x_0, \{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\})$$

note que $S = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq S(x_0, \{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\})$.

Notemos que dado $x, z \in X$ distintos, luego la recta afín que contiene a los puntos esta dada por

$$l_{xz} = S(x, < \overrightarrow{xz} >)$$

Del mismo modo la intersección de dos rectas afines, es vacía o un punto o son iguales propiedad 4.8.

4.9. Dilataciones en un Espacio Afín

Sea $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $dim(X) \geq 2$ y la función $f : X \to X$ biyectiva.
f es una dilatación si y sólo si, para todo l recta, $f(l) \parallel l$
Note que la identidad es una dilatación.

Teorema 4.33 *Sea $f : X \to X$ una dilatación en el Espacio Afín (V, X), entonces f esta completamente determinada si se conoce la imagen de dos puntos.*

Demostración: idéntica a la del teorema 1.40.

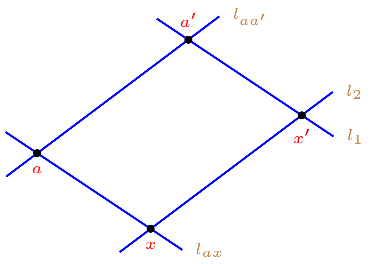
Definición 4.34 *Sea f una dilatación en el espacio afín (V, X).*

*Se dice que f es una **Traslación** si y sólo si, f no tiene puntos fijos o $f = Id$.*

*Se dice que f es una **Homotecia** si y sólo si, f tiene puntos fijos y el se llama centro de la homotecia o $f = Id$.*

Teorema 4.35 *Una traslación está completamente determinada si se conoce la imagen de un punto.*

Demostración: Sea f una traslación y $a \in X$ tal que $f(a) = a'$ y consideremos $x \in X$. de modo que $x \notin l_{aa'}$.



Definimos: l_2 paralela a $l_{aa'}$ y $x \in l_2$
l_1 paralela a l_{ax} y $a' \in l_1$
Por lo tanto $l_1 \cap l_2 = \{x'\}$ es la imagen de x.
Al conocer la imagen de dos puntos, f esta completamente determinada. ■

Por argumentos similares a los realizados en el primer capitulo tenemos que las únicas traslaciones son $t_{\vec{v}}$ con $\vec{v} \in V$.

Propiedad 4.36 *Sea $f : X \to X$ una homotecia de centro $c \in X$, entonces existe $k \in \mathbb{K}$ tal que*

$$f(x) = (k\overrightarrow{cx}) \cdot c, \text{ Para todo } x \in X.$$

Demostración: Dado $x \in X$, distinto de c, luego $f(x)$ no esta fijo, por ello tenemos que las rectas $l_{cx} \parallel l_{cf(x)}$, de este modo los vectores directores son linealmente dependiente $\{\overrightarrow{cx}, \overrightarrow{cf(x)}\}$.
Por lo anterior existe $k \in \mathbb{K}$, tal que $\overrightarrow{cf(x)} = k\overrightarrow{cx}$.
De este modo tenemos que $f(x) = (k\overrightarrow{cx}) \cdot c$.
Ahora bien dado $y \in X$, tenemos que $f(x) = (\alpha\overrightarrow{cy}) \cdot c$, pero notemos que $l_{xy} \parallel l_{f(x)f(y)}$, de este modo los vectores directores son linealmente dependiente $\{\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{f(x)f(y)}\}$, de lo cual tenemos $\alpha = k$

$$f(x) = (k\overrightarrow{cx}) \cdot c, \text{ Para todo } x \in X.$$

■

Notación: $M_{(c,k)}$ es la homotecia de razón k y centro c.

Propiedad 4.37 *Sea (V, X) un espacio afín entonces*

$$H_c = \{M_{(c,k)} \mid k \in \mathbb{K}^*\}$$

es un grupo, llamado de las homotecia de centro c

Demostración: Notemos solamente que

$$M_{(c,k)} \circ M_{(c,t)} = M_{(c,kt)}$$

y

$$M_{(c,k)}^{-1} = M_{(c,k^{-1})}$$

■

Ejemplo 4.38 *Describa las homotecia de centro c y razón k en espacio vectorial afín.*

Solución: (V,V), el espacio vectorial afín,

$$\begin{aligned} M_{(c,k)}(x) &= (k\overrightarrow{cx})\cdot c \\ &= (kx - kc)\cdot c \\ &= (kx - kc) + c \\ &= kx + (1-k)c. \end{aligned}$$

Teorema 4.39 *Sea f una dilatación en espacio afín (V,X), entonces existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tales que para todo $x,y \in$, se tiene*

$$\overrightarrow{f(x)f(y)} = \alpha\overrightarrow{xy}$$

α se llama la razón de la dilatación

Demostración: Sea f una dilatación.
i) Si f es una traslación, luego $f = t_{\overrightarrow{v}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t_{\overrightarrow{v}}(x)t_{\overrightarrow{v}}(y)} &= \overrightarrow{(\overrightarrow{v}\cdot x)(\overrightarrow{v}\cdot y)} \\ &= \overrightarrow{xy} \end{aligned}$$

Lo cual se tiene por la propiedad 4.1, y $\alpha = 1$.
ii) Si f es una homotecia, luego $f = M_{(c,k)}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{(c,k)}(x)M_{(c,k)}(y)} &= \overrightarrow{(k\overrightarrow{cx}\cdot c)(k\overrightarrow{cy}\cdot c)} \\ &= k\overrightarrow{cy} - k\overrightarrow{cx} \\ &= k\overrightarrow{xy} \end{aligned}$$

Lo cual se tiene por la propiedad 4.1, y $\alpha = k$. ■

Corolario 4.40 *Sean f_1, f_2 una dilatación en espacio afín (V,X), de razón k_1, k_2 respectivamente, entonces*

1. *$f_1 \circ f_2$ tiene razón k_1k_2*
2. *f_1^{-1} tiene razón k_1^{-1}*

Corolario 4.41 *Sea (V,X) un espacio afín, entonces*

$$D(X)/T(X) \simeq (\mathbb{K}^*, \cdot)$$

Propiedad 4.42 *Sea (V,X) un espacio afín.*
Una dilatación está completamente determinada si se conoce la imagen de un punto y la razón de la dilatación.

Demostración: Sea σ una dilatación de razón k tal que $\sigma(c) = c'$
Primer Caso, si σ es un traslación, $k = 1$, y estamos listo.

$$\sigma = t_{\overrightarrow{cc'}}$$

Segundo Caso, si σ es una rotación

$$\sigma = M_{(a,k)}$$

Pero tenemos que

$$\begin{aligned}
M_{(a,k)}(c) &= c' \\
k\overrightarrow{ac} \cdot a &= c' \\
k\overrightarrow{ac} &= \overrightarrow{ac'} \\
k\overrightarrow{ac} &= \overrightarrow{ac + cc'} \\
k\overrightarrow{ac} - \overrightarrow{ac} &= \overrightarrow{cc'} \\
(k-1)\overrightarrow{ca} &= \overrightarrow{c'c} \\
\overrightarrow{ca} &= \frac{1}{k-1}\overrightarrow{c'c} \\
a &= \frac{1}{k-1}\overrightarrow{c'c} \cdot c
\end{aligned}$$

Conocemos el centro y la razón esta completamente determinado. ■

Propiedad 4.43 *Sea (V, X) un espacio afín y σ una dilatación tal que $\sigma(x) = z$ y de la razón k, entonces*

$$\sigma = t_{\overrightarrow{xz}} \circ M_{(x,k)}$$

Demostración: σ una dilatación tal que $\sigma(x) = z$ y de la razón k. Luego tenemos que

$$t^{-1}_{\overrightarrow{xz}} \circ \sigma(x) = x$$

es una dilatación, que tiene un punto fijo y es de razón k, por lo tanto es una homotecia de razón k

$$t^{-1}_{\overrightarrow{xz}} \circ \sigma = M_{(x,k)}$$

de lo cual tenemos

$$\sigma = t_{\overrightarrow{xz}} \circ M_{(x,k)}$$

■

Propiedad 4.44 *Sea (V, X) un espacio afín, entonces para todo $a, b \in V$, para todo $c \in X$ y para todo $r, s \in K^*$*

$$t_{\overrightarrow{a}} \circ M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)} = t_{\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,rs)}$$

Demostración: Sean $a, b \in V$, $c \in X$ y $r, s \in \mathbb{K}^*$.

$$\begin{aligned} M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)})(c) &= M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}})((s\overrightarrow{cc} \cdot c)) \\ &= M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}})(c) \\ &= M_{(c,r)}(\overrightarrow{b} \cdot c) \\ &= (r\overrightarrow{c(\overrightarrow{b} \cdot c)} \cdot c) \\ &= (r\overrightarrow{b} \cdot c)) \\ &= t_{r\overrightarrow{b}}(c) \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos que la dilatación

$$t_{-r\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)}$$

tiene un punto fijo y la razón es el producto de las razones, luego es rs.

$$t_{-r\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)} = M_{(c,rs)}$$

despejando obtenemos

$$t_{\overrightarrow{a}} \circ M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)} = t_{\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,rs)}$$

■

Ejercicio 4.45 *Sea* (V, X) *un espacio afín, entonces*
Determinar condiciones para $c, d \in X$ *distintos y* $r, s \in \mathbb{K}^*$ *de modo que* $M_{(c,r)} \circ M_{(d,s)}$ *es una traslación.*