

Capítulo 3

Espacios Métricos

3.1. Definiciones y Ejemplos

Definición 3.1 Sea X un conjunto y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Se dice que (X, d) es un espacio métrico, si y sólo si,

i) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

iii) Para todo $x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Si (X, d) es un espacio métrico, se dice que d es una métrica sobre X .

Ejemplo 3.1

1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Las siguientes son métricas sobre $\mathbb{R}^n$:

a) $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ (métrica usual).

b) $d(x, y) = \max \left\{ |x_i - y_i| \mid 1 \leq i \leq n \right\}$.

c) $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

2. Sea X un conjunto no vacío, la siguiente es una métrica sobre X :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & | x = y \\ 1 & | x \neq y \end{cases}$$

3. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces d' es también una métrica sobre X

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

4. Sea $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^n$ una familia finita de espacios métricos. Entonces d es una métrica sobre Y , donde

$$Y = \prod_{i=1}^n X_i, \quad d(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i)\}, \quad \begin{matrix} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{matrix}.$$

5. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces d' es un espacio métrico sobre X

$$d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Definición 3.2 Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Se define la bola de centro x y radio ϵ , denotada $B(x, \epsilon)$, como sigue:

$$B(x, \epsilon) := \left\{ y \in X \mid d(x, y) < \epsilon \right\}.$$

Cuando sea necesario anotaremos por $B_d(x, \epsilon)$ la bola de centro x y radio ϵ con respecto a la métrica d .

Teorema 3.1 Todo espacio métrico es topológico.

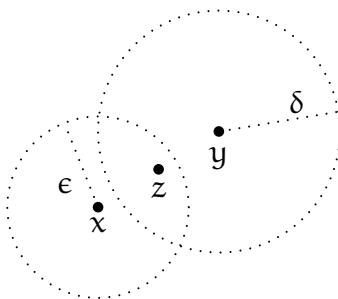
Demostración Sea (X, d) un espacio métrico. En $\mathcal{P}(X)$ consideremos la siguiente colección de subconjuntos:

$$\mathcal{B}_d := \left\{ B(x, \epsilon) \mid x \in X, \epsilon > 0 \right\}.$$

Veamos que $\mathcal{B}_d$ es una base de una topología de X .

1. Notar que para todo $x \in X$, $x \in B(x, 1) \in \mathcal{B}_d$.

2. Sean $x, y \in X$ y $\epsilon, \delta > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta) \neq \emptyset$.



Para todo $z \in B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta)$ consideremos $B(z, \gamma)$, donde

$$\gamma = \min \left\{ \epsilon - d(z, x), \delta - d(z, y) \right\}.$$

Basta probar ahora que $B(z, \gamma) \subseteq B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta)$. Sea $w \in B(z, \gamma)$ entonces $d(w, z) < \gamma \leq \epsilon - d(z, x)$, luego

$$d(w, x) \leq d(w, z) + d(z, x) < \epsilon,$$

del mismo modo $d(w, y) < \delta$. Por lo tanto $w \in B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta)$.

Así $\mathcal{B}_d$ es una base para una topología sobre X . □

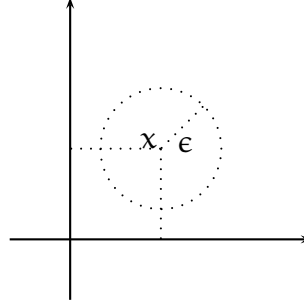
Definición 3.3

1. La topología generada por la base $\mathcal{B}_d$ se llama topología inducida por la métrica d y se anota $\mathcal{T}_d$.
2. Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es metrizable, si y sólo si, existe una métrica d sobre X de modo que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.
3. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que A es un conjunto acotado, si y sólo si, existe $M > 0$ de modo que para todos $x, y \in A$, $d(x, y) < M$. En este caso diremos que M es una cota de A .

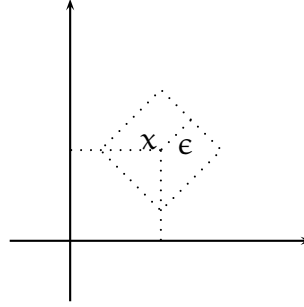
Observación 3.1

1. Si M es cota de A , entonces $A \subseteq B(x_0, 2M)$ para algún $x_0 \in X$.
2. La métrica del Ejemplo 3.1.2 induce la topología discreta.

3. La métrica del ejemplo 3.1.1.a en $\mathbb{R}^2$. Geométricamente la bola $B_d(x, \epsilon)$ corresponde a:



4. La métrica del ejemplo 3.1.1.c en $\mathbb{R}^2$. Geométricamente la bola $B_d(x, \epsilon)$ corresponde a:



Lema 3.2 Sean d_1, d_2 dos métricas en X . Entonces, $\mathcal{T}_{d_2} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$ si y sólo si, para todo $x \in X$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que $B_{d_1}(x, \delta) \subseteq B_{d_2}(x, \epsilon)$.

Demostración Notemos que:

$\mathcal{U}_1 \in \mathcal{T}_{d_1}$, si y sólo si, existen $B_{d_1}(x_i, \epsilon_i) \in \mathcal{B}_{d_1}$ tal que $\mathcal{U}_1 = \bigcup_i B(x_i, \epsilon_i)$.

$\mathcal{U}_2 \in \mathcal{T}_{d_2}$, si y sólo si, existen $B_{d_2}(x_j, \delta_j) \in \mathcal{B}_{d_2}$ tal que $\mathcal{U}_2 = \bigcup_j B(x_j, \delta_j)$.

$\Rightarrow$) Sean $x \in X$, $\epsilon > 0$. Consideremos la bola $B_{d_2}(x, \epsilon) \in \mathcal{T}_{d_2} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$, entonces, existen $B_{d_1}(x_i, \delta_i) \in \mathcal{B}_{d_1}$ de modo que $B_{d_2}(x, \epsilon) = \bigcup_i B_{d_1}(x_i, \delta_i)$, luego, existe i_0 tal que $x \in B_{d_1}(x_{i_0}, \delta_{i_0})$. Por lo tanto

$$x \in B_{d_1}(x, \delta) \subseteq B_{d_1}(x_{i_0}, \delta_{i_0}) \subseteq B_{d_2}(x, \epsilon),$$

donde $\delta := (\delta_{i_0} - d_1(x_{i_0}, x)) / 2$.

$\Leftarrow$) Si $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B_{d_2}(x, \epsilon_x) \in \mathcal{T}_{d_2}$, entonces

$$x \in B_{d_1}(x, \delta_x) \subseteq B_{d_2}(x, \epsilon_x), \quad \mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B_{d_1}(x, \delta_x) \in \mathcal{T}_{d_1},$$

por lo tanto $\mathcal{T}_{d_2} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$. □

Ejercicio 3.2 1. Estudiar si $d(A, B) = \sqrt{\text{tr}((A - B)^t \cdot (A - B))}$ define una distancia en el espacio de matrices 2×2 . Nota: recuérdese que $\text{tr} = \text{traza}$ indica la suma de los elementos de la diagonal principal.

2. Demostrar que $d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$ define una distancia en $[0, 1]$. ¿Cuáles son las funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en este espacio?

3. Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua. Probar que el conjunto de puntos que f deja fijos es un cerrado de X .

¿Es cierto el resultado para un espacio topológico arbitrario (X, T) ?

Teorema 3.3 Sea (X, d) un espacio métrico, entonces

1. X es hausdorff

2. X es normal.

Demostración Dado $x, y \in X$ dos puntos distintos luego $\frac{1}{2}d(x, y) = \delta > 0$ así se obtiene que

$$x \in B(x, \delta), \quad y \in B(y, \delta)$$

además $z \in B(x, \delta) \cap B(y, \delta)$.

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2\delta = \frac{1}{2}d(x, y).$$

De lo cual

$$x \in B(x, \delta), \quad y \in B(y, \delta), \quad B(x, \delta) \cap B(y, \delta) = \emptyset$$

Sean A, B cerrados y disjuntos en X . Para todo $a \in A$ y todo $b \in B$ existen se define

$$\epsilon_a = \inf\{d(a, b) \mid b \in B\}$$

si $\epsilon_a = 0$, significa que $(\forall \delta > 0)(B(a, \delta) \cap B \neq \emptyset)$, luego tenemos $a \in \overline{B} = B$, lo cual no es posible ya que son disjuntos A, B . De este modo tenemos que $\epsilon_a > 0$

Luego de manera similar existe $\epsilon_b > 0$, con $b \in B$.

De la definición anterior tenemos que

$$B(a, \epsilon_a) \subseteq A^c, \quad B(b, \epsilon_b) \subseteq A^c,$$

luego, basta considerar

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon_a/2) \in \mathcal{T}_d, \quad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \epsilon_b/2) \in \mathcal{T}_d.$$

Claramente $U \cap V = \emptyset$, pues, si $x \in U \cap V$ entonces

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(b, x) < \epsilon_a/2 + \epsilon_b/2 \leq \max\{\epsilon_a, \epsilon_b\},$$

es decir, $a \in B(b, \epsilon_b) \subseteq A^c$ o $b \in B(a, \epsilon_a) \subseteq B^c$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es normal. $\square$

3.2. Topología Producto en $\mathbb{R}^J$

Notemos que

$$\prod_{x \in J} \mathbb{R} = \{f \in F(J, \mathbb{R}) \mid (\forall x \in J)(f(x) \in \mathbb{R})\} = \mathbb{R}^J.$$

Luego $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de sucesiones reales.

Proposición 3.1 Sean $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales. Entonces

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \min \left\{ |a_n - b_n|, 1 \right\} \right\},$$

es una métrica en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Demostración Consideremos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como antes y $\mathbf{c} = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

i) Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\min_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n - b_n|, 1\}\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \min_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n - b_n|, 1\} = 0 \\ &\Leftrightarrow |a_n - b_n| = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow a_n = b_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

ii) Como $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$, entonces:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\min_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n - b_n|, 1\}\}, \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\min_{n \in \mathbb{N}} \{|b_n - a_n|, 1\}\}, \\ &= d(\mathbf{b}, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

iii) Como $|a_n - b_n| \leq |a_n - c_n| + |c_n - b_n|$, entonces claramente

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b).$$

Por lo tanto $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico.

□

Ejemplo 3.3 Calcular la distancia $d(f, g)$ en cada caso:

a) Si $f(n) = n$, $g(n) = 2n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) Si $f(n) = (\frac{1}{2})^n$, $g(n) = (\frac{1}{3})^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Observación 3.2 En general, para cualquier conjunto $J \neq \emptyset$. Se tiene que $(\mathbb{R}^J, \rho)$ es un espacio métrico, con

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in J} \left\{ \min \left\{ |f(x) - g(x)|, 1 \right\} \right\}, \quad (f, g \in \mathbb{R}^J).$$

La métrica ρ es llamada **métrica uniforme** sobre $\mathbb{R}^J$. La topología inducida por ρ es llamada topología uniforme $(\mathbb{R}^J, \mathcal{T}_\rho)$ sobre $\mathbb{R}^J$.

Definición 3.4 Para cada $x \in J$, consideremos U_x un abierto en $\mathbb{R}$. Se define el siguiente producto:

$$\prod_{x \in J} U_x := \left\{ f \in \mathbb{R}^J \mid (\forall x \in J) (f(x) \in U_x) \right\}. \quad (3.1)$$

Proposición 3.2 La familia de productos en (3.1) tales que $U_x \neq \mathbb{R}$ para una cantidad finita de elementos de J , es una base para una topología de $\mathbb{R}^J$.

Demostración Denotemos por $\mathcal{B}$ la familia considerada anteriormente

i) Sea $f \in \mathbb{R}^J$, entonces $f \in \prod_{x \in J} \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, ya que $U_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in J$.

ii) Sea $f \in \prod_{x \in J} U_x \cap \prod_{x \in J} V_x = \prod_{x \in J} U_x \cap V_x \in \mathcal{B}$ ya que

$$\{x \in J \mid U_x \cap V_x \neq \mathbb{R}\} = \{x \in J \mid U_x \neq \mathbb{R}\} \cup \{x \in J \mid V_x \neq \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base para una topología de $\mathbb{R}^J$.

□

La topología generada por la familia de la Proposición 3.2 es llamada topología producto $(\mathbb{R}^J, \mathcal{T})$ sobre $\mathbb{R}^J$.

Teorema 3.4 *La topología uniforme de $\mathbb{R}^J$ es más fina que la topología producto en $\mathbb{R}^J$. Además son distintas cuando J es infinito.*

Demostración Sea $f \in \prod_{x \in J} U_x \in \mathcal{B}$, entonces, existen $x_1, \dots, x_n \in J$ de modo que $U_{x_i} \neq \mathbb{R}$ y $f(x_i) \in U_{x_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Como U_i es abierto en $\mathbb{R}$, entonces para cada i existe $\epsilon_i > 0$ tal que

$$]f(x_i) - \epsilon_i, f(x_i) + \epsilon_i[\subseteq U_{x_i}.$$

Sea $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, 1/2\}$, tenemos $f \in B_\rho(f, \epsilon)$. Ahora probaremos que $B_\rho(f, \epsilon) \subseteq \prod_{x \in J} U_x$. Sea $g \in B(f, \epsilon)$, claramente $g(x) \in U_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in J \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, por otra parte tenemos $\rho(g, f) < \epsilon$ es decir,

$$\sup_{x \in J} \{\min\{|g(x) - f(x)|, 1\}\} < \epsilon$$

entonces $|g(x_j) - f(x_j)| < \epsilon < \epsilon_j$, luego

$$g(x_j) \subseteq]f(x_j) - \epsilon_j, f(x_j) + \epsilon_j[\subseteq U_{x_j},$$

es decir, $g \in \prod_{x \in J} U_x$.

Así tenemos $f \in B_\rho(f, \epsilon) \subseteq \prod_{x \in J} U_x$, por Lema 3.2 se obtiene $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\rho$.

Si J es infinito, la bola $B_\rho(1, \frac{1}{2})$ de centro la función constante igual a 1 y radio $1/2$ no contiene ningún elemento basal de la topología producto

□

Teorema 3.5 *La topología que induce la siguiente métrica d en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es igual a la topología producto.*

$$d(x, y) := \sup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{i} \min\{|x_i - y_i|, 1\} \right\}, \quad x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Demostración Utilicemos nuevamente el Lema 3.2.

Sea $\epsilon > 0$, consideremos $f \in B_d(g, \epsilon) \in \mathcal{T}_d$ y $\epsilon' = \epsilon - d(f, g) > 0$, entonces $B_d(f, \epsilon') \subseteq B_d(g, \epsilon)$, ya que, si $h \in B_d(f, \epsilon')$ se tiene

$$d(f, h) < \epsilon', \quad d(f, g) = \epsilon - \epsilon' > 0,$$

luego $d(g, h) \leq d(g, f) + d(f, h) = \epsilon - \epsilon' + d(f, h) < \epsilon - \epsilon' + \epsilon' = \epsilon$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon'$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ se define el siguiente conjunto:

$$U_i := \begin{cases}]f(i) - \epsilon', f(i) + \epsilon'[& ; \quad i < N \\ \mathbb{R} & ; \quad i \geq N \end{cases}$$

Luego $\prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$ es un elemento basal de la topología producto, que además contiene a f , pues $f(i) \in U_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sea $h \in \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$. Si $i < N$ tenemos $|h(i) - f(i)| < \epsilon'$, luego

$$\frac{1}{i} \min\{|h(i) - f(i)|, 1\} < \frac{1}{i} \min\{\epsilon', 1\} \leq \frac{\epsilon'}{i},$$

entonces

$$\sup_{i < N} \left\{ \frac{1}{i} \min\{|h(i) - f(i)|, 1\} \right\} \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \{\epsilon'/i\} < \epsilon'.$$

Ahora, si $i \geq N$, tenemos

$$\sup_{i \geq N} \left\{ \frac{1}{i} \min\{|h(i) - f(i)|, 1\} \right\} \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{i} \right\} < \frac{1}{N} < \epsilon'.$$

Por lo tanto $d(h, f) < \epsilon'$, luego

$$f \in \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i \subseteq B_d(f, \epsilon') \subseteq B_d(g, \epsilon).$$

Recíprocamente, sea $\prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$ un elemento basal de la topología producto, y $f \in \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$. Sean $i_1, \dots, i_r$ de modo que $U_{i_j} \neq \mathbb{R}$, sabemos que $f(s) \in U_s$, entonces, para todo $s \in \{i_1, \dots, i_r\}$ existe ϵ_s tal que

$$]f(s) - \epsilon_s, f(s) + \epsilon_s[\subseteq U_s.$$

Definamos $\epsilon > 0$ como sigue:

$$\epsilon := \frac{1}{t} \min \{ \epsilon_{i_j} | 1 \leq j \leq r+1, \epsilon_{r+1} = 1/2 \}, \quad t = \max\{i_1, \dots, i_r\}.$$

Sea $h \in B_d(f, \epsilon)$, si $s \notin \{i_1, \dots, i_r\}$, entonces $h(s) \in \mathbb{R} = U_s$. Por otra parte, si $s \in \{i_1, \dots, i_r\}$, notemos que

$$\frac{1}{s} \min\{|f(s) - h(s)|, 1\} \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{i} \min\{|f(i) - h(i)|, 1\} \right\} = d(f, h) < \epsilon, \quad (3.2)$$

y

$$t\epsilon < \frac{1}{2}, \quad \epsilon < \frac{1}{2t}, \quad s \leq t, \quad s\epsilon \leq \frac{s}{2t} \leq \frac{1}{2}.$$

Luego, multiplicando por s en (3.2) obtenemos lo siguiente

$$\min\{|f(s) - h(s)|, 1\} < s\epsilon \leq \frac{1}{2},$$

así $|h(s) - f(s)| < s\epsilon \leq (s\epsilon_s)/t \leq \epsilon_s$, por lo tanto

$$h(s) \in U_s, \quad h \in B_d(f, \epsilon) \subseteq \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i.$$

Esto demuestra que ambas topologías son iguales, note que es un ejemplo no trivial de topología metrizable. $\square$

Teorema 3.6 Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua, si y sólo si, para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que para todo $y \in X$ se tiene

$$d_X(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Consideremos $B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \in \mathcal{T}_{d_Y}$, como f es continua, entonces $x \in f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)) \in \mathcal{T}_{d_X}$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)),$$

lo cual equivale a tener, para todo $y \in X$

$$d_X(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

$\Leftarrow$) Sea $B_{d_Y}(z, \epsilon) \in \mathcal{T}_{d_Y}$, si existe $x \in f^{-1}(B_{d_Y}(z, \epsilon))$, entonces $f(x) \in B_{d_Y}(z, \epsilon)$, luego, existe $\epsilon' > 0$ de modo que

$$B_{d_Y}(f(x), \epsilon') \subseteq B_{d_Y}(z, \epsilon).$$

Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon',$$

para todo $y \in X$, es decir,

$$B_{d_X}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon')) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(z, \epsilon)).$$

Así tenemos que

$$f^{-1}(B_{d_Y}(z, \epsilon)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(B_{d_Y}(z, \epsilon))} B_{d_X}(x, \delta_x) \in \mathcal{T}_{d_X},$$

por lo tanto f es continua. □

3.3. Convergencia

Definición 3.5 Sea X un espacio topológico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en X . Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x si y sólo si, para todo $U_x \in \mathcal{V}(x)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n > N$ entonces $x_n \in U_x$.

Notación 3.1 Si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x se denotado por $x_n \rightarrow x$.

Ejemplo 3.4 Sea $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en X tal que $x_i = b$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Consideremos $X, \{b, c\} \in \mathcal{V}(b)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in U$, por lo tanto, $x_n \rightarrow b$; note además que $x_n \rightarrow c$ ya que $X, \{b, c\} \in \mathcal{V}(c)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y todo $x_i \in U$.

Proposición 3.3 En un espacio topológico Hausdorff, el punto de convergencia es único

Demostración Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente tal que $x_n \rightarrow a$ y $x_n \rightarrow b$ de modo que $a \neq b$, como el espacio topológico es Hausdorff, existen abiertos U_a, U_b disjuntos, además la sucesión converge, luego existen $N, M \in \mathbb{N}$, tales que a partir de un instante los elementos pertenecen a U_a y U_b respectivamente, escogiendo el máximo entre N, M obtenemos que los elementos pertenecen a ambos conjuntos, es decir, los abiertos no son disjuntos.

De lo cual se obtiene que de existir la convergencia es única. □

Ejemplo 3.5 Considere $\mathbb{N}$ con la topología cofinita, determine la convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones

1.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

2.

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

3. $h(n) = n$

Solución: La primera es divergente, la segunda converge a 0 solamente, y la tercera converge a $\mathbb{N}$, para todo N número Natural

Lema 3.7 Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en A . Si $x_n \rightarrow x$, entonces, $x \in \overline{A}$.

Demostración Sea $U \in \mathcal{V}(x)$, como $x_n \rightarrow x$, existe $x_{n_0} \in A$ tal que $x_{n_0} \in U$, luego $U \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in \overline{A}$. $\square$

Veamos el recíproco:

Proposición 3.4 Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Si $x \in \overline{A}$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en A , tal que $x_n \rightarrow x$.

Demostración Supongamos que X es metrizable, como $x \in \overline{A}$ sabemos que para todo $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, en particular para $\epsilon \in \left\{ 1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$, de este modo tenemos que existe $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(x, 1/n)$, se tiene así la siguiente sucesión

$$\left\{ B(x, 1/n) \right\}_{n=1}^{\infty},$$

luego, por propiedad Arquimidiana, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/N < \epsilon$, entonces $x_N \in B(x, 1/N) \subseteq B(x, \epsilon)$, es decir, si $y \in B(x, 1/N)$ entonces $d(x, y) < 1/N < 1/\epsilon$, así $x_{N+1} \in B(x, 1/(N+1)) \subseteq B(x, \epsilon)$, por lo tanto $x_n \rightarrow x$. $\square$

Teorema 3.8 Sean (X, d) un espacio métrico e Y un espacio topológico.

Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua, si y sólo si, para toda sucesión convergente $x_n \rightarrow x$, se tiene, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $x_n \rightarrow x$ y sea $f(x) \in U \in \mathcal{V}(f(x))$, como f es continua, entonces $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_d$, luego, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x \in B_d(x, \epsilon) \subseteq f^{-1}(U).$$

Como $x_n \rightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $i > N$, $x_i \in B_d(x, \epsilon)$, es decir $f(x_i) \in U$. Esto prueba que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

$\Leftarrow$) Utilicemos el Teorema 2.3, sea $A \subseteq X$, probemos que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Sea $x \in \overline{A}$, como $(X, \mathcal{T}_d)$ es métrizable por d , entonces, por Lema 3.7 existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$. Por hipótesis $f(x_n) \rightarrow f(x)$, nuevamente por Lema 3.7 tenemos $f(x) \in \overline{f(A)}$, por lo tanto $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Esto prueba que f es continua. $\square$

Definición 3.6 Sean X un conjunto, Y un espacio métrico y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X en Y . Se dice que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función $f : X \rightarrow Y$, denotado por $f_n \xrightarrow{u} f$, si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $n > N$ y todo $x \in X$, se tiene $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Ejemplo 3.6 Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la siguiente función

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{x}{n},$$

y anotamos $\widehat{0}$ la función nula en $[0, 1]$. Veamos que $f_n \xrightarrow{u} \widehat{0}$:

Sea $\epsilon > 0$, por propiedad Arquimidiana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/\epsilon < N$, es decir, $1/N < \epsilon$. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ y $x \in [0, 1]$, entonces

$$d\left(f_n(x), \widehat{0}(x)\right) = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| |x| < \frac{1}{N} \cdot 1 = \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Por lo tanto $f_n \xrightarrow{u} \widehat{0}$.

Teorema 3.9 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de X en Y .

Si $f_n \xrightarrow{u} f$ y f_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, f es continua.

Demostración Sea $U \in \mathcal{T}_d$, para cada $x \in f^{-1}(U)$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(f(x), \epsilon) \subseteq U$. Además, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n > N$ se tiene $d(f_n(y), f(y)) < \epsilon/2$, para todo $y \in X$, entonces, para todo $n > N$, $f_n(x) \in B_d(f(x), \epsilon/2)$, luego $x \in f_n^{-1}(B_d(f(x), \epsilon/2)) \in \mathcal{T}$.

Sea $z \in f_n^{-1}(B_d(f(x), \epsilon/2))$, entonces $d(f_n(z), f(x)) < \epsilon/2$, luego

$$d(f(z), f(x)) \leq d(f(z), f_n(z)) + d(f_n(z), f(x)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

es decir $z \in f^{-1}(B_d(f(x), \epsilon))$. Por lo tanto

$$x \in f_n^{-1}(B_d(f(x), \epsilon/2)) \subseteq f^{-1}(B_d(f(x), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(U), \quad n > N$$

Así se tiene que f es continua. □

Definición 3.7 Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Se dice que f es una isometría, si y sólo si, para todo par de puntos $x, y \in X$, se tiene

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y)).$$

Proposición 3.5 Toda isometría es un homeomorfismo.

Ejemplo 3.7 Determinemos todas las isometrías de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la métrica usual, es decir las funciones biyectivas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|x - y| = |f(x) - f(y)|$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, si $y = 0$ entonces

$$\begin{aligned} |x - 0| = |f(x) - f(0)| &\Leftrightarrow |x| = |f(x) - f(0)| \\ &\Leftrightarrow x = f(x) - f(0) \quad \vee \quad -x = f(x) - f(0) \\ &\Leftrightarrow f(x) = x + f(0) \quad \vee \quad f(x) = -x + f(0) \end{aligned}$$

Además, si en el dominio de la función existe valores x, y tales que

$$f(x) = x + f(0), \quad f(y) = -y + f(0)$$

luego $|x - y| = |f(x) - f(y)| = |x + f(0) + y - f(0)| = |x + y|$, es decir, $x = 0$ o $y = 0$

Por otra parte las funciones

$$t_a(x) = x + a, \quad \ell_a(x) = -x + a,$$

son isometrías, ya que

$$|t_a(x) - t_a(y)| = |x + a - y - a| = |x - y|,$$

$$|\ell_a(x) - \ell_a(y)| = |-x + a + y - a| = |-x + y| = |x - y|.$$

de este modo la únicas isometrías de $\mathbb{R}$, con la métrica usual son t_a, ℓ_a .

Ejemplo 3.8 Las siguientes funciones son isometrías:

1. Consideramos la métrica sobre $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

donde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Sea $a \in \mathbb{R}^2$, definimos $t_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $t_a(x) := x + a$, entonces

$$d(t_a(x), t_a(y)) = d(x, y).$$

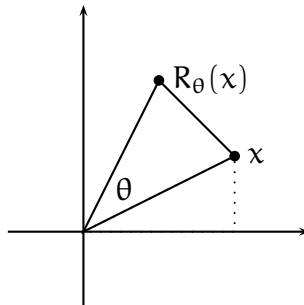
Por lo tanto t_a es una isometría en $(\mathbb{R}^2, d)$.

2. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con d la métrica usual y definamos $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$R_\theta(x) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2).$$

No es difícil ver que $d(R_\theta(x), R_\theta(y)) = d(x, y)$.

Por lo tanto R_θ es una isometría.



Observación 3.3 Notemos que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, entonces

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} [\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2].$$

Las isometrías lineales en un espacio vectorial pertenecen al grupo ortogonal. En efecto, si f es una isometría lineal, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle &= \frac{1}{2} (\|f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x})\|^2 - \|f(\mathbf{y})\|^2), \\ &= \frac{1}{2} (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2), \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto f pertenece al grupo ortogonal.

3.4. Ejercicios Propuestos

1. Sean (E, d) un espacio métrico demostrar que $(E, \mathcal{T}_d)$ es un espacio de Hausdorff.

2. Sean (E, d) un espacio métrico demostrar que:

Si $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 1}$ entonces (E, d_1) es un espacio métrico

Ayuda: Sea $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+; f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x} + 1}$

a) f es creciente

b) $(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}_0^+)(f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{b}))$

c) Usando (i) y (ii) obtener que $(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}_0^+)(\mathbf{c} \leq \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}))$

3. Sean (E, d) un espacio métrico $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que

a) $f(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = 0$; para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$

b) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_0^+$

c) f creciente entonces demostrar que

Si $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(d(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ entonces (E, d_2) es un espacio métrico

4. Sea

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| & \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 0 & \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Demostrar que $(\mathbb{R}, d)$ un espacio métrico

5. Sea X un conjunto no vacío y sea

$$B(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$$

se define $f, g \in B(X, \mathbb{R})$; $d(f, g) = \sup_{x \in X} \{|f(x) - g(x)|\}$.

Demostrar que $(B(X, \mathbb{R}), d)$ es un espacio métrico

6. Sea (M, d) un espacio métrico, X un conjunto no vacío y

$$B(X, M) = \{f : X \rightarrow M : f \text{ es acotada}\}$$

Demostrar que $(B(X, M), d)$ es un espacio métrico, donde

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\} \quad f, g \in B(X, M).$$

7. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que d' es una métrica sobre X y $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$, donde

$$d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|.$$

8. Determinar si es que $(C([0, 1], \mathbb{R}), d)$ es un espacio métrico, donde

$$C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : I_0^1 \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ es continua}\}$$

y

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

9. Sean $(X_i, d_i)_{i \in I}$ una familia finita de espacio métricos y

$$X = \left(\times_{i \in I} X_i \right) = \prod_{i \in I} X_i,$$

entonces pruebe que las siguientes funciones son métricas sobre X

$$a) \quad d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i \in I} d_i(x_i, y_i)^2}, \text{ donde } x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in X$$

- b) $d_2(x, y) = \sum_{i \in I} d_i(x_i, y_i)$ donde $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in X$
 c) $d_3(x, y) = \max_{i \in I} \{d_i(x_i, y_i)\}$ donde $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in X$

10. Se denota $c(x)$ la distancia al entero más cercano desde x , (por ejemplo, $c(1/4) = 1/4$ y $c(5/6) = 1/6$).

En $X = [0, 1) \times [0, 1)$, se define

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = c(x_1 - x_2) + c(y_1 - y_2)$$

Demostrar que (X, d) es un espacio métrico.

11. Por $\mathbb{R}^\omega$ denotamos el espacio de todas las sucesiones de números reales $x = (x_n)$.

Demuestre que $(\mathbb{R}^\omega, d)$ es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} \quad x \in \mathbb{R}^\omega, y \in \mathbb{R}^\omega$$

¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = (x_n) = ((1 - 2^{-n})^{-1})$ e $y = (y_n) = (1)$?

12. Sean ℓ_∞ el espacio de todas las sucesiones acotadas. Demostrar que (ℓ_∞, d) es un espacio métrico, donde $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

13. Sean ℓ_2 el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$. Demostrar que (ℓ_2, d) es un espacio métrico, donde $d : \ell_2 \times \ell_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \left(\sum_n |x_n - y_n|^2 \right)^{1/2}$$

Indicación: si $x = (x_n) \in \ell_2, y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y, además, $(\sum |x_n y_n|)^2 \leq (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

14. En $\mathbb{R}^n$ tenemos definida dos métricas

$$a) \quad d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \text{ donde } x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$$

$$b) \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i \{ |x_i - y_i| \} \text{ donde } \mathbf{x} = (x_i), \mathbf{y} = (y_i) \in \mathbb{R}^n$$

Demostrar que las topologías inducidas por las métricas son iguales

15. Dado $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2$. Muestre que $(\mathbb{R}, d)$ no es espacio métrico.

16. Sean (E, d) un espacio métrico $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, funciones continuas entonces

$$a) \quad f + g : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ es continua}$$

$$b) \quad f - g : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ es continua}$$

$$c) \quad f \cdot g : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ es continua}$$

$$d) \quad f \div g : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \text{ es continua, si } (\forall x \in E) (g(x) \neq 0)$$

17. Sea (M, d) un espacio métrico, $a \in X$,

$$B(X, M) = \{f : X \rightarrow M \quad : \quad f \text{ es acotada}\}$$

con la métrica dada por $d(f, g) = \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\}$.

Demostrar que

$$ev_a : B(X, M) \rightarrow M, ev_a(f) = f(a)$$

es continua.

18. Sean (X, d) un espacio métrico y $\alpha > 0$.

Probar que $d'(x, y) = \min\{\alpha, d(x, y)\}$ es una distancia que genera la misma topología que d .

19. Sea (X, d) un espacio métrico, $X \times X$ espacio topológico inducido por la métrica de d .

Demostrar que d es continua

20. Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$. Se define

$$d_A : X \rightarrow \mathbb{R}, d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}$$

Demostrar que d_A es continua.

21. Sean $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ la bola unitaria y

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow B(0, 1) \\ x &\rightsquigarrow \frac{x}{1 + \|x\|} \end{aligned}$$

Demostrar que f es un homeomorfismo con las topología usuales.

22. Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual

$$s: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(x, y) = x + y.$$

a) Demostrar que s es un función continua

b) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ abiertos

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R} \quad : \quad a \in A, b \in B\}$$

Demostrar que $A + B$ es abierto.

23. Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual

$$p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x, y) = xy.$$

a) Demostrar que p es un función continua

b) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ abiertos

$$AB = \{ab \in \mathbb{R} \quad : \quad a \in A, b \in B\}$$

Determine si AB es abierto.

24. Sean

$$\begin{aligned} \cdot &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con } \cdot(x) = x_1 x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^n x_i \\ + &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con } +(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

a) Demostrar que $+, \cdot$ son funciones continuas

b) $H = \{x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = p\}$ es cerrado.

c) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 \dots x_n < p\}$ es abierto

25. Sean $(X_i, d_i), (Y_i, d'_i)$ espacios métricos $i = 1, 2$

$$f_i : X_i \rightarrow Y_i$$

y

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2, \quad (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

Demostrar que $f_1 \times f_2$ es continua si y sólo si f_1, f_2 son continuas.

26. Sean $(X, d), (Y, d')$ y (Z, d'') espacios métricos $a \in X, b \in Y$ y

$$f : X \times Y \rightarrow Z,$$

se define

$$f_a : Y \rightarrow Z, \quad f_a(y) = f(a, y)$$

$$f^b : X \rightarrow Z, \quad f^b(x) = f(x, b)$$

a) Pruebe que si f es continua entonces f_a, f^b son continuas

b) Es válido el recíproco

27. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos $a \in X$

$$f, g : X \rightarrow Y, \quad \text{continuas}$$

Demostrar que:

a) Si $f(a) \neq g(a)$ entonces existe una bola B de centro en a tal que $f(B) \cap g(B) = \emptyset$

b) $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

28. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos, $a \in X$ y

$$f, g : X \rightarrow Y, \quad \text{continuas}$$

Demostrar que, Si $f(a) < g(a)$ entonces existe $\delta > 0$, para todo $x, y \in B(a, \delta)$ se tiene que $f(x) < g(y)$.

29. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos $a \in X$

$$f, g : X \rightarrow Y, \quad \text{continuas}$$

Demostrar que:

a) Si toda bola de centro a tiene un punto x tal que $f(x) = g(x)$ entonces $f(a) = g(a)$.

b) $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

30. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continuas tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ entonces $f = g$

31. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos

$$v : B(X, Y) \times X \rightarrow Y, \quad v(f, x) = f(x)$$

Demostrar que v es continua en (f_0, x_0) si y sólo si f_0 es continua en x_0 .

32. Sea (X, d) espacio métrico

$$f, g : X \rightarrow \mathbb{R},$$

se define

$$(f \vee g) : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

$$(f \wedge g) : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Demostrar que si f, g son continuas en x_0 entonces $f \vee g, f \wedge g$ son continuas en x_0 .

33. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, una función continua tal que $f(a) > 0 > f(b)$ y $c = \sup\{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$. Demostrar que $f(c) = 0$.