

Capítulo 1

Plano Afín

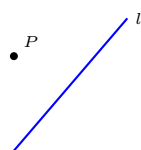
1.1. Introducción:

Definición 1.1 Un triple $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, se llama **estructura de incidencia** si y sólo si verifica $\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}$ conjuntos no vacío, $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ y $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$.

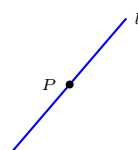
Notación: En el conjunto $\mathcal{P}$, sus elementos se llaman puntos y los designados con letra mayúscula P, Q, R . En el conjunto $\mathcal{L}$, sus elementos se llaman rectas y los designados con letra minúscula l, m, t y la relación $\mathcal{I}$ de incidencia entre puntos y rectas y denotamos por

$$(P, l) \in \mathcal{I}, P \text{ incide con } l, P \mathcal{I} l \quad (P, l) \notin \mathcal{I}, P \text{ no incide con } l, P \mathcal{I} l$$

Observación: Visualmente la incidencia se representa por



a) $P \mathcal{I} l$, P no incide con l .



b) $P \mathcal{I} l$, P incide con l .

Notación: Dada $l, m \in \mathcal{L}$

$$m \cap l \neq \emptyset \text{ si y sólo si } (\exists P \in \mathcal{P})(P \mathcal{I} m \wedge P \mathcal{I} l)$$

o bien

$$m \cap l = \emptyset \text{ si y sólo si } (\forall P \in \mathcal{P})(P \mathcal{I} m \vee P \mathcal{I} l)$$

Definición 1.2 Sean $l, m \in \mathcal{L}$.

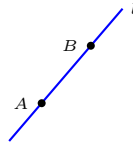
Se dice que l es **paralela** a m y se denota por $l \parallel m$, si y sólo si, $m \cap l = \emptyset \vee l = m$.

1.2. Axioma del plano afín

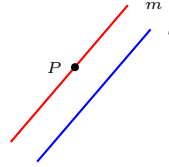
Un estructura de incidencia $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, se dice que Π es un plano afín si y sólo si cumple los siguientes axiomas

- 1.- Sean $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$ entonces $\exists! l \in \mathcal{L}$ tal que $A \mathcal{I} l$ y $B \mathcal{I} l$

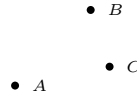
La única recta se denota por l_{AB} .



- 2.- Sean $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$. Si $P \not\mathcal{I} l$ entonces $\exists! m \in \mathcal{L}$ tal que $P \mathcal{I} m$ y $m \parallel l$ (quinto postulado de Euclides).



- 3.- Existen tres puntos no colineales (no existe una recta tal que contenga a estos tres puntos) y cada recta inciden al menos dos puntos.



Observación: Por axioma uno, dos rectas distintas inciden entre ellas en un punto o ninguno. Si existe un punto P tal que $P \mathcal{I} l$ y $P \mathcal{I} m$ denotamos por $l \cap m = \{P\}$ en caso contrario $l \cap m = \emptyset$

Teorema 1.3 Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ un plano afín, entonces la relación de paralelismo es una relación de equivalencia.

Demostración:

1. $\parallel$ es refleja, es decir, $(\forall l \in \mathcal{L})(l \parallel l)$, para ello tenemos que

$$l = l, \text{ luego } l \parallel l.$$

2. $\parallel$ es simétrica, es decir, $(\forall l, m \in \mathcal{L})(l \parallel m \Rightarrow m \parallel l)$

Consideremos dos rectas paralelas $l \parallel m$ luego se tiene que

$$l \cap m = \phi \vee l = m$$

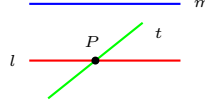
lo cual es equivalente a

$$m \cap l = \phi \vee m = l,$$

es decir, $m \parallel l$.

3. $\parallel$ es transitiva, es decir, $(\forall l, m, t \in \mathcal{L})(l \parallel m \wedge m \parallel t \Rightarrow l \parallel t)$.

Lo cual demostraremos por el absurdo. Sean l, t, m tres rectas tales que $l \parallel m$, $m \parallel t$ y $l \nparallel t$, como $l \nparallel t$ luego, $l \neq t$ y $l \cap t = \{P\}$, pero por P pasan dos rectas paralelas a m contradicción (unicidad del axioma dos). Por lo tanto la relación de paralelismo es una relación de equivalencia.

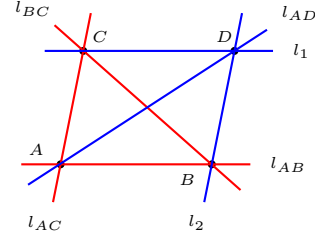


■

Definición 1.4 *Plano afín minimal es aquel plano formado por el mínimo número de puntos que cumplen con los tres axiomas.*

Propiedad 1.5 *Todo plano afín al menos contiene cuatro puntos.*

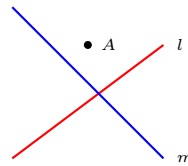
Demostración: Por axioma tres sabemos que existen tres puntos no colineales A, B, C , del cual por axioma uno, existen tres rectas que unen a estos tres puntos que los definiremos como l_{AB}, l_{BC}, l_{AC} respectivamente como se observa en la imagen. Consideremos la recta l_{AB} , por axioma dos tenemos que existe una recta paralela a l_{AB} que la designaremos por l_1 y que pasa por el punto C , análogamente se prueba la existencia de una recta paralela a l_{AC} que pasa por B que llamaremos por l_2 , como la recta $l_{AB} \cap l_{AC} \neq \emptyset$ entonces también lo hacen las rectas l_1 y l_2 en el punto D y para concluir determinaremos la existencia de la recta l_{AD} que pasa respectivamente por los puntos A, D .



■

Observación: De lo anterior se concluye:

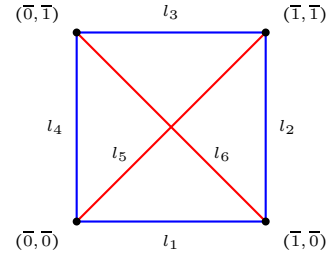
1. Todo Π plano afín contiene al menos cuatro puntos de manera que tres cualquiera no son colineales
2. Todo Π plano afín contiene a lo menos seis rectas en las que hay dos paralelas
3. Dada dos rectas no paralelas, siempre existe un punto que no incide a ninguna de las rectas



Ejemplo 1.6 Sea $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Determine las ecuaciones de las rectas y si existe paralelismo entre ellas.

Solución: Las ecuaciones de las rectas de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ están dada por

$$\begin{aligned} l_1 : y = 0 & \quad l_4 : x = 0 \\ l_2 : x = 1 & \quad l_5 : y = x \\ l_3 : y = 1 & \quad l_6 : y = x + 1 \end{aligned}$$



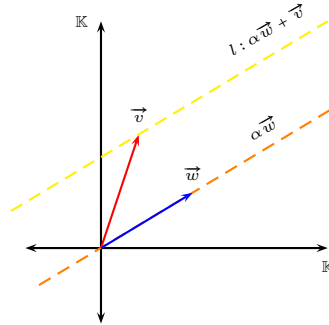
En consecuencia $l_1 \parallel l_3$, $l_2 \parallel l_4$ y $l_5 \parallel l_6$ (estas últimas son paralelas porque no hay ningún punto en común). $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es un modelo del **plano afín minimal** en donde $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es el espacio vectorial de dimensión dos. $\square$

1.2.1. Plano Afín Vectorial

Teorema 1.7 Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión dos

Si los puntos son los vectores, las rectas son las rectas afines y la incidencia es la pertenecía entonces $\Pi = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, es un Plano Afín.

Demostración: Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ con $\vec{w} \neq 0$, definamos la recta afines l en dirección $\vec{w}$ y trasladada en $\vec{v}$, por $l = \{\alpha \vec{w} + \vec{v} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$



Sea $l = \{\alpha \vec{w} + \vec{v} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ una recta afín, por comodidad se denotara por

$$l : \langle \vec{w} \rangle + \vec{v}.$$

La **Incidencia** esta definida por $\vec{P} \mathcal{I} l$ es equivalente a $\vec{P} \in l$. De otro modo, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\vec{P} = \alpha \vec{w} + \vec{v}$.

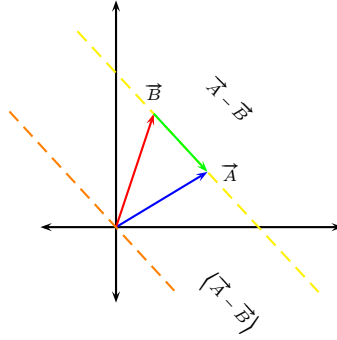
Verifiquemos los axiomas del plano afín.

1. Sea $\vec{A}, \vec{B} \in \mathcal{V}$ con $\vec{A} \neq \vec{B}$. Debemos demostrar que existe $m \in \mathcal{L}$ tal que $\vec{A} \mathcal{I} m$ y $\vec{B} \mathcal{I} m$.

Para ello tenemos que $\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{0}$ y definamos

$$m = \left\{ \alpha (\vec{A} - \vec{B}) + \vec{A} \mid \alpha \in \mathbb{K} \right\},$$

luego tenemos que $\vec{A} = 0(\vec{A} - \vec{B}) + \vec{A}$, entonces $\vec{A} \in m$, es decir, $\vec{A} \mathcal{I} m$. Análogamente $\vec{B} = (-1)(\vec{A} - \vec{B}) + \vec{A}$, es decir, $\vec{B} \mathcal{I} m$.



Unicidad: Supongamos que $\exists t \in \mathcal{L}$ de modo que

$$t = \left\{ \alpha \vec{w} + \vec{v} \mid \alpha \in \mathbb{K} \right\}$$

tal que $\vec{A} \mathcal{I} t$ y $\vec{B} \mathcal{I} t$, luego existe un $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ distintos tales que

$$\begin{cases} \vec{A} = \alpha_1 \vec{w} + \vec{v} \\ \vec{B} = \alpha_2 \vec{w} + \vec{v} \end{cases}$$

de lo cual

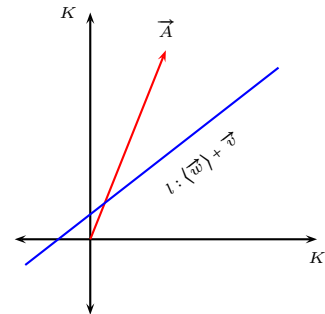
$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{B} &= \alpha_1 \vec{w} - \alpha_2 \vec{w} + \vec{v} - \vec{v} \\ &= \alpha_1 \vec{w} - \alpha_2 \vec{w} \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) \vec{w} \\ \vec{A} - \vec{B} &= \alpha_3 \vec{w} && \text{con } \alpha_3 \neq 0 \\ \vec{w} &= (\alpha_3)^{-1} (\vec{A} - \vec{B}) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle \vec{w} \rangle = \langle \vec{A} - \vec{B} \rangle$ y $\vec{A} \in t \cap m$, luego $t = m$.

- 2) Sean $\vec{A} \in \mathcal{V}$, $l \in \mathcal{L}$ y $\vec{A} \not\mathcal{I} l$. Por demostrar que existe una recta $m \in \mathcal{L}$ tal que $\vec{A} \mathcal{I} m \wedge m \parallel l$.

Sea $l: \langle \vec{w} \rangle + \vec{v}$ la recta debe tener la misma dirección y contener al vector $\vec{A}$, entonces la recta m se define como:

$$m: \langle \vec{w} \rangle + \vec{A}$$



Unicidad

Supongamos que $\exists t \in \mathcal{L}$ tal que $\vec{A} \mathcal{I} t$, $\vec{A} \mathcal{I} m$, el cual definiremos como $t := \langle \vec{x} \rangle + \vec{y}$, $m := \langle \vec{w} \rangle + \vec{A}$.

Ya que $\vec{A} \in t$ entonces $t = \langle \vec{x} \rangle + \vec{A}$ pero $t \parallel m$, entonces $\langle \vec{x} \rangle = \langle \vec{w} \rangle$ luego $m = \langle \vec{x} \rangle + \vec{A}$ es decir,

$$\left. \begin{aligned} t &= \langle \vec{w} \rangle + \vec{A} \\ m &= \langle \vec{w} \rangle + \vec{A} \end{aligned} \right\}$$

en consecuencia $t = m$.

3) Por demostrar que existe un triángulo.

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de $\mathcal{V}$, y $\vec{0} \in \mathcal{V}$ entonces tenemos $\vec{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ no son colineales, ya si l contiene a los tres elementos $\vec{0} \in l$

$$l : \langle \vec{w} \rangle + \vec{0}$$

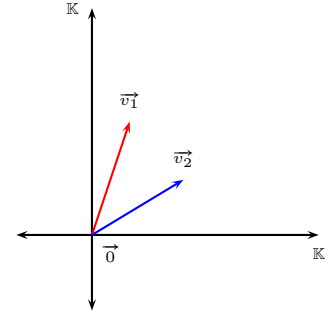
pero $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in l$

$$\vec{v}_1 = \alpha_1 \vec{w}, \quad \vec{v}_2 = \alpha_2 \vec{w}$$

luego $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son linealmente dependiente.

De este modo, existen tres puntos no colineales.

Por lo tanto $\Pi = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, es un Plano Afín ■



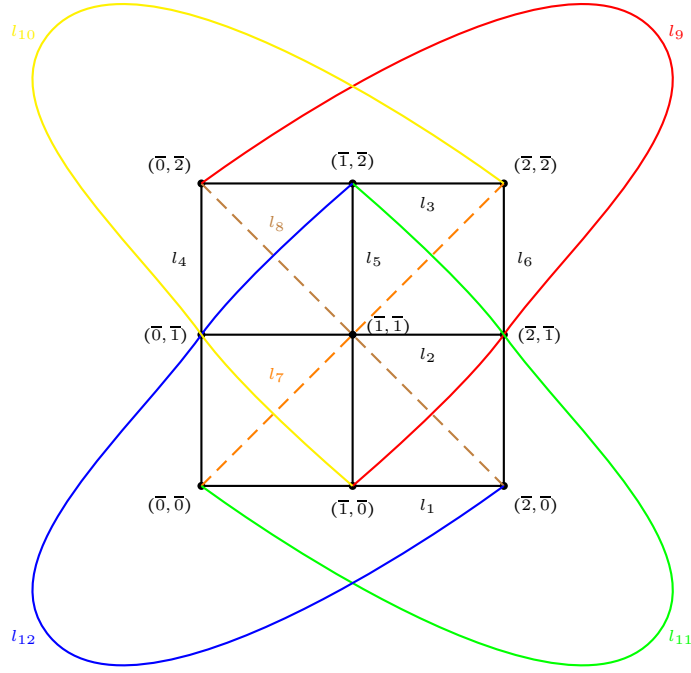
Ejemplo 1.8 Sea $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Determine las ecuaciones de las rectas y si existe paralelismo entre ellas.

Solución: Consideremos los puntos

$$\mathcal{P} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2})\}$$

las ecuaciones de las rectas son:

$$\begin{array}{llll} l_1 : y = 0, & l_4 : x = 0, & l_7 : y = x, & l_{10} : y = 2x + 1, \\ l_2 : y = 1, & l_5 : x = 1, & l_8 : y = 2x + 3, & l_{11} : y = 2x, \\ l_3 : y = 2, & l_6 : x = 2, & l_9 : y = x + 2, & l_{12} : y = x + 1. \end{array}$$



Las rectas paralelas entre ellas son:

$$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 ; l_4 \parallel l_5 \parallel l_6 ; l_7 \parallel l_8 \parallel l_9 \text{ y } l_{10} \parallel l_{11} \parallel l_{12}$$

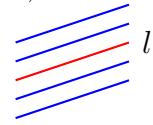
□

Definición 1.9 Dados los puntos $P_1, P_2, \dots, P_n$ se dice que los puntos son **colineales** si y sólo si existe $l \in \mathcal{L}$ tal que $P_i \mathcal{I} l$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

1.3. Haces de Paralelas

Ya que la relación de paralelismo es una relación de equivalencia en el plano afín, este se divide en clases de equivalencias llamadas cada clase un **haz de paralelas**, definidas por:

$$[l] = \{m \in \mathcal{L} \mid m \parallel l\}$$



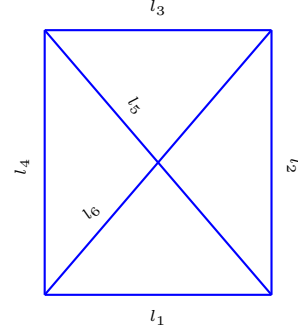
Ejemplo 1.10 El plano afín minimal contiene tres haces de paralelas.

Solución: Por propiedad 1.1 y el ejemplo 1.1, sabemos que existen seis rectas las que definimos por l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 y l_6 entonces veamos las rectas que son paralelas.

En la figura tenemos que

$$\begin{aligned} l_1 \parallel l_3 &\longrightarrow [l_1] = \{l_1, l_3\} = [l_3] \\ l_2 \parallel l_4 &\longrightarrow [l_2] = \{l_2, l_4\} = [l_4] \\ l_5 \parallel l_6 &\longrightarrow [l_5] = \{l_5, l_6\} = [l_6] \end{aligned}$$

□

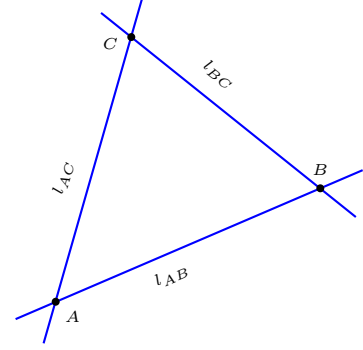


Teorema 1.11 *El plano afín contiene al menos tres haces de paralelas.*

Demostración: Por axioma tres existen $A, B, C \in \mathcal{P}$ (tres puntos no colineales)

$$\begin{aligned} l_{AC} \cap l_{BC} &\neq \emptyset \Rightarrow [l_{AC}] \neq [l_{BC}] \\ l_{BC} \cap l_{AB} &\neq \emptyset \Rightarrow [l_{BC}] \neq [l_{AB}] \\ l_{AC} \cap l_{AB} &\neq \emptyset \Rightarrow [l_{AC}] \neq [l_{AB}] \end{aligned}$$

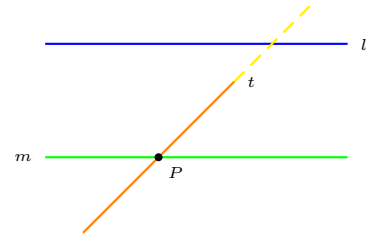
Por lo tanto $[l_{AC}] \neq [l_{AB}] \neq [l_{BC}] \neq [l_{AC}]$, en consecuencia existen al menos tres haces de paralelas.



■

Teorema 1.12 *Sean Π plano afín, $l, m, t \in \mathcal{L}$ tales que $l \parallel m$ y $m \cap t = \{P\}$ entonces $l \cap t \neq \emptyset$.*

Demostración: Por el absurdo, supongamos que $l \parallel m$ y $m \cap t \neq \emptyset \wedge l \cap t = \emptyset$, es decir, $l \parallel t$, entonces $l \parallel m$, $l \parallel t$ y $t \cap m = \{P\}$, en consecuencia por P pasan dos rectas paralelas a l , lo cual es una contradicción por unicidad de axioma dos.



■

Teorema 1.13 *Sea Π plano afín, entonces cada recta contiene el mismo número de puntos que inciden en ella.*

Demostración: Dada $l, m \in \mathcal{L}$, denotamos por $\mathcal{P}_l = \{P \in \mathcal{P} \mid P \in l\}$, debemos probar que $\#\mathcal{P}_l = \#\mathcal{P}_m$.

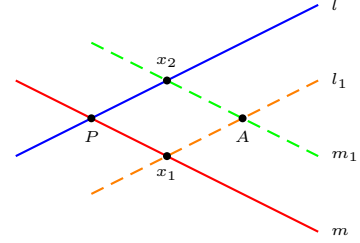
La demostración se realizara en dos caso,

i) Supongamos que $l \nparallel m$ entonces $l \cap m = \{P\}$

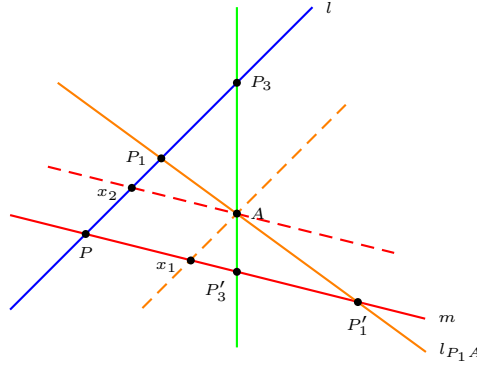
Sea $A \in \mathcal{P}$, $A \mathcal{I} l$ y $A \mathcal{I} m$. Por axioma dos sea $l_1 \in \mathcal{L}$ tal que $A \mathcal{I} l_1$ y $l_1 \parallel l$, de lo cual $l_1 \cap m = \{x_1\}$, nuevamente por axioma dos tenemos que $\exists! m_1 \in \mathcal{L}$ tal que $A \mathcal{I} m_1$ y $m_1 \parallel m$, luego $m_1 \cap l = \{x_2\}$.

Gracias a estos antecedentes podemos construir la siguiente función:

$$\begin{array}{ccc} f: \{x_2, P\} & \longrightarrow & \{x_1, P\} \\ x_2 & \longrightarrow & x_1 \\ P & \longrightarrow & P \end{array}$$



Ahora veamos otros puntos. Sea $P_1 \mathcal{I} l$ tal que $P_1 \neq P$ y $P_1 \neq x_1$. Unimos P_1 con A a través de la recta l_{AP_1} , entonces



luego tenemos $l_{AP_1} \nparallel m$, es decir, $l_{AP_1} \cap m \neq \emptyset$, luego, $l_{AP_1} \cap m = \{P'_1\}$.

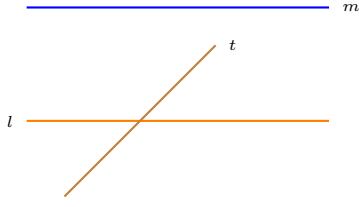
Por lo tanto

$$\begin{array}{ccc} f: \mathcal{P}_l & \longrightarrow & \mathcal{P}_m \\ P_1 & \longrightarrow & P'_1 \\ P & \longrightarrow & P \\ x_2 & \longrightarrow & x_1 \end{array}$$

De modo que f es una función biyectiva, entonces el $\#\mathcal{P}_l = \#\mathcal{P}_m$

ii) Supongamos ahora que $l \parallel m$.

Sea $t \in \mathcal{L}$ tal que $t \cap l \neq \emptyset$, por teorema anterior:



Sabemos que $t \nparallel l$ y $t \nparallel m$ por la primera parte entonces

$$\#\mathcal{P}_t = \#\mathcal{P}_l \text{ y } \#\mathcal{P}_t = \#\mathcal{P}_m$$

del cual

$$\#\mathcal{P}_l = \#\mathcal{P}_m.$$

■

Notación: Dada $l \in \mathcal{L}$ y $P \in \mathcal{P}$, denotamos por

$$\mathcal{P}_l = \{Q \in \mathcal{P} \mid QIl\}; \quad \mathcal{L}_P = \{m \in \mathcal{L} \mid PIm\}.$$

Definición 1.14 Se dice que el orden del plano Π es n si y sólo si cada recta contiene n puntos, y lo denotamos por $\#\Pi = n$

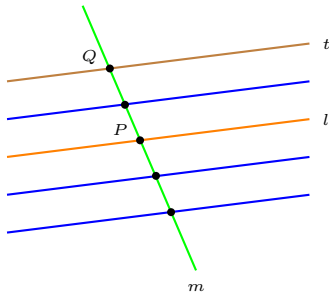
Ejemplo 1.15

1. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, es un plano afín de orden dos.
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un plano afín de orden infinito.

Observación: Los planos afines finitos, conocidos hasta ahora, son de la forma $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$, donde $\mathbb{F}_q$ es un cuerpo finito con q elementos y q potencia de un primo.

Teorema 1.16 En un plano afín, todos los haces de rectas paralelas tienen la misma cantidad de rectas y esa cantidad es igual al orden del plano.

Demostración: Sean $l, m \in \mathcal{L}$, con $l \cap m \neq \emptyset$ y $[l]$ haz de rectas paralelas de dirección l . Construimos la correspondencia de cada recta del haz, le asociamos la intersección con m



$$\begin{array}{rcl} f: [l] & \longrightarrow & \mathcal{P}_m \\ l & \longrightarrow & P \\ t & \longrightarrow & Q \end{array}$$

Por lo tanto $\#[l] = \#\mathcal{P}_m$. En consecuencia todas las haces de paralelas tienen la misma cantidad de rectas

■

Teorema 1.17 Sea Π un plano afín de orden n , entonces

- i) Por un punto P pasan $n + 1$ rectas, $\#\mathcal{L}_P = n + 1$.

- ii) El plano afín contiene $n + 1$ haces de paralelas.
- iii) El número de rectas en plano afín es $n^2 + n = \#\mathcal{L}$.
- iv) La cantidad de puntos en el plano afín es $n^2 = \#\mathcal{P}$.

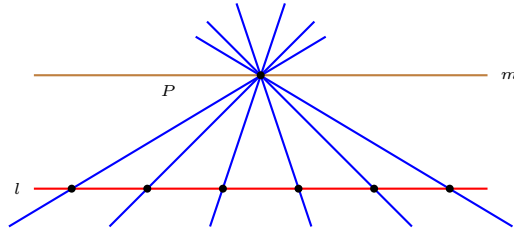
Demostración:

- i) Sean $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$ tal que $P \notin l$ en donde $\#\Pi = n \wedge \#[l] = n$.

Al unir cada punto de l con el punto P obtenemos n -rectas y por axioma dos

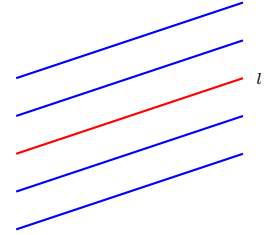
$$(\exists! m \in \mathcal{L})(P \mathcal{I} m \wedge m \parallel l)$$

por lo tanto por P pasan $n + 1$ rectas.



- ii) Dada una recta entonces existe una paralela que pasa por P y considerando el resultado anterior que por P pasan $n + 1$ rectas, entonces existen $n + 1$ haces de paralelas.
- iii) Sea $l \in \mathcal{L}$, luego pertenece a un único haz de paralelas $[l]$, cada haz tiene n rectas y por lo anterior hay $n + 1$ haces de paralelas, por lo tanto

$$\#\mathcal{L} = n(n + 1) = n^2 + n.$$



- iv) Sea $[l]$ haz de paralelas, cada recta contiene n puntos y cada haz de paralelas contiene n rectas, por lo tanto

$$\#\mathcal{P} = n \cdot n = n^2.$$

■

Ejemplo 1.18 En el plano minimal tenemos que $\#l = 2$ entonces

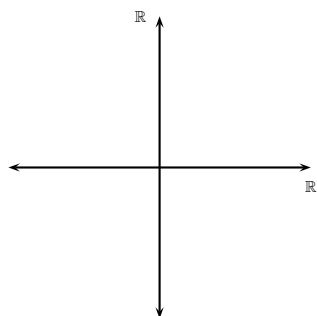
$$\#\mathcal{L} = 2^2 + 2 = 6 \text{ y } \#\mathcal{P} = 2^2 = 4$$

Del cual se concluye que el plano minimal está constituido de cuatro puntos y seis rectas.

Plano de Moulton 1902

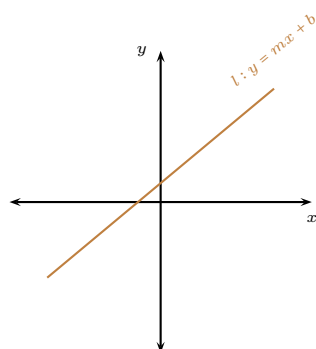
El Plano de Moulton (Forestra y Moulton, A simple non-Desarguesian plane geometry. Trans. Am. Math.) Soc, 3:192-95 es un ejemplo de un Plano Afín no trivial.

Consideremos el conjunto de puntos del plano afín $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$, los puntos del plano euclidianos.

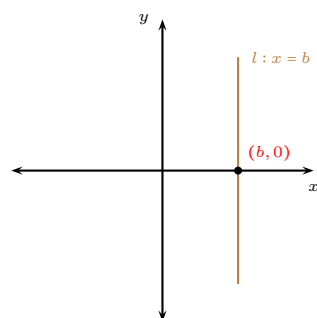
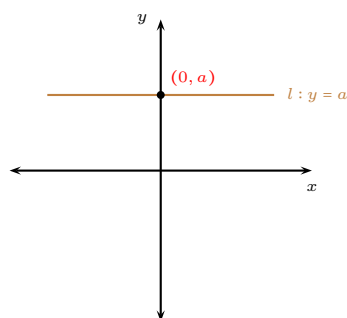


Ahora veamos las rectas que constituye el conjunto $\mathcal{L}$, son de cuatro tipos:

1. Las rectas de pendiente positiva ($m > 0$) en el plano $\mathbb{R}^2$.

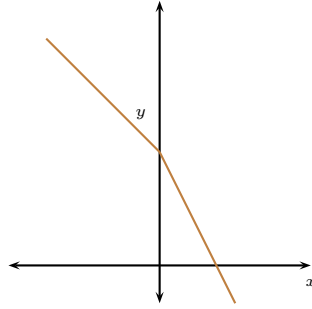


2. Las rectas con pendiente igual a cero o infinita en el plano $\mathbb{R}^2$.



3. Y las rectas definidas de la siguiente forma con $(m < 0)$

$$l : y = \begin{cases} mx + b & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{m}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$



Por último la incidencia $\mathcal{I}$ es la pertenecía.

Propiedad 1.19 Con las notaciones anteriores $\Pi = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ es un plano afín, llamado plano de Moulton.

Demostración: Tenga presente los siguientes ejemplos para la demostración.

Ejemplo 1.20 En el plano de Moulton.

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(5, 1)$ y $(7, 4)$.

Solución Determinemos la pendiente de la recta que une estos dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{7 - 5} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto $m > 0$ el cual implica que la recta es la habitual, es decir

$$\frac{y - 1}{x - 5} = \frac{3}{2}$$

Despejando obtenemos

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

□

Ejercicio 1.21 En el plano de Moulton.

Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Ejemplo 1.22 En el plano de Moulton.

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, 5)$ y $(1, -2)$

Solución Determinemos la pendiente de la recta que une estos dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 + 2}{-2 - 1} = -\frac{7}{3}$$

Por lo tanto $m < 0$ el cual implica que debemos utilizar la definición de pendiente negativa, es decir,

$$l : y = \begin{cases} mx + b & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{m}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

reemplazando los puntos $(-2, 5), (1, -2)$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & -m + b \\ -2 & = & m + b \end{array}$$

Sumando tenemos que $3 = 2b$, luego $b = \frac{3}{2}$, y restando tenemos que $-7 = 2m$, de lo cual $m = -\frac{7}{2}$. La recta pedida es:

$$l : y = \begin{cases} -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2} & ; \quad x \geq 0 \\ -\frac{7}{4}x + \frac{3}{2} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

□

Ejemplo 1.23 En el plano de Moulton. Dada la recta

$$l : y = \begin{cases} -2x + 1 & ; \quad x \geq 0 \\ -x + 1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 5)$ y es paralela l .

Solución La recta paralela debe estar dada por:

$$l : y = \begin{cases} -2x + b & ; \quad x \geq 0 \\ -x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

y pasa por $(2, 5)$, luego $-4 + b = 5$, por ello $b = 9$.

La recta pedida es:

$$l : y = \begin{cases} -2x + 9 & ; \quad x \geq 0 \\ -x + 9 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

□

Ejercicio 1.24 En el plano de Moulton.

Determinar tres puntos en cuadrantes distintos que no sean colineales.

Ejercicio 1.25 En el plano de Moulton considere los puntos

$$A = (1, 0), B = (0, 1), C = (-2, 1), D = (1, -1).$$

Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$

Ejercicio 1.26 En el plano de Moulton considere los puntos

$$A = (1, 0), B = (-2, 1), C = (1, -1).$$

Determinar l_C tal que $l_C \parallel l_{AB}$

Ejercicio 1.27 En el plano de Moulton considere las rectas l_1, l_2
Determine condiciones que permitan decidir cuando l_1 es paralela a l_2 .

1.4. Colineación en el Plano Afín

Definición 1.28 Sean Π plano afín y f una función biyectiva. Se dice que f es **colineación** de Π , si se cumple:

i) $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ y $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ son biyectiva.

ii) Preserva incidencia:

Para todo P, l se tiene que si $P \in l$ entonces $f(P) \in f(l)$.

iii) Preserva paralelismo:

Para todo l, m se tiene que si $l \parallel m$ entonces $f(l) \parallel f(m)$.

Ejercicio 1.29 Sea $\Pi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Considere los movimientos rígidos del cuadrado, Determinar cual de ellas corresponde a colineación de Π .

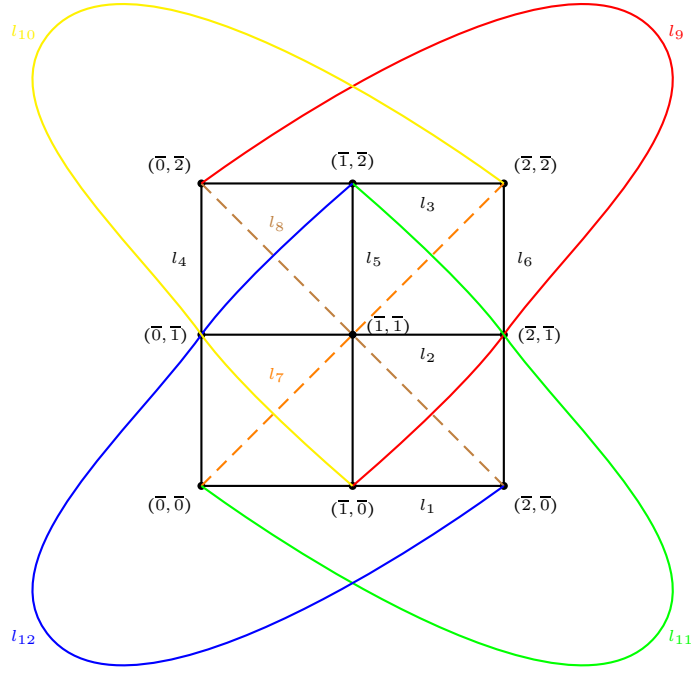
Ejercicio 1.30 Sea $\Pi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Determine el número de colineación de Π .

Ejemplo 1.31 Sea $\Pi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ y la función

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ (x, y) &\rightsquigarrow f(x, y) = (x + 1, y + 2) \end{aligned}$$

que se extiende a la rectas afines del siguiente modo $f(l) = \{f(P) \mid P \in l\}$.
Determine si f es una colineación.



Solución: Claramente f es biyectiva, $f^{-1}(x, y) = (x - 1, y - 2)$.

Veamos algunos ejemplos particulares primero:

Para ello sea

$$l_1 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}; l_2 = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{1})\}; l_3 = \{(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2})\}.$$

Evaluando la función, tenemos

$$\begin{aligned} l_1 &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\} \longrightarrow f(l_1) = \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{2})\} = l_3 \\ l_3 &= \{(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2})\} \longrightarrow f(l_3) = \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1})\} = l_2 \end{aligned}$$

además debe cumplir con:

- ii) Dado el punto $(\bar{0}, \bar{0}) \mathcal{I} l_1$, debe cumplir $f(\bar{0}, \bar{0}) \mathcal{I} f(l_1)$ lo cuales verdadero, ya que $(\bar{1}, \bar{2}) \mathcal{I} l_3$
- iii) Dado las rectas l_1, l_3 , se tiene que $l_1 \parallel l_3$, debe $f(l_1) \parallel f(l_3)$ lo cual también es verdadero, ya que $l_3 \parallel l_2$.

En general, tenemos que $l \in \mathcal{L}$, $l = \{a(x_1, x_2) + (y_1, y_2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\}$

- i) Aplicando f a l tenemos

$$\begin{aligned} f(l) &= \{f(a(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \mid a \in \mathbb{Z}_3\} \\ &= \{f(ax_1 + y_1, ax_2 + y_2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\} \\ &= \{(ax_1 + y_1 + 1, ax_2 + y_2 + 2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\} \\ &= \{a(x_1, x_2) + (y_1 + 1, y_2 + 2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\} \\ &= \{a(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\}. \end{aligned}$$

- ii) Sea $P \in l$, luego tenemos que $l = \langle w \rangle + P$, por lo anterior tenemos que $f(l) = \langle w \rangle + f(P)$, de lo cual $f(P) \in f(l)$.
- iii) Sea $l \parallel l'$, luego tenemos que $l = \langle w \rangle + u$ y $l' = \langle w \rangle + v$, por la primera parte tenemos que $f(l) = \langle w \rangle + f(u)$, $f(l') = \langle w \rangle + f(v)$, de lo cual $f(l) \parallel f(l')$.

De este modo f sea una colineación. □

Definición 1.32 Sea Π un plano afín y f una colineación de Π .

- i) P es un **punto fijo** de f si y sólo si $f(P) = P$.
- ii) l es **recta fija** de f si y sólo si $f(l) = l$.

Propiedad 1.33 Sea f una colineación del plano afín Π

1. Si l, m son dos rectas no paralelas fijas por f entonces el punto intersección entre ellas es un punto fijo de f .
2. Si f tiene fijo los puntos A y B entonces la recta l_{AB} esta fija por f .

Ejemplo 1.34 En el ejemplo anterior $\Pi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, y la colineación

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = (x + 1, y + 2) \end{array}$$

Determine los puntos y rectas fijas si existen.

Solución: Tenemos que f esta dada por

$$f(x, y) = (x + \bar{1}, y + \bar{2})$$

1. **Puntos fijos**

$$\begin{array}{rcl} f(x, y) & = & (x, y) \\ (x + \bar{1}, y + \bar{2}) & = & (x, y) \\ \left. \begin{array}{l} x + \bar{1} = x \\ y + \bar{2} = y \end{array} \right\} & & \end{array}$$

lo cual, tiene solución vacía, ya que $\bar{1} \neq 0$ y $\bar{2} \neq 0$, por lo tanto, f no tiene puntos fijos.

2. **Rectas fijas** Las rectas fijas de f , entonces $f(l) = l$, pues consideremos la recta $l = \{(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})\}$ tenemos que

$$l = \{(\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})\} \text{ y } f(l) = \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})\}$$

Por lo tanto la recta l es una recta fija.

Note que $l = \{(x, y) \mid ax + by = c\}$ y $f(l) = \{(x, y) \mid ax + by = c + a + 2b\}$ luego debe tenerse que $a + 2b = 0$, se deja de ejercicio, determinar que las únicas rectas que cumple lo anterior son las paralelas a ellas.

□

Ejemplo 1.35 Sea $\Pi = \mathbb{R}^2$ el plano vectorial afín y f una función definida como

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightsquigarrow f(x, y) = (2x + 3y - 1, x - 2y + 2) \end{aligned}$$

Demuestre que f es colineación de Π .

Demostración

i) f es biyectiva.

a) **Inyectiva**

$$\begin{aligned} (\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2) (f(a, b) = f(c, d) \Rightarrow (a, b) = (c, d)) \\ (2a + 3b - 1, a - 2b + 2) = (2c + 3d - 1, c - 2d + 2) \\ \left. \begin{array}{l} 2a + 3b - 1 = 2c + 3d - 1 \\ a - 2b + 2 = c - 2d + 2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumamos obtenemos que $b = d$, reemplazando en la primera ecuación se obtiene que $a = c$, luego $(a, b) = (c, d)$.

b) **Epiyectiva** Si $\Pi = \mathbb{R}^2$, basta demostrar que $\mathbb{R}^2 \subseteq \text{Rec}(f)$.

Dado un $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, debe existir $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(a, b) = (c, d)$

$$(2a + 3b - 1, a - 2b + 2) = (c, d)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 3b - 1 = c \\ a - 2b + 2 = d \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema se establece que:

$$b = \frac{c - 2d + 5}{7}; a = \frac{2c + 3d - 4}{7}$$

De este modo f es epiyectiva, entonces f es biyectiva.

ii) $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$.

Sea $l : \langle (a, b) \rangle + (c, d)$ recta, luego tenemos,

$$\begin{aligned} l &= \{ \alpha(a, b) + (c, d) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \\ l &= \{ (\alpha a + c, \alpha b + d) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Evalando se obtiene

$$\begin{aligned} f(l) &= \{ f(\alpha a + c, \alpha b + d) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \\ f(l) &= \{ (2\alpha a + 2c + 3\alpha b + 3d - 1, \alpha a + c - 2\alpha b + 2d + 2) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \\ f(l) &= \{ \alpha(2a + 3b, a - 2b) + (2c + 3d - 1, c - 2d + 2) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$f(l) = \langle (2a + 3b, a - 2b) \rangle + (2c + 3d - 1, c - 2d + 2).$$

iii) Si $P \mathcal{I} l$ entonces $f(P) \mathcal{I} f(l)$

Sea $l = \langle (a, b) \rangle + (c, d)$, si $P \mathcal{I} l$ entonces $P = \alpha_0(a, b) + (c, d)$

$$f(P) = \alpha_0(2a + 3b, a - 2b) + (2c + 3d - 1, c - 2d + 2)$$

en donde este punto $\alpha_0(2a + 3b, a - 2b) + (2c + 3d - 1, c - 2d + 2)$ incide con $f(l)$, por ello $f(P) \mathcal{I} f(l)$.

iv) Si $l \parallel m$ entonces $f(l) \parallel f(m)$

$$\begin{aligned} l &= \langle (a, b) \rangle + (c, d) \\ m &= \langle (a, b) \rangle + (e, f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(l) &= \langle (2a + 3b, a - 2b) \rangle + (2c + 3d - 1, c - 2d + 2) \\ f(m) &= \langle (2a + 3b, a - 2b) \rangle + (2e + 3f - 1, e - 2f + 2) \end{aligned}$$

Luego

$$f(l) \parallel f(m)$$

De este modo tenemos que f es colineación de Π

□

Observación: Sean $l = \langle (a, b) \rangle + (c, d)$ y $m = \langle (x, y) \rangle + (z, w)$.

$l \parallel m$ si y sólo si $\{(a, b), (x, y)\}$ son linealmente dependientes.

Propiedad 1.36 Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{K}$ entonces son colineación del plano afín vectorial

1. Las traslación $f(x) = x + v$.
2. Las transformación lineal invertible.

Notación:

$$Aut(\Pi) := \{f : \Pi \longrightarrow \Pi \mid f \text{ es colineación} \} \subseteq Biy(\Pi).$$

Propiedad 1.37 Sea Π un plano afín.

$(Aut(\Pi), \circ)$ es un grupo, llamado grupo de las colineaciones del plano afín Π .

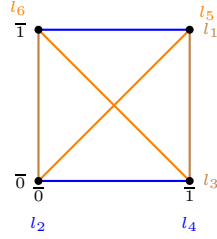
1.5. Dilataciones del Plano Afín

Sean Π un plano afín y $f \in Aut(\Pi)$.

Se dice que f es **dilatación** de Π si y sólo si para todos $l \in \mathcal{L}$ se tiene que

$$f(l) \parallel l$$

Ejemplo 1.38 Sean $\Pi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y $f : \Pi \longrightarrow \Pi$
 $(x, y) \rightsquigarrow (x, y + \bar{1})$



$$\begin{aligned} f(l_1) &= l_3, & f(l_1) &\parallel l_1. \\ f(l_2) &= l_2, & f(l_2) &\parallel l_2. \\ f(l_3) &= l_1, & f(l_3) &\parallel l_3. \\ f(l_4) &= l_4, & f(l_4) &\parallel l_4. \\ f(l_5) &= l_6, & f(l_5) &\parallel l_5. \\ f(l_6) &= l_5, & f(l_6) &\parallel l_6. \end{aligned}$$

por ello f es dilatación $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Ejemplo 1.39 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (3x, 3y)$.
 Demuestre que f es una dilatación en el plano afín vectorial

Solución: Sea $l = \langle v \rangle + w \in \mathcal{L}$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} f(l) &= \{f(tv + w) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{3tv + 3w \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle v \rangle + 3w \end{aligned}$$

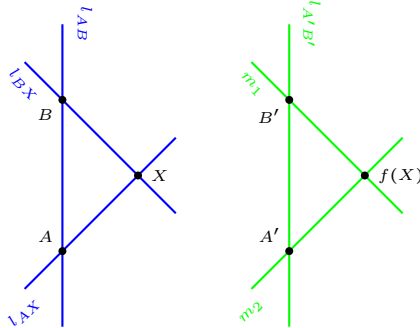
Además tenemos que $\langle v \rangle + w \parallel \langle v \rangle + 3w$, por ello f es una dilatación. $\square$

Notación: Sea Π un plano afín.

$$\mathcal{D}(\Pi) = \{f : \Pi \longrightarrow \Pi \mid f \text{ dilatación} \}.$$

Teorema 1.40 Una dilatación está completamente determinada si se conoce la imagen de dos puntos.

Demostración: Sean Π plano afín, y $A, B \in \mathcal{P}$ tales que $f(A) = A', f(B) = B'$, con f dilatación.



Sea $X \in \mathcal{P}$ de modo que $X \neq A \wedge X \neq B$

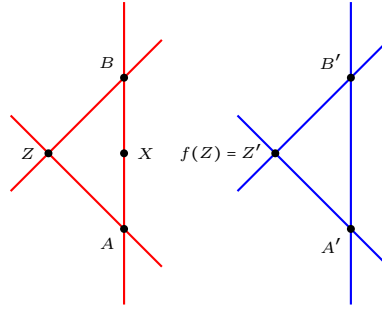
i) $X \nmid l_{AB}$

Primero unimos X con B a través de la recta l_{BX} , por B' trazamos m_1 tal que $m_1 \parallel l_{BX}$.

Después unimos X con A a través de la recta l_{AX} , por A' trazamos m_2 tal que $m_2 \parallel l_{AX}$.

De este modo tenemos que $\{f(X)\} = m_1 \cap m_2$

ii) $X \mathcal{I} l_{AB}$



Por el caso anterior, sabemos determinar la imagen de un punto que no es incidente a una recta l_{AB} , donde se conoce la imagen de A y B .

Sea $Z \in \mathcal{P}$, $Z \nmid l_{AB}$, como sabemos la imagen de A y B , luego sabemos la imagen de Z , es decir, $f(Z) = Z'$. Pero $X \mathcal{I} l_{AZ}$, por lo tanto $f(X)$ se puede determinar. ■

Observación: Al quedar completamente determinada la dilatación a través de la imagen de dos puntos, entonces al tener dos puntos fijos, se concluye que f es la identidad, es decir, $f = Id$. De otro modo $f \neq Id$, entonces f tiene a lo más un punto fijo.

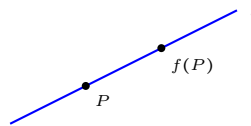
Definición 1.41 Sea f una dilatación en el plano afín Π .

Se dice que f es una **Homotecia** si y sólo si, f tiene un punto fijo y este se llama centro de la homotecia o $f = Id$.

Se dice que f es una **Traslación** si y sólo si, f no tiene puntos fijos o $f = Id$.

Definición 1.42 Sean $l \in \mathcal{L}$ y f es una dilatación en el plano afín.

Se dice que l es **traza** de f si y sólo si $(\exists P \in \mathcal{P})(P \mathcal{I} l \Rightarrow f(P) \mathcal{I} l)$.



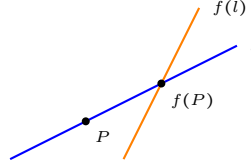
Teorema 1.43 Sean Π plano afín y f dilatación de Π .

$f(l) = l$ si y sólo si l es traza de f .

Demostración: Sea f una dilatación, luego $f \in \text{Aut}(\Pi)$ y $f(l) = l$. Si $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \mathcal{I} l$ luego $f(P) \mathcal{I} f(l)$, de lo cual $f(P) \mathcal{I} l$.

Veamos el recíproco.

Si l es traza de f luego $(\exists P \in \mathcal{P})(P \mathcal{I} l \Rightarrow f(P) \mathcal{I} l)$



Sea $Q \mathcal{I} l$, con $Q \neq P$, luego tenemos que $f(Q) \mathcal{I} f(l)$ y $f(P) \mathcal{I} f(l)$ es decir $f(P) \in l \cap f(l)$. Como f es dilatación, entonces $f(l) \parallel l \wedge l \cap f(l) \neq \emptyset$ en consecuencia $f(l) = l$, lo cual implica que l es traza de f . ■

Propiedad 1.44 Sea f una homotecia distinta de la identidad y P centro de la homotecia f , entonces cada recta que pasa por P es una traza de f .

Demostración: Sea $Q \in \mathcal{P}$ y $l_{PQ} \in \mathcal{L}$, luego tenemos $f(l_{PQ}) \parallel l_{PQ}$, pero Pl_{PQ} y $Plf(l_{PQ})$, luego las rectas son iguales. ■

Propiedad 1.45 Si f es una traslación distinta de la identidad entonces no tiene puntos fijos y el conjunto de todas las trazas es un haz de paralelas.

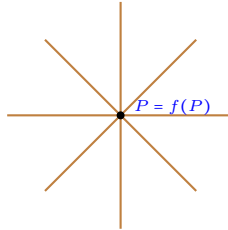
Demostración: Sea $P \in \mathcal{P}$, luego la recta $l_{Pf(P)}$ es una traza de f , es decir existen traza de f . Sea l otra traza de f , luego ambas están fijas por f y si tiene un punto en común este sería un punto fijo lo que es una contradicción. ■

En el plano afín vectorial: Toda recta fija es una traza de la dilatación, además

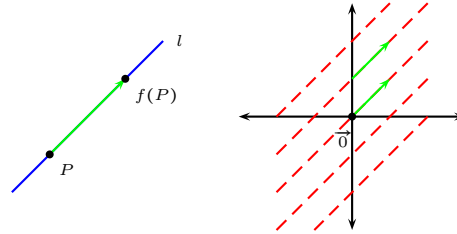
1. La traza de la homotecia, son las rectas que pasan por el punto fijo, dado que la homotecia tiene un punto fijo $f(P) = P = (a, b)$.

Las trazas de la homotecia las podemos definir como:

$$\{m \in \mathbb{K} \mid y = m(x - a) + b\} \cup \{x = a\}$$

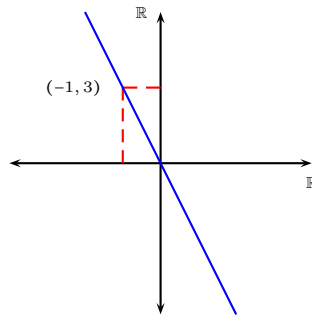


2. Las traslaciones no tienen puntos fijos. Además dejan fijas todas las rectas que tiene vector director $\overrightarrow{Pf(P)}$ y por ende el haz de paralelas formada por ellas.



Ejemplo 1.46 Consideremos la homotecia en el plano afín vectorial

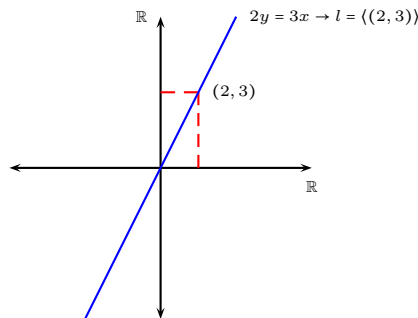
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (3x + 2, 3y - 6) \end{aligned}$$



Tiene un punto fijo $(-1, 3)$, las rectas fijas están dada por $l_\infty : x = -1$ ya que $f(l_\infty) = l_\infty$ y $l_m : \langle (1, m) \rangle + (-1, 3)$ que cumple con $f(l_m) = l_m$. $\square$

Ejemplo 1.47 Consideremos la traslación en el plano afín vectorial

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x + 2, y + 3) \end{aligned}$$



Tiene rectas fijas, pero dada las rectas $l : \langle (2, 3) \rangle + (a, b)$ y $f(l) : \langle (2, 3) \rangle + (a, b)$, además el haz de recta $[l]$, también esta fijo que $f([l]) = [l]$.

□

Teorema 1.48 Una traslación está completamente determinada si se conoce la imagen de un punto.

Demostración: Sea $A \in \mathcal{P}$ tal que $f(A) = A'$, como A, A' son distintos existe $l_{AA'}$ y $X \in \mathcal{P}$. tal que $X \mathcal{I} l_{AA'}$.

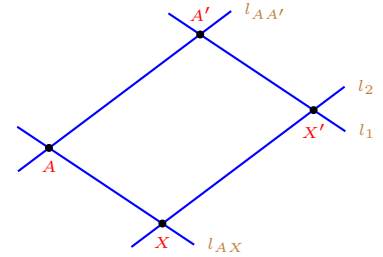
Definimos:

l_2 paralela a $l_{AA'}$ y $X \mathcal{I} l_2$ es una traza de f luego esta fija por f .

l_1 paralela a l_{AX} y $A' \mathcal{I} l_1$, note que $f(l_{AX}) = l_1$ es paralela y A' incide en ella.

Por lo tanto, l_1, l_2 no son paralela, luego $l_1 \cap l_2 = \{f(X)\}$.

De este modo tenemos que $f(A) = A'$ y $f(X) = X'$, dos imagen, por propiedad de dilatación, define una única dilatación.



■

Corolario 1.49 Sea $\mathcal{T}(\Pi) = \{f \in \mathcal{D}(\Pi) \mid f \text{ traslación}\}$ es un grupo, llamado grupo de las traslaciones de Π

Demostración: Es un subconjunto no vacío y la inversa es una traslación, ahora veamos la compuesta de dos traslaciones es una traslación o una homotecia, si tenemos que es una homotecia tendría un punto fijo despejando obtenemos que dos traslaciones tiene un punto en común luego son iguales y por ende es una traslación.

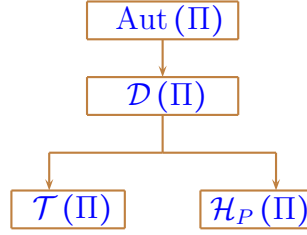
■

Corolario 1.50 Sea $\mathcal{H}_P(\Pi) = \{f \in \mathcal{D}(\Pi) \mid f \text{ homotecia tal que } f(P)\}$ es un grupo, llamado grupo de las homotecias de Π que tienen centro en P .

Demostración: Es un subconjunto no vacío y la inversa es una homotecia, ya que deja fijo un punto, y la compuesta de dos homotecias de centro P , el punto P esta fijo, luego es una homotecia de centro P .

■

Observación: Denotemos $\mathcal{D}(\Pi) = \{f : \Pi \longrightarrow \Pi \mid f \text{ dilatación}\}$ en donde se tiene que $(\mathcal{D}(\Pi), \circ)$ es un grupo, llamado grupo de las dilataciones de Π , además $\mathcal{D}(\Pi) \leq \text{Aut}(\Pi)$ y $\mathcal{H}_P(\Pi) \leq \text{Aut}(\Pi)$.



1.6. Dilataciones en un Plano Afín Vectorial

Recordemos que V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión dos y el plano afín está formado por $\mathcal{P} = V$, $\mathcal{L} = \{ \text{rectas afines} \}$ y la incidencia es la pertenencia.

1. **Traslaciones:** $f \in \mathcal{T}(V)$.

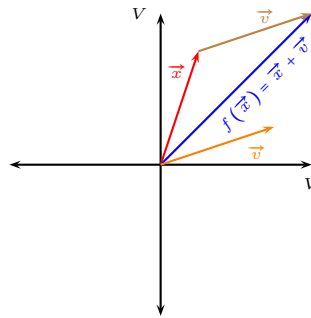
Sea $\vec{v} = f(\vec{0})$, aplicando el Teorema 1.48 tenemos que, si $\vec{x}$ linealmente independiente con $\vec{v}$, la imagen se obtiene de la intersección de las rectas

$$l_1 : \langle \vec{v} \rangle + \vec{x}, \quad l_2 : \langle \vec{x} \rangle + \vec{v}$$

cuya intersección es $\vec{x} + \vec{v}$ de esta forma tenemos que, $f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}$ una traslación en $\vec{v}$.

Luego en general las traslaciones son funciones de la forma:

$$f: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \vec{x} & \rightsquigarrow & f(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v} \end{array}$$



Notación: $\mathcal{T}(V) = \{t \in \mathcal{D}(\Pi) \mid t \text{ es una traslación}\}$, es decir, si $t \in \mathcal{T}(V)$, entonces existe un vector $\vec{v}$, tal que $t(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}$, incluimos el vector nulo $\vec{0}$ de las traslaciones posibles.

Propiedad 1.51 Sea $t \in \mathcal{T}(V)$, tal que $t(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}$, entonces

$$t^{-1}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{v}$$

Demostración: Sea $\vec{x}, \vec{y} \in V$ tal que:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= t^{-1}(\vec{x}) \quad / \cdot t(\text{izq.}) \\ t(\vec{y}) &= \vec{x} \\ \vec{y} + \vec{v} &= \vec{x} \quad / + (-\vec{v}) \\ \vec{y} &= \vec{x} - \vec{v} \end{aligned}$$

Por lo tanto $t^{-1}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{v}$

También se puede designar a la traslación de vector $\vec{v}$ como $t_{\vec{v}}$

$$t_{\vec{v}}^{-1}(\vec{x}) = t_{-\vec{v}}(\vec{x})$$

■

Composición de traslaciones: Sea $t_{\vec{v}}, t_{\vec{w}} \in \mathcal{T}(V)$

$$\begin{aligned} (t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}})(\vec{x}) &= t_{\vec{v}}(\vec{x} + \vec{w}) \\ &= (\vec{x} + \vec{w}) + \vec{v} \\ &= \vec{x} + (\vec{w} + \vec{v}) \\ &= t_{\vec{v} + \vec{w}}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Propiedad 1.52 $(\mathcal{T}(V), \circ)$ es un grupo abeliano, isomorfo a $(V, +)$

Ejercicio 1.53 Sea Π un plano afín vectorial, t una traslación y $f \in \mathcal{D}(\Pi)$ Demostrar que $f \circ t \circ f^{-1}$ es una traslación

2. Homotecias:

Sea $f \in \mathcal{D}(\Pi)$ una homotecia, luego existe $\vec{w}$ tal que $f(\vec{w}) = \vec{w}$.

Sea $\vec{x} \in V$, y $l \in \mathcal{L}$, tal que $\vec{x}, \vec{w} \in l$, sabemos que $f(l) \parallel l$, y $f(\vec{x}), \vec{w} \in f(l)$ y $\vec{x}, \vec{w} \in l$.

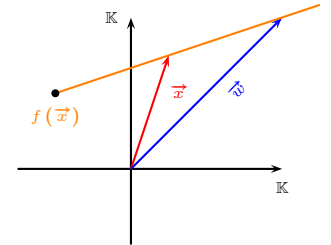
Por lo tanto $\{\vec{x} - \vec{w}, f(\vec{x}) - \vec{w}\}$ son linealmente dependiente, entonces:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - \vec{w} &= \alpha(\vec{x} - \vec{w}) \\ f(\vec{x}) &= \alpha\vec{x} - \alpha\vec{w} + \vec{w} \\ f(\vec{x}) &= \alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{w} \end{aligned}$$

con $1 \neq \alpha \neq 0$.

Al considerar el teorema 8, y sabiendo que conocemos la imagen de $\vec{w}$, $\vec{x}$, para determinar la imagen de otro punto no colineal con $\vec{x}, \vec{w}$, tenemos trazar la recta l_1 paralela a $l_{\vec{x}\vec{z}}$ que pasa por $f(\vec{x})$ y la recta $l_2 = l_{\vec{x}\vec{z}}$ y la intersección es la imagen de $\vec{z}$

Luego los vectores



$\{\vec{z} - \vec{x}, f(\vec{z}) - f(\vec{x})\}$, $\{\vec{x} - \vec{w}, f(\vec{x}) - f(\vec{w})\}$, $\{\vec{z} - \vec{w}, f(\vec{z}) - f(\vec{w})\}$, también son linealmente dependiente, de lo cual se obtiene

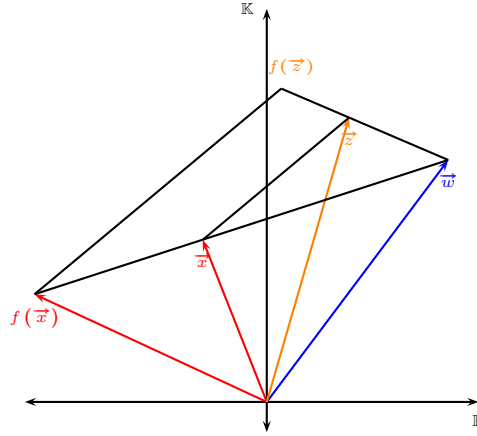
$$\begin{aligned}\alpha(\vec{x} - \vec{w}) &= f(\vec{x}) - f(\vec{w}) \\ \alpha_1(\vec{z} - \vec{x}) &= f(\vec{z}) - f(\vec{x}) \\ \alpha_2(\vec{z} - \vec{w}) &= f(\vec{z}) - f(\vec{w})\end{aligned}$$

Igualando obtenemos

$$\alpha(\vec{x} - \vec{w}) + \alpha_1(\vec{z} - \vec{x}) - \alpha_2(\vec{z} - \vec{w}) = 0$$

reordenando tenemos

$$(\alpha - \alpha_1)(\vec{x} - \vec{w}) + (\alpha_1 - \alpha_2)(\vec{z} - \vec{w}) = 0$$



Como los puntos son no colineales luego los vectores son linealmente independiente (solución única)

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$$

El otro caso, es análogo.

Por ello, existe un único α y $\vec{w}$. ■

Definición 1.54 Sea $f : V \rightarrow V$ una homotecia, dada por

$$h_{\alpha, \vec{w}}(\vec{x}) = \alpha \vec{x} + (1 - \alpha) \vec{w}.$$

Se dice que, α es la **razón de la homotecia** y $\vec{w}$ es el **centro de la homotecia**.

Propiedad 1.55 Sea $f : V \rightarrow V$ una homotecia, tal que

$$f(\vec{x}) = \alpha \vec{x} + (1 - \alpha) \vec{w}.$$

entonces

$$f^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{\alpha} \vec{x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \vec{w}$$

Demostración: Sea $f^{-1}(\vec{x}) = \vec{y}$, entonces:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= f^{-1}(\vec{x}) && / \circ f \\ f(\vec{y}) &= \vec{x} \\ \alpha \vec{y} + (1 - \alpha) \vec{w} &= \vec{x} && / + (\alpha - 1) \vec{w} \\ \alpha \vec{y} &= \vec{x} + (\alpha - 1) \vec{w} && / \frac{1}{\alpha} \\ \vec{y} &= \frac{1}{\alpha} \vec{x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \vec{w} \end{aligned}$$

Por ello tenemos

$$f^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{\alpha} \vec{x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \vec{w}$$

■

Composición de homotecias de centro $\vec{w}$:

Sea f_1, f_2 dos homotecias de centro $\vec{w}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &= \alpha \vec{x} + (1 - \alpha) \vec{w} \\ f_2(\vec{x}) &= \beta \vec{x} + (1 - \beta) \vec{w} \\ (f_1 \circ f_2)(\vec{x}) &= f_1(\beta \vec{x} + (1 - \beta) \vec{w}) \\ &= \alpha(\beta \vec{x} + (1 - \beta) \vec{w}) + (1 - \alpha) \vec{w} \\ &= \alpha\beta \vec{x} + \alpha \vec{w} - \alpha\beta \vec{w} + \vec{w} - \alpha \vec{w} \\ &= \alpha\beta \vec{x} + (1 - \alpha\beta) \vec{w} \end{aligned}$$

La composición de homotecias del mismo centro es otra homotecia del mismo centro y con razón el producto de las razones respectivas de las homotecias.

Definimos: Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\vec{0}} &= \{f \in D(\Pi) \mid f(\vec{0}) = \vec{0}\} \\ \mathcal{H}_{\vec{w}} &= \{f \in D(\Pi) \mid f(\vec{w}) = \vec{w}\}, \end{aligned}$$

en donde $\mathcal{H}_{\vec{0}}$ es el conjunto de la homotecia de centro $\vec{0}$, incluida la identidad.

$(\mathcal{H}_{\vec{0}}, \circ)$ se denomina grupo de las homotecias de centro $\vec{0}$.

$$(\mathcal{H}_{\vec{0}}, \circ) \cong (\mathbb{K}^*, \cdot)$$

Observación: Sean $t(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{w}$ traslación y $h_\alpha(\vec{x}) = \alpha \vec{x}$ una homotecia de razón α y centro $\vec{0}$. luego

$$\begin{aligned} t \circ h_\alpha \circ t^{-1}(\vec{x}) &= t \circ h_\alpha(\vec{x} - \vec{w}) \\ &= t(\alpha(\vec{x} - \vec{w})) \\ &= \alpha(\vec{x} - \vec{w}) + \vec{w} \\ &= \alpha \vec{x} + (1 - \alpha) \vec{w} \end{aligned}$$

corresponde a una homotecia de centro w y razón α .

Ejercicio 1.56 Sea Π el plano afín vectorial, entonces

Demostrar que

$$\mathcal{H}_{\vec{0}} \simeq \mathcal{H}_{\vec{w}}$$

3. Forma General de una dilatación en un Plano Afín Vectorial

Note que toda dilatación es compuesta de traslaciones y homotecias.

Sea $f \in D(\Pi)$, entonces existen $\alpha \neq 0$ y $\vec{v} \in V$

$$f_{\alpha, \vec{v}}(\vec{x}) = \alpha \vec{x} + \vec{v} = f(\vec{x})$$

Observación:

- a) Si $\alpha = 1$ entonces $f_{1, \vec{v}}$ es una traslación
- b) Si $\alpha \neq 1$ entonces $f_{\alpha, \vec{v}}$ es una homotecia (que tiene un punto fijo), en particular:

$$\begin{aligned} f_{\alpha, \vec{v}}(\vec{w}) &= \vec{w} \\ \alpha \vec{w} + \vec{v} &= \vec{w} \\ \alpha \vec{w} - \vec{w} &= -\vec{v} \\ (\alpha - 1)\vec{w} &= -\vec{v} \\ \vec{w} &= \frac{1}{1 - \alpha} \vec{v} \end{aligned}$$

En donde la funciones de la forma $f_{\alpha, \vec{v}}$ son transformaciones lineales invertibles con $\alpha \neq 0$, además notemos que:

$$(f_{1, \vec{v}} \circ f_{\alpha, \vec{v}})(\vec{x}) = \alpha \vec{x} + \vec{v} = f_{\alpha, \vec{v}}(\vec{x})$$

Propiedad 1.57 En el plano afín vectorial V .

$$D(V) = \mathcal{T}(V) \circ \mathcal{H}_{\vec{0}}(V)$$

Ejemplo 1.58 Sea

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (y, x) + (1, 1) \end{aligned}$$

Determine $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T \circ F = F \circ T$

Solución: Sea F una dilatación luego existen $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + (a, b), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Veamos la compuesta

$$\begin{aligned} (T \circ F)(x, y) &= (F \circ T)(x, y) \\ T(\alpha x + a, \alpha y + b) &= F(y + 1, x + 1) \\ (\alpha y + b + 1, \alpha x + a + 1) &= (\alpha y + \alpha + a, \alpha x + \alpha + b) \end{aligned}$$

Igualando coordenada

$$\left| \begin{array}{lcl} b+1 & = & \alpha+a \\ a+1 & = & \alpha+b \end{array} \right|$$

del cual se obtiene $a = b$ y $\alpha = 1$, por lo tanto F es una traslación de la forma

$$F(x, y) = (x + a, y + a)$$

□

1.7. Colineaciones en un Plano Afín Vectorial

Recordemos que V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión dos y el plano afín está formado por $\mathcal{P} = V$, $\mathcal{L} = \{ \text{rectas afines} \}$ y la incidencia es la pertenencia.

El propósito de la sección es demostrar el teorema: toda colineación en el plano afín vectorial es la composición de una traslación con un transformación semi-lineal.

Definición 1.59 Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{K}$. $f : V \rightarrow V$ es una transformación semi-lineal si y sólo si

1. Para todo $\vec{x}, \vec{y}$ en V , $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. Existe $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ tal que para todo $\vec{x}$ en V , $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$f(\alpha \vec{x}) = \sigma(\alpha) f(\vec{x}).$$

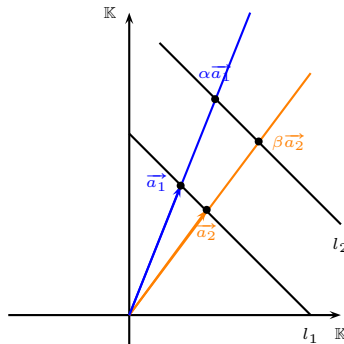
Ejercicio 1.60 Sea $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $f(\vec{x}, \vec{y}) = (3\vec{x}, 2\vec{y})$. Demostrar que f es semi-lineal.

Ejercicio 1.61 Sea $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ semi-lineal biyectiva, Demostrar que f es una colineación en el plano afín vectorial

Ejercicio 1.62 Sean $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ semi lineal biyectiva y $g : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ transformación lineal biyectiva, Demostrar que $g \circ f$, $f \circ g$ son semi-lineal biyectiva.

Teorema 1.63 Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ base de $\mathbb{K}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ tales que $l_1 = \langle \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \rangle + \vec{a}_1$ y $l_2 = \langle \beta \vec{a}_2 - \alpha \vec{a}_1 \rangle + \alpha \vec{a}_1$ con $l_1 \neq l_2$.

$l_1 \parallel l_2$ si y sólo si $\alpha = \beta$.



Demostración: Sea $l_1 \parallel l_2$ luego los vectores directores son linealmente dependiente

$$\{\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \beta\vec{a}_2 - \alpha\vec{a}_1\}$$

es decir existe δ tal que

$$\begin{aligned} \delta(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) &= \beta\vec{a}_2 - \alpha\vec{a}_1 \\ (\delta - \beta)\vec{a}_2 + (\alpha - \delta)\vec{a}_1 &= 0 \end{aligned}$$

solución única, así se tiene que $\alpha = \beta = \delta$.

En la otra dirección, supongamos que $\alpha = \beta$, $l_1 \neq l_2$ y $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$. Pero tenemos que

$$l_1 = \langle \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \rangle + \vec{a}_1 \quad l_2 = \langle \alpha\vec{a}_2 - \alpha\vec{a}_1 \rangle + \alpha\vec{a}_1.$$

Ya que el escalar es no nulo, tenemos

$$l_2 = \langle \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \rangle + \alpha\vec{a}_1.$$

luego los vectores directores son iguales. Por lo tanto $l_1 \parallel l_2$. ■

Propiedad 1.64 Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ base de $\mathbb{K}^2$, y $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K}^2)$

$$l_1 \parallel l_2 \text{ si y sólo si } \sigma(l_1) \parallel \sigma(l_2)$$

Demostración: Sean $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \sigma(l_1) \parallel \sigma(l_2) &\Leftrightarrow \sigma(l_1) \cap \sigma(l_2) = \emptyset \vee \sigma(l_1) = \sigma(l_2) \\ &\Leftrightarrow \sigma^{-1}(\sigma(l_1) \cap \sigma(l_2)) = \emptyset \vee l_1 = l_2 \\ &\Leftrightarrow l_1 \cap l_2 = \emptyset \vee l_1 = l_2 \\ &\Leftrightarrow l_1 \parallel l_2 \end{aligned}$$

■

Corolario 1.65 Sea $l \in \mathcal{L}$ recta vectorial y $\sigma \in \text{Aut}(\Pi)$ tal que $\sigma(l) = l$ entonces

$$\sigma(l + \vec{v}) = l + \sigma(\vec{v})$$

Demostración: Sea $l \parallel l + \vec{v}$, por teorema anterior tenemos que $\sigma(l) \parallel \sigma(l + \vec{v})$, es decir, $l \parallel \sigma(l + \vec{v})$. Además $\sigma(\vec{v}) \in \sigma(l + \vec{v})$, es paralela y pasa por el punto, ya que la recta es única, se tiene

$$\sigma(l + \vec{v}) = l + \sigma(\vec{v})$$

■

Propiedad 1.66 Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, $\mu \in \text{Aut}(\Pi)$ entonces existe una traslación, una transformación lineal biyectiva en el plano y una base $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ de $\mathbb{K}^2$, tal que si $\delta = f^{-1} \circ t \circ \mu$, $\delta(\vec{0}) = \vec{0}$, $\delta(\vec{a}_1) = \vec{a}_1$, $\delta(\vec{a}_2) = \vec{a}_2$.

Demostración: Sea $\mu \in \text{Aut}(V)$, supongamos

$$\mu(\vec{0}) = \vec{x},$$

luego $t_{-\vec{x}}(\mu(\vec{0})) = \vec{0}$.

Sea $\sigma = t_{-\vec{x}} \circ \mu \in \text{Aut}(V)$ y $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ base de $\mathbb{K}^2$, entonces $\{\sigma(\vec{a}_1), \sigma(\vec{a}_2)\}$ es una base de $\mathbb{K}^2$.

Ya que $l_{\vec{0}, \vec{a}_1} \parallel l_{\vec{0}, \sigma \vec{a}_1}$ y $l_{\vec{0}, \vec{a}_2} \parallel l_{\vec{0}, \sigma \vec{a}_2}$, es decir

$$\langle \vec{a}_1 \rangle = \langle \sigma \vec{a}_1 \rangle \quad \langle \vec{a}_2 \rangle = \langle \sigma \vec{a}_2 \rangle.$$

Dadas las bases anteriores existe una única transformación lineal, luego una colineación, que envía una base en la otra base, es decir,

$$f(\vec{a}_1) = \sigma(\vec{a}_1) \quad f(\vec{a}_2) = \sigma(\vec{a}_2)$$

De lo cual se obtiene

$$\vec{a}_1 = (f^{-1} \circ \sigma)(\vec{a}_1) \quad \vec{a}_2 = (f^{-1} \circ \sigma)(\vec{a}_2)$$

Por lo tanto $\delta = f^{-1} \circ t \circ \mu$ es una colineación que fija $\vec{0}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$. ■

Propiedad 1.67 Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ base de $\mathbb{K}^2$ y $g \in \text{Aut}(\Pi)$ tal que fija los puntos $\vec{0}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$, entonces

$$g(\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2) = g(\alpha \vec{a}_1) + g(\beta \vec{a}_2)$$

además

$$g(\alpha \vec{a}_1) = \eta_\alpha \vec{a}_1, \quad g(\alpha \vec{a}_2) = \eta_\alpha \vec{a}_2.$$

Demostración: Sean $\vec{0}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$, puntos fijos por g , luego tenemos

$$g(\langle \vec{a}_1 \rangle) = \langle \vec{a}_1 \rangle \quad \text{y} \quad g(\langle \vec{a}_2 \rangle) = \langle \vec{a}_2 \rangle$$

ya que fija dos puntos de cada recta.

Consideremos las rectas

$$l_1 : \langle \vec{a}_2 \rangle + \alpha \vec{a}_1 \quad \text{y} \quad l_2 : \langle \vec{a}_1 \rangle + \beta \vec{a}_2$$

las rectas $l_1 \parallel \langle \vec{a}_2 \rangle$ y $l_2 \parallel \langle \vec{a}_1 \rangle$ y tiene un punto en común $\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2$.

Por corolario anterior tenemos que

$$g(l_1) = \langle \vec{a}_2 \rangle + g(\alpha \vec{a}_1) \quad \text{y} \quad g(l_2) = \langle \vec{a}_1 \rangle + g(\beta \vec{a}_2)$$

además

$$g(\alpha \vec{a}_1) \in \langle \vec{a}_1 \rangle \quad \text{y} \quad g(\beta \vec{a}_2) \in \langle \vec{a}_2 \rangle$$

luego la imagen del punto intersección debe pertenecer a la intersección de las imágenes.

$$g(\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2) = g(\alpha \vec{a}_1) + g(\beta \vec{a}_2)$$

Sea $l_4 : \langle \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \rangle + \alpha \vec{a}_1$, la recta contiene a los puntos $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$, luego la recta esta fija por g . Consideremos la recta $l : \langle \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \rangle + \alpha \vec{a}_1$ es paralela a l_4 . luego se tiene que

$$g(l) = \langle \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \rangle + g(\alpha \vec{a}_1) = \langle \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \rangle + \eta \vec{a}_1$$

Análogamente

$$g(l) = \langle \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \rangle + g(\alpha \vec{a}_2) = \langle \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \rangle + \xi \vec{a}_2$$

de lo cual obtenemos que $\eta = \xi$. ■

Teorema 1.68 Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, Π el plano afín vectorial entonces toda colineación es la composición de una traslación con una transformación semilineal.

Demostración: Sea $\mu \in \text{Aut}(\Pi)$, por propiedad 1.66 se tiene que existen una traslación, una transformación lineal biyectiva en el plano y una base $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ de $\mathbb{K}^2$, tal que si $\delta = f^{-1} \circ t \circ \mu$, $\delta(\vec{0}) = \vec{0}$, $\delta(\vec{a}_1) = \vec{a}_1$, $\delta(\vec{a}_2) = \vec{a}_2$.

Por la propiedad 1.67 tenemos que

$$\delta(\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2) = \delta(\alpha \vec{a}_1) + \delta(\beta \vec{a}_2), \quad \delta(\alpha \vec{a}_1) = \eta(\alpha) \vec{a}_1, \quad \delta(\beta \vec{a}_2) = \eta(\beta) \vec{a}_2$$

Definamos

$$\eta : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } \eta(\alpha) \text{ cumple con } \delta(\alpha \vec{a}_1) = \eta(\alpha) \vec{a}_1$$

note que $\eta(1) = 1$ y $\eta(0) = 0$.

Es inyectiva, ya que $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$ entonces,

$$\begin{aligned} \eta(\alpha) &= \eta(\beta) \\ \eta(\alpha) \vec{a}_1 &= \eta(\beta) \vec{a}_1 \\ \delta(\alpha \vec{a}_1) &= \delta(\beta \vec{a}_1) \\ \alpha \vec{a}_1 &= \beta \vec{a}_1 \\ \alpha &= \beta \end{aligned}$$

Epiyectiva, sabemos la restricción de $\delta : \langle \vec{a}_1 \rangle \rightarrow \langle \vec{a}_1 \rangle$ es una biyección luego dado $\beta \in \mathbb{K}$, tenemos que $\beta \vec{a}_1 \in \langle \vec{a}_1 \rangle$, luego existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tal que $\delta(\alpha \vec{a}_1) = \beta \vec{a}_1$.

Para el producto, sea

$$l_5 : \langle \alpha \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \rangle + \beta \vec{a}_2$$

luego tenemos

$$\delta(l_5) = \langle \eta(\alpha) \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \rangle + \eta(\beta) \vec{a}_2$$

pero $\beta \alpha \vec{a}_1 \in l_5$ de lo cual tenemos $\delta(\beta \alpha \vec{a}_1) \in \delta(l_5)$

de este modo tenemos que

$$\eta(\beta\alpha)\vec{a}_1 \in \langle \eta(\alpha)\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \rangle + \eta(-\beta)\vec{a}_2$$

luego tenemos

$$\eta(\beta\alpha)\vec{a}_1 = -\eta(\alpha)\eta(-\beta)\vec{a}_1$$

por ello tenemos

$$\eta(\beta\alpha) = -\eta(\alpha)\eta(-\beta)$$

Además

$$\eta(-\beta) = \eta(-\beta \cdot 1) = -\eta(1)\eta(\beta) = -\eta(\beta)$$

de lo cual

$$\eta(\beta\alpha) = -\eta(\alpha)\eta(-\beta) = \eta(\alpha)\eta(\beta).$$

Finalmente para la aditiva $\eta(\alpha + \beta) = \eta(\alpha) + \eta(\beta)$.

$$l_6 := \langle \alpha\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \rangle + \beta\vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

luego tenemos

$$\delta(l_6) = \langle \eta(\alpha)\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \rangle + \eta(\beta)\vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

pero $(\alpha + \beta)\vec{a}_1 \in l_6$ de lo cual tenemos $\delta((\alpha + \beta)\vec{a}_1) \in \delta(l_6)$

de este modo tenemos que

$$\eta(\alpha + \beta)\vec{a}_1 \in \langle \eta(\alpha)\vec{a}_1 - \vec{a}_2 \rangle + \eta(\beta)\vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

luego tenemos

$$\eta(\alpha + \beta)\vec{a}_1 = (\eta(\alpha) + \eta(\beta))\vec{a}_1$$

por ello tenemos

$$\eta(\alpha + \beta) = \eta(\beta) + \eta(\alpha)$$

De lo cual tenemos que δ es semi lineal, y por ello $f \circ \delta$ es semilineal

$$\mu = t_{\mu(0)} \circ (f \circ \delta)$$

■

Ejemplo 1.69 Sea $\mathbb{C}^2$ el plano afín vectorial complejo, τ identidad o conjugación compleja entonces

Para todo $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{C}$ tal que $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ se tiene que

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, f(z, w) = (a_1\tau(z) + b_1\tau(w) + c_1, a_2\tau(z) + b_2\tau(w) + c_2)$$

es una colineación en plano afín vectorial complejo

1.8. Teoremas Clásicos Plano Afín Vectorial

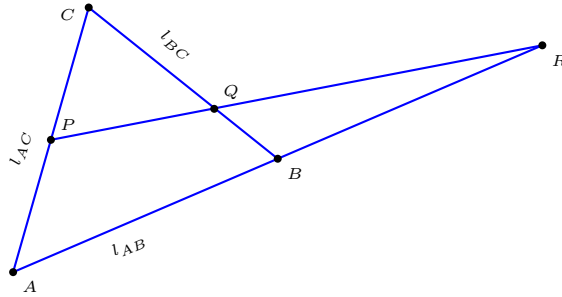
Definición 1.70 En el plano afín vectorial $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, se define la **razón afín** de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tres puntos colineales al escalar $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que cumple

$$\vec{c} - \vec{a} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{b} - \vec{a})$$

Propiedad 1.71 En el plano afín vectorial $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, dados tres puntos colineales A, B, C entonces

1. $(A, C, B) = \frac{1}{(A, B, C)}$
2. $(B, C, A) = \frac{1}{1 - (A, B, C)}$
3. $(C, B, A) = \frac{(A, B, C)}{(A, B, C) - 1}$

Teorema 1.72 (de Menelao) Sean A, B, C puntos no colineales, P, Q, R puntos tales que $P \in l_{AC}$, $Q \in l_{BC}$, $R \in l_{AB}$, además $\{A, B, C\} \cap \{P, Q, R\} = \emptyset$ entonces P, Q, R son colineales si y sólo si $(P, C, A)(Q, B, C)(R, A, B) = 1$



Demostración: Traslademos el punto A al origen, y identifiquemos los puntos

$$A = \vec{0}, B = \vec{b}, C = \vec{c}$$

como no son colineales, los vectores $\vec{b}, \vec{c}$ son linealmente independiente, de ello tenemos

$$P = \alpha \vec{c}, R = \gamma \vec{b}, l_{BC} = \langle \vec{b} - \vec{c} \rangle + \vec{b},$$

es decir,

$$Q = \beta(\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b} = (1 + \beta)\vec{b} - \beta\vec{c}$$

Por lo anterior tenemos

$$l_{PQ} = \langle (\alpha + \beta)\vec{c} - (1 + \beta)\vec{b} \rangle + \alpha\vec{c}$$

Si los puntos son colineales tenemos, $R \in l_{PQ}$, es decir,

$$\begin{aligned} \gamma \vec{b} &= \alpha \vec{c} + \eta((\alpha + \beta)\vec{c} - (1 + \beta)\vec{b}) \\ 0 &= -\gamma \vec{b} + \alpha \vec{c} + \eta((\alpha + \beta)\vec{c} - (1 + \beta)\vec{b}) \\ 0 &= -(\gamma + \eta + \eta\beta)\vec{b} + (\eta\alpha + \eta\beta + \alpha)\vec{c} \end{aligned}$$

así se obtiene

$$\gamma + \eta + \eta\beta = 0, \quad \eta(\alpha + \beta) + \alpha = 0.$$

despejando

$$\eta = -\frac{\gamma}{1+\beta} = -\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

luego tenemos que

$$\gamma = \frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+\beta}$$

Ahora veamos la razones afines

$$(P, C, A) = (\alpha \vec{c}, \vec{c}, \vec{0}) = \frac{-\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

ya que $\vec{0} - \alpha \vec{c} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}(\vec{c} - \alpha \vec{c})$

Para las otras razones procedemos de forma similar

$$(Q, B, C) = ((1+\beta) \vec{b} - \beta \vec{c}, \vec{b}, \vec{c}) = \frac{1+\beta}{\beta}$$

$$(R, A, C) = (\gamma \vec{b}, \vec{0}, \vec{c}) = \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

luego tenemos

$$\begin{aligned} (P, C, A)(Q, B, C)(R, A, C) &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1+\beta}{\beta} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1+\beta}{\beta} \cdot \frac{\frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+\beta} - 1}{\frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+\beta}} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1+\beta}{\beta} \cdot \frac{\alpha(1+\beta) - \alpha - \beta}{\alpha(1+\beta)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1+\beta}{\beta} \cdot \frac{\alpha\beta - \beta}{\alpha(1+\beta)} = 1. \end{aligned}$$

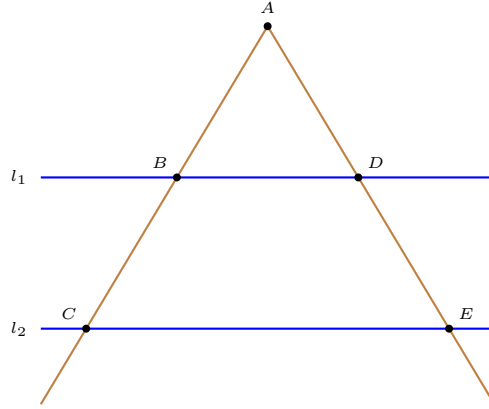
Para la demostración en el otro sentido note que

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1+\beta}{\beta} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+\beta}.$$

lo que permite definir η y con ello, se obtiene que los puntos son colineales. ■

Teorema 1.73 (de Thales)

$$l_1 \parallel l_2 \text{ si y sólo si } (A, B, C) = (A, D, E)$$



Demostración: Traslademos el punto A al origen, y identifiquemos los puntos

$$A = \vec{0}, B = \vec{b}, C = \alpha \vec{b}, D = \vec{d}, E = \beta \vec{d}$$

con α, β no nulos y $\vec{b}, \vec{d}$ linealmente independiente.

Calculemos las razones afines

$$(A, B, C) = \alpha, (A, D, E) = \beta.$$

Ya que

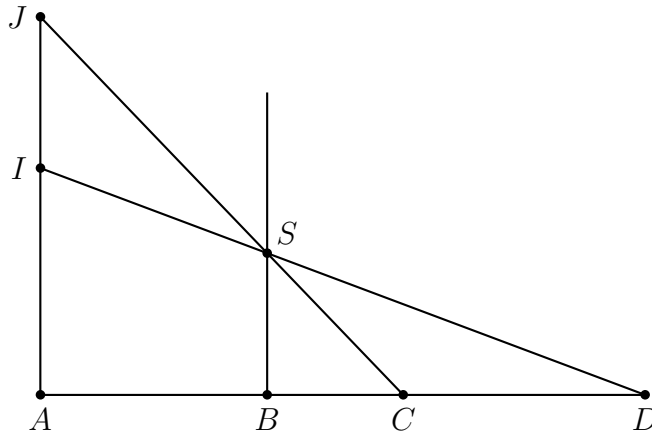
$$(\alpha \vec{c} - \vec{0} = \alpha(\vec{c} - 0), (\beta \vec{d} - \vec{0} = \beta(\vec{d} - 0).$$

Por teorema 1.63, se obtiene la equivalencia. ■

Definición 1.74 Sean A, B, C, D cuatro puntos colineales, se llama la **birazón** a

$$(A, B, C, D) = \frac{(C, B, A)}{(D, B, A)}$$

Propiedad 1.75 Sean A, B, C, D, I, J, S puntos en el plano afín vectorial sobre $\mathbb{K}$, tales que A, I, J colineales, A, B, C colineales $AI = AB \quad BS \parallel IJ$ entonces $(A, B, C, D) = (A, I, J)$.



Demostración: Traslademos el punto A al origen, y identifiquemos los puntos

$$A = \vec{0}, \quad I = \vec{i}, \quad J = \alpha \vec{i}, \quad B = \vec{b}, \quad C = \beta \vec{b}, \quad D = \gamma \vec{b}, \quad S = \lambda \vec{i} + \vec{b}$$

aplicando el teorema de Thales obtenemos

$$(C, S, J) = (C, B, A), \quad (D, S, I) = (D, B, A)$$

De la primera obtenemos que $(C, S, J) = (\beta \vec{b}, \lambda \vec{i} + \vec{b}, \alpha \vec{i})$, es decir,

$$\alpha \vec{i} - \beta \vec{b} = (C, B, A)(\lambda \vec{i} + \vec{b} - \beta \vec{b}) = (C, B, A)(\lambda \vec{i} + (1 - \beta) \vec{b})$$

Como $\vec{b}, \vec{i}$ son linealmente independiente, se tiene

$$\frac{\alpha}{\lambda} = (C, B, A) = \frac{-\beta}{1 - \beta}$$

Análogamente, $(D, S, I) = (\gamma \vec{b}, \lambda \vec{i} + \vec{b}, \vec{i})$, de lo cual

$$\vec{i} - \gamma \vec{b} = (D, B, A)(\lambda \vec{i} + \vec{b} - \gamma \vec{b}) = (D, B, A)(\lambda \vec{i} + (1 - \gamma) \vec{b})$$

Como $\vec{b}, \vec{i}$ son linealmente independiente, se tiene

$$\frac{1}{\lambda} = (D, B, A) = \frac{-\gamma}{1 - \gamma}$$

De lo anterior tenemos que

$$(A, B, C, D) = \frac{(C, B, A)}{(D, B, A)} = \alpha$$

Por otro lado

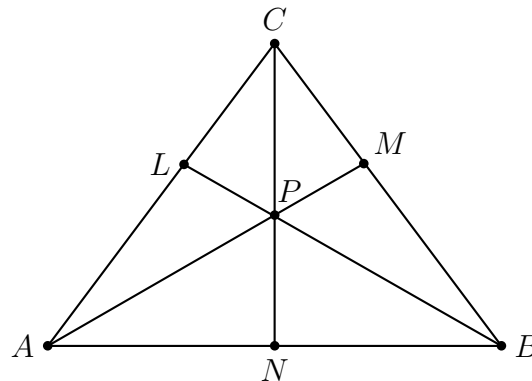
$$(A, I, J) = (\vec{0}, \vec{i}, \alpha \vec{i})$$

de lo cual tenemos

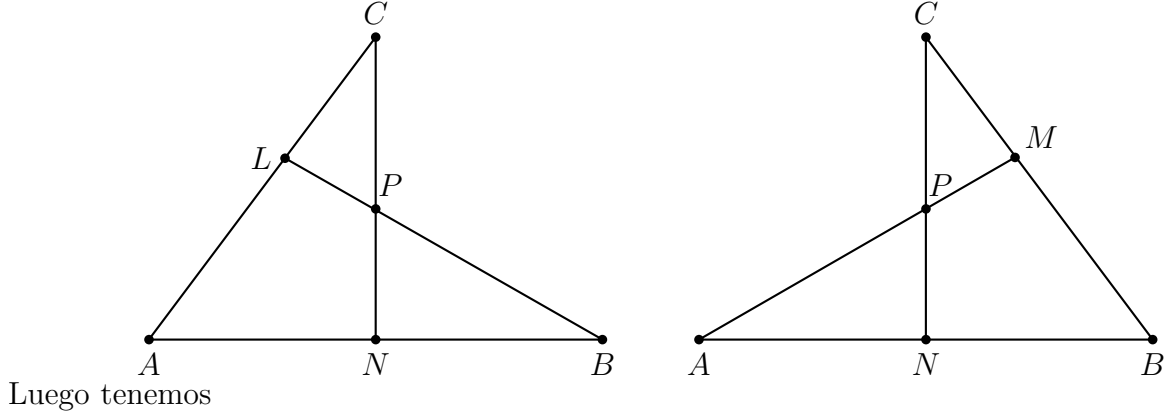
$$\alpha \vec{i} - \vec{0} = (A, I, J)(\vec{i} - \vec{0}),$$

De lo cual $(A, I, J) = \alpha$. ■

Teorema 1.76 (de Ceva) Sean los vértices de un triángulo ABC , con divisiones en L, M, N en las razones correspondiente $\lambda = (L, A, C)$, $\mu = (P, N, C)$, $\alpha = (B, A, N)$ entonces las rectas l_{AM} , l_{BL} , l_{CN} son concurrentes si y sólo si $\lambda\mu\alpha = -1$.



Demostración: Apliquemos el teorema de Menelao a los siguientes casos



$$(L, C, A)(P, N, C)(B, A, N) = 1, \quad (M, C, B)(P, N, C)(A, B, N) = 1$$

Teniendo presente la propiedad 1.71, y la hipótesis se obtiene $\lambda = (L, A, C)$, $\mu = (P, N, C)$, $\alpha = (B, A, N)$, luego

$$(L, C, A) = \frac{1}{\lambda}, \quad (B, A, N) = \frac{1}{1-\alpha}, \quad (A, B, N) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Reemplazando

$$\frac{1}{\lambda}(P, C, N)\frac{1}{1-\alpha} = 1, \quad \mu(P, C, N)\frac{\alpha}{\alpha-1} = 1$$

Concluimos despejando e igualando obtenemos

$$(P, C, N) = \lambda(1-\alpha) = \frac{(\alpha-1)}{\alpha\mu}$$

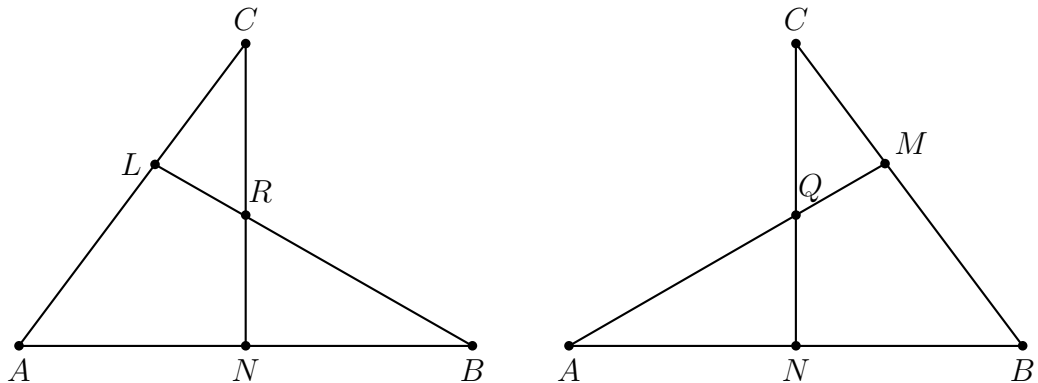
Así obtenemos

$$\alpha\lambda\mu = \frac{\alpha-1}{1-\alpha} = -1$$

En la otra dirección, Suponemos $\alpha\lambda\mu = -1$ y

$$l_{AM} \cap l_{BL} = P \quad l_{AM} \cap l_{CN} = Q \quad l_{BL} \cap l_{CN} = R.$$

Apliquemos el teorema de Menelao a los siguientes casos



$$(L, C, A)(R, N, C)(B, A, N) = 1, \quad (M, C, B)(Q, N, C)(A, B, N) = 1$$

Teniendo presente la propiedad 1.71, y la hipótesis se obtiene $\lambda = (L, A, C)$, $\mu = (P, N, C)$, $\alpha = (B, A, N)$, luego

$$(L, C, A) = \frac{1}{\lambda}, \quad (B, A, N) = \frac{1}{1-\alpha}, \quad (A, B, N) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Reemplazando

$$\frac{1}{\lambda}(R, C, N)\frac{1}{1-\alpha} = 1, \quad \mu(Q, C, N)\frac{\alpha}{\alpha-1} = 1$$

Despejando y reemplazando el $\mu = \frac{-1}{\alpha\lambda}$

$$(R, C, N) = \lambda(1-\alpha), \quad (Q, C, N) = \frac{\alpha-1}{\mu\alpha} = \lambda(1-\alpha)$$

Los puntos esta a una misma razón afín luego son iguales. ■

1.9. Ejemplos Misceláneos

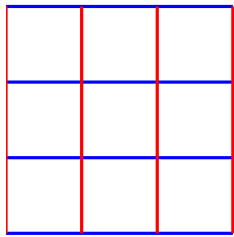
Ejemplo 1.77 Considere $\mathbb{K} = \{a + b\delta \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\} = \mathbb{Z}_2(\delta)$, es un cuerpo con 4 elementos, donde $\delta^2 = \delta + 1$ y Π es el plano afín vectorial, es decir,

$$\mathcal{P} = \mathbb{K}^2, \quad \mathcal{L} = \{< w > + v \mid v, w \in \mathbb{K}^2, w \neq 0\} \quad \text{y} \quad I : \text{pertenecía}$$

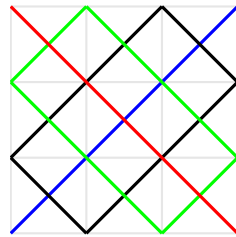
Graficar los puntos y las rectas en $\mathbb{K}^2$, identificando los haces paralelas.

Solución: $\mathbb{K} = \{0, 1, \delta, 1 + \delta\} = \mathbb{Z}_2(\delta)$, cuerpo con 4 elementos

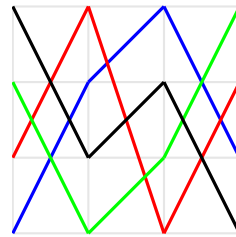
El número de: Puntos es $4^2 = 16$, Rectas $20 = 16 + 4$, Haces es 5 y cada haz contiene 4 rectas.



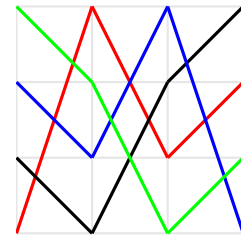
$$[y = 0] \quad [x = 0]$$



$$[y = x]$$



$$[y = \delta x]$$



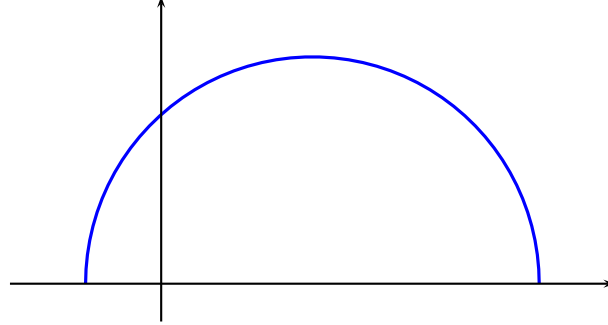
$$[y = (\delta + 1)x]$$

□

Ejemplo 1.78 Considere la estructura de incidencia dada por los puntos $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ semiplano superior, la recta $c_{a,r} = \{(x, y) \in \mathcal{P} \mid (x-a)^2 + y^2 = r^2\}$ una semicircunferencia con centro eje x , el conjunto de las rectas $\mathcal{L} = \{c_{a,r} \mid a, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ y la incidencia es la pertenecía.

Determine que axiomas de plano afín cumple $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$.

Solución:



Primer axioma, dado los puntos distintos $(a, b), (c, d) \in \mathcal{P}$ deben pertenecer a una única recta.

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2,$$

reemplazando tenemos $(a - h)^2 + b^2 = r^2$, $(c - h)^2 + d^2 = r^2$.

Restando las ecuaciones obtenemos que $2ah - 2ch = d^2 + c^2 - b^2 - a^2$, cuando $a = c$, tenemos que $b \neq d$ y positivos luego la ecuación no tiene solución, no cumple axioma 1.

Segundo axioma, dada la recta. $(x - h)^2 + y^2 = r^2$, y el punto (a, b) que no pertenece a la recta, entonces la recta

$$(x - h)^2 + y^2 = (a - h)^2 + b^2$$

es una recta paralela que pasa por el punto (a, b) , no es única.

Tercer axioma, los puntos $(1, 1), (1, 2), (-1, 1)$, no son colineales, no existe recta que une los puntos $(1, 1), (1, 2)$ $\square$

Ejemplo 1.79 En Π Plano de Moulton, sea los puntos $A = (-1, 9)$, $B = (2, -3)$ y $C = (-2, 5)$. Determinar la ecuación de la recta m , tal que $m \parallel l_{AB}$ y $C \notin m$.

Solución: La recta l_{AB} tiene pendiente negativa.

$$l_{AB} : y = \begin{cases} ax + b & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{a}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

luego, reemplazamos A y B y se tiene que $9 = -a/2 + b$ y $-3 = 2a + b$, de lo cual restando se obtiene que $a = -\frac{24}{5}$.

De este modo, la recta m esta dada por:

$$m : y = \begin{cases} -\frac{24}{5}x + c & ; \quad x \geq 0 \\ -\frac{12}{5}x + c & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Reemplazando el punto C obtenemos que $5 = \frac{24}{5} + c$, de lo cual tenemos que $c = \frac{1}{5}$. Por lo anterior tenemos

$$m : y = \begin{cases} -\frac{24}{5}x + \frac{1}{5} & ; \quad x \geq 0 \\ -\frac{12}{5}x + \frac{1}{5} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

□

Ejemplo 1.80 En Π Plano de Moulton, sea $T(x, y) = (2x, 2y - 2)$

1. Determinar si T es una colineación en Π .
2. Determinar si T es una dilatación en Π .

Solución: La función T es biyectiva, ya que $T(x, y) = (2x, 2y - 2)$, se tiene que $F(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + 1)$ es la inversa

$$(F \circ T)(x, y) = F(2x, 2y - 2) = (x, \frac{1}{2}(2y - 2) + 1) = (x, y)$$

$$(T \circ F)(x, y) = T(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + 1) = (x, 2(\frac{1}{2}y + 1) - 2) = (x, y)$$

Una es la inversa de la otra, luego T es biyectiva en puntos.

Veamos ahora los cuatro tipo de rectas: Rectas horizontal.

$$\begin{aligned} T(\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}) &= \{(2c, 2y - 2) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ T(\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}) &= \{(2c, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

es decir, la recta es horizontal preserva incidencia, paralelismo y la imagen es paralela.

$$T : l : x = c \longrightarrow l' : x = 2c.$$

Rectas vertical

$$\begin{aligned} T(\{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(2x, 2c - 2) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ T(\{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(z, 2c - 2) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

es decir, la recta es vertical preserva incidencia, paralelismo y la imagen es paralela.

$$T : l : y = c \longrightarrow l' : y = 2c - 2.$$

Rectas pendiente positiva.

$$\begin{aligned} T(\{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(2x, 2mx + 2b - 2) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ T(\{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(z, mz + 2b - 2) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

es decir, la recta de pendiente positiva e igual pendiente preserva incidencia, paralelismo y la imagen es paralela.

$$T: l: y = mx + b \longrightarrow l': y = mx + 2b - 2.$$

Rectas pendiente negativa.

$$\begin{aligned} & T(\{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(y, my/2 + b) \mid y \in \mathbb{R}^-\}) \\ &= \{(2x, 2mx + 2b - 2) \mid x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(2y, 2my/2 + 2b - 2) \mid y \in \mathbb{R}^-\} \\ &= \{(t, mt + 2b - 2) \mid t \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(k, mk/2 + 2b - 2) \mid k \in \mathbb{R}^-\} \end{aligned}$$

de otro modo la recta l es enviada en l' .

$$T: l: y = \begin{cases} mx + b & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{m}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases} \longrightarrow l': y = \begin{cases} mx + 2b - 2 & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{m}{2}x + 2b - 2 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Preserva incidencia, paralelismo y la imagen es paralela.

Luego T es una dilatación.

Ya que, las rectas por su tipo se mantiene, luego preserva incidencia, paralelismo y es paralela a la imagen. $\square$

Ejemplo 1.81 En el plano afín vectorial $V = \mathbb{C}^2$ y f una colineación definida por

$$f(a + bi, c + di) = (a - bi, c - di).$$

Determinar los puntos y rectas fijas de f .

Solución: Los Puntos Fijos

$$(a + bi, c + di) = f(a + bi, c + di) = (a - bi, c - di).$$

Luego tenemos que

$$\left[\begin{array}{l} a = a \\ b = -b \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} c = c \\ d = -d \end{array} \right]$$

Por ello tenemos que $b = 0$, $d = 0$.

$$\{(a + bi, c + di) \in \mathbb{C}^2 \mid b = 0, d = 0\} = \mathbb{R}^2$$

Las Rectas Fijas.

La rectas oblicuas $l_{m,w} = \{(z, mz + w) \mid z \in \mathbb{C}\}$

$$\begin{aligned} f(\{(z, mz + w) \mid z \in \mathbb{C}\}) &= \{(\bar{z}, \overline{mz + w}) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ f(\{(z, mz + b) \mid z \in \mathbb{C}\}) &= \{(z, \overline{m}z + \overline{w}) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ f(l_{m,w}) &= l_{\overline{m}, \overline{w}} \end{aligned}$$

Las rectas verticales, $l_w = \{(w, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$.

$$\begin{aligned} f(\{(w, z) \mid z \in \mathbb{C}\}) &= \{(\overline{w}, \overline{z}) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ f(\{(w, z) \mid z \in \mathbb{C}\}) &= \{(\overline{w}, z) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ f(l_w) &= l_{\overline{w}} \end{aligned}$$

luego las rectas fijas, preservan pendiente e intercepto. Y esta son

$$\{l_{m,w}, l_w \mid m, w \in \mathbb{R}\}$$

□

Ejemplo 1.82 Sean f, g colineación en plano afín.
Demostrar directamente que $g \circ f$ es una colineación.

Solución: Sean f, g dos colineación en plano afín.

De lo anterior tenemos que $f, g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ son biyectiva, luego $g \circ f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ es biyectiva, además $f, g : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ son biyectiva, por ello $g \circ f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ es biyectiva.

Preserva Incidencia

Sabemos que g, f preservan incidencia, sean $P \mathcal{I} l$, aplicando la función f tenemos que $f(P) \mathcal{I} f(l)$ y ahora aplicando g tenemos que $g(f(P)) \mathcal{I} g(f(l))$, es decir, $(g \circ f)(P) \mathcal{I} (g \circ f)(l)$.

Preserva Paralelismo

Dado m, l dos rectas paralelas distintas, tenemos $f(m) \parallel f(l)$, aplicando g se obtiene

$$g(f(m)) \parallel g(f(l))$$

De este modo tenemos que $g \circ f$ es una colineación.

□

Ejemplo 1.83 Demostrar que todo plano afín, contiene al menos tres haces de rectas.

Solución: Por el tercer axioma existe tres puntos no colineales A, B, C , por axioma 1 existen las rectas l_{AB}, l_{AC}, l_{BC}

Las rectas no pueden ser iguales, ya que significa que los puntos son colineales y además cada una de ella con la otra tiene una intersección.

$$l_{AB} \cap l_{AC} = \{A\}, l_{BC} \cap l_{AB} = \{B\}, l_{AC} \cap l_{BC} = \{C\}$$

Luego no pueden ser paralela dos a dos

De esta manera cada una de las rectas pertenece a un haz distintos de rectas.

□

Ejemplo 1.84 En Π Plano de Moulton Real, sean $A = (-4, 7), B = (3, -3), C = (-2, 1)$ y $D = (1, -7)$.

Determinar $l_{AB} \cap l_{CD}$.

Solución: Consideremos las rectas

$$l_{AB}: y = \begin{cases} ax + b & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{a}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases} \quad l_{CD}: y = \begin{cases} cx + d & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{c}{2}x + d & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

luego, reemplazamos A y B se tiene que $7 = -2a + b$ y $-3 = 3a + b$,

$$\begin{array}{rcl} -2a + b & = & 7 \\ 3a + b & = & -3 \end{array}$$

de lo cual $a = -2$, $b = 3$ y en la otra reemplazamos C y D se tiene que $1 = -c + d$ y $-7 = c + d$,

$$\begin{array}{rcl} -c + d & = & 1 \\ c + d & = & -7 \end{array}$$

de lo cual $c = -4$, $d = -3$. De este modo tenemos

$$l_{AB}: y = \begin{cases} -2x + 3 & ; \quad x \geq 0 \\ -x + 3 & ; \quad x < 0 \end{cases} \quad l_{CD}: y = \begin{cases} -4x - 3 & ; \quad x \geq 0 \\ -2x - 3 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Igualando tenemos

$$\begin{array}{ll} \text{Caso } x \geq 0 & ; \quad \text{Caso } x < 0 \\ -2x + 3 = -4x - 3 & \quad -x + 3 = -2x - 3 \\ 2x = -6 & \quad x = -6 \\ x = -3 \geq 0 & \quad x = -6 < 0 \end{array}$$

Luego obtenemos que

$$l_{AB} \cap l_{CD} = \{(-6, 9)\}$$

□

Ejemplo 1.85 En Π Plano de Moulton Real, sean $A = (-6, 6)$, $B = (4, -8)$ y $C = (-2, 5)$. Determinar la ecuación de la recta l , tal que $l \parallel l_{AB}$ y CIl .

Solución: Consideremos las rectas

$$l_{AB}: y = \begin{cases} ax + b & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{a}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

luego, reemplazamos A y B se tiene que $6 = -3a + b$ y $-8 = 4a + b$,

$$\begin{array}{rcl} -3a + b & = & 6 \\ 4a + b & = & -8 \end{array}$$

de lo cual $a = -2$, $b = 0$. De este modo tenemos

$$l_{AB} : y = \begin{cases} -2x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

La recta paralela

$$l_C : y = \begin{cases} -2x + d & ; \quad x \geq 0 \\ -x + d & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

reemplazamos C y se tiene que $5 = 2 + d$ y $d = 3$,

$$l_C : y = \begin{cases} -2x + 3 & ; \quad x \geq 0 \\ -x + 3 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

□

Ejemplo 1.86 Considere $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, plano afín vectorial complejo

$$\mathcal{P} = \mathbb{C}^2, \quad \mathcal{L} = \{ \langle w \rangle + v \mid v, w \in \mathbb{C}^2, w \neq 0 \} \quad \text{y} \quad I : \text{pertenecía}$$

$$\text{y } f_a(z_1, z_2) = (\overline{z_1} + a\overline{z_2}, \overline{z_2})$$

1. Determinar si f_a es una colineación, con $a \in \mathbb{C}$.
2. Determinar si f_a es una dilatación, con $a \in \mathbb{C}$.

Solución: Dada la Recta $l = \{ (bw_1 + v_1, bw_2 + v_2) \mid a \in \mathbb{C} \} = \langle w \rangle + v$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} f_a(l) &= \{ f_a(bw_1 + v_1, bw_2 + v_2) \mid a \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ (\overline{bw_1} + \overline{v_1} + a\overline{bw_2} + a\overline{v_2}, \overline{bw_2} + \overline{v_2}) \mid a \in \mathbb{C} \} \\ &= \langle \overline{w_1} + a\overline{w_2}, \overline{w_2} \rangle + (\overline{v_1} + a\overline{v_2}, \overline{v_2}) \end{aligned}$$

Por ello se concluye que

□

Ejemplo 1.87 Considere $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, plano afín vectorial complejo

$$\mathcal{P} = \mathbb{C}^2, \quad \mathcal{L} = \{ \langle w \rangle + v \mid v, w \in \mathbb{C}^2, w \neq 0 \} \quad \text{y} \quad I : \text{pertenecía}$$

$$\text{y } f(a + bi, c + di) = (a - bi, c - di)$$

1. Determinar si f es una colineación
2. Determinar si f es una dilatación

Solución: Sabemos que $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$; $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ y $\overline{\bar{z}} = z$.

Notemos que

$$f(f(z, w)) = f(\bar{z}, \bar{w}) = (\overline{\bar{z}}, \overline{\bar{w}}) = (z, w)$$

luego f es una función biyectiva a nivel de puntos.

En relación a rectas

$$\begin{aligned} f(<(w_1, w_2) > +(v_1, v_2)) &= \{f(\alpha(w_1, w_2) + (v_1, v_2)) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(\overline{\alpha w_1 + v_1}, \overline{\alpha w_2 + v_2}) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(\overline{\alpha w_1} + \bar{v}_1, \overline{\alpha w_2} + \bar{v}_2) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\bar{\alpha}(\bar{w}_1, \bar{w}_2) + (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\beta(\bar{w}_1, \bar{w}_2) + (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \mid \beta \in \mathbb{C}\} \\ &= <(\bar{w}_1, \bar{w}_2) > +(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \end{aligned}$$

envía recta en recta y de la misma manera se tiene que f es biyectiva a nivel de rectas.

$$f(f(<(w_1, w_2) > +(v_1, v_2))) = <(w_1, w_2) > +(v_1, v_2).$$

La incidencia de recta se cumple por el calculo anterior.

Sea l y m dos rectas paralelas luego

$$l :< (w_1, w_2) > +(v_1, v_2), \quad m :< (w_1, w_2) > +(z_1, z_2)$$

luego tenemos que

$$f(l) :< (\bar{w}_1, \bar{w}_2) > +(\bar{v}_1, \bar{v}_2), \quad f(m) :< (\bar{w}_1, \bar{w}_2) > +(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

de lo cual tenemos que $f(l) \parallel f(m)$

Por todo lo anterior tenemos que f es una colineación.

Sea $l :< (1, i) >$ tenemos que $f(l) :< (1, -i) >$ pero $\{(1, i), (1, -i)\}$ es linealmente independiente, luego $f(l) \nparallel l$. Y por ello f no es una dilatación. $\square$

Ejemplo 1.88 Considere el plano afín de Moulton $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ y $h_a(x, y) = (ax, ay)$.

1. Determine si h_3 es una dilatación

2. Determine si h_{-3} es una dilatación

Solución: Sea $a \in \mathbb{R}^*$, tenemos que $h_a(h_{1/a}(x, y)) = (x, y)$, luego tenemos que h_a es biyectiva de puntos.

Rectas horizontal en horizontal

$$\begin{aligned} h_a(\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}) &= \{(ac, ay) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ h_a(\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}) &= \{(ac, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Rectas vertical en vertical

$$\begin{aligned} h_a(\{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(ax, ac) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ h_a(\{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(z, ac) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Rectas pendiente positiva en rectas de pendiente positiva

$$\begin{aligned} h_a(\{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(ax, amx + ab) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ h_a(\{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(z, mz + ab) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Rectas pendiente negativa en rectas de pendiente negativa

$$\begin{aligned} &h_3(\{(x, mx + b), (y, my/2 + b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\}) \\ &= \{(3x, 3mx + 3b), (3y, 3my/2 + 3b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\} \\ &= \{(x, mx + 3b), (y, my/2 + 3b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\} \end{aligned}$$

Luego h_3 es una colineación.

Ya que, las rectas por su tipo se mantiene luego mantiene incidencia y paralelismo.

Rectas pendiente negativa no es enviada en una rectas

$$\begin{aligned} &h_{-3}(\{(x, mx + b), (y, my/2 + b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\}) \\ &= \{(-3x, -3mx - 3b), (y, -3my/2 - 3b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\} \\ &= \{(x, mx - 3b), (y, my/2 - b) \mid x \in \mathbb{R}^-, y \in \mathbb{R}^+\}. \end{aligned}$$

En particular note que los puntos $\{(1, -1), (0, 0), (-1, 0, 5)\}$ son colineales

$$l : y = \begin{cases} -x & ; \quad x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

y tenemos que

$$h_{-3}\{(1, -1), (0, 0), (-1, 0, 5)\} = \{(-3, 3), (0, 0), (3, -1, 5)\}$$

Pero los puntos no son colineales, ya que la recta que une los dos primeros punto

$$m : y = \begin{cases} -2x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

pero el tercero no pertenece a la recta. □

Ejemplo 1.89 En el plano de Moulton, Sea $A = (-3, 5), B = (4, -2), C = (1, 1)$ y $D = (0, 2)$. Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$

Solución: Sean $A = (-3, 5)$ y $B = (4, -2)$

$$l_1 : y = \begin{cases} \frac{-14}{11}x + \frac{34}{11} & ; \quad x \geq 0 \\ \frac{-7}{11}x + \frac{34}{11} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Sean $C = (1, 1)$ y $D = (0, 2)$.

$$l_2 : y = \begin{cases} -x + 2 & ; \quad x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{-7}{11}x + \frac{34}{11} &= \frac{-1}{2}x + 2 \\ \frac{-7}{11}x + \frac{1}{2}x &= 2 - \frac{34}{11} \\ \frac{-3}{22}x &= -\frac{12}{11} \\ x &= 8 < 0 \end{aligned}$$

Para $x \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{-14}{11}x + \frac{34}{11} &= -x + 2 \\ \frac{-14}{11}x + x &= 2 - \frac{34}{11} \\ \frac{-3}{11}x &= -\frac{12}{11} \\ x &= 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$l_1 \cap l_2 = \{(4, -2)\}.$$

□

Ejemplo 1.90 *Demostrar directamente que si f es una colineación en plano afín entonces f^{-1} también es una colineación.*

Solución: Sea Π un plano afín, y f una colineación de Π .

De lo anterior tenemos que $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ es biyectiva, luego $f^{-1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ es biyectiva, además $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ es biyectiva, por ello $f^{-1} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ es biyectiva.

Sabemos que f mantiene incidencia, sean PIl , aplicando la función inversa tenemos $f^{-1}(P)$ es un punto y $f^{-1}(l)$ es una recta, luego existe m recta tal que $f^{-1}(P)Im$ y $f^{-1}(l) \parallel m$, aplicando

f tenemos que $P\mathcal{I}f(m)$ y $l \parallel f(m)$. Por lo tanto $f(m) = l$, es decir $m = f^{-1}(l)$, de lo cual se tiene que

$$f^{-1}(P)\mathcal{I}f^{-1}(l).$$

Dado m, l dos rectas paralelas distintas, tenemos $f^{-1}(m)$ y $f^{-1}(l)$ son dos rectas distintas. Supongamos que $Q\mathcal{I}f^{-1}(m)$ y $Q\mathcal{I}f^{-1}(l)$, aplicando f tenemos

$$f(Q)\mathcal{I}m \wedge f(Q)\mathcal{I}l$$

lo cual es una contradicción, ya que son paralelas y distintas, luego $f^{-1}(m)$ y $f^{-1}(l)$ no tiene punto en común, por lo tanto son paralelas. $\square$

Ejemplo 1.91 Sea f una dilatación en el plano vectorial real tal que $f(0,0) = (2,1)$, $f(0,4) = (2,4)$.

Determine $f(x,y)$

Solución: Ya que f es una dilatación se tiene que $f(X) = \alpha X + Y$.

Luego obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} (2,1) = \alpha(0,0) + Y \\ (2,4) = \alpha(0,4) + Y \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos que $Y = (2,1)$, reemplazando en la segunda $(0,3) = \alpha(0,4)$ por ende $\alpha = \frac{3}{4}$, de este modo

$$f(x,y) = \frac{3}{4}(x,y) + (2,1) = \left(\frac{3}{4}x + 2, \frac{3}{4}y + 1\right).$$

$\square$

Ejemplo 1.92 Sean $\Pi = \mathbb{F}_{11} \times \mathbb{F}_{11}$ plano afín vectorial y $f \in D(\Pi)$, tal que $f(6,9) = (3,3)$ y $f(10,1) = (4,1)$

Determine el cardinalidad del conjunto de trazas de f

Solución: Ya que f es una dilatación se tiene que $f(X) = \alpha X + Y$.

Luego obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} (3,3) = \alpha(6,9) + Y \\ (4,1) = \alpha(10,1) + Y \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se obtiene $(1,-2) = \alpha(4,-8)$ por ende $\alpha = 3$. reemplazando en la primera ecuación tenemos que $(3,3) = 3(6,9) + Y$, de lo cual $Y = (-4,-2)$, de este modo

$$f(x,y) = 3(x,y) + (-4,-2) = (3x - 4, 3y - 2).$$

El punto fijo es $(2,1)$ y razón 3. Por ello es una homotecia.

El conjunto de recta fija esta dada por:

$$\{l + (2,1) \mid l \text{ es una recta vectorial} \}$$

y el cardinal de todas las rectas fija es 12. (cantidad de pendiente +1). $\square$

Ejemplo 1.93 Sea T una traslación en el plano afín vectorial $V = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ tal que $T(3, 5) = (-1, 7)$ y σ una homotecia de centro $(8, 7)$ y razón 2

1. Determine $(T \circ \sigma)(x, y)$
2. Calcular $(T^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ T)(x, y)$

Solución: Como T es una traslación y $T(3, 5) = (-1, 7)$, tenemos que

$$T(x, y) = (x + 1, y + 2).$$

Por otro lado σ es una homotecia de razón 2 y centro $(3, 2)$, luego

$$\sigma(x, y) = 2(x, y) + 4(3, 2) = (2x + 2, 2y + 3).$$

Evalutando obtenemos

$$(T \circ \sigma)(x, y) = T(2x + 2, 2y + 3) = (2x + 3, 2y)$$

Las inversas de T y σ son:

$$T^{-1}(x, y) = (x - 1, y - 2) = (x + 4, y + 3), \quad \sigma^{-1}(x, y) = (3x + 4, 3y + 1)$$

$$\begin{aligned} (T^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ T)(x, y) &= (T^{-1} \circ \sigma^{-1})(x + 1, y + 2) \\ &= T^{-1}(3(x + 1) + 4, 3(y + 2) + 1) \\ &= T^{-1}(3x + 2, 3y + 2) \\ &= (3x + 1, 3y) \end{aligned}$$

de este modo tenemos

$$(T^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ T)(x, y) = (3x + 1, 3y + 1)$$

□

Ejemplo 1.94 En un plano afín.

Demostrar que una traslación esta completamente determinada si se conoce la imagen de un punto.

Solución: Sea $A \in \mathcal{P}$ tal que $f(A) = A'$, como A, A' son distintos existe $l_{AA'}$ y $X \in \mathcal{P}$. tal que $X \notin l_{AA'}$.

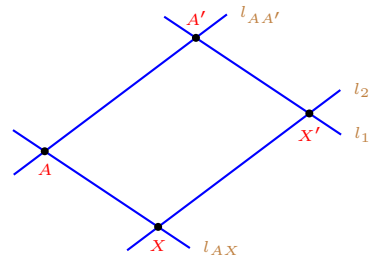
Definimos:

l_2 paralela a $l_{AA'}$ y $X \in l_2$ es una traza de f luego esta fija por f .

l_1 paralela a l_{AX} y $A' \in l_1$, note que $f(l_{AX}) = l_1$ es paralela y A' incide en ella.

Por lo tanto, l_1, l_2 no son paralela, luego $l_1 \cap l_2 = \{f(X)\}$.

De este modo tenemos que $f(A) = A'$ y $f(X) = X'$, dos imagen, por propiedad de dilatación, define una única dilatación.



□

Ejemplo 1.95 En el plano afín vectorial real, dados cuatro puntos $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ distintos, tal que $l_{AB} \parallel l_{CD}$

Demostrar que existe una dilatación f tal que $f(A) = C$ y $f(B) = D$

Solución: La existencia de la dilatación $f(X) = \alpha X + Y$, depende que el siguiente sistema tenga solución

$$\begin{array}{l} C = \alpha A + Y \\ D = \alpha B + Y \end{array}$$

Restando las ecuaciones se obtiene $C - D = \alpha(A - B)$, lo cual tiene solución, ya que $l_{AB} \parallel l_{CD}$, y por ello los vectores directores son linealmente dependiente.

Sea β la solución de la ecuación vectorial, luego $Y = C - \beta A = D - \beta B$.

Por lo tanto existe la dilatación y esta dada por:

$$f(X) = \beta(X - A) + C$$

□