Universidad de Valparaíso
CHILE
Tradición Excelencia Innovación

Topología General

Daniel Jiménez

Tercera Versión

2018

Índice de Notaciones

Símbolo	Significado
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto potencia de X.
$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$	Topología generada por $\mathcal{B}$.
$\mathcal{T}_{Y}$	Topología reducida en Y.
$\mathcal{T}_{z}$	Topología de Zariski.
$\mathcal{T}_{c}$	Topología del Complemento Finito.
A^{c}	Complemento del conjunto A.
$\mathring{A}$	Interior del conjunto A.
$\overline{A}$	Adherencia del conjunto A.
$\mathrm{Fr}(A)$	Frontera del conjunto A.
A'	Puntos de acumulación de A.
$\mathcal{V}(x)$	Conjunto de vecindades de x.
c_{y_0}	Función constante en y_0.
ι_{A}^{X}	Función inclusión de A en X.
$f\|_{A}$	Función restricción de f en A.
$B(x, \epsilon)$	Bola de centro x y radio ϵ.
$B_{d}(x, \epsilon)$	Bola de centro x y radio ϵ con respecto a d.
$\mathcal{B}_{d}$	Base inducida por la métrica d.
$\mathcal{T}_{d}$	Topología inducida por la métrica d.
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	Conjunto de sucesiones reales.
$\mathbb{R}^{J}$	Conjunto de funciones de J en $\mathbb{R}$.
$x_n \to x$	Convergencia puntual de sucesiones.
$f_n \xrightarrow{u} f$	Convergencia uniforme de funciones.
$\{U, V\}$	Separación de espacio.
O_{x}	Componente conexa del punto x.
O_{x}^{c}	Componente conexa por caminos del punto x.

Símbolo	Significado
$f_{x,y}$	Camino del punto x al punto y.
I_x^y	Intervalo cerrado $[x, y]$ con $x < y$ en $\mathbb{R}$.
$\deg(p)$	Grado del polinomio p.
$F(A, B)$	Funciones de A en B.
$B(A, B)$	Funciones acotadas de A en B.
$C(A, B)$	Funciones continuas de A en B.

Índice general

Capítulo 1

Espacios Topológicos

1.1. Conceptos Básicos

Sea X un conjunto y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, si y sólo si, se cumplen las siguientes propiedades:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

ii) Si $U, V \in \mathcal{T}$, entonces, $U \cap V \in \mathcal{T}$.

iii) Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{T}$, entonces, $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, diremos que $\mathcal{T}$ es una topología de X.

Definición 1.1 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico.*

1. *Se dice que* U *es abierto en* $(X, \mathcal{T})$*, si y sólo si,* $U \in \mathcal{T}$.

2. *Se dice que* U *es cerrado en* $(X, \mathcal{T})$*, si y sólo si,* $U^c \in \mathcal{T}$.

Ejemplo 1.1 *Sea* X *un conjunto.*

1. *Sea* $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$*. El par* $(X, \{\emptyset, X\})$ *se llama espacio topológico trivial.*

2. *Sea* $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$*. El par* $(X, \mathcal{P}(X))$ *se llama espacio topológico discreto.*

3. *Sea* $p \in X$. *Entonces el par* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico, con*

$$\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) | U = X \quad o \quad p \notin U\}.$$

   i) $X \in \mathcal{T}$ *y* $\emptyset \in \mathcal{T}$, *ya que* $p \notin \emptyset$.

   ii) Sean $U, V \in \mathcal{T}$

   Si $U = X$. *Entonces* $U \cap V = V \in \mathcal{T}$.

   Si $U \neq X$. *Entonces* $p \notin U$, *luego* $p \notin U \cap V$, *por lo tanto* $U \cap V \in \mathcal{T}$.

   iii) Sea $U_i \in \mathcal{T}$, *para todo* $i \in I$

   Si existe $i_0 \in I$ *tal que* $U_{i_o} = X$. *Entonces* $X = U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$. *Luego* $\bigcup_{i \in I} U_i = X \in \mathcal{T}$.

   Si para todo $i \in I$, $U_i \neq X$. *Entonces para todo* $i \in I$, $p \notin U_i$, *luego* $p \notin \bigcup_{i \in I} U_i$. *Por lo tanto* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

   Caso particular, si $X = \{1, 2, 3\}$ *y* $p = 2$. *Entonces*

$$\mathcal{T} = \left\{ \ \emptyset, X, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\} \ \right\},$$

   y los cerrados son: $\emptyset$, X, $\{2\}$, $\{1, 2\}$.

4. *Si* G *es un grupo y* $\mathcal{T} = \{H | H \leqslant G\} \cup \{\emptyset\}$.

   El par $(G, \mathcal{T})$ *no es un espacio topológico, pues la unión de subgrupos no es un subgrupo.*

5. *Si* $\mathcal{T} = \{]a, b[| a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$.

   El par $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *no es un espacio topológico.*

6. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $p \notin X$. *Definamos*

$$Y = X \cup \{p\}, \qquad \mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{Y\}.$$

   Entonces $(Y, \mathcal{T}')$ *es un espacio topológico.*

   i) Por definición $Y \in \mathcal{T}'$ *y* $\emptyset \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

ii) Sean $U, V \in \mathcal{T}'$

Si $U, V \in \mathcal{T}$*, entonces* $U \cap V \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Si $U \in \mathcal{T}$ *y* $V = Y$*, entonces* $U \cap V = U \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

iii) Sea $U_i \in \mathcal{T}'$*, para todo* $i \in I$

Si para todo $i \in I$, $U_i \in \mathcal{T}$*, entonces* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Si existe $i_0 \in I$ *tal que* $U_{i_0} = Y$*, entonces* $\bigcup_{i \in I} U_i = Y \in \mathcal{T}'$.

Ejercicio 1.2

1. *Sea* $X = \mathbb{R}^n$ *y* $S \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$*, se define* $V(S)$ *como sigue*

$$V(S) := \{z \in \mathbb{R}^n | f(z) = 0, \forall f \in S\},$$

   y consideremos

$$\mathcal{T}_z = \{\mathbb{R}^n \backslash V(S) | S \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]\} \cup \{\emptyset\}.$$

   Compruebe que $(X, \mathcal{T}_z)$ *es un espacio topológico.*

   La colección $\mathcal{T}_z$ *es llamada Topología de Zariski.*

2. *Sea* X *un conjunto. Comprobar que el par* $(X, \mathcal{T}_c)$ *es un espacio topológico*

$$\mathcal{T}_c = \{U \subseteq X | U^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

   La colección $\mathcal{T}_c$ *es conocida como Topología del Complemento Finito.*

3. *Sea* $(X, \mathcal{R})$ *un conjunto totalmente ordenado. Comprobar que el par* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico*

$$\mathcal{T} = \{\cup_{i \in I}]a_i, b_i[| I \text{conjunto de índice, } a_i, b_i \in X\}.$$

   donde $]a_i, b_i[= \{x \in X \mid a_i \mathcal{R} x \wedge x \mathcal{R} b_i\}$.

   La colección $\mathcal{T}$ *es conocida como Topología del Orden.*

4. *Sean* X, Y *dos espacios topológicos disjuntos. Comprobar que el par* $(X \cup Y, \mathcal{T}_{X \sqcup Y})$ *es un espacio topológico*

$$\mathcal{T}_{X \sqcup Y} = \{U \cup V | U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

   La colección $\mathcal{T}_{X \sqcup Y}$ *es conocida como Topología Union disjunta.*

Observación Dos conjuntos se pueden modificar de modo de poder obtener una union disjunta, por ejemplo, dados X, Y, se tienen que $X \times \{0\}$, $Y \times \{1\}$, son disjuntos.

Observación 1.1 *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico. Entonces*

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X) \quad y \quad \mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)).$$

Además, como $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \subseteq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado. Luego el conjunto de todas las topologías de* X *es un conjunto parcialmente ordenado. Su primer elemento es* $\{\emptyset, X\}$ *la topología trivial y su último elemento es* $\mathcal{P}(X)$ *la topología discreta .*

Definición 1.2 *Sean* $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ *dos topologías de* X.

1. *Se dice que* $\mathcal{T}'$ *es mas fina que* $\mathcal{T}$*, si y sólo si,* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

2. *Se dice que* $\mathcal{T}$ *es menos fina que* $\mathcal{T}'$*, si y sólo si,* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

1.2. Base de una Topología

Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base de una topología de X, si y sólo si, se cumplen las siguientes propiedades:

i) Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

ii) Para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Ejemplo 1.3

1. $\mathcal{B} = \{]a, b[| a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ *es una base para una topología de* $\mathbb{R}$.

   i) Si $x \in \mathbb{R}$*, entonces* $x \in]x - 1, x + 1[\in \mathcal{B}$.

   ii) Si $x \in]a, b[\cap]c, d[$*, entonces*

   $$x \in]f, g[\subseteq]a, b[\cap]c, d[,$$

   donde $f = \max\{a, c\}$ *y* $g = \min\{b, d\}$.

2. $\mathcal{B} = \{H \subseteq G | H \leqslant G\}$ *es una base para una topología de* G.

   i) Para todo $g \in G$, *se tiene* $G \leqslant G \in \mathcal{B}$.

   ii) Si $H, K \in \mathcal{B}$ *y* $g \in H \cap K$, *se tiene* $H \cap K \leqslant G$, *luego* $H \cap K \in \mathcal{B}$.

Ejercicio 1.4 *Sea* $x \in \mathbb{R}^2$ *y* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, *se define*

$$B(x, \epsilon) := \left\{ y \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \epsilon \right\},$$

donde $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$.

Demostrar que $\mathcal{B}$ *es una base para una topología de* $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \ B(x, \epsilon) | x \in \mathbb{R}^2, \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \right\}.$$

Proposición 1.1 *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{B}$ *una base de una topología de* X, *se define*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \left\{ \ U \subseteq X | (\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B})(x \in B \subseteq U) \ \right\} \cup \left\{ \ \emptyset \ \right\}.$$

Entonces $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ *es un espacio topológico.*

Demostración

i) Tenemos $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

ii) Sea $x \in X$. Como $\mathcal{B}$ es una base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

iii) Sean $U, V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Si $x \in U$ y $x \in V$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_1 \subseteq U, \qquad x \in B_2 \subseteq V.$$

Entonces $x \in B_1 \cap B_2$. Como $\mathcal{B}$ es una base, existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que

$$x \in B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V,$$

luego $U \cap V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

iv) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ y sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Por lo tanto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}.$$

Luego $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ es un espacio topológico. $\square$

Definición 1.3 *Se dice que* $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ *es la topología generada por la base* $\mathcal{B}$.

Observación 1.2 *Si* $\mathcal{B}$ *es una base de una topología de* X *y* $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. *Entonces, para todo* $x \in U$, *existe* $B_x \in \mathcal{B}$ *tal que*

$$x \in B_x \subseteq U, \qquad U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Notese que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ *es la topología mas pequeña que contiene a* $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1.5

1. *La topología* $(G, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ *generada por la base en el Ejemplo 1.3.2 es llamada Topología de los Subgrupos, en la vecindad del neutro. En efecto* $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, *si y sólo si, para todo* $x \in U$ *existe* $H \leqslant G$ *de modo que* $x \in H \subseteq U \subseteq G$.

   En general,

   $$\mathcal{B} = \{gH \subseteq G | H \leqslant G, g \in G\}$$

   es un base, que genera la topología de grupo.

2. *Sea* X *un conjunto. Entonces* $B = \{A \in \mathcal{P}(X) \| A| = 1\}$ *es una base de una topología de* X.

   i) Para todo $x \in X$, $x \in \{x\} \in \mathcal{B}$.

   ii) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *y* $x \in B_1 \cap B_2$, *entonces*

   $$x \in B_1 = B_2 = \{x\} = B_1 \cap B_2.$$

   Notar que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}(X)$ *topología discreta en* X.

Ejercicio 1.6

1. *Para todo* $p(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$, *se define* $B_{p(x,y)}$ *como sigue:*

   $$B_{p(x,y)} := \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | p(a, b) \neq 0\right\}.$$

   Demostrar que $\mathcal{B}$ *es una base de una topología de* $\mathbb{R}^2$ *(Topología de Zariski)*

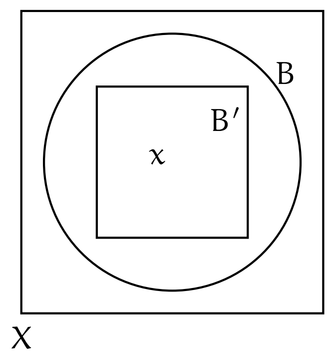
   $$\mathcal{B} = \left\{B_{p(x,y)} | p(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]\right\}.$$

2. *Demostrar que la siguiente colección es una base para una topología de* $\mathbb{R}$ *(Topología de Débil o Sorgenfrey)*
$$\mathcal{B} = \{[a, b[\subseteq \mathbb{R} | a < b\}$$

Proposición 1.2 *Sean* X *un conjunto y* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *bases de topologías de* X*. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ *es más fina que* $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

2) *Para todo* $x \in X$ *y* $B \in \mathcal{B}$ *que contiene a* x*, existe* $B' \in \mathcal{B}'$ *tal que* $x \in B' \subseteq B$.



Demostración Sabemos que:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \in \mathcal{P}(X) | (\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B})(x \in B \subseteq U)\},$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}'} = \{U \in \mathcal{P}(X) | (\forall x \in U)(\exists B' \in \mathcal{B}')(x \in B' \subseteq U)\}.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ y $x \in U$, luego existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Por 2) existe $B'_x \in \mathcal{B}'$ de modo que

$$x \in B'_x \subseteq B_x \subseteq U,$$

luego

$$U = \bigcup_{x \in U} B'_x \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}.$$

Por lo tanto $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x. Entonces $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$, luego existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que

$$x \in B' \subseteq B.$$

Esto demuestra la proposición.

$\square$

Ejemplo 1.7 *En $\mathbb{R}$ se tienen las siguientes bases:*

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\subseteq \mathbb{R} | a < b\}, \qquad \mathcal{B}' = \{[a, b[\subseteq \mathbb{R} | a < b\}.$$

Probaremos que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $x \in]a, b[$, entonces $a < x < b$. Luego tenemos:

$$x \in [x, b[\subset]a, b[, \quad [x, b[\in \mathcal{B}'.$$

Por lo tanto $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ es mas fina que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

1.2.1. Sub-Base

Definición 1.4 *Sean X un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{S}$ es una sub-base para una topología de X, si y sólo si,*

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X.$$

Ejercicio 1.8

¿Todas las bases son sub-bases?, ¿Por qué?

2. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Comprobar que:*

   a) $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ *es base y sub-base de* X.

   b) $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ *es sub-base pero no base de* X.

Proposición 1.3 *Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para una topología de X, entonces la siguiente colección, denotada por $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$, es una base para una topología sobre X*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{s} S_i | s \in \mathbb{N},\ S_i \in \mathcal{S} \right\}.$$

Demostración

i) Sea $x \in X$, como $\mathcal{S}$ es una sub-base, existe $A_0 \in \mathcal{S}$ tal que

$$x \in A_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}.$$

ii) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ y $x \in B_1 \cap B_2$. Sabemos que:

$$B_1 = \bigcap_{i=1}^{s_1} S_i, \quad B_2 = \bigcap_{j=1}^{s_2} T_j, \qquad S_i, T_j \in \mathcal{S}.$$

Entonces

$$x \in B_1 \cap B_2 = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{s_1} \cap T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_{s_2} \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}.$$

Por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ es una base de una topología de X. □

Observación 1.3 *La topología mas pequeña que contiene a $\mathcal{S}$ está dada por:*

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{s_i} S_{i_j} \right) | S_{i_j} \in \mathcal{S} \right\}.$$

Notemos además que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

1.3. Topología Producto

Sean $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ dos espacios topológicos. Se desea construir una topología en $X \times Y$. Para esto consideremos la siguiente colección:

$$\mathcal{C} := \{U \times V | U \in \mathcal{T}_1,\ V \in \mathcal{T}_2\}.$$

i) Es claro que $\emptyset, X \times Y \in \mathcal{C}$.

ii) Sean $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2, \ldots, U_n \times V_n \in \mathcal{C}$. Tenemos

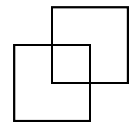
$$\begin{aligned} (a,b) \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i &\Leftrightarrow (a,b) \in U_i \times V_i, \quad \forall i, \\ &\Leftrightarrow a \in U_i, \quad \forall i, \quad \text{y} \quad b \in V_i, \quad \forall i, \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \quad \text{y} \quad b \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i, \quad \forall i, \\ &\Leftrightarrow (a,b) \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \times \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \times V_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \times \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right).$$

iii) La unión arbitraria de elementos en $\mathcal{C}$ no necesariamente está en $\mathcal{C}$. Por ejemplo, sean $X = Y = \mathbb{R}$, ambos con la topología usual, es fácil ver que la unión de rectángulos no es siempre un rectángulo

$$(]1,3[\times]1,3[) \cup (]2,4[\times]2,4[) \notin \mathcal{B}.$$



En general $\mathcal{C}$ no es una topología. La siguiente proposición demuestra que $\mathcal{C}$ es una base para una topología de $X \times Y$ la cual llamaremos topología producto.

Proposición 1.4 $\mathcal{C}$ *es una base para una topología de* $X \times Y$.

Demostración

i) Se tiene $(x, y) \in X \times Y \in \mathcal{C}$.

ii) Si $(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \cap V_2)$, entonces

$$(x, y) \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \subseteq (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \cap V_2),$$

con $(U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{C}$.

Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es una base para una topología de $X \times Y$. □

Definición 1.5 *La topología generada por la base anterior se llama Topología producto de* $X \times Y$.

Notación 1.1 *La topología producto de* $(X, \mathcal{T}_1)$ *con* $(Y, \mathcal{T}_2)$ *se denota por*

$$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2.$$

Proposición 1.5 *Sean* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *bases para las topologías* $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ *respectivamente. Entonces* $\mathcal{B}$ *es una base para la topología producto de* $X \times Y$

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 | B_1 \in \mathcal{B}_1,\ B_2 \in \mathcal{B}_2\}.$$

Demostración

i) Sea $(x, y) \in X \times Y$, luego $a \in X$, $b \in Y$, por lo tanto existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $B_2 \in \mathcal{B}_2$ de modo que:

$$x \in B_1, \quad y \in B_2, \quad (x, y) \in B_1 \times B_2.$$

ii) Sean $B_1 \times D_1, B_2 \times D_2 \in \mathcal{B}$ y $(x, y) \in (B_1 \times D_1) \cap (B_2 \times D_2)$, entonces

$$(x, y) \in (B_1 \cap B_2) \times (D_1 \cap D_2) = (B_1 \times D_1) \cap (B_2 \times D_2),$$

luego $x \in B_1 \cap B_2$ y $y \in D_1 \cap D_2$, por lo tanto existen $B \in \mathcal{B}_1$ y $D \in \mathcal{B}_2$ de modo que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ e $y \in D \subseteq D_1 \cap D_2$. Tenemos:

$$(x, y) \in B \times D \subseteq (B_1 \cap B_2) \times (D_1 \cap D_2).$$

iii) Sea $U \in \mathcal{T}_1$, $V \in \mathcal{T}_2$ y $(u, v) \in U \times V$, luego existen $B_u \in \mathcal{B}_1$ y $D_v \in \mathcal{B}_2$ tal que $u \in B_u \subseteq U$ y $v \in B_v \subseteq V$, es decir:

$$(u, v) \in B_u \times D_v \subseteq U \times V, \qquad U \times V = \bigcup_{(u,v) \in U \times V} B_u \times D_v. \tag{1.1}$$

Luego, si W es un abierto en la topología producto, entonces

$$W = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i,$$

donde $U_i \in \mathcal{T}_1$ y $V_i \in \mathcal{T}_2$.

Por (1.1) se tiene que:

$$W = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{(u,v) \in U_i \times V_i} (B_{u,i} \times D_{v_i}) \right).$$

Esto prueba que todo abierto de la topología producto pertenece a la topología generada por $\mathcal{B}$. $\square$

Ejercicio 1.9 *Sean* $(X, \mathcal{T}_1)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_2)$ *dos espacios topológicos, se define:*

$$\mathcal{S} = \{X \times V | V \in \mathcal{T}_2\} \cup \{U \times Y | U \in \mathcal{T}_1\}.$$

Demostrar que $\mathcal{S}$ *es una sub-base para la topología producto de* $X \times Y$*.*

Proposición 1.6 *Sean* $(X_1, \mathcal{T}_1)$ *e* $(X_2, \mathcal{T}_2)$ *dos espacios topológicos.*

Si F_i *es cerrado en* X_i*, entonces,* $F_1 \times F_2$*, es cerrado en* $X_1 \times X_2$*.*

Demostración

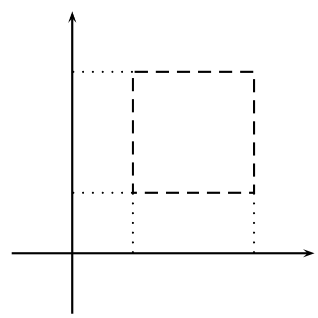
Sea F_i cerrado en X_i, luego tenemos que F_i^c es abierto en X_i

Pero $F_1^c \times X_2 \cup X_1 \times F_2^c = (F_1 \times F_2)^c$ es abierto, de lo cual $F_1 \times F_2$ es cerrado.

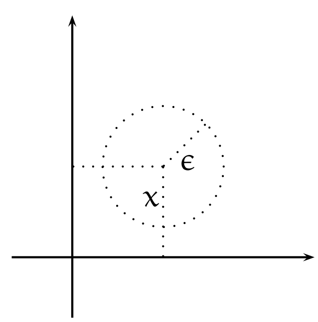
□

Observación 1.4

1. *Sea* $\mathbb{R}$ *con la topología usual, fabricamos* $\mathbb{R}^2$ *con la topología producto. Un elemento basal de* $\mathbb{R}^2$ *representa gráficamente un cuadrado*



2. *Sea* $x \in \mathbb{R}^2$ *y* $\epsilon > 0$*. Consideremos* $B(x, \epsilon)$ *como en el Ejercicio 1.4. Un elemento de esta forma representa graficamente una circunferencia de centro* x *y radio* ϵ



Ejercicio 1.10 *Demostrar que:*

1. *El conjunto de elementos* $B(x, \epsilon)$ *es una base para una topología de* $\mathbb{R}^2$*.*

2. *Las dos topologías anteriores de* $\mathbb{R}^2$ *son iguales.*

1.4. Topología Reducida

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $Y \subseteq X$. Se desea definir una topología en Y. Consideremos la siguiente colección de subconjuntos de Y

$$\mathcal{T}_Y = \left\{ U \cap Y | U \in \mathcal{T} \right\} \subseteq \mathcal{P}(Y).$$

Proposición 1.7 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *es una espacio topológico.*

Demostración

i) Es fácil ver que $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$ ya que

$$\emptyset = \emptyset \cap Y, \qquad Y = X \cap Y.$$

ii) Sean $A, B \in \mathcal{T}_Y$, luego existen $U, V \in \mathcal{T}$ de modo que

$$A = U \cap Y, \qquad B = V \cap Y.$$

Por lo cual $A \cap B \in \mathcal{T}_Y$ ya que

$$A \cap B = U \cap Y \cap V \cap Y = (U \cap V) \cap Y, \qquad U \cap V \in \mathcal{T}.$$

iii) Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos en $\mathcal{T}_Y$, entonces, existe $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos en $\mathcal{T}$ de modo que $A_i = U_i \cap Y$ para todo $i \in I$. Sabemos que $\bigcup_{i \in I} U_i$ es un abierto en X, luego

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

Por lo tanto $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio topológico. $\square$

Definición 1.6 *Si* Y *tiene la topología reducida con respecto a* X*, diremos que* Y *es un subespacio de* X*.*

Observación 1.5 *Consideremos* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Para todo* $U \in \mathcal{T}$*, se tiene* $U = U \cap X$*, es decir, la topología reducida con respecto al subespacio* X *es igual a la topología inicial. Por lo tanto no hay confusión al denotar* $\mathcal{T}$ *por* $\mathcal{T}_X$ *como la topología sobre el espacio* X*.*

Proposición 1.8 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico e* $Y \subseteq X$. *Entonces,* F *es cerrado en* Y*, si y sólo si,* $F = A \cap Y$*, donde* A *es cerrado en* X.

Demostración

$\Leftarrow$) Sea A un cerrado en X y $F = A \cap Y$, probemos que F es cerrado en Y. Sabemos que $A^c \in \mathcal{T}$, entonces $A^c \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, veamos ahora que $F^c = A^c \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, tenemos que

$$(A \cap Y) \cap (A^c \cap Y) = A \cap A^c \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset,$$

además, como $Y \subseteq Y \cup A^c, A \cup Y$, entonces

$$\begin{aligned}
(A \cap Y) \cup (A^c \cap Y) &= ((A \cap Y) \cup A^c) \cap ((A \cap Y) \cup Y),\\
&= ((A \cup A^c) \cap (Y \cup A^c)) \cap ((A \cup Y) \cap (Y \cup Y)),\\
&= X \cap ((Y \cup A^c) \cap (A \cup Y)) \cap Y,\\
&= X \cap Y,\\
&= Y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $F^c = A^c \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, así F es cerrado en Y.

$\Rightarrow$) Supongamos que F es cerrado en Y, es decir, $F^c \in \mathcal{T}_Y$, luego existe $U \in \mathcal{T}$ de manera que $F^c = U \cap Y$, consideremos $A = U^c$ un cerrado en X y probemos que $F = A \cap Y$

$\subset$) Sea $x \in F \subseteq Y$, basta probar que $x \in A$. Como $x \in F = U^c \cup Y^c$, entonces $x \in U^c = A$, por lo tanto $F \subseteq A \cap Y$.

$\supset$) Sea $x \in A \cap Y$, luego $x \notin A^c = U$, entonces $x \notin U \cap Y = F^c$, por lo tanto $x \in F$, esto prueba que $A \cap Y \subseteq F$.

Por lo tanto $F = A \cap Y$. □

1.5. Topología Cuociente o Final

Sea $f : X \to Y$ una función y $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

$$\mathcal{T}_f = \{U \subset Y \quad : \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

$(Y, (\mathcal{T}_f))$ es un espacio topológico. Llamada Topología Final o Cuociente

Ejemplo 1.11 *Sea* $\mathcal{B} = \{\{0,1\},\{1,3\},\{2,4\}\}$ *una base de la topología, del espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *y el conjunto* $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$

Si $f : X \to \mathbb{Z}_3$*, es la función modulo 3. Determine la topología cuociente de* $\mathbb{Z}_3$*.*

Ejemplo 1.12 *Sea* $I = [0,1] \times [0,1]$ *y la relación de equivalencia dada por*

$$(x,y) \sim (z,w) \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (z,w) & \\ \quad x = z & y = 0, w = 1 \\ \quad x = z & y = 1, w = 0 \end{cases}$$

Sea la proyección $p : I \to I/\sim$*. Luego la proyección define la topología cuociente en el cilindro.*

Definición 1.7 *Sea* $f : X \to Y$ *una función y* $(Y, \mathcal{T})$ *un espacio topológico.*

$$\mathcal{T}_i = \{f^{-1}(U) \quad : \quad U \in \mathcal{T}\}$$

$(X, (\mathcal{T}_i))$ *es un espacio topológico. Llamada Topología Inicial*

1.6. Conjuntos Notables

Definición 1.8 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $A \subseteq X$

1. *El interior de* A*, denotado* $\mathring{A}$*, se define como*

$$\mathring{A} := \bigcup_{U \in \mathcal{I}} U, \qquad \mathcal{I} = \left\{ U \in \mathcal{T} | U \subseteq A \right\}.$$

2. *La adherencia de* A*, denotada por* $\overline{A}$*, se define como*

$$\overline{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{J}} F, \qquad \mathcal{J} = \left\{ F \subseteq X | A \subseteq F,\, F^c \in \mathcal{T} \right\}.$$

3. *La frontera de* A*, denotada por* $\mathrm{Fr}A$*, se define como*

$$\mathrm{Fr}A = \overline{A} - \mathring{A}\ .$$

Ejemplo 1.13

1. *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$ *y* $\mathcal{T} = \left\{ \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X \right\}$, *el interior, la adherencia y la frontera del conjunto* $A = \{b, c\}$ *son:*

$$\mathring{A} = \emptyset, \qquad \overline{A} = X \cap \{a\}^c = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}, \qquad \mathrm{Fr}A = \{b, c, d\}.$$

2. *Sea* $X = [1, 2[\cup \{3\} \subseteq \mathbb{R}$ *con la topología usual reducida. Determinemos el interior, la adherencia y la frontera del conjunto* $A = \{1, 3\}$.

   Primero veamos que $\{1\}$ *no es abierto en* X. *Supongamos que* $\{1\}$ *puede escribirse como* $U \cap X$ *donde* U *es un abierto con la topología usual de* $\mathbb{R}$, *sabemos que*

$$U = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[,$$

   luego,

$$U \cap X = \left(\bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[\right) \cap X = \bigcup_{i \in I} \left( ]a_i, b_i[\cap X \right).$$

   Entonces, existe $i_o \in I$ *tal que* $1 \in]a_{i_o}, b_{i_o}[$, *además, como* $]a_{i_o}, b_{i_o}[$ *es un abierto en* $\mathbb{R}$, *existe* $0 < \epsilon < 1$ *tal que*

$$1 \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[\subseteq]a_{i_o}, b_{i_o}[,$$

   entonces $[1, 1 + \epsilon[\subseteq X \cap]a_{i_o}, b_{i_o}[$, *lo cual no puede ser, por lo tanto* $\{1\}$ *no es abierto en* X.

   Claramente $\{3\}$ *es abierto en* X, *basta considerar* $U =]3 - 1/2, 3 + 1/2[$ *abierto en* $\mathbb{R}$, *entonces*

$$\{3\} = X \cap U.$$

   Del mismo modo que $\{1\}$ *probamos que* $\{1, 3\}$ *no es abierto en* X, *luego* $\mathring{A} = \{3\}$.

   Veamos ahora que A *es cerrado en* X, *sea* $U :=]1, 2[$ *abierto en* $\mathbb{R}$, *luego* $U \cap X \in \mathcal{T}_X$, *se tiene además*

$$\{1, 3\} = (U \cap X)^c,$$

   por lo tanto A *es cerrado en* X, *así,* $A = \overline{A}$. *Por último*

$$\mathrm{Fr}A = \{1, 3\} \backslash \{3\} = \{1\}.$$

3. *Sea $\mathbb{Z}$ con la topología de los subgrupos y $A = \{1, 3\}$, entonces claramente*

$$\mathring{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{I}} U = \emptyset, \qquad \mathcal{I} = \left\{ \ U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} | U \subseteq A \ \right\}.$$

Como ejercicio verifique que

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{J}} F = \{-3, -1, 1, 3\}, \qquad \mathcal{J} = \left\{ \ F \subseteq \mathbb{Z} | A \subseteq F, \ F^c \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \ \right\}.$$

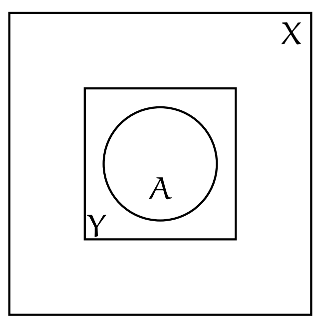
Proposición 1.9 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces*

$$A \text{ es abierto, si y sólo si, } A = \mathring{A} \ .$$

Demostración $\Rightarrow$) Sabemos que $\mathring{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{I}} U$, pero $A \in \mathcal{I}$, luego $A \subseteq \mathring{A}$, además para todo $U \in \mathcal{I}$, $U \subseteq A$ entonces $\mathring{A} \subseteq A$. Por lo tanto $A = \mathring{A}$.

$\Leftarrow$) Sabemos que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}$, luego $A = \bigcup_{U \in \mathcal{I}} U \in \mathcal{T}$. Por lo tanto A es abierto. $\square$

Proposición 1.10 *Sea Y un subespacio de $(X, \mathcal{T})$ y $A \subseteq Y$. Si $\overline{A}$ es la clausura de A en X, entonces $\overline{A} \cap Y$ es la clausura de A en Y.*



Demostración Sabemos que $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{J}} F$ es la clausura de A en X. Por demostrar que

$$\overline{A} \cap Y = \bigcap_{K \in \mathcal{J}'} K =: B, \qquad \mathcal{J}' = \left\{ \ K \subseteq Y | K^c \in \mathcal{T}_Y, \ A \subseteq K \ \right\}.$$

$\subset$) Sea $x \in \overline{A} \cap Y$, entonces $x \in F$ para todo $F \in \mathcal{J}$. Probemos que $x \in B$, sea $K \in \mathcal{J}'$, entonces existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $K^c = U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, luego

$$A \subseteq K = U^c \cup Y^c.$$

Como $A \subseteq Y$ entonces $A \subseteq U^c \in \mathcal{J}$, por lo tanto $x \in U^c \subseteq U^c \cup Y^c = K$, para todo $K \in \mathcal{J}'$, así $x \in B$, es decir $\overline{A} \cap Y \subseteq B$.

$\supset$) Sea $x \in B$, es decir, $x \in K \subseteq Y$ para todo $K \in \mathcal{J}'$. Basta probar que $x \in \overline{A}$, para ello sea $F \in \mathcal{J}$, entonces $F^c \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, luego $L = F \cap Y \in \mathcal{J}'$ entonces

$$x \in L, \qquad x \in Y,$$

por lo tanto $x \in F$ para todo $F \in \mathcal{J}$, luego $x \in \overline{A}$, así $B \subseteq \overline{A} \cap Y$.

Esto prueba que $\overline{A} \cap Y = B$. □

Teorema 1.1 *Sea* $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ *un espacio topológico y* $A \subseteq X$*, entonces:*

1. $x \in \overline{A}$*, si y sólo si,* $(\forall U \in \mathcal{T})\,(x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset)$.
2. $x \in \overline{A}$*, si y sólo si,* $(\forall B \in \mathcal{B})\,(x \in B \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset)$.

Demostración Tenemos:

1. $\Leftarrow$) Supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces existe $F \in \mathcal{J}$ tal que $x \notin F$, pero $A \subseteq F$, luego

$$U := F^c \in \mathcal{T}, \qquad A \cap F^c = \emptyset, \qquad x \in F^c.$$

$\Rightarrow$) Supongamos que existe $U \in \mathcal{T}$ de modo que $x \in U$ y $A \cap U = \emptyset$, entonces tenemos

$$A \subseteq U^c, \qquad x \notin U^c.$$

Luego $U^c \in \mathcal{J}$, entonces $x \notin \overline{A}$, ya que $A \subseteq \overline{A} \subseteq U^c$.

2. $\Leftarrow$) Supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces existe $F \in \mathcal{J}$ tal que $x \notin F$, pero $A \subseteq F$, luego

$$x \in F^c \in \mathcal{T}, \qquad A \cap F^c = \emptyset.$$

Como F^c es abierto, existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in B \subseteq F^c$ y $A \cap B = \emptyset$.

$\Rightarrow$) Supongamos que existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in B$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces tenemos

$$A \subseteq B^c, \qquad x \notin B^c.$$

Luego $B^c \in \mathcal{J}$, entonces $x \notin \overline{A}$, ya que $A \subseteq \overline{A} \subseteq B^c$.

□

Definición 1.9 *Sea* $A \subseteq X$ *y* $x \in X$. *Se dice que* x *es un punto de acumulación de* A, *si y sólo si,*

$$(\forall U \in \mathcal{T})\,(x \in U \quad \Rightarrow \quad (U \cap A) \backslash \{x\} \neq \emptyset)\,.$$

Notación 1.2 *Denotemos por* A' *el conjunto de todos los puntos de acumulación de* A.

Ejemplo 1.14 *Sea* X *con la topología discreta y* $A \subseteq X$. *Entonces* $A' = \emptyset$.

Ejemplo 1.15 *Sea* $\mathbb{R}$ *con la topología usual y* $A = \{1/n | n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$. *El único punto de acumulación de* A *es* 0.

Proposición 1.11 *Sea* X *un espacio topológico y* $A \subseteq X$, *entonces*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Demostración

$\supset$) Sabemos que $A \subseteq \overline{A}$. Veamos ahora que $A' \subset \overline{A}$,

$$\begin{aligned} x \in A' &\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{T})\,(x \in U \quad \Rightarrow \quad (U \cap A)\backslash\{x\} \neq \emptyset)\,, \\ &\Rightarrow (\forall U \in \mathcal{T})\,(x \in U \quad \Rightarrow \quad U \cap A \neq \emptyset)\,, \\ &\Rightarrow x \in \overline{A}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A \cup A' \subset \overline{A}$.

$\subset$) Sea $x \in \overline{A}$, si $x \in A$ entonces $x \in A \cup A'$.

Ahora, si $x \notin A$, es decir, $x \in \overline{A}\backslash A$, se tiene:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A}\backslash A &\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{T})\,(x \in U \quad \Rightarrow \quad U \cap A \neq \emptyset)\,, \\ &\Rightarrow (\forall U \in \mathcal{T})\,(x \in U \quad \Rightarrow \quad (U \cap A)\backslash\{x\} \neq \emptyset)\,, \\ &\Rightarrow x \in A'. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in A' \subseteq A \cup A'$. $\square$

1.7. Separación entre Puntos

En esta sección se abordara el problema de separar dos puntos por abiertos, los cual es una necesidad a tratar mas adelante la convergencia

Definición 1.10 *Sea* X *un espacio topológico y* $x \in X$. *Se dice que* U *es una vecindad de* x, *si y sólo si,* $U \in \mathcal{T}$ *y* $x \in U$.

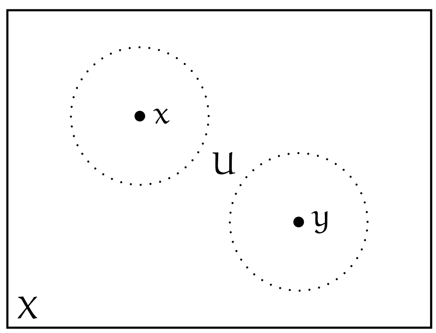
Si U es vecindad de x, es común anotar $U = U_x$.

Notación 1.3 *El conjunto de todas las vecindades de un punto* x *se anota por* $\mathcal{V}_X(x)$ *o simplemente* $\mathcal{V}(x)$, *esto es:*

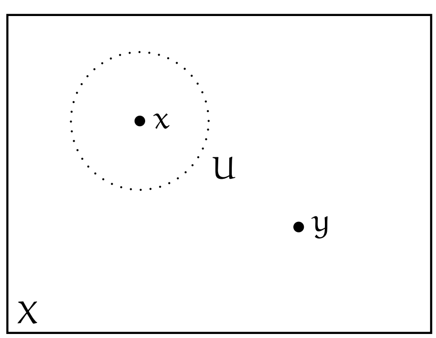
$$\mathcal{V}(x) = \Big\{ \ U \in \mathcal{T} | x \in U \ \Big\}.$$

Observación 1.6 *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es un espacio topológico, entonces* $V \in \mathcal{T}$, *si y sólo si, para todo* $x \in V$, *existe* $U_x \in \mathcal{V}(x)$ *tal que* $x \in U_x \subseteq V$.

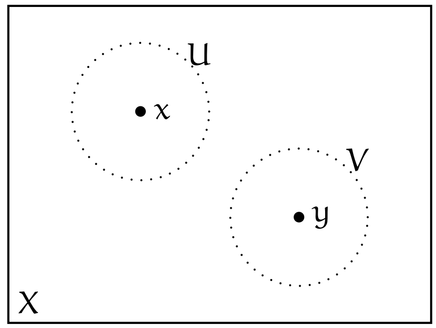
Definición 1.11 (Espacio T_0) *Sea* X *un espacio topológico, se dice que* X *es* T_0 *(o que tiene la propiedad* T_0*) o espacio de Kolmogorov , si y sólo si, para todos* $x, y \in X$ *distintos, existe una* U *vecindad tal que* $x \in U \wedge y \notin U$ *o bien* $x \notin U \wedge y \in U$.



Definición 1.12 (Espacio T_1) *Sea* X *un espacio topológico, se dice que* X *es* T_1 *(o que tiene la propiedad* T_1*) o espacio de Fréchet, si y sólo si, para todos* $x, y \in X$ *distintos, existe una vecindad de uno que no contiene al otro.*



Definición 1.13 (Espacio T_2 o Hausdorff) *Se dice que un espacio topológico X es de Hausdorff o que tiene la propiedad T_2, si y sólo si, para todos $x, y \in X$ distintos, existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*



Es decir $U \in \mathcal{V}(x)$, $V \in \mathcal{V}(y)$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 1.16

1. *Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{T} = \{\phi, X, \{b\}, \{b, c\}, \}$, entonces $(x, \mathcal{T})$ es un espacio T_0, y no T_1*
2. *Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{cf})$, topología del complemento finita, entonces un espacio T_0, T_1 y no T_2*

Ejercicio 1.17 *Determinar si los siguientes son espacios de Hausdorff*

1. *$\mathbb{Z}$ con la topología de los subgrupos.*
2. *$\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito.*
3. *$\mathbb{R}^2$ con la topología de Zariski.*

Teorema 1.2 *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces todo subconjunto finito de X, es cerrado.*

Demostración Sea F un subconjunto finito de X, esto es:

$$F = \left\{ \ x_1, x_2, \ldots, x_n \ \right\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Luego, basta probar que $\{x\}$ es cerrado para $x \in F$.

Si $X = \{x\}$, entonces $\{x\} = \emptyset^c$, luego $\{x\}$ es cerrado.

Si $X \neq \{x\}$, existe $y \in X \backslash \{x\}$. Como X es un espacio de Hausdorff, existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(y)$ tal que $V \subseteq X \backslash \{x\}$, por lo tanto $\{x\}^c$ es abierto. Luego $\{x\}$ es cerrado.

Por lo tanto F es cerrado. □

Corolario 1.1 *Si X es finito y Hausdorff, entonces X tiene la topología discreta.*

Teorema 1.3 *Sea X un espacio de Hausdorff y $A \subseteq X$. Entonces, $x \in A'$, si y sólo si, todo abierto que contiene a x tiene infinitos puntos de A.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in A'$ y $U \in \mathcal{V}(x)$. Supongamos que U contiene finitos puntos de A, es decir:

$$A \cap U = \left\{ \ x_1, x_2, \ldots, x_n \ \right\} =: B.$$

Por Teorema 1.2, $B \backslash \{x\}$ es un conjunto cerrado en X, luego $V := (B \backslash \{x\})^c$, es un abierto en X, además, $U \cap V$ es también una vecindad de x, entonces

$$(A \cap U) \cap V = \left\{ \ x_1, x_2, \ldots, x_n \ \right\} \cap V \subset \{x\}.$$

Luego $A \cap (U \cap V) \backslash \{x\} = \emptyset$. Por lo tanto $x \notin A'$, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$) Sea $U \in \mathcal{V}(x)$, entonces $A \cap U$ tiene infinitos puntos, por lo tanto

$$A \cap U \backslash \{x\} \neq \emptyset.$$

Luego $x \in A'$. □

Corolario 1.2 *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff y A un conjunto finito entonces $A' = \emptyset$.*

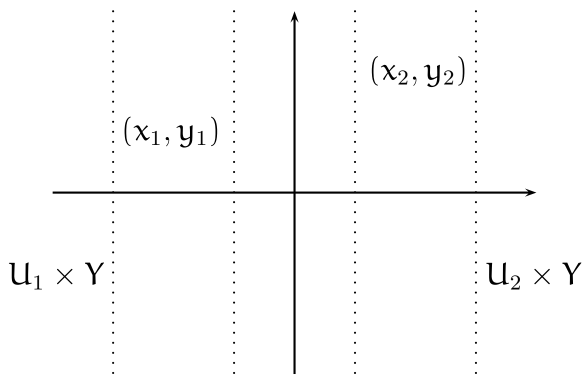
Proposición 1.12 *Sea X, Y dos espacios Hausdorff, entonces $X \times Y$ con la topología producto es un espacio de Hausdorff.*

Demostración Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ distintos, es decir $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$, distingamos estos casos:

Caso 1: Si $x_1 \neq x_2$, como X es de Hausdorff, existen $U_1 \in \mathcal{V}(x_1)$ y $U_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ disjuntos, además

$$(x_1, y_1) \in U_1 \times Y, \qquad (x_2, y_2) \in U_2 \times Y.$$

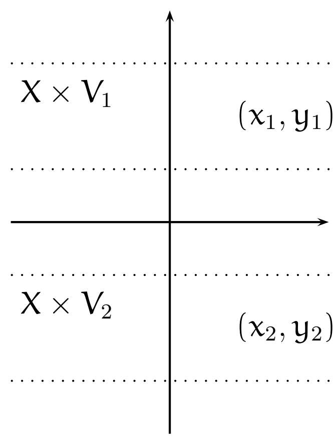
Si existiera $(x, y) \in (U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y)$ entonces $x \in U_1 \cap U_2$ lo cual no puede ser.



Caso 2: Si $y_1 \neq y_2$, como X es de Hausdorff, existen $V_1 \in \mathcal{V}(y_1)$ y $V_2 \in \mathcal{V}(y_2)$ disjuntos, además

$$(x_1, y_1) \in X \times V_2, \qquad (x_2, y_2) \in X \times V_2.$$

Si existiera $(x, y) \in (X \times V_1) \cap (X \times V_2)$ entonces $y \in V_1 \cap V_2$ lo cual no puede ser.



Por lo tanto $X \times Y$ es un espacio de Hausdorff □

Observación 1.7 $\mathcal{T}_{X\times Y}$ *tiene como base la siguiente colección:*

$$\left\{ U \times V | U \in \mathcal{T}_X, \, V \in \mathcal{T}_Y \right\}.$$

Proposición 1.13 *Sea* X *un espacio de Hausdorff y* $A \subseteq X$, *entonces* A *es un espacio de Hausdorff con la topología relativa.*

Demostración Sean $x, y \in A \subseteq X$, como X es un espacio de Hausdorff, existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(y)$ disjuntos, además,

$$x \in U \cap A, \qquad y \in V \cap A.$$

Veamos la intersección

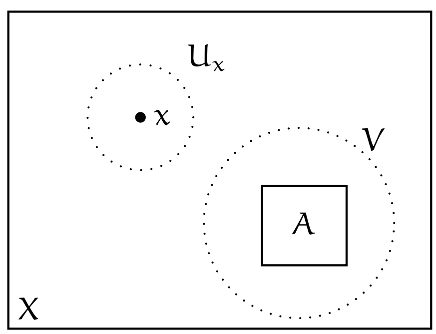
$$\begin{aligned}(U \cap A) \cap (V \cap A) &= (U \cap V) \cap A, \\ &= \emptyset \cap A, \\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio de Hausdorff. □

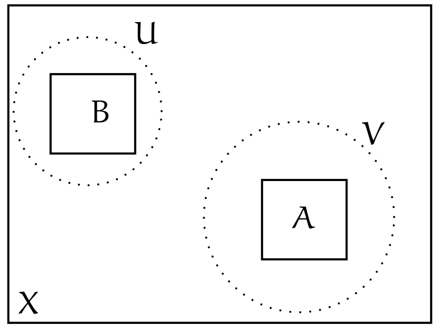
Teorema 1.4 *Un subespacio de un espacio de T_i y el producto de espacios de T_i, son también espacios de T_i, con $i = 0, 1, 2$.*

1.8. Axiomas de Separación

Definición 1.14 (Espacio T_3 o Regular) *Un espacio topológico X es regular si y sólo si es T_1 y para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subset X$ tal que x no pertenece a F. Entonces existes entornos U_x y U_F tales que su intersección es vacía. Es decir, podemos separar puntos de cerrados.*



Definición 1.15 (Espacio T_4 o Normal) *Un espacio topológico X es normal si y sólo si es T_1 y para cada par de cerrados $F_1, F_2 \subset X$ con intersección vacía existen unos entornos que los contengan U_{F_1} y U_{F_2} tal que su intersección sea vacía. Es decir, podemos separar todos los cerrados del espacio. En particular los espacios métricos son normales.*



Definición 1.16 (Espacio T_5) *Un espacio topológico X es T_5 si y sólo si es T_1 y para cada par $A, B \subset X$ tal que $\overline{A} \cap B = \phi = A \cap \overline{B}$ existen unos entornos que los contengan U_A y U_B tal que su intersección sea vacía.*

Proposición 1.14 *Si X es un espacio topológico normal T_4, entonces es regular T_3.*

Teorema 1.5 *Un subespacio de un espacio de T_3 y el producto de espacios de T_3, son también espacios de T_3.*

Demostración Sean $A \subseteq X$, $x \in A, F \subseteq A$ cerrado, luego existe G cerrado en X, tal que $F = G \cap A$ y $x \notin G$.

Como X es un espacio T_3, existen U_x y V_F abiertos y disjuntos, además,

$$x \in U, \qquad G \subseteq V_F.$$

es decir, $x \in U \cap A, \qquad F = G \cap A \subseteq V_F \cap A$. Veamos la intersección

$$\begin{aligned} (U \cap A) \cap (V \cap A) &= (U \cap V) \cap A, \\ &= \emptyset \cap A, \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio T_3.

Sean X, Y, dos espacios topológicos T_3, consideremos $(x, y) \in X \times Y, F \subseteq X \times Y$ cerrado, tal que $(x, y) \notin F$. luego existe elemento basal $U \times V$ en la topología producto tal que $(x, y) \in U \times V \subseteq F^c$, es decir

$$(x, y) \notin (U \times V)^c = U^c \times Y \cup X \times V^c$$

De lo cual, U^c es cerrado y no contiene a x, análogamente V^c es cerrado y no contiene a y.

Entonces existen U_x, V_1 abiertos disjuntos en X tales que $x \in U_x, U^c \subseteq V_1$, además existen U_y, V_2 abiertos disjuntos en Y tales que $y \in U_y, V^c \subseteq V_2$.

De lo cual obtenemos $(x, y) \in U_x \times U_y$, $F \subseteq V_1 \times Y \cup X \times V_2$, que son abiertos y disjuntos en $X \times Y$. $\square$

Proposición 1.15 *Sea X un espacio topológico tal que todo singleton es cerrado. Entonces*

1. *X es regular, si y sólo si, para todo $x \in X$ y todo $U_x \in \mathcal{V}(X)$, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ de modo que $x \in V_x \subseteq \overline{V}_x \subseteq U_x$.*

2. *X es normal, si y sólo si, para todo F cerrado de X y $U \in \mathcal{T}$ que contiene a F, existe $V \in \mathcal{T}$ de modo que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración Como $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$ y por Observación 1.14, basta probar solamente la segunda parte del lema:

$\Leftarrow$) Sean A, B cerrados disjuntos en X, como A^c es abierto y $B \subseteq A^c$, entonces existe $V_B \in \mathcal{T}$ que contiene a B tal que $B \subseteq \overline{V}_B \subseteq A^c$, entonces $A \subseteq \overline{V}_B^c$, así

$$A \subseteq \overline{V}_B^c \in \mathcal{T}, \qquad B \subseteq V_B \in \mathcal{T}, \qquad V_B \cap \overline{V}_B^c = \emptyset,$$

por lo tanto X es normal.

$\Rightarrow$) Sea F un cerrado y U un abierto tal que $F \subseteq U$, entonces $F \cap U^c = \emptyset$ y F, U^c son cerrados en X, pero X es normal, entonces, existen $V, W \in \mathcal{T}$ tal que

$$F \subseteq V, \qquad U^c \subseteq W, \qquad V \cap W = \emptyset.$$

Notemos que $F \subseteq V \subseteq W^c \subseteq U$, luego $F \subseteq V \subseteq \mathring{W} \subseteq W^c \subseteq U$

además W^c es cerrado, luego

$$F \subseteq \overline{W^c} \subseteq U,$$

esto concluye la demostración. $\square$

1.9. Ejercicios Propuestos

1. Determinar todas las topologías de un conjunto de tres elementos

2. Sea X un conjunto y $p \in X$

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathbb{P}(X) \quad : \quad p \notin A\} \cup \{X\}$$

¿$(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico?

3. Sea G un grupo

$$\mathcal{T} = \{H \in \mathbb{P}(G) \quad : \quad H \leqslant G\} \cup \{\phi\}$$

¿$(G, \mathcal{T})$ es un espacio topológico?

4. Sea X un conjunto y $A \subseteq X$. Demostrar que

$$\mathcal{T} = \{B \in \mathbb{P}(X) \quad : \quad A \subset B\} \cup \{\phi\}$$

es una topología de X

5. Sea X un conjunto infinito

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathbb{P}(X) \quad : \quad A^c \text{ es contable}\} \cup \{X\}$$

A es contable si y sólo si A es finito o existe $f : \mathbb{N}_0 \to A$ biyectiva

¿$(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico?

6. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant 0\}$. Se define la bola de centro $(x, y) \in X$ y radio $\epsilon > 0$ como

$$B((x, y), \epsilon) = \left\{(u, v) \in X | (u - x)^2 + (v - y)^2 < \epsilon^2\right\}.$$

Probar que la siguiente colección es una base para una topología sobre X

$$\mathcal{B} = \{B((x, y), \epsilon) | 0 < \epsilon \leqslant y\} \cup \{\{(x, 0)\} | x \in \mathbb{R}\}.$$

7. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant 0\}$. Probar que la siguiente colección es una base para una topología sobre X

$$\mathcal{B} = \{B((x, y), \epsilon) | 0 < \epsilon \leqslant y\} \cup \{B^x_\epsilon | x \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0\},$$

donde $\mathcal{B}^x_\epsilon = \{(u, v) | (u - x)^2 + v^2 < \epsilon^2,\ v > 0\} \cup \{(x, 0)\}$.

8. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant 0\}$. Probar que la siguiente colección es una base para una topología sobre X

$$\mathcal{B} = \{B((x, y), \epsilon) | 0 < \epsilon \leqslant y\} \cup \left\{ \dot{B}((x, y), y) | x, y \in \mathbb{R},\ y > 0 \right\},$$

donde $\dot{B}((x, y), y) = B((x, y), y) \cup \{(x, 0)\}$.

9. Determinar si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico en los siguientes caso.

   a) $X = \mathbb{N}, \mathcal{T} = \{X, \phi\} \cup \{\mathbb{J}_n = \{1, 2, ..., n\} \quad : \quad n \in \mathbb{N}\}$

   b) X un conjunto $S_1 \subseteq S_2 \subseteq X, \mathcal{T} = \{\phi, S_1, S_2, X\}$.

   c) $X = F([0, 1], \mathbb{R}), \mathcal{T} = \{A \in \mathbb{P}(X) \quad : \quad \text{existe } f \text{ continua tal que } f \in A\} \cup \{\phi\}$

10. Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{H_k \quad : \quad k \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}^2, \phi\} \\ \text{con } H_k &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x > k \wedge y > k\} \end{aligned}$$

Demostrar que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

11. Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{H_{r,s} \quad : \quad r, s \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}^2, \phi\} \\ \text{con } H_{r,s} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x > r \wedge y < s\} \end{aligned}$$

Determine si $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

12. Sea $f : X \to Y$ una función y $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico

$$f(\mathcal{T}) = \{f(U) \quad : \quad U \in \mathcal{T}\} \cup \{Y\}$$

¿$(Y, f(\mathcal{T}))$ es un espacio topológico?

13. Sea $f : X \to Y$ una función y $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{T}) &= \{V \subseteq X \quad : \quad (\exists U \in \mathcal{T})(V = f^{-1}(U)\}; \\ f^{-1}(U) &= \{x \in X \quad : \quad f(x) \in U\} \end{aligned}$$

Determine si $(X, f^{-1}(\mathcal{T}))$ es un espacio topológico

14. Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{A_k \quad : \quad k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathbb{R}[x], \phi\} \\ \text{con } A_k &= \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \quad : \quad \deg(p(x)) > k\} \end{aligned}$$

    Determinar si $(\mathbb{R}[x], \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

15. Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{A_{r,s} \quad : \quad r, s \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathbb{R}[x]\} \\ \text{con } A_{r,s} &= \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \quad : \quad r < \deg(p(x)) < s\} \end{aligned}$$

    a) Determinar si $\mathcal{B}$ es un base de una topología de $\mathbb{R}[x]$.

    b) En caso afirmativo, Dado $A = \{x, x^3\}$ y $B = \{1, x\}$. Determinar $\mathring{A}, \bar{A}, \mathring{B}, \bar{B}$.

16. Si x es un número real y n un número natural, se define

$$B_n^x = \{y \in \mathbb{R} | |x - y| < 1/n \quad \text{ó} \quad y > n\}.$$

    Demostrar que

    a) $\mathcal{B} = \{B_n^x \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ es base de una topología de $\mathbb{R}$.

    b) Comparar ésta con la topología usual.

    c) Hallar la adherencia de los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

17. Sea p un número primo impar, $\mathbb{Z}_p^\times$ con la topología dada por los subgrupos. Determinar $\mathring{A}, \bar{A}$ par los siguientes conjunto

    a) $A = \{1, -1\}$

    b) $A = \{1, 2\}$

18. En $\mathbb{R}$, con la topología formada por los conjunto de complemento finito. Determinar $\mathring{A}, \bar{A}$ par los siguientes conjunto

    a) $A = [0, 1[$

b) $A = J_n = \{s \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad s \leqslant n\}$.

19. En $\mathbb{R}$, con la topología débil o Sorgenfrey.(generada por los intervalos del tipo $[a, b[$) Determinar $\mathring{A}, \bar{A}$ para los siguientes conjuntos

    a) $A =]0, 1]$

    b) $A = J_{100} = \{s \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad s \leqslant 100\}$.

20. Sea Y un subespacio de X, entonces demostrar que:

    un conjunto A es cerrado en Y si y sólo si $A = A_1 \cap Y$, con A_1 es cerrado en X

21. Sea Y un subespacio de X. Si A es cerrado en Y y Y es cerrado en X entonces A es cerrado en X.

22. Sean A, B, A_i, subconjunto del espacio topológico X, para todo $i \in I$. Demostrar que

    a) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$

    b) $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right)}$. Dar un ejemplo donde la igual no es válida.

23. Sean A, B, A_i, subconjunto del espacio topológico X, para todo $i \in I$. Demostrar que

    a) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

    b) $\overset{\circ}{\widehat{\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)}} \subset \bigcap\limits_{i \in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}}$. Dar un ejemplo donde la igual no es válida.

24. Si la frontera de A

$$\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

    Demostrar que

    a) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$.

    b) Si $\quad \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \quad$ entonces $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$.

25. Sean $(X, \mathcal{T}), (Y, \sigma)$ dos espacios topológicos y $A \subseteq X, B \subseteq Y$. En $(X \times Y, \mathcal{T} \times \sigma)$ demostrar que

a) $\overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$

b) $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$

c) $\mathsf{Fr}(A \times B) = (\overline{A} \times \mathsf{Fr}(B)) \cap (\mathsf{Fr}(A) \times \overline{B})$

26. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, se define los siguientes conjuntos

$$A = [-1,1] \times [-1,1] - \{(x,x) | \quad x \in [-1,1]\} \qquad B = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) | \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Determinar el interior, la clausura, y la frontera de $A \cup B$

27. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Determine si las siguientes son verdadera o falsas justifique

a) $(\forall A, B \subset X)(\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})$

b) $(\forall A \subset X)(\mathrm{Fr}(\mathrm{A}) = \emptyset)$

c) Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ entonces $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{\mathcal{U}\}$ es una base para $\mathcal{T}$

d) Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua, entonces $f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$

28. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff y $A \subset X$ no vacío tal que $x \in A$.

Demostrar que

$$A' = (A - \{x\})'$$

29. Sea $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, con la topología producto. Determinar el interior y la clausura de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$.

30. Sea $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, con la topología producto. Determinar el interior y la clausura de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$.

31. Sea $(X, \mathcal{T}_f)$ con la topología de complemento finito. Compare el espacio topológico $(X \times X, \mathcal{T}_f \times \mathcal{T}_f)$ con $(X \times X, \mathcal{T}'_f)$

32. Sea $p : X \to Y$ una función epiyectiva y $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

$$\mathcal{T}' = \{U \in \mathbb{P}(Y) : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

Demostrar que $\mathcal{T}'$es una topología en Y, llamada topología cuociente.

33. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y en $X \times X$ la topología producto además proyección

$$p_1 : X \times X \to X,$$

por ejercicio anterior tenemos en X la topología cuociente. Compare la topología inicial con la cuociente de X.

34. Sea $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ una proyección canónica y $\mathbb{Z}$ un subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual. Determinar la topología cuociente de $\mathbb{Z}_n$

35. Sea $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ una proyección canónica y $\mathbb{Z}$ un subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología complemento finito. Determinar la topología cuociente de $\mathbb{Z}_n$

36. Dado $I = [0, 1]$ con la topología reducida de la usual de $\mathbb{R}$ y la relación de equivalencia en I tal que $\bar{x} = \begin{cases} \{x\} & x \notin \{0,1\} \\ \{0,1\} & x \in \{0,1\} \end{cases}$ y $\tilde{I}$ el conjunto cuociente. Sea $p : I \to \tilde{I}$ la proyección canónica. Determinar la topología cuociente de$\tilde{I}$.

37. Dado $I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología reducida de la usual de $\mathbb{R}^2$ y la relación de equivalencia en $I \times I$ tal que

$$\overline{(x, y)} = \begin{cases} \{(x, y)\} & x \notin \{0, 1\} \\ \{(0, y), (1, 1 - y)\} & x = 0 \\ \{(0, 1 - y), (1, y)\} & x = 1 \end{cases}$$

y $\widetilde{I \times I}$ el conjunto cuociente. Sea $p : I \times I \to \widetilde{I \times I}$ la proyección canónica. Determinar la topología cuociente de $\widetilde{I \times I}$.

Capítulo 2

Funciones Continuas

2.1. Definiciones y Propiedades

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos y una función $f : X \to Y$. Se dice que f es continua, si y sólo si, para todo $V \in \mathcal{T}_Y$, se tiene $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$, donde

$$f^{-1}(V) = \left\{ x \in X \mid f(x) \in V \right\}.$$

Ejemplo 2.1 *Sea $\mathcal{T}$ la topología usual y $\mathcal{T}_d$ la topología débil en $\mathbb{R}$. Entonces la función identidad definida como sigue, no es continua*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}: & (\mathbb{R}, \mathcal{T}) & \to & (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

En efecto, si consideramos $[1, 2[\in \mathcal{T}_d$, tenemos $\mathrm{id}^{-1}([1, 2[) = [1, 2[\notin \mathcal{T}$.

Por lo tanto id no es continua.

Ejemplo 2.2 *Sean X_1, X_2 espacios topológicos y $X_1 \times X_2$ con la topología producto entonces la función proyección es continua*

$$\begin{array}{rccc} p_i: & X_1 \times X_2 & \to & X_i \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_i \end{array}$$

En efecto, sean $U_i \in \mathcal{T}_{X_i}$, entonces tenemos

$$p_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2 \text{ y } p_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2.$$

Por lo tanto p_i es continua.

Lema 2.1 *Sean* $f : X \to Y$ *y* $\{U_i\}_{i\in I}$ *una familia de subconjuntos de* Y. *Entonces*

$$f^{-1}\left(\{U_i\}_{i\in I}\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i). \tag{2.1}$$

Demostración Consideremos x como sigue:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\{U_i\}_{i\in I}\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \textstyle\bigcup_{i\in I} U_i, \\ &\Leftrightarrow f(x) \in U_{i_0},\ (i_0 \in I), \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(U_{i_0}\right),\ (i_0 \in I), \\ &\Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(U_i\right). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1 *Sea* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *una función y* $\mathcal{B}$ *una base de* $\mathcal{T}_Y$. *Entonces,* f *es continua, si y sólo si, para todo* $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $B \in \mathcal{B}$, como $B \in \mathcal{T}_Y$ y f es continua, entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.

$\Leftarrow$) Sea $V \in \mathcal{T}_Y$, entonces

$$V = \bigcup_{x\in V} B_x, \qquad (B_x \in \mathcal{B}).$$

Por Lema 2.1, se tiene $f^{-1}(V) = \bigcup_{x\in V} f^{-1}(B_x) \in \mathcal{T}_X$, ya que $f^{-1}(B_x) \in \mathcal{T}_X$. Por lo tanto f es continua. □

Ejercicio 2.3 *Demostrar la proposición anterior para una sub-base de* $\mathcal{T}_Y$.

Ejemplo 2.4 *Sean* $\mathcal{T}_d$ *la topología débil y* $\mathcal{T}$ *la topología usual en* $\mathbb{R}$. *Entonces la función identidad definida como sigue, es continua*

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : \ (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) &\to (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

En efecto $\mathrm{id}^{-1}(]a, b[) =]a, b[= \bigcup_{c\in]a,b[} [c, b[$. *Por lo tanto* id *es continua.*

Lema 2.2 *Sean* A *un conjunto y* f *una función, entonces:*

$$\left(f^{-1}\left(A^c\right)\right)^c = f^{-1}(A). \tag{2.2}$$

Demostración Consideremos x como sigue:

$$\begin{aligned} x \in \left(f^{-1}(A^c)\right)^c &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A^c), \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A^c, \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A, \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3 *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes*

1) f *es continua.*

2) Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

3) Si $B \subseteq Y$ *es cerrado, entonces* $f^{-1}(B)$ *es cerrado en* X.

Demostración

1) $\Rightarrow$ 2). Sea $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$, probaremos que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Sea $U \in \mathcal{V}(f(x))$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X, además $x \in f^{-1}(U)$. Luego

$$x \in \overline{A} \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Como $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$, existe $y \in f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$, entonces $f(y) \in U \cap f(A)$.

Por lo tanto $f(x) \in \overline{f(A)}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Sea $B \subseteq Y$ cerrado, anotemos $A = f^{-1}(B)$, entonces $f(A) \subseteq B$, luego

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{B} = B.$$

Por hipótesis, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq f^{-1}(B) = A \subseteq \overline{A}$. Por lo tanto $f^{-1}(B)$ es cerrado.

3) $\Rightarrow$ 1). Sea $U \in \mathcal{T}_Y$, luego U^c es cerrado. Por hipótesis $f^{-1}(U^c)$ es cerrado. Por Lema 2.2 se tiene

$$\left(f^{-1}(U^c)\right)^c = f^{-1}(U),$$

es abierto. Por lo tanto f es continua. □

Teorema 2.4 *Sean* X, Y, Z *espacios topológicos, entonces:*

1) *Sea* $y_0 \in Y$*. La función constante* $c_{y_0} : X \to Y$ *tal que para todo* $x \in X$*,* $c_{y_0}(x) := y_0$*, es continua.*

2) *Sea* $A \subseteq X$*. La función inclusión* $\iota_A^X : A \hookrightarrow X$ *tal que para todo* $a \in A$*,* $\iota_A^X(a) := a$*, es continua.*

3) *Sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *funciones continuas. La función compuesta* $g \circ f : X \to Z$ *tal que para todo* $x \in X$*,* $(g \circ f)(x) := g(f(x))$*, es continua.*

4) *Sean* $A \subseteq X$ *y* $f : X \to Y$ *continua. La función restricción* $f|_A : A \to Y$ *tal que para todo* $a \in A$*,* $f|_A(a) := f(a)$*, es continua.*

5) *Sean* $B \subseteq Y$ *y* $f : X \to Y$ *continua de modo que* $\mathrm{Rec}(f) \subseteq B$*. La función* $g : X \to B$ *tal que para todo* $x \in X$*,* $g(x) := f(x)$*, es continua.*

6) *Sean* $f : X \to Y$ *continua e* $Y \subseteq Z$*. La función* $g : X \to Z$ *tal que para todo* $x \in X$*,* $g(x) := f(x)$*, es continua.*

Demostración

1) Sea $U \in \mathcal{T}_Y$. Si $y_0 \in U$, entonces $f^{-1}(U) = X$, ahora si $y_0 \notin U$, tenemos $f^{-1}(U) = \emptyset$. Como $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$, entonces c_{y_0} es continua.

2) Sea $U \in \mathcal{T}_X$, entonces:

$$f^{-1}(U) = \left\{ \; a \in A | \iota_A^X(a) \in U \; \right\} = A \cap U \in \mathcal{T}_A.$$

Por lo tanto ι_A^X es continua.

3) Sea $U \in \mathcal{T}_Z$, como g es continua, entonces $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, luego

$$f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(U) = (g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X,$$

ya que f es continua. Por lo tanto $g \circ f$ es continua.

4) Sea $U \in \mathcal{T}_Y$, entonces

$$f|_A^{-1}(U) = \left\{ a \in A | f|_A(a) = f(a) \in U \right\} = f^{-1}(U) \cap A \in \mathcal{T}_A.$$

Por lo tanto $f|_A$ es continua.

5) Sea $U \in \mathcal{T}_Y$, entonces

$$\begin{aligned} g^{-1}(U \cap B) &= \left\{ x \in X | g(x) \in U \cap B \right\}, \\ &= \left\{ x \in X | f(x) \in U \cap B \right\}, \\ &= \left\{ x \in X | f(x) \in U \right\}, \\ &= f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X, \end{aligned}$$

ya que f es continua. Por lo tanto g es continua.

6) Sea $U \in \mathcal{T}_Z$, entonces

$$g^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap Y) \in \mathcal{T}_X,$$

ya que $U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. Por lo tanto g es continua.

$\square$

Proposición 2.2 *Sean* X, Y *espacios topológicos y* $\{U_i\}_{i \in I}$ *una familia de conjuntos abiertos en* X *de modo que*

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Entonces, $f : X \to Y$ *es continua, si y sólo si,* $f|_{U_i}$ *es continua para todo* $i \in I$.

Demostración

$\Rightarrow$) Por Teorema 2.4.4, $f|_{U_i}$ es continua para todo $i \in I$.

$\Leftarrow$) Sea $U \in \mathcal{T}_Y$, entonces

$$f|_{U_i}^{-1} = \left\{ x \in U_i | f(x) \in U \right\} = f^{-1}(U) \cap U_i \in \mathcal{T}_{U_i},$$

ya que $f|_{U_i}$ es continua para todo $i \in I$. Por lo tanto $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

$\square$

Proposición 2.3 (Lema de Unión) *Sea* $X = A \cup B$ *espacio topológico, con* A, B *cerrados en* X.

Si $f : A \to Y, \quad g : B \to Y$ *son funciones continuas tales que, para todo* $x \in A \cap B$, *se tiene que* $f(x) = g(x)$, *entonces*

$$\begin{aligned} h : X &\to Y \\ x &\rightsquigarrow h(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si} \quad x \in A \\ g(x) & \textit{si} \quad x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

es un función continua.

Demostración

Sea C cerrado en Y, luego tenemos que

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$$

Debido que f, g son continua $f^{-1}(C),\ g^{-1}(C)$ son cerrado en la topología relativa.

Luego existen C_1, C_2 cerrado en X tales que

$$f^{-1}(C) = C_1 \cap A \qquad g^{-1}(C) = C_2 \cap B$$

Cerrados en X, luego h es continua.

□

Proposición 2.4 *Sean* $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ *espacios topológicos. Entonces, la función* $f : X \to Y$ *es continua, si y sólo si, para todo* $x \in X$ *y todo* $U \in \mathcal{V}(f(x))$ *existe* $V \in \mathcal{V}(x)$ *de modo que* $f(V) \subseteq U$.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que f es continua. Sean $x \in X$ y $U \in \mathcal{V}(f(x))$, tenemos

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X, \qquad x \in f^{-1}(U), \qquad f\left(f^{-1}(U)\right) \subseteq U.$$

Luego, basta considerar $V = f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$.

$\Leftarrow$) Sean $U \in \mathcal{T}_Y$ y $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{P}(X)$, entonces $U \in \mathcal{V}(f(x))$, por hipótesis, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f(V_x) \subseteq U$, más aún

$$x \in V_x \subseteq f^{-1}(U).$$

Luego,

$$f^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x \subseteq f^{-1}(U),$$

esto es $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x \in \mathcal{T}_X$. Por lo tanto f es continua. $\square$

Definición 2.1 (Continuidad en un Punto) *Sea $f : X \to Y$ y $x_0 \in X$. Se dice que f es continua en x_0, si y sólo si, para todo $U \in \mathcal{V}(f(x_0))$ existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ de modo que $f(V) \subseteq U$.*

Proposición 2.5 *Sean X, X_1, X_2 espacios topológicos y $f_i : X \to X_i$ funciones entonces.*

La función $T : (X, \mathcal{T}_X) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_{X_1} \times \mathcal{T}_{X_2})$ tal que para todo $x \in X$, $T(x) := (f_1(x), f_2(x))$, es continua si y solo si f_i es continua para todo $i = 1, 2$.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea U un elemento basal de $\mathcal{T}_{X_1} \times \mathcal{T}_{X_2}$, es decir $U = U_1 \times U_2$, donde $U_i \in \mathcal{T}_{X_i}$ para $i = 1, 2$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x \in T^{-1}(U) &\Leftrightarrow x \in T^{-1}(U_1 \times U_2), \\ &\Leftrightarrow (f_1(x), f_2(x)) \in U_1 \times U_2, \\ &\Leftrightarrow f_1(x) \in U_1, f_2(x) \in U_2, \\ &\Leftrightarrow x \in f_1^{-1}(U_1), x \in f_2^{-1}(U_2), \\ &\Leftrightarrow x \in f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2). \end{aligned}$$

Como f_i es continua para todo $i = 1, 2$ y T tiene como dominio a X, entonces

$$T^{-1}(U) = \left(f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)\right) \in \mathcal{T}_X.$$

Por lo tanto T es continua.

$\Leftarrow$) Como T es continua y la proyección es continua p_i ejemplo 2.2, entonces teorema 2.4.3 se tiene que

$$p_i \circ T = f_i$$

$\square$

Proposición 2.6 *Sean* X, X_1, X_2, Z *espacios topológicos,* $f_i : X \to X_i$ *continua para* $i = 1, 2$ *y* $H : X_1 \times X_2 \to Z$ *continua. Entonces la función* $F : X \to Z$ *tal que* $F(x) := H(f_1(x), f_2(x))$*, es continua.*

Demostración Por Proposición 2.5, sabemos que $T : X \to X_1 \times X_2$ tal que $T(x) = (f_1(x), f_2(x))$ es continua.

Basta notar que $F = H \circ T$, luego por Teorema 2.4.3, F es continua. □

El siguiente corolario es consecuencia directa de las Proposiciones 2.5 y 2.6.

Ejercicio 2.5 *Sean* X *un espacio topológico y* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *continuas.*
Pruebe que:

1) La función $f + g : X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

2) La función $f - g : X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

3) La función $fg : X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

4) La función $f/g : A \to \mathbb{R}$ *es continua, donde* $A := \left\{ x \in X | g(x) \neq 0 \right\}$.

4) La función $\sqrt{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es continua.*

2.2. Homeomorfismos

Definición 2.2 *Sean* X, Y *dos espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función. Diremos que* f *es un homeomorfismo , si y sólo si,* f *es biyectiva y* f, f^{-1} *son continuas.*

Observación 2.1 *Sea* $f : X \to Y$ *una función biyectiva. Entonces,* f^{-1} *es continua, si y sólo si, para todo* $U \in \mathcal{T}_X$*,* $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

Definición 2.3 *Sea* $f : X \to Y$ *una función. Se dice que* f *es abierta (cerrada) o, si y sólo si, envía abierto (cerrado) en abierto (cerrado), es decir, para todo* $U \in \mathcal{T}_X$*,* $f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

Ejemplo 2.6 *Sea* $D_{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < 1 \right\}$*, y la función*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \to & D_{n-1} \\ & x & \rightsquigarrow & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array}$$

es un homeomorfismo.

i) *Notemos que* $\left\|\frac{x}{1+\|x\|}\right\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1.$

ii) *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *de modo que:*

$$\frac{x}{1+\|x\|} = \frac{y}{1+\|y\|}.$$

Primero notemos los siguiente:

$$\frac{x}{1+\|x\|} = \frac{y}{1+\|y\|} \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{x}{1+\|x\|}\right\| = \left\|\frac{y}{1+\|y\|}\right\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| = \|y\|.$$

Entonces

$$\frac{x}{1+\|x\|} = \frac{y}{1+\|y\|} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1+\|x\|} = \frac{y}{1+\|x\|} \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Por lo tanto f *es inyectiva.*

iii) *Sea* $y \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\|y\| < 1$, *determinemos* $x \in \mathbb{R}^n$ *de modo que* $T(x) = y$. *Notemos primero que, si* $f(x) = y$, *entonces:*

$$\begin{aligned} \frac{\|x\|}{1+\|x\|} &= \|y\|, \\ \|x\| &= \|y\| + \|x\| \cdot \|y\|, \\ \|x\| - \|x\| \cdot \|y\| &= \|y\|, \\ \|x\|(1 - \|y\|) &= \|y\|, \\ \|x\| &= \frac{\|y\|}{1 - \|y\|}. \end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+\|x\|} &= y, \\ x &= y\left(1 + \frac{\|y\|}{1-\|y\|}\right), \\ x &= \frac{y}{1-\|y\|}. \end{aligned}$$

Por último,

$$y = \frac{\frac{y}{1-\|y\|}}{\frac{1}{1-\|y\|}} = \frac{\frac{y}{1-\|y\|}}{1 + \frac{\|y\|}{1-\|y\|}} = \frac{\frac{y}{1-\|y\|}}{1 + \left\|\frac{y}{1-\|y\|}\right\|} = T(x), \qquad x := \frac{y}{1-\|y\|}.$$

No es difícil probar que T^{-1} *es definida como sigue:*

$$T^{-1} : \left\{ \, x \in \mathbb{R}^n \| \|x\| < 1 \, \right\} \to \mathbb{R}^n, \qquad T^{-1}(z) := \frac{z}{(1 - \|z\|},$$

luego T *es biyectiva.*

La continuidad de T *y* T^{-1} *se obtiene de Proposición 2.6 y Ejercicio 2.5. Por lo tanto* T *es un homeomorfismo.*

Ejemplo 2.7 *Reinteprete el cambio de coordenada en el lenguaje de homeomorfismo*

1. $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \rightsquigarrow & (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, z) & \rightsquigarrow & (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), z) \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta) & \rightsquigarrow & (r\cos(\theta)\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha)) \end{array}$$

4. *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tales que* $ac - db \neq 0$
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (ax + by, cx + dy)) \end{array}$$

5. $$\begin{array}{rccc} f: & [0, 1[& \to & \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \\ & \theta & \rightsquigarrow & (\cos(2\pi\theta), \mathrm{sen}(2\pi\theta)) \end{array}$$

6. $$\begin{array}{rccc} f: &]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \rightsquigarrow & \tan(\frac{\pi\theta}{2}) \end{array}$$

Ejemplo 2.8 *Dado el conjunto* $\mathbb{S}^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \sum_i x_i^2 + t^2 = 1\}$*, entonces la función La función*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{S}^n - \{e_{n+1}\} \\ & x & \rightsquigarrow & \left(\frac{2}{1+\|x\|^2}x, \frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2}\right) \end{array}$$

es un homeomorfismo. Llamada función estereográfica

La inversa es

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & S^n - \{e_{n+1}\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x, t) & \rightsquigarrow & \frac{1}{1-t}x \end{array}$$

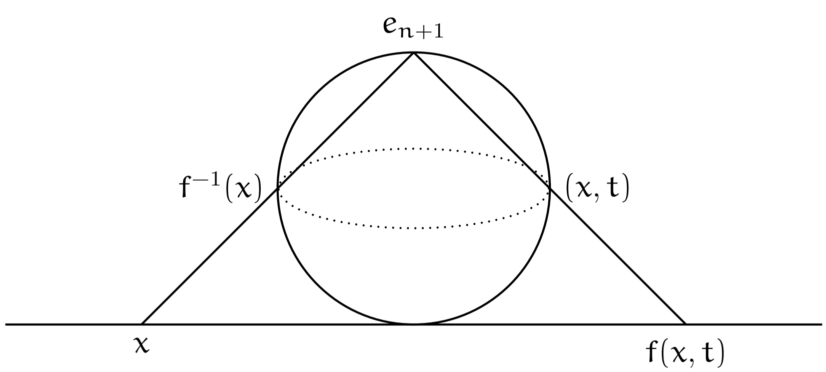
Observación Al trasladarla al conjunto $X = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \sum_i x_i^2 + (t-1)^2 = 1\}$

Las ecuaciones se escriben del siguiente modo

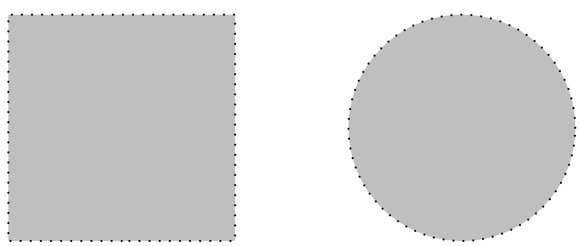
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & X - \{2e_{n+1}\} \\ & x & \rightsquigarrow & \left(\frac{4}{4+\|x\|^2}x, \frac{2\|x\|^2}{4+\|x\|^2}\right) \end{array}$$

La inversa es

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & X - \{e_{n+1}\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,t) & \rightsquigarrow & \frac{2}{2-t}x \end{array}$$



Ejemplo 2.9 *Determine si* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| < 1\}$ *y* $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ *son homeomorfos con las topología reducidas*



Ejemplo 2.10 *Probar los siguientes homeomorfismos*

1. $X \times Y \approx Y \times X$.

2. $(X \times Y) \times Z \approx X \times (Y \times Z)$.

3. $X \times \{pt\} \approx X \approx \{pt\} \times X$.

2.3. Ejercicios Propuestos

1. Sea el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, donde

$$X = \{a, b, c, d\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X\}.$$

   Determine en que punto son continua las siguientes funciones

   a) $f(a) = b, f(b) = d, f(c) = c, f(d) = c$

   b) $f(a) = a, f(b) = d, f(c) = b, f(d) = c$

   c) $f(a) = b, f(b) = d, f(c) = b, f(d) = c$

2. Sea $f : (X; \mathcal{T}) \to (Y, \sigma)$ una aplicación abierta. Dado $S \subseteq Y$ y A cerrado tal que $f^{-1}(S) \subseteq A$. Demostrar que existe un cerrado B, tal que $S \subseteq B$ y $f^{-1}(B) \subseteq A$

3. Sea $f : (X; \mathcal{T}) \to (Y, \sigma)$ una aplicación cerrado. Dado $S \subseteq Y$ y A abierto tal que $f^{-1}(S) \subseteq A$. Demostrar que existe un abierto B, tal que $S \subseteq B$ y $f^{-1}(B) \subseteq A$

4. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función

   Probar que f es continua si y sólo si para todo $A \subset X$ se tiene que $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}}$

5. Sea $X = A \cup B$ donde A y B son cerrado en X. Además $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continua tales que $(\forall x \in (A \cap B))(f(x) = g(x))$ entonces

$$\begin{aligned} h: \ X &\to \quad Y \\ x &\to \ h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

   es continua

6. Sean $(X_i, \mathcal{T}_i), (Y_i, \sigma_i)$ cuatro espacios topológicos y $f_i : X_i \to Y_i$ dos funciones. Se define la función producto

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2 : \ X_1 \times X_2 &\to \quad Y_1 \times Y_2 \\ (x_1, x_2) &\to (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

   Demostrar en la topología producto que

a) $f_1 \times f_2$ es continua si sólo si f_1 y f_2 son continuas

b) $f_1 \times f_2$ es un homeomorfismo si sólo si f_1 y f_2 son homeomorfismo

7. Sea $A = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Demostrar que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que sólo es un homeomorfismo con la del orden.

8. Demostrar que cualquier intervalo (a, b) es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$, a la recta $\mathbb{R}$ y al rayo $(0, +\infty)$.

9. Dado los espacios topológicos $A =]-1, 1[$ y

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x+1)^2 + y^2 = 1\},$$

ambos con la topología usual de subespacio.

Determinar si los espacios son homeomorfos

10. Sea $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ una función continua y $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y$, con la topología de inducida por la topología producto de $X \times Y$.

Demostrar que X es homeomorfo a Γ_f

Capítulo 3

Espacios Métricos

3.1. Definiciones y Ejemplos

Definición 3.1 *Sea* X *un conjunto y* $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$. *Se dice que* (X, d) *es un espacio métrico, si y sólo si,*

i) *Para todo* $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) *Para todo* $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

iii) *Para todo* $x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$.

Si (X, d) es un espacio métrico , se dice que d es una métrica sobre X.

Ejemplo 3.1

1. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *tales que* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
   Las siguientes son métricas sobre $\mathbb{R}^n$*:*

   a) $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ *(métrica usual).*

   b) $d(x, y) = \max\left\{ |x_i - y_i| \, | 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$.

   c) $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

2. *Sea* X *un conjunto no vacío, la siguiente es una métrica sobre* X*:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 | x = y \\ 1 | x \neq y \end{cases}$$

3. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Entonces* d' *es también una métrica sobre* X

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

4. *Sea* $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{n}$ *una familia finita de espacios métricos. Entonces* d *es una métrica sobre* Y*, donde*

$$Y = \prod_{i=1}^{n} X_i, \qquad d(x,y) = \max\{d_i(x_i, y_i)\}, \qquad {}_{\substack{x=(x_1,\ldots,x_n) \\ y=(y_1,\ldots,y_n)}}.$$

5. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Entonces* d' *es un espacio métrico sobre* X

$$d'(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

Definición 3.2 *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $\epsilon > 0$*. Se define la bola de centro* x *y radio* ϵ*, denotada* $B(x,\epsilon)$*, como sigue:*

$$B(x,\epsilon) := \left\{ \ y \in X | d(x,y) < \epsilon \ \right\}.$$

Cuando sea necesario anotaremos por $B_d(x,\epsilon)$ la bola de centro x y radio ϵ con respecto a la métrica d.

Teorema 3.1 *Todo espacio métrico es topológico.*

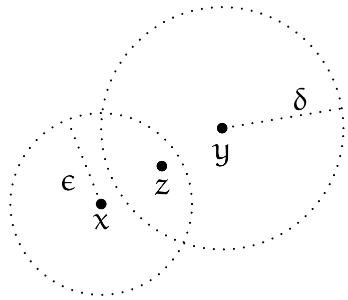
Demostración Sea (X, d) un espacio métrico. En $\mathcal{P}(X)$ consideremos la siguiente colección de subconjuntos:

$$\mathcal{B}_d := \left\{ \ B(x,\epsilon) | x \in X, \ \epsilon > 0 \ \right\}.$$

Veamos que $\mathcal{B}_d$ es una base de una topología de X.

1. Notar que para todo $x \in X$, $x \in B(x, 1) \in \mathcal{B}_d$.

2. Sean $x, y \in X$ y $\epsilon, \delta > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \cap B(y,\delta) \neq \emptyset$.



Para todo $z \in B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta)$ consideremos $B(z, \gamma)$, donde

$$\gamma = \text{mín}\left\{ \epsilon - d(z, x),\ \delta - d(z, y) \right\}.$$

Basta probar ahora que $B(z, \gamma) \subseteq B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta)$. Sea $w \in B(z, \gamma)$ entonces $d(w, z) < \gamma \leqslant \epsilon - d(z, x)$, luego

$$d(w, x) \leqslant d(w, z) + d(z, x) < \epsilon,$$

del mismo modo $d(w, y) < \delta$. Por lo tanto $w \in B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta)$.

Así $\mathcal{B}_d$ es una base para una topología sobre X. □

Definición 3.3

1. *La topología generada por la base $\mathcal{B}_d$ se llama topología inducida por la métrica d y se anota $\mathcal{T}_d$.*

2. *Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es metrizable, si y sólo si, existe una métrica d sobre X de modo que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

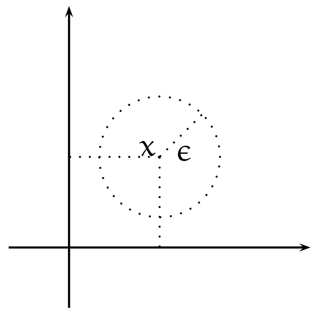
3. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que A es un conjunto acotado, si y sólo si, existe $M > 0$ de modo que para todos $x, y \in A$, $d(x, y) < M$. En este caso diremos que M es una cota de A.*

Observación 3.1

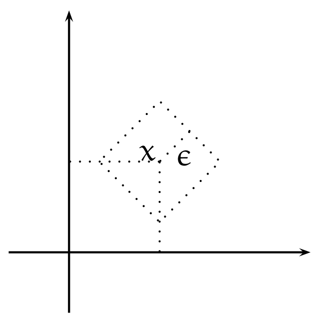
1. *Si M es cota de A, entonces $A \subseteq B(x_o, 2M)$ para algún $x_0 \in X$.*

2. *La métrica del Ejemplo 3.1.2 induce la topología discreta.*

3. *La métrica del ejemplo 3.1.1.a en* $\mathbb{R}^2$*. Geométricamente la bola* $B_d(x, \epsilon)$ *corresponde a:*



4. *La métrica del ejemplo 3.1.1.c en* $\mathbb{R}^2$*. Geométricamente la bola* $B_d(x, \epsilon)$ *corresponde a:*



Lema 3.2 *Sean* d_1, d_2 *dos métricas en* X*. Entonces,* $\mathcal{T}_{d_2} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$ *si y sólo si, para todo* $x \in X$ *y* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *de modo que* $B_{d_1}(x, \delta) \subseteq B_{d_2}(x, \epsilon)$.

Demostración Notemos que:
$U_1 \in \mathcal{T}_{d_1}$, si y sólo si, existen $B_{d_1}(x_i, \epsilon_i) \in \mathcal{B}_{d_1}$ tal que $U_1 = \bigcup_i B(x_i, \epsilon_i)$.
$U_2 \in \mathcal{T}_{d_2}$, si y sólo si, existen $B_{d_2}(x_j, \delta_j) \in \mathcal{B}_{d_2}$ tal que $U_2 = \bigcup_j B(x_j, \delta_j)$.

$\Rightarrow$) Sean $x \in X$, $\epsilon > 0$. Consideremos la bola $B_{d_2}(x, \epsilon) \in \mathcal{T}_{d_2} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$, entonces, existen $B_{d_1}(x_i, \delta_i) \in \mathcal{B}_{d_1}$ de modo que $B_{d_2}(x, \epsilon) = \bigcup_i B_{d_1}(x_i, \delta_i)$, luego, existe i_0 tal que $x \in B_{d_1}(x_{i_0}, \delta_{i_0})$. Por lo tanto

$$x \in B_{d_1}(x, \delta) \subseteq B_{d_1}(x_{i_0}, \delta_{i_0}) \subseteq B_{d_2}(x, \epsilon),$$

donde $\delta := (\delta_{i_0} - d_1(x_{i_0}, x))/2$.

$\Leftarrow$) Si $U = \underset{x \in U}{\cup} B_{d_2}(x, \epsilon_x) \in \mathcal{T}_{d_2}$, entonces

$$x \in B_{d_1}(x, \delta_x) \subseteq B_{d_2}(x, \epsilon_x), \qquad U = \bigcup_{x \in U} B_{d_1}(x, \delta_x) \in \mathcal{T}_{d_1},$$

por lo tanto $\mathcal{T}_{d_2} \subseteq \mathcal{T}_{d_1}$. $\square$

Ejercicio 3.2 1. *Estudiar si* $d(A,B) = \sqrt{tr((A-B)^t \cdot (A-B))}$ *define una distancia en el espacio de matrices* 2×2. *Nota: recuérdese que* $tr = traza$ *indica la suma de los elementos de la diagonal principal.*

2. *Demostrar que* $d(x,y) = \text{mín}(|x-y|, 1-|x-y|)$ *define una distancia en* $[0,1)$. *¿Cuáles son las funciones* $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ *continuas en este espacio?*

3. *Sea* (X,d) *un espacio métrico y* $f : X \to X$ *una aplicación continua. Probar que el conjunto de puntos que* f *deja fijos es un cerrado de* X.

   ¿Es cierto el resultado para un espacio topológico arbitrario (X,T)*?.*

Teorema 3.3 *Sea* (X,d) *un espacio métrico, entonces*

1. X *es hausdorff*

2. X *es normal.*

Demostración Dado $x, y \in X$ dos puntos distintos luego $\frac{1}{2}d(x,y) = \delta > 0$ así se obtiene que

$$x \in B(x,\delta),\ y \in B(y,\delta)$$

además $z \in B(x,\delta) \cap B(y,\delta)$.

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z) < 2\delta = (x,y).$$

De lo cual

$$x \in B(x,\delta),\ y \in B(y,\delta),\ B(x,\delta) \cap B(y,\delta) = \phi$$

Sean A, B cerrados y disjuntos en X. Para todo $a \in A$ y todo $b \in B$ existen se define

$$\epsilon_a = inf\{d(a,b) \mid b \in B\}$$

si $\epsilon_a = 0$, significa que $(\forall\delta > 0)(B(a,\delta) \cap B \neq \phi)$, luego tenemos $a \in \overline{B} = B$, lo cual no es posible ya que son disjuntos A, B. De este modo tenemos que $\epsilon_a > 0$

Luego de manera similar existe $\epsilon_b > 0$, con $b \in B$.

De la definición anterior tenemos que

$$B(a,\epsilon_a) \subseteq B^c, \qquad B(b,\epsilon_b) \subseteq A^c,$$

luego, basta considerar

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon_a/2) \in \mathcal{T}_d, \qquad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \epsilon_b/2) \in \mathcal{T}_d.$$

Claramente $U \cap V = \emptyset$, pues, si $x \in U \cap V$ entonces

$$d(a, b) \leqslant d(a, x) + d(b, x) < \epsilon_a/2 + \epsilon_b/2 \leqslant \text{máx}\{\epsilon_a, \epsilon_b\},$$

es decir, $a \in B(b, \epsilon_b) \subseteq A^c$ o $b \in B(a, \epsilon_a) \subseteq B^c$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es normal. □

3.2. Topología Producto en $\mathbb{R}^J$

Notemos que

$$\prod_{x \in J} \mathbb{R} = \{f \in F(J, \mathbb{R}) | (\forall x \in J)(f(x) \in \mathbb{R})\} = \mathbb{R}^J.$$

Luego $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de sucesiones reales.

Proposición 3.1 *Sean* $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *y* $b = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *dos sucesiones de números reales. Entonces*

$$d\,(a, b) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \text{mín} \left\{ \; |a_n - b_n|, 1 \; \right\} \right\},$$

es una métrica en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Demostración Consideremos $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como antes y $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

i) Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(a, b) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\text{mín}_{n \in \mathbb{N}}\{|a_n - a_n|, 1\}\} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \text{mín}_{n \in \mathbb{N}}\{|a_n - a_n|, 1\} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; |a_n - b_n| = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow\; a_n = b_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow\; a = b \end{aligned}$$

ii) Como $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$, entonces:

$$\begin{aligned} d\,(a, b) &= \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\text{mín}_{n \in \mathbb{N}}\{|a_n - b_n|, 1\}\}, \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}}\{\text{mín}_{n \in \mathbb{N}}\{|b_n - a_n|, 1\}\}, \\ &= d(b, a). \end{aligned}$$

iii) Como $|a_n - b_n| \leqslant |a_n - c_n| + |c_n - b_n|$, entonces claramente

$$d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b).$$

Por lo tanto $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d\right)$ es un espacio métrico.

$\square$

Ejemplo 3.3 *Calcular la distancia* $d(f, g)$ *en cada caso:*

a) Si $f(n) = n$, $g(n) = 2n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) Si $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $g(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Observación 3.2 *En general, para cualquier conjunto* $J \neq \emptyset$. *Se tiene que* $\left(\mathbb{R}^J, \rho\right)$ *es un espacio métrico, con*

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in J}\left\{\text{mín}\left\{\ |f(x) - g(x)|, 1\ \right\}\right\}, \qquad \left(f, g \in \mathbb{R}^J\right).$$

La métrica ρ *es llamada* ***métrica uniforme*** *sobre* $\mathbb{R}^J$. *La topología inducida por* ρ *es llamada topología uniforme* $(\mathbb{R}^J, \mathcal{T}_\rho)$ *sobre* $\mathbb{R}^J$.

Definición 3.4 *Para cada* $x \in J$, *consideremos* U_x *un abierto en* $\mathbb{R}$. *Se define el siguiente producto:*

$$\prod_{x \in J} U_x := \left\{\ f \in \mathbb{R}^J |\, (\forall x \in J)\, (f(x) \in U_x)\ \right\}. \tag{3.1}$$

Proposición 3.2 *La familia de productos en* (3.1) *tales que* $U_x \neq \mathbb{R}$ *para una cantidad finita de elementos de* J, *es una base para una topología de* $\mathbb{R}^J$.

Demostración Denotemos por $\mathcal{B}$ la familia considerada anteriormente

i) Sea $f \in \mathbb{R}^J$, entonces $f \in \prod_{x \in J} \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, ya que $U_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in J$.

ii) Sea $f \in \prod_{x \in J} U_x \cap \prod_{x \in J} V_x = \prod_{x \in J} U_x \cap V_x \in \mathcal{B}$ ya que

$$\{x \in J | U_x \cap V_x \neq \mathbb{R}\} = \{x \in J | U_x \neq \mathbb{R}\} \cup \{x \in J | V_x \neq \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base para una topología de $\mathbb{R}^J$.

$\square$

La topología generada por la familia de la Proposición 3.2 es llamada topología producto $(\mathbb{R}^J, \mathcal{T})$ sobre $\mathbb{R}^J$.

Teorema 3.4 *La topología uniforme de $\mathbb{R}^J$ es más fina que la topología producto en $\mathbb{R}^J$. Además son distintas cuando J es infinito.*

Demostración Sea $f \in \prod_{x\in J} U_x \in \mathcal{B}$, entonces, existen $x_1, \ldots, x_n \in J$ de modo que $U_{x_i} \neq \mathbb{R}$ y $f(x_i) \in U_{x_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como U_i es abierto en $\mathbb{R}$, entonces para cada i existe $\epsilon_i > 0$ tal que

$$]f(x_i) - \epsilon_i, f(x_i) + \epsilon_i[\subseteq U_{x_i}.$$

Sea $\epsilon := \text{mín}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, 1/2\}$, tenemos $f \in B_\rho(f, \epsilon)$. Ahora probaremos que $B_\rho(f, \epsilon) \subseteq \prod_{x\in J} U_x$. Sea $g \in B(f, \epsilon)$, claramente $g(x) \in U_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in J\backslash\{x_1, \ldots, x_n\}$, por otra parte tenemos $\rho(g, f) < \epsilon$ es decir,

$$\sup_{x\in J}\{\text{mín}\{|g(x) - f(x)|, 1\}\} < \epsilon$$

entonces $|g(x_j) - f(x_j)| < \epsilon < \epsilon_j$, luego

$$g(x_j) \subseteq]f(x_j) - \epsilon_j, f(x_j) + \epsilon_j[\subseteq U_{x_j},$$

es decir, $g \in \prod_{x\in J} U_x$.

Así tenemos $f \in B_\rho(f, \epsilon) \subseteq \prod_{x\in J} U_x$, por Lema 3.2 se obtiene $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\rho$.

Si J es infinito, la bola $B_\rho(\mathbb{1}, \frac{1}{2})$ de centro la función constante igual a 1 y radio 1/2 no contiene ningún elemento basal de la topología producto

$\square$

Teorema 3.5 *La topología que induce la siguiente métrica d en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ es igual a la topología producto.*

$$d(x, y) := \sup_{i\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{i}\,\text{mín}\{|x_i - y_i|, 1\}\right\}, \quad x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \quad y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Demostración Utilicemos nuevamente el Lema 3.2.

Sea $\epsilon > 0$, consideremos $f \in B_d(g, \epsilon) \in \mathcal{T}_d$ y $\epsilon' = \epsilon - d(f, g) > 0$, entonces $B_d(f, \epsilon') \subseteq B_d(g, \epsilon)$, ya que, si $h \in B_d(f, \epsilon')$ se tiene

$$d(f, h) < \epsilon', \qquad d(f, g) = \epsilon - \epsilon' > 0,$$

luego $d(g, h) \leqslant d(g, f) + d(f, h) = \epsilon - \epsilon' + d(f, h) < \epsilon - \epsilon' + \epsilon' = \epsilon$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon'$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ se define el siguiente conjunto:

$$U_i := \begin{cases}]f(i) - \epsilon', f(i) + \epsilon'[& ; \quad i < N \\ \mathbb{R} & ; \quad i \geqslant N \end{cases}$$

Luego $\prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$ es un elemento basal de la topología producto, que además contiene a f, pues $f(i) \in U_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sea $h \in \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Si $i < N$ tenemos $|h(i) - f(i)| < \epsilon'$, luego

$$\frac{1}{i} \min\{|h(i) - f(i)|, 1\} < \frac{1}{i} \min\{\epsilon', 1\} \leqslant \frac{\epsilon'}{i},$$

entonces

$$\sup_{i<N} \left\{\frac{1}{i} \min\{|h(i) - f(i)|, 1\}\right\} \leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}}\{\epsilon'/i\} < \epsilon'.$$

Ahora, si $i \geqslant N$, tenemos

$$\sup_{i\geqslant N} \left\{\frac{1}{i} \min\{|h(i) - f(i)|, 1\}\right\} \leqslant \sup_{i\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{i}\right\} < \frac{1}{N} < \epsilon'.$$

Por lo tanto $d(h, f) < \epsilon'$, luego

$$f \in \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i \subseteq B_d(f, \epsilon') \subseteq B_d(g, \epsilon).$$

Recíprocamente, sea $\prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$ un elemento basal de la topología producto, y $f \in \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Sean $i_1, \ldots, i_r$ de modo que $U_{i_j} \neq \mathbb{R}$, sabemos que $f(s) \in U_s$, entonces, para todo $s \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ existe ϵ_s tal que

$$]f(s) - \epsilon_s, f(s) + \epsilon_s[\subseteq U_s.$$

Definamos $\epsilon > 0$ como sigue:

$$\epsilon := \frac{1}{t} \min\left\{\epsilon_{i_j} | 1 \leqslant j \leqslant r + 1,\ \epsilon_{r+1} = 1/2\right\}, \quad t = \max\{i_1, \ldots, i_r\}.$$

Sea $h \in B_d(f, \epsilon)$, si $s \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, entonces $h(s) \in \mathbb{R} = U_s$. Por otra parte, si $s \in \{i_1, \ldots, i_r\}$, notemos que

$$\frac{1}{s} \min\{|f(s) - h(s)|, 1\} \leqslant \sup_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{i} \min\{|f(i) - h(i)|, 1\} \right\} = d(f, h) < \epsilon, \tag{3.2}$$

y

$$t\epsilon < \frac{1}{2}, \qquad \epsilon < \frac{1}{2t}, \qquad s \leqslant t, \qquad s\epsilon \leqslant \frac{s}{2t} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Luego, multiplicando por s en (3.2) obtenemos lo siguiente

$$\min\{|f(s) - h(s)|, 1\} < s\epsilon \leqslant \frac{1}{2},$$

así $|h(s) - f(s)| < s\epsilon \leqslant (s\epsilon_s)/t \leqslant \epsilon_s$, por lo tanto

$$h(s) \in U_s, \qquad h \in B_d(f, \epsilon) \subseteq \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i.$$

Esto demuestra que ambas topologías son iguales, note que es un ejemplo no trivial de topología metrizable. □

Teorema 3.6 *Sean* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *espacios métricos. Una función* $f : X \to Y$ *es continua, si y sólo si, para todo* $x \in X$ *y todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *de modo que para todo* $y \in X$ *se tiene*

$$d_X(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Consideremos $B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \in \mathcal{T}_{d_Y}$, como f es continua, entonces $x \in f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)) \in \mathcal{T}_{d_X}$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que

$$y \in B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)),$$

lo cual equivale a tener, para todo $y \in X$

$$d_X(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

$\Leftarrow$) Sea $B_{d_Y}(z, \epsilon) \in \mathcal{T}_{d_Y}$, si existe $x \in f^{-1}(B_{d_Y}(y, \epsilon))$, entonces $f(x) \in B_{d_Y}(z, \epsilon)$, luego, existe $\epsilon' > 0$ de modo que

$$B_{d_Y}(f(x), \epsilon') \subseteq B_{d_Y}(z, \epsilon).$$

Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon',$$

para todo $y \in X$, es decir,

$$B_{d_X}(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon')) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(z, \epsilon)).$$

Así tenemos que

$$f^{-1}(B_{d_Y}(z, \epsilon)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(B_{d_Y}(z,\epsilon))} B_{d_X}(x, \delta_x) \in \mathcal{T}_{d_X},$$

por lo tanto f es continua. □

3.3. Convergencia

Definición 3.5 *Sea X un espacio topológico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en X. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x si y sólo si, para todo $U_x \in \mathcal{V}(x)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n > N$ entonces $x_n \in U_x$.*

Notación 3.1 *Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x se denotado por $x_n \to x$.*

Ejemplo 3.4 *Sea $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en X tal que $x_i = b$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Consideremos $X, \{b, c\} \in \mathcal{V}(b)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in U$, por lo tanto, $x_n \to b$; note además que $x_n \to c$ ya que $X, \{b, c\} \in \mathcal{V}(c)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y todo $x_i \in U$.

Proposición 3.3 *En un espacio topológico Hausdorff, el punto de convergencia es único*

Demostración Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente tal que $x_n \to a$ y $x_n \to b$ de modo que $a \neq b$, como el espacio topológico es Hausdorff, existen abiertos U_a, U_b disjuntos, además la sucesión converge, luego existen $N, M \in \mathbb{N}$, tales que a partir de un instante los elementos perteneces a U_a y U_b respectivamente, escogiendo el máximo entre N, M obtenemos que los elementos pertenecen a ambos conjuntos, es decir, los abiertos no son disjuntos.

De lo cual se obtiene que de existir la convergencia es única. □

Ejemplo 3.5 *Considere* $\mathbb{N}$ *con la topología cofinita, determine la convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones*

1.
$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

2.
$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ n & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

3. $h(n) = n$

Solución: La primera es divergente, la segunda converge a 0 solamente, y la tercera converge a N, para todo N número Natural

Lema 3.7 *Sean* X *un espacio topológico,* $A \subseteq X$ *y* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de puntos en* A*. Si* $x_n \to x$*, entonces,* $x \in \overline{A}$*.*

Demostración Sea $U \in \mathcal{V}(x)$, como $x_n \to x$, existe $x_{n_o} \in A$ tal que $x_{n_o} \in U$, luego $U \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in \overline{A}$. □

Veamos el recíproco:

Proposición 3.4 *Sean* X *un espacio métrico y* $A \subseteq X$*. Si* $x \in \overline{A}$ *entonces existe una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de puntos en* A*, tal que* $x_n \to x$*.*

Demostración Supongamos que X es metrizable, como $x \in \overline{A}$ sabemos que para todo $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$, en particular para $\epsilon \in \left\{ \ 1/n | n \in \mathbb{Z}^+ \ \right\}$, de este modo tenemos que existe $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(x, 1/n)$, se tiene así la siguiente sucesión

$$\left\{ \ B(x, 1/n) \ \right\}_{n=1}^{\infty},$$

luego, por propiedad Arquimidiana, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/N < \epsilon$, entonces $x_N \in B(x, 1/N) \subseteq B(x,\epsilon)$, es decir, si $y \in B(x, 1/N)$ entonces $d(x,y) < 1/N < 1/\epsilon$, así $x_{N+1} \in B(x, 1/(N+1)) \subseteq B(x,\epsilon)$, por lo tanto $x_n \to x$. □

Teorema 3.8 *Sean* (X, d) *un espacio métrico e* Y *un espacio topológico.*

Una función $f : X \to Y$ *es continua, si y sólo si, para toda sucesión convergente* $x_n \to x$*, se tiene,* $f(x_n) \to f(x)$.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que $x_n \to x$ y sea $f(x) \in U \in \mathcal{V}(f(x))$, como f es continua, entonces $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_d$, luego, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x \in B_d(x, \epsilon) \subseteq f^{-1}(U).$$

Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $i > N$, $x_i \in B_d(x, \epsilon)$, es decir $f(x_i) \in U$. Esto prueba que $f(x_n) \to f(x)$.

$\Leftarrow$) Utilicemos el Teorema 2.3, sea $A \subseteq X$, probemos que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Sea $x \in \overline{A}$, como $(X, \mathcal{T}_d)$ es métrizable por d, entonces, por Lema 3.7 existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$. Por hipótesis $f(x_n) \to f(x)$, nuevamente por Lema 3.7 tenemos $f(x) \in \overline{f(A)}$, por lo tanto $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Esto prueba que f es continua. $\square$

Definición 3.6 *Sean* X *un conjunto,* Y *un espacio métrico y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones de* X *en* Y*. Se dice que* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a la función* $f : X \to Y$*, denotado por* $f_n \xrightarrow{u} f$*, si y sólo si, para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $N > 0$ *tal que para todo* $n > N$ *y todo* $x \in X$*, se tiene* $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Ejemplo 3.6 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *definimos la siguiente función*

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{x}{n},$$

y anotamos $\widehat{0}$ *la función nula en* $[0, 1]$*. Veamos que* $f_n \xrightarrow{u} \widehat{0}$*:*

Sea $\epsilon > 0$*, por propiedad Arquimidiana, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $1/\epsilon < N$*, es decir,* $1/N < \epsilon$*. Sea* $n \in \mathbb{N}$*,* $n > N$ *y* $x \in [0, 1]$*, entonces*

$$d\left(f_n(x), \widehat{0}(x)\right) = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| |x| < \frac{1}{N} \cdot 1 = \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Por lo tanto $f_n \xrightarrow{u} \widehat{0}$.

Teorema 3.9 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico,* (Y, d) *un espacio métrico y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones de* X *en* Y.

Si $f_n \overset{u}{\rightarrow} f$ *y* f_n *es continua para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces,* f *es continua.*

Demostración Sea $U \in \mathcal{T}_d$, para cada $x \in f^{-1}(U)$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(f(x), \epsilon) \subseteq U$. Además, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n > N$ se tiene $d(f_n(y), f(y)) < \epsilon/2$, para todo $y \in X$, entonces, para todo $n > N$, $f_n(x) \in B_d(f(x), \epsilon/2)$, luego $x \in f_n^{-1}(B_d(f(x), \epsilon/2)) \in \mathcal{T}$.

Sea $z \in f_n^{-1}(B(f(x), \epsilon/2))$, entonces $d(f_n(z), f(x)) < \epsilon/2$, luego

$$d(f(z), f(x)) \leqslant d(f(z), f_n(z)) + d(f_n(z), f(x)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

es decir $z \in f^{-1}(B_d(f(x), \epsilon))$. Por lo tanto

$$x \in f_n^{-1}(B_d(f(x), \epsilon/2)) \subseteq f^{-1}(B_d(f(x), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(U), \qquad n > N$$

Así se tiene que f es continua. □

Definición 3.7 *Sean* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *espacios métricos y* $f : X \to Y$ *una función biyectiva. Se dice que* f *es una isometría , si y sólo si, para todo par de puntos* $x, y \in X$*, se tiene*

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y)).$$

Proposición 3.5 *Toda isometría es un homeomorfismo.*

Ejemplo 3.7 *Determinemos todas las isometrías de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual, es decir las funciones biyectivas* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $|x - y| = |f(x) - f(y)|$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}$*, si* $y = 0$ *entonces*

$$\begin{aligned}
|x - 0| = |f(x) - f(0)| &\Leftrightarrow |x| = |f(x) - f(0)| \\
&\Leftrightarrow x = f(x) - f(0) \quad \vee \quad -x = f(x) - f(0) \\
&\Leftrightarrow f(x) = x + f(0) \quad \vee \quad f(x) = -x + f(0)
\end{aligned}$$

Además, si en el domino de la función existe valores x, y *tales que*

$$f(x) = x + f(0), \quad f(y) = -y + f(0)$$

luego $|x - y| = |f(x) - f(y)| = |x + f(0) + y - f(0)| = |x + y|$*, es decir,* $x = 0$ *o* $y = 0$

Por otra parte las funciones

$$t_a(x) = x + a, \qquad \ell_a(x) = -x + a,$$

son isometrías, ya que

$$|t_a(x) - t_a(y)| = |x + a - y - a| = |x - y|,$$

$$|\ell_a(x) - \ell_a(y)| = |-x + a + y - a| = |-x + y| = |x - y|.$$

de este modo la únicas isometrías de $\mathbb{R}$, *con la métrica usual son* t_a, ℓ_a.

Ejemplo 3.8 *Las siguientes funciones son isometrías:*

1. *Consideramos la métrica sobre* $\mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$d(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

donde $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$. *Sea* $a \in \mathbb{R}^2$, *definimos* $t_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $t_a(x) := x + a$, *entonces*

$$d(t_a(x), t_a(y)) = d(x, y).$$

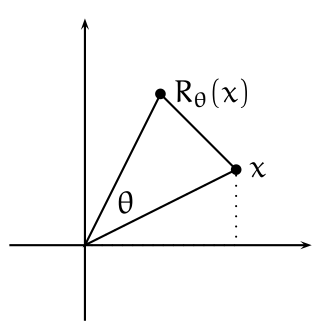
Por lo tanto t_a *es una isometría en* $(\mathbb{R}^2, d)$.

2. *Consideremos* $\mathbb{R}^2$ *con* d *la métrica usual y definamos* $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *como sigue:*

$$R_\theta(x) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2).$$

No es difícil ver que $d(R_\theta(x), R_\theta(y)) = d(x, y)$.

Por lo tanto R_θ *es una isometría.*



Observación 3.3 *Notemos que* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >$, *entonces*

$$< x, y >= \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right].$$

Las isometrías lineales en un espacio vectorial pertenecen al grupo ortogonal. En efecto, si f *es una isometría lineal, se tiene:*

$$\begin{aligned} < f(x), f(y) > &= \tfrac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right), \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\| - \|f(y)\|\right), \\ &= < x, y > . \end{aligned}$$

Por lo tanto f *pertenece al grupo ortogonal.*

3.4. Ejercicios Propuestos

1. Sean (E, d) un espacio métrico demostrar que $(E, \mathcal{T}_d)$ es un espacio de Hausdorff.

2. Sean (E, d) un espacio métrico demostrar que:
   Si $d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{d(x, y) + 1}$ entonces (E, d_1) es un espacio métrico
   Ayuda: Sea $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+; f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

   a) f es creciente

   b) $(\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+)(f(a+b) - f(a) \leqslant f(b))$

   c) Usando (i) y (ii) obtener que $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+)(c \leqslant a + b \Rightarrow f(c) \leqslant f(a) + f(b))$

3. Sean (E, d) un espacio métrico $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, tal que

   a) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$; para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$

   b) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$para todo $x, y \in \mathbb{R}_0^+$

   c) f creciente entonces demostrar que
   Si $d_2(x, y) = f(d(x, y))$ entonces (E, d_2) es un espacio métrico

4. Sea

$$d(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Demostrar que $(\mathbb{R}, d)$ un espacio métrico

5. Sea X un conjunto no vacío y sea

$$B(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \quad : \quad f \text{ es acotada}\}$$

se define $f, g \in B(X, \mathbb{R})$; $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X}\{|f(x) - g(x)|\}$.

Demostrar que $(B(X, \mathbb{R}), d)$ es un espacio métrico

6. Sea (M, d) un espacio métrico, X un conjunto no vacío y

$$B(X, M) = \{f : X \to M \quad : \quad f \text{ es acotada}\}$$

Demostrar que $(B(X, M), d)$ es un espacio métrico, donde

$$d(f, g) = \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\} \qquad f, g \in B(X, M).$$

7. Sean (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que d' es una métrica sobre X y $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$, donde

$$d'(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|.$$

8. Determinar si es que $(C([0, 1], \mathbb{R}), d)$ es un espacio métrico, donde

$$C([0, 1], \mathbb{R}) = \left\{f : I_0^1 \to \mathbb{R} | f \text{ es continua}\right\}$$

y

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

9. Sean $(X_i, d_i)_{i \in I}$ una familia finita de espacio métricos y

$$X = \left(\underset{i \in I}{\times} X_i\right) = \prod_{i \in I} X_i,$$

entonces pruebe que las siguientes funciones son métricas sobre X

a) $d_1(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i \in I} d_i(x_i, y_i)^2}$, donde $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in X$

b) $d_2(x,y) = \sum_{i\in I} d_i(x_i,y_i)$ donde $x = (x_i)_{i\in I}, y = (y_i)_{i\in I} \in X$

c) $d_3(x,y) = \max_{i\in I}\{d_i(x_i,y_i)\}$ donde $x = (x_i)_{i\in I}, y = (y_i)_{i\in I} \in X$

10. Se denota $c(x)$ la distancia al entero más cercano desde x, (por ejemplo, $c(1/4) = 1/4$ y $c(5/6) = 1/6$).

    En $X = [0,1) \times [0,1)$, se define

    $$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = c(x_1 - x_2) + c(y_1 - y_2)$$

    Demostrar que (X,d) es un espacio métrico.

11. Por $\mathbb{R}^\omega$ denotamos el espacio de todas las sucesiones de números reales $x = (x_n)$. Demuestre que $(\mathbb{R}^\omega, d)$ es un espacio métrico,donde $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ dada por

    $$d(x,y) \;=\; \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1+|x_n - y_n|)} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^\omega,\ y \in \mathbb{R}^\omega$$

    ¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = (x_n) = ((1-2^{-n})^{-1})$ e $y = (y_n) = (1)$?.

12. Sean ℓ_∞ el espacio de todas las sucesiones acotadas. Demostrar que (ℓ_∞, d) es un espacio métrico,donde $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ dada por

    $$d(x,y) \;=\; \sup\{|x_n - y_n|, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

13. Sean ℓ_2 el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$. Demostrar que (ℓ_2, d) es un espacio métrico,donde y $d : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ definida por

    $$d(x,y) \;=\; \left(\sum_n |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$$

    Indicación: si $x = (x_n) \in \ell_2$, $y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y, además, $(\sum |x_n y_n|)^2 \leqslant (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

14. En $\mathbb{R}^n$ tenemos definida dos métricas

    a) $d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, donde $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$

b) $d_2(x, y) = \max_i\{|x_i - y_i|\}$ donde $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$

Demostrar que las topologías inducidas por las métricas son iguales

15. Dado $d(x, y) = (x - y)^2$. Muestre que $(\mathbb{R}, d)$ no es espacio métrico.

16. Sean (E, d) un espacio métrico $f, g : E \to \mathbb{R}$, funciones continuas entonces

    a) $f + g : E \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es continua

    b) $f - g : E \to \mathbb{R}, \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$ es continua

    c) $f \cdot g : E \to \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua

    d) $f \div g : E \to \mathbb{R}, \quad (f \div g)(x) = f(x) \div g(x)$ es continua, si $(\forall x \in E)(g(x) \neq 0)$

17. Sea (M, d) un espacio métrico, $a \in X$,

    $$B(X, M) = \{f : X \to M \quad : \quad f \text{ es acotada}\}$$

    con la métrica dada por $d(f, g) = \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\}$.

    Demostrar que

    $$ev_a : B(X, M) \to M, ev_a(f) = f(a)$$

    es continua.

18. Sean (X, d) un espacio métrico y $\alpha > 0$.

    Probar que $d'(x, y) = \min\{\alpha, d(x, y)\}$ es una distancia que genera la misma topología que d.

19. Sea (X, d) un espacio métrico, $X \times X$ espacio topológico inducido por la métrica de d. Demostrar que d es continua

20. Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$. Se define

    $$d_A : X \to \mathbb{R}, d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A}\{d(x, a)\}$$

    Demostrar que d_A es continua.

21. Sean $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \| \|x\| < 1\}$ la bola unitaria y

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & B(0,1) \\ & x & \rightsquigarrow & \dfrac{x}{1+\|x\|} \end{array}$$

Demostrar que f es un homeomorfismo con las topología usuales.

22. Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad s(x,y) = x + y.$$

a) Demostrar que s es un función contínua

b) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ abiertos

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R} \quad : \quad a \in A, b \in B\})$$

Demostrar que $A + B$ es abierto.

23. Sea $\mathbb{R}$ con la métrica usual

$$p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x,y) = xy.$$

a) Demostrar que p es un función contínua

b) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ abiertos

$$AB = \{ab \in \mathbb{R} \quad : \quad a \in A, b \in B\})$$

Determine si AB es abierto.

24. Sean

$$\begin{aligned} \cdot \ &: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ con } \cdot (x) = x_1 x_2 ... x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i \\ + \ &: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ con } + (x) = x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

a) Demostrar que $+, \cdot$ son funciones continuas

b) $H = \{x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad a_1 x_1 + ... + a_n x_n = p\}$ es cerrado.

c) $A = \{x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x_1 x_2 ... x_n < p\}$ es abierto

25. Sean $(X_i, d_i), (Y_i, d_i')$ espacios métricos $i = 1, 2$

$$f_i : X_i \to Y_i$$

y

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2, \quad (f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

Demostrar que $f_1 \times f_2$ es continua si y sólo si f_1, f_2 son continuas.

26. Sean $(X, d), (Y, d')$ y (Z, d'') espacios métricos $a \in X, b \in Y$ y

$$f : X \times Y \to Z,$$

se define

$$f_a \quad : \quad Y \to Z, \quad f_a(y) = f(a, y)$$
$$f^b \quad : \quad Y \to Z, \quad f^b(x) = f(x, b)$$

a) Pruebe que si f es continua entonces f_a, f^b son continuas

b) Es válido el recíproco

27. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos $a \in X$

$$f, g : X \to Y, \quad \text{continuas}$$

Demostrar que:

a) Si $f(a) \neq g(a)$ entonces existe una bola B de centro en a tal que $f(B) \cap g(B) = \phi$

b) $A = \{x \in X \quad : \quad f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

28. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos, $a \in X$ y

$$f, g : X \to Y, \quad \text{contínuas}$$

Demostrar que, Si $f(a) < g(a)$ entonces existe $\delta > 0$, para todo $x, y \in B(a, \delta)$ se tiene que $f(x) < g(y)$.

29. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos $a \in X$

$$f, g : X \to Y, \quad \text{continuas}$$

Demostrar que:

a) Si toda bola de centro a tiene un punto x tal que $f(x) = g(x)$ entonces $f(a) = g(a)$.

b) $A = \{x \in X \quad : \quad f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

30. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuas tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ entonces $f = g$

31. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos

$$\nu : B(X, Y) \times X \to Y, \quad \nu(f, x) = f(x)$$

Demostrar que ν es continua en (f_0, x_0) si y sólo si f_0 es continua en x_0.

32. Sea (X, d) espacio métrico

$$f, g : X \to \mathbb{R},$$

se define

$$(f \vee g) \quad : \quad X \to \mathbb{R}, \qquad (f \vee g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$$
$$(f \wedge g) \quad : \quad X \to \mathbb{R}, \qquad (f \vee g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$$

Demostrar que si f, g son continuas en x_0 entonces $f \vee g, f \wedge g$ son continuas en x_0.

33. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, una función continua tal que $f(a) > 0 > f(b)$ y $c = \sup\{x \in [a, b] \quad : \quad f(x) > 0\}$. Demostrar que $f(c) = 0$.

Capítulo 4

Espacios Conexos o Compactos

4.1. Espacio Conexo

Una forma natural de construir nuevos espacios topológicos es pegando en forma disjunta, es decir. Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos, luego definimos

$$Z = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$$

llamada unión disjunta, y definimos

$$\mathcal{T}_Z = \{U \times \{0\} | U \in T_X\} \cup \{V \times \{1\} | V \in T_Y\}.$$

Es fácil demostrar que $(Z, \mathcal{T}_Z)$, es un espacio topológico. El proceso ante señalado se puede repetir indefinidamente. Por ello es de interés, identificar los espacios que no podemos construir de esta forma.

Definición 4.1 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Se dice que* X *es separable, si y sólo si, existen* $U, V \in \mathcal{T} - \{\emptyset\}$ *tal que*

$$U \cap V = \emptyset, \qquad X = U \cup V.$$

En este caso se dice que $\{U, V\}$ es una separación de X.

Definición 4.2 *Un espacio topológico* X *se dice conexo, si y sólo si, no existe una separación de* X.

Ejemplo 4.1

1. $\mathbb{R}$ *es conexo. Supongamos que existe una separación* $\{U, V\}$ *de* $\mathbb{R}$.

   Sean $x \in U$, $y \in V$ *tal que* $x > y$, *entonces, existe* $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \in]a_x, b_x[\subseteq U$.

   Sea $I = \{x \in U | x > y\}$, *luego es acotado y abierto ya que*

   $$I = \cup_{x \in I}]a_x, b_x[, \qquad c = \inf I$$

   Si $c \in U$, *el cual es abierto, existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $]c - \epsilon, c + \epsilon[\subseteq U$ *lo cual es una contradicción ya que* c *es el ínfimo.*

   Si $c \in V$, *el cual es abierto, existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $]c - \epsilon, c + \epsilon[\subseteq V$ *lo cual es una contradicción ya que* c *es el ínfimo.*

   Por lo tanto $\mathbb{R}$ *es conexo.*

2. *Demostrar que los únicos conjuntos conexos de* $\mathbb{R}$ *son los intervalos*

3. *Claramente* $\mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\dot{\cup}]0, \infty[$, *por lo tanto* $\mathbb{R} - \{0\}$ *no es conexo.*

Proposición 4.1 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico, entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1) X *es conexo.*

2) *No existen dos conjuntos* A, B *ambos cerrados, no vacíos de* X *tales que:*

$$X = A \cup B, \qquad A \cap B = \emptyset.$$

3) *Los únicos conjuntos abiertos y cerrados en* X *son* X *y* $\emptyset$.

4) *No existen dos subconjuntos* A, B *ambos no vacíos de* X *tales que:*

$$X = A \cup B, \qquad (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset.$$

Demostración

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que existen A, B ambos cerrados en X tales que $X = A \dot\cup B$, entonces

$$A^c = B \in \mathcal{T}, \qquad B^c = A \in \mathcal{T},$$

lo cual no puede ser, ya que X es conexo.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $\emptyset \neq A \subsetneqq X$ es abierto y cerrado, entonces A^c es abierto y cerrado, entonces $X = A \dot\cup A^c$ con A y A^c cerrados en X lo cual no puede ser.

3) $\Rightarrow$ 4) Supongamos que existen A, B no vacíos tales que

$$X = A \cup B, \qquad (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset,$$

entonces

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad \vee \quad A \cap \overline{B} = \emptyset,$$

esto es,

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq B^c, \quad \vee \quad B \subseteq \overline{B} \subseteq A^c.$$

Por lo tanto $A \cap B = \emptyset$, $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$, lo cual es una contradicción ya que A y B son subconjuntos abiertos y cerrados de X.

4) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que X no es conexo, entonces, existen $U, V \in \mathcal{T}$ disjuntos no vacío, tales que $X = U \cup V$, entonces U y V son abiertos y cerrados. Luego,

$$(\overline{U} \cap V) \cup (U \cap \overline{V}) = (U \cap V) \cup (U \cap V) = U \cap V = \emptyset,$$

lo cual no puede ser.

$\square$

Definición 4.3 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico e* $Y \subseteq X$.

Se dice que Y *es conexo , si y sólo si,* Y *es conexo con la topología reducida.*

Teorema 4.1 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico e* $Y \subseteq X$.

Si Y *es conexo, entonces* $\overline{Y}$ *es conexo.*

Demostración Supongamos que Y es conexo, pero $\overline{Y}$ no es conexo. Luego, existe $\{V_1, V_2\}$ una separación de $\overline{Y}$, esto es

$$\overline{Y} = V_1 \cup V_2, \qquad V_1 \cap V_2 = \emptyset, \qquad V_1, V_2 \in \mathcal{T}_{\overline{Y}},$$

entonces, existen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ tales que

$$V_1 = U_1 \cap \overline{Y}, \qquad V_2 = U_2 \cap \overline{Y}.$$

Definamos $W_1 := U_1 \cap Y$ y $W_2 := U_2 \cap Y$, notemos lo siguiente:

$$W_1 \cap W_2 = U_1 \cap Y \cap U_2 \cap Y \subseteq U_1 \cap \overline{Y} \cap U_2 \cap \overline{Y} = \emptyset, \quad W_1, W_2 \in \mathcal{T}_Y,$$

además,

$$\begin{aligned} Y &= Y \cap \overline{Y}, \\ &= Y \cap (V_1 \cup V_2), \\ &= (Y \cap V_1) \cup (Y \cap V_2), \\ &= (Y \cap U_1 \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap U_2 \cap \overline{Y}), \\ &= (Y \cap U_1) \cup (Y \cap U_2), \\ &= W_1 \cup W_2. \end{aligned}$$

Además $V_1 = U_1 \cap \overline{Y}$, es no vacío, luego existe $x \in U_1$ y $x \in \overline{Y}$, es decir U_1 es una abierto que contiene a x y esta en la clausura luego $W_1 = U_1 \cap Y \neq \emptyset$, análogamente el otro conjunto es no vacío

Por lo tanto Y es disconexo, lo cual es una contradicción. □

Corolario 4.1 *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico e* $Y \subseteq X$ *conexo entonces*

Para todo $U, V \in \mathcal{T}$ *disjuntos tales que* $Y \subseteq U \cup V$ *implica* $Y \subseteq U$ *o bien* $Y \subseteq V$

Corolario 4.2 *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico e* $Y \subseteq S \subseteq \overline{Y} \subseteq X$.

Si Y *es conexo, entonces* S *también es conexo.*

Demostración Supongamos que S es disconexo, entonces, existen U, V abiertos disjuntos tales que $S \subseteq U \cup V$ e $Y \subseteq S$.

Pero Y es conexo, luego podemos suponer que $Y \subseteq U$ (de modo análogo si $Y \subseteq V$), entonces $Y \cap V = \emptyset$, por lo tanto $V \cap \overline{Y} = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $\emptyset \neq V \subseteq S \subseteq \overline{Y}$.

□

Proposición 4.2 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $A, B \subseteq X$ *conexos tales que* $A \cap B \neq \emptyset$*. Entonces* $A \cup B$ *es conexo.*

Demostración Supongamos que $A \cup B$ es disconexo, es decir, existe $\{V_1, V_2\}$ una separación de $A \cup B$ y $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ de modo que

$$A \cup B = V_1 \dot{\cup} V_2, \qquad V_1 = U_1 \cap (A \cup B), \qquad V_2 = U_2 \cap (A \cup B).$$

Luego, tenemos

$$A = (A \cup B) \cap A = (V_1 \cup V_2) \cap A = (V_1 \cap A) \cup (V_2 \cap A),$$

$$(V_1 \cap A) \cap (V_2 \cap A) = (V_1 \cap V_2) \cap A = \emptyset,$$

y

$$V_i \cap A = U_i \cap (A \cup B) \cap A = U_i \cap A, \qquad i = 1, 2.$$

Entonces,

$$V_1 \cap A = \emptyset, \quad \vee \quad V_2 \cap A = \emptyset,$$

análogamente,

$$V_1 \cap B = \emptyset, \quad \vee \quad V_2 \cap B = \emptyset.$$

Claramente $V_i \cap A = \emptyset$ y $V_i \cap B = \emptyset$ para $i = 1, 2$, no puede ser, por lo tanto supongamos $V_i \cap A = \emptyset$ y $V_j \cap B = \emptyset$ con $i, j = 1, 2$ distintos, entonces

$$A \subseteq V_j, \qquad B \subseteq V_i, \qquad A \cap B \subseteq V_i \cap V_j = \emptyset,$$

lo cual es una contradicción. □

Teorema 4.2 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $\{U_i\}_{i \in I}$ *una familia de subconjuntos conexos de* X*, tales que* $U_i \cup U_j$ *es conexo para todo* $i, j \in I$*. Entonces* $\bigcup_{i \in I} U_i$ *es conexo.*

Demostración Sea $Y = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$ y supongamos que $\{B_1, B_2\}$ es una separación de Y, es decir

$$Y = B_1 \cup B_2, \qquad B_1 \cap B_2 = \emptyset, \qquad B_1, B_2 \in \mathcal{T}_Y.$$

Consideremos $b_1 \in B_1$ y $b_2 \in B_2$, entonces existen $i, j \in I$ tales que $b_1 \in U_i$ y $b_2 \in U_j$, además existen $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ de modo que $B_1 = A_1 \cap Y$ y $B_2 = A_2 \cap Y$. Definamos en $\mathcal{T}_{U_i \cup U_j}$ los siguientes conjuntos:

$$\emptyset \neq C_1 := A_1 \cap (U_i \cup U_j), \qquad \emptyset \neq C_2 := A_2 \cap (U_i \cup U_j).$$

Notemos ahora lo siguiente:

$$C_1 \cap C_2 = (A_1 \cap A_2) \cap (U_i \cup U_j) \subseteq A_1 \cap A_2 \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset,$$

y

$$\begin{aligned}
C_1 \cup C_2 &= (A_1 \cap (U_i \cup U_j)) \cup (A_2 \cap (U_i \cup U_j)), \\
&= (A_1 \cup A_2) \cap (U_i \cup U_j), \\
&= (A_1 \cup A_2) \cap (Y \cap (U_i \cup U_j)), \\
&= ((A_1 \cup A_2) \cap Y) \cap (U_i \cup U_j), \\
&= ((A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y)) \cap (U_i \cup U_j), \\
&= Y \cap (U_i \cup U_j), \\
&= U_i \cup U_j.
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, pues $U_i \cup U_j$ es conexo. □

Teorema 4.3 *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua y* X *un espacio conexo, entonces* $f(X)$ *es conexo.*

Demostración Supongamos que $f(X)$ no es conexo, entonces existe $\{U_1, U_2\}$ una separación de $f(X) \subseteq Y$, luego, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_Y$ de modo que

$$U_1 = V_1 \cap f(X), \qquad U_2 = V_2 \cap f(X).$$

Para $i = 1, 2$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(U_i) &= \Big\{ x \in X | f(x) \in U_i \Big\}, \\
&= \Big\{ x \in X | f(x) \in V_i \cap f(X) \Big\}, \\
&= \Big\{ x \in X | f(x) \in V_i \Big\} \cap \Big\{ x \in X | f(x) \in f(X) \Big\}, \\
&= \Big\{ x \in X | f(x) \in V_i \Big\} \cap X, \\
&= \Big\{ x \in X | f(x) \in V_i \Big\}, \\
&= f^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}_X,
\end{aligned}$$

además, como $U_i \neq \emptyset$, entonces existe $y_i \in V_i \cap f(X)$, luego existe $x_i \in X$ de modo que $f(x_i) = y_i$, por lo tanto $f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$.

Si $x \in f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$, entonces $f(x) \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$ pues $\{U_1, U_2\}$ es una separación, luego $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$. Claramente $f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \subseteq X$, además, si $x \in X$, entonces $f(x) \in f(X) = U_1 \dot\cup U_2$, luego

$$f(x) \in U \quad \vee \quad f(x) \in V \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in f^{-1}(U_1) \quad \vee \quad x \in f^{-1}(U_2),$$

por lo tanto $X = f^{-1}(U_1) \dot\cup f^{-1}(U_2)$. Así $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$ es una separación de X, lo cual es una contradicción, pues X es conexo. $\square$

Ejemplo 4.2 *La función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *es continua, luego* $\mathbb{R}_0^+$ *es conexo*

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$ *es continua, luego* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *es conexo.*

Note que la función definida por parte

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ x & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$

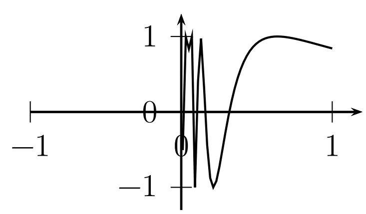
es continua, su recorrido es conexo, pero el dominio, que es la imagen inversa del recorrido no es conexo.

Corolario 4.3 *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua y* X *un espacio conexo, entonces* $\Gamma_f = \{(x, f(x) \in X \times Y | x \in X\}$ *es conexo en* $X \times Y$ *con la topología producto.*

Ejemplo 4.3 *Por corolario anterior tenemos que*

$$A = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) | x \in \mathbb{R}^+\}$$

es conexo en $\mathbb{R}^2$.



Además note que

$$(0, \operatorname{sen}(a)) = \lim_{n \to \infty} (\frac{1}{a + 2n\pi}, \operatorname{sen}(a + 2n\pi))$$

luego

$$B = \{(x, \text{sen}(\frac{1}{x}))|x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(0, y)|y \in [-1, 1]\} \subseteq \overline{A},$$

es conexo.

Note que el conjunto B *es union disjunta de dos conjuntos conexo y el cual es conexo.*

Ejemplo 4.4 *Sea* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *una función continua.*

Demuestre que existe un punto fijo

Por el corolario anterior sabemos que $\Gamma_f = \{(x, f(x) \in [0, 1] \times [0, 1]|x \in [0, 1]\}$ es conexo, supongamos que no existe p tal que $f(p) \neq p$. Luego $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$, entonces se define los conjuntos abiertos

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}|x > y\}; \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}|x < y\}$$

y se tiene que

$$(0, f(0)) \in H \cap f([0, 1]) \neq \phi; \quad (1, f(1)) \in G \cap f([0, 1]) \neq \phi.$$

Además

$$\Gamma_f = (H \cap f([0, 1])) \dot\cup (G \cap f([0, 1]))$$

por lo tanto Γ_f no es conexo, lo que es una contradicción.

Teorema 4.4 *Sean* X, Y *dos espacios conexos, entonces* $X \times Y$ *también lo es.*

Demostración Sea $(x_o, y_o) \in X \times Y$, definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rccc} f_{y_o}: & X & \to & X \times \{y_o\} \subseteq X \times Y \\ & x & \rightsquigarrow & (x, y_o) \end{array} ; \quad \begin{array}{rccc} f_{y_o}^{-1}: & X \times \{y_o\} & \to & X \\ & (x, y_o) & \rightsquigarrow & x \end{array}$$

Ya que f_{y_o} es continua por coordenada es continua, es decir, $X \times \{y_o\}$ es conexo. Por otro lado

$$\begin{array}{rccc} g_{x_o}: & Y & \to & \{x_o\} \times Y \subseteq X \times Y \\ & y & \rightsquigarrow & (x_o, y) \end{array} \quad \begin{array}{rccc} g_{x_o}^{-1}: & \{x_o\} \times Y & \to & Y \\ & (x_o, y) & \rightsquigarrow & y \end{array}$$

También g_{x_o} es continua, luego, $\{x_o\} \times Y$ es conexo.

En forma directa veamos la continuidad

$$(U \times V) \cap (X \times \{y_o\}) = U \times V \cap \{y_o\}; \quad (U \times V) \cap (\{x_o\} \times Y) = \{x_o\} \cap U \times V$$

además, si $U \times V = \bigcup_{i \in I}(U_i \times V_i)$, entonces

$$\begin{aligned} (U \times V) \cap (X \times \{y_o\}) &= \left(\bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i) \right) \cap (X \times \{y_o\}) \\ &= \bigcup_{i \in I} ((U_i \times V_i) \cap (X \times \{y_o\})) \\ &= \bigcup_{i \in I} (U_i \times \{y_o\}) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \times \{y_o\} = U' \times \{y_o\}. \end{aligned}$$

Análogamente

$$(U \times V) \cap (\{x_o\} \times Y) = \{x_o\} \times (\cup_{i \in I} V_i) = \{x_o\} \times V'.$$

Claramente $f_{y_o}^{-1}((x, y_o)) = x$ y $g_{x_o}^{-1}((x_o, y)) = y$, luego, tenemos

$$f_{y_o}(U) = U \times \{y_o\}, \quad f_{y_o}^{-1}(U \times \{y_o\}) = U, \quad g_{x_o}(V) = \{x_o\} \times V, \quad g_{x_o}^{-1}(\{x_o\} \times V) = V,$$

por lo tanto f_{y_o}, g_{x_o} son homeomorfismos. Así, se tiene que $X \times \{y_o\}$ y $\{x_o\} \times Y$ son espacios conexos.

Además $X \times \{y_o\} \cap \{x_o\} \times Y = \{(x_o, y_o)\}$, no vacío, luego $A_{(x_o, y_o)} = X \times \{y_o\} \cup \{x_o\} \times Y$ es conexo

Por otro lado $A_{(a,b)} \cap A_{(c,d)} = \{(a, d), (b, c)\}$. Es decir la unión es conexa, por Teorema 4.2

Finalmente

$$X \times Y = \cup_{(a,b) \in X \times Y} A_{(a,b)}$$

Es conexo.

$\square$

Ejemplo 4.5 $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *es conexo, para todo* $n \in \mathbb{N}$

4.1.1. Componente Conexa

Se define la siguiente relación en el espacio topológico X,

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists A \subseteq X, \text{ conexo})(x, y \in A), \tag{4.1}$$

Note que es una relación de equivalencia en X, ya que es refleja debido que los singleton son conexo, es fácil ver la simétrica y es transitiva por la propiedad 4.2

Si denotamos por O_x la clase de $x \in X$ entonces tenemos entonces

$$X = \dot{\bigcup_{x \in R}} O_x$$

Observación 4.1

1. *Por Teorema 4.1, tenemos que* $O_x = \overline{O}_x$.

2. *Si* $x \in A \subseteq X$, *con* A *conexo, entonces* $A \subseteq O_x$.

3. *Si* X *es finito, entonces* O_x *es abierto y cerrado para todo* $x \in X$.

Definición 4.4 *Sea* X *un espacio topológico.*

Una componente conexa en X *es un subconjunto conexo maximal de* X.

Ejemplo 4.6

1. $\mathbb{R}$ *tiene una sola componente conexa,* $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *tiene dos componentes conexas,* $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$.

4.2. Espacios Conexos por Caminos

Definición 4.5 *Sea* X *un espacio topológico y* $x, y \in X$.

Se dice que $f : [0, 1] \to X$ *es un camino de* x *a* y*, si y sólo si,* f *es continua tal que* $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Si f *es un camino de* x *a* y *lo denotaremos por* $f_{x,y}$

Definición 4.6 *Sea X un espacio topológico.*

Se dice que X es conexo por caminos, o arcoconexo si y sólo si, existe un camino para todo par de puntos en X.

Ejemplo 4.7

1. *El espacio $\mathbb{R}^n$ es conexo por caminos, mediante:*

$$f_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad f_{x,y}(t) := (1-t)x + ty,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. *La circunferencia $S^1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| = 1 \right\}$ es conexo por caminos, mediante:*

$$f_{x,y} : [0,1] \to S^1, \quad f_{x,y}(t) := (\cos((1-t)\theta_1 + t\theta_2), \mathrm{sen}((1-t)\theta_1 + t\theta_2)),$$

donde $x = (\cos(\theta_1), \mathrm{sen}(\theta_1))$ e $y = (\cos(\theta_2), \mathrm{sen}(\theta_2))$.

Proposición 4.3 *Todo espacio conexo por caminos es conexo*

Demostración Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio conexo por camino, luego para todo $x, y \in X$, existe una función continua $f_{x,y} : [0,1] \to X$ tal que $f_{x,y}(0) = x, f_{x,y}(1) = y$, como $[0,1]$ es conexo luego $\mathrm{Rec} f_{x,y}$ es conexo, teorema 4.3, y como

$$X = \cup_{y \in X} \mathrm{Rec} f_{x,y}$$

es conexo por teorema 4.4, ya que es union de conexo con $\mathsf{Rec} f_{x,y} \cap \mathsf{Rec} f_{x,z} \neq \phi$.

$\square$

Ejemplo 4.8 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *($n \geqslant 2$), es conexo por camino, ya que si el segmento*

$$f_{x,y}(t) = (1-t)x + ty,$$

pasa por cero buscamos otro vector, que no se encuentre en el segmento, de modo de construir una función continua que no pase por el origen, por ello $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tiene solamente una componente conexa.

Ejemplo 4.9 *En ejemplo 4.3 concluimos que*

$$B = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}))|x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(0, y)|y \in [-1, 1]\}$$

es conexo, pero no es conexo por camino

Para ello, note que $(0, 0), (\frac{1}{2\pi}, 0) \in B$, si suponemos que es conexo por camino, luego existe $f : [0, 1] \to B$ continua tal que $f(0) = (0, 0), f(1) = (\frac{1}{2\pi}, 0)$.

Definamos

$$J = \{t \in [0, 1[|f(t) \in \{0\} \times [-1, 1]\} = f^{-1}(\{0\} \times [-1, 1])$$

Notemos que $Z = \{0\} \times [-1, 1]$ es cerrado, luego $f^{-1}(\{0\} \times [-1, 1]) = J$ es cerrado, además es no vació, ya que el origen perteneces a J.

También J es abierto, sea $t \in J$, luego $f(t) \in \{0\} \times [-1, 1])$, consideremos V una bola de centro el origen y radio menor que 1, tal que contenga a $f(t)$, y de modo la intersección de $V \cap B$ no es conexo, luego debe existir un intervalo U, que contiene a t tal que $f(U) \subseteq \{0\} \times [-1, 1]$. lo cual implica que $U \subset J$.

De este modo J es un abierto, cerrado y no vació en un conexo $[0, 1]$, luego $J = [0, 1]$.

Teorema 4.5 *Sea* $f : X \to Y$ *una función continua y* X *un espacio conexo por camino, entonces* $f(X)$ *es conexo por camino.*

Teorema 4.6 *Sean* X, Y *dos espacios conexos por camino, entonces* $X \times Y$ *también lo es.*

4.2.1. Componente Conexa por Camino

Si X es un espacio topológico, entonces se define en X la siguiente relación

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe un camino de } x \text{ a } y. \tag{4.2}$$

La relación es de equivalencia, ya que, la funciones constante son continua luego es refleja, simétrica al considera la función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $f(t) = 1 - t$, luego si $f_{x,y}$ es un camino que une x con y, entonces $f_{x,y} \circ f$ es un camino que une y con x. Finalmente es transitiva ya que se define

$$f_{x,y} * f_{y,z}(t) = \begin{cases} f_{x,y}(2t) & \text{si} \quad t \leqslant \frac{1}{2} \\ f_{y,z}(2t - 1) & \text{si} \quad t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

es un camino que une x con z.

Si denotamos por O_x^c la clase mediante la relación en (4.2), entonces

$$X = \bigcup_{x \in R} O_x^c.$$

Diremos que O_x^c es la componente conexa por caminos del punto x.

Definición 4.7 *Sea X un espacio topológico.*

Una componente conexa por camino en X es un subconjunto conexo por camino maximal de X.

Proposición 4.4 *Las componente conexa por camino están contenida en alguna componente conexa del espacio topológico*

Ejemplo 4.10

1. *$\mathbb{R}$ tiene una sola componente conexa por camino, $\mathbb{R}$.*

2. *$\mathbb{R} \backslash \{0\}$ tiene dos componentes conexas por camino, $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$.*

3. *$A = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{T}\{\phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, A\}$ Determinar las componentes conexa por camino.*

   Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} a & \textit{si} \quad t < \frac{1}{2} \\ c & \textit{si} \quad t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. *$A = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{T}\{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, A\}$ Determinar las componentes conexa por camino.*

$$f_{x,y} * f_{y,z}(t) = \begin{cases} a & \textit{si} \quad t < \frac{1}{2} \\ b & \textit{si} \quad t = \frac{1}{2} \\ c & \textit{si} \quad t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

5. *$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{cf})$. Determinar las componentes conexas por camino.*

4.3. Espacios Localmente Conexos

Definición 4.8 *Sea* X *un espacio topológico y* $x \in X$*, entonces*

1. *Se dice que* X *es localmente conexo en* x*, si y sólo si, para todo* $U \in \mathcal{V}(x)$*, existe* V *abierto conexo, tal que,* $x \in V \subseteq U$*.*

2. *Se dice que* X *es localmente conexo, si y sólo si, para todo* $x \in X$*,* X *es localmente conexo en* x*.*

3. *Se dice que* X *es localmente conexo por caminos en* x*, si y sólo si, para todo* $U \in \mathcal{V}(x)$*, existe* V *abierto conexo por caminos, tal que,* $x \in V \subseteq U$*.*

4. *Se dice que* X *es localmente conexo por caminos, si y sólo si, para todo* $x \in X$*,* X *es localmente conexo por caminos en* x*.*

Ejemplo 4.11 $X = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ *no es conexo, pero es localmente conexo.*

Dado U *abierto en* X *y* $x \in U$*, luego existe* $\epsilon > 0$*, tal que* $]x - \epsilon, x + \epsilon[^* \subseteq U$*, escogemos* $\delta = \frac{|x|}{2}$*, y definimos* $V =]x - \delta, x + \delta[\cap]x - \epsilon, x + \epsilon[$ *es conexo y se tiene que* $x \in V \subseteq U$*.*

Teorema 4.7 *Sea* X *un espacio topológico, entonces*

1) X *es localmente conexo, si y sólo si, para todo conjunto abierto de* X*, las componentes conexas son abiertos.*

2) X *es localmente conexo por caminos, si y sólo si, para todo conjunto abierto de* X*, las componentes conexas por caminos son abiertos.*

Demostración Sea X un conjunto localmente conexo, luego Sea U un abierto en X. Por lo tanto, para todo $x \in U$ existe V_x conexo tal que $x \in V_x \subseteq U$, sea C_x la componente conexa en U, que contiene a x, $V_x \subseteq C_x$. Del mismo modo podemos repetir para todo elemento que se encuentre en la componente, por maximalidad $\forall z \in C_x, z \in V_z \subseteq C_x \subseteq U$. De este modo la componente es abierta.

Inversamente, Si dado $x \in U$, abierto, luego $x \in C_x \subseteq U$, es abierto en la topología relativa, como U es abierto se tiene que es abierto en X

$\square$

Teorema 4.8 *Sea* X *un espacio topológico, entonces*

1) *Cada componente conexa por caminos de* X*, está contenida en una componente conexa de* X*.*

2) *Si* X *es localmente conexo por caminos, entonces, las componentes conexas y conexas por caminos son las mismas.*

Demostración

1) Sea $x \in X$ y O_x^c su respectiva componente conexa por caminos. Sea $y \in O_x^c$, entonces, existe $f_{x,y}$ un camino de x a y, luego, por Teorema 4.3, $f_{x,y}([0,1])$ es conexo en X. Claramente $x \in O_x^c = \bigcup_{y \in O_x^c} f_{x,y}([0,1])$, además, por Proposición 4.2, O_x^c es conexo en X, por lo tanto $O_x^c \subseteq O_x$.

2) Si X es localmente conexo por caminos, por Teorema 4.7, sabemos que O_x^c es un conjunto abierto, además $O_x = O_x^c \,\dot{\cup}\, O_x \backslash O_x^c$. Supongamos que $O_x \backslash O_x^c \neq \emptyset$, entonces, existe $z \in O_x \backslash O_x^c$, y existe O_c^z abierto, de modo que

$$O_x \backslash O_x^c = \bigcup_{z \in O_x \backslash O_x^c} O_c^z,$$

por lo tanto $O_x \backslash O_x^c$ es abierto, luego $\{O_x^c, O_x \backslash O_x^c\}$ es una separación de O_x lo cual es una contradicción, pues O_x es conexo, así $O_x \backslash O_x^c = \emptyset$. Por lo tanto $O_x = O_x^c$.

□

4.4. Espacios Compactos

Definición 4.9 *Sea* X *un conjunto,* $\{U_i\}_{i \in I}$ *una familia de conjuntos.*

1. *Se dice que* $\{U_i\}_{i \in I}$ *es un cubrimiento de* X*, si y sólo si,* $X = \bigcup_{i \in I} U_i$*.*

2. *Se dice que* $\{U_i\}_{i \in I}$ *es un cubrimiento por abiertos de* X*, si y sólo si,* $\{U_i\}_{i \in I}$ *es un cubrimiento de* X *y para todo* $i \in I$*,* U_i *es abierto.*

Definición 4.10 *Se dice que* X *es compacto, si y sólo si, todo cubrimiento por abiertos de* X *tiene un subcubrimiento finito de* X*. Es decir, si* $X = \bigcup_{i \in I} U_i$*, entonces existe* $J \subseteq I$ *finito, de modo que* $X = \bigcup_{i \in J} U_i$*.*

Además $Y \subseteq X$ *es compacto, si y sólo si,* Y *es compacto con la topología relativa.*

Lema 4.9 *Un subconjunto* $Y \subseteq X$ *es compacto, si y sólo si, todo cubrimiento de* Y *por abiertos de* X*, tiene un subcubrimiento finito.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de Y por abiertos de X, entonces $\{U_i \cap Y\}_{i \in I}$ es un cubrimiento por abiertos de Y, como Y es compacto, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tal que $Y = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$ por lo tanto $\{U_{i_j}\}_{j=1}^{n}$ es un cubrimiento finito de Y por abiertos de X.

$\Leftarrow$) Sea $\{V_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de Y, entonces, existen $U_i \in \mathcal{T}_X$ tal que $V_i = U_i \cap Y$ para todo $i \in I$, luego $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X, por lo tanto, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tal que $Y = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$, luego

$$Y = \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \right) \cap Y = \bigcup_{j=1}^{n} (U_{i_j} \cap Y),$$

por lo tanto Y es compacto. □

En adelante nos referimos por cubrimiento a un cubrimiento por abiertos.

Teorema 4.10 *Sea* X *un espacio topológico compacto e* $Y \subseteq X$ *cerrado, entonces* Y *también es compacto.*

Demostración Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de Y, entonces

$$X = Y \,\dot{\cup}\, Y^c = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \dot{\cup}\; Y^c.$$

Como Y^c es abierto, entonces es un cubrimiento por abiertos de X. Pero X es compacto, entonces existen $i_1, \ldots, i_n$, $n < \infty$ tal que

$$X = Y \,\dot{\cup}\, Y^c = \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \right) \dot{\cup}\; Y^c,$$

luego $Y = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$, por lo tanto Y es compacto. □

Ejemplo 4.12 *El espacio real $\mathbb{R}$ no es compacto, en efecto, definamos el siguiente cubrimiento*

$$\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}}, \qquad U_i :=]i-1, i+1[\,, \qquad \mathbb{R} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} U_i.$$

Si suponemos que $\mathbb{R}$ es compacto, existe $I \subseteq \mathbb{Z}$ finito, de modo que $\mathbb{R} = \bigcup_{i\in I} U_i$, lo cual no puede ser, ya que $\max I + 2 \notin \bigcup_{i\in I} U_i$.

Ejemplo 4.13 *Todo conjunto finito es compacto*

Teorema 4.11 *Todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Demostración Sea X un espacio de Hausdorff e $Y \subseteq X$ compacto.

Si $Y = X$, entonces $Y^c = \emptyset$ abierto, por lo tanto Y es cerrado.

Si $Y \neq X$, existe $x_o \in X\backslash Y$, además, X es Hausdorff, entonces, para todo $y \in Y$ existe $U_y \in \mathcal{V}(x_o)$ y $V_y \in \mathcal{V}(y)$ de modo que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Luego $Y \subseteq \bigcup_{y\in Y} V_y$, pero Y es compacto, entonces $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ $(n < \infty)$. Consideremos el conjunto abierto $U_{x_o} = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ y sea $y_o \in \{y_1, \ldots, y_n\}$, entonces

$$U_{x_o} \cap V_{y_o} = \left(\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}\right) \cap V_{y_o} = \bigcap_{i=1}^n (U_{y_i} \cap V_{y_o}) = \emptyset,$$

luego tenemos

$$U_{x_o} \cap \left(\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}\right) = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_o} \cap V_{y_i}) = \emptyset,$$

entonces $U_{x_o} \cap Y = \emptyset$, por lo tanto $U_{x_o} \subseteq Y^c$, con $U_{x_o} \in \mathcal{V}(x_o)$, es decir, $X\backslash Y = Y^c$ es abierto. Así, obtenemos que Y es cerrado. $\square$

Proposición 4.5 *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Hausdorff, Y un subconjunto compacto de X y $x_o \in Y^c$. Entonces, existen $U, V \in \mathcal{T}$ disjuntos, tal que $x_o \in U$ e $Y \subseteq V$.*

Demostración Como X es un espacio de Hausdorff, para todo $y \in Y$ existe $V_y \in \mathcal{V}(y)$ y $V_{x_o,y} \in \mathcal{V}(x_o)$ tal que $V_y \cap V_{x_o,y} = \emptyset$, luego $\{V_y\}_{y\in Y}$ es un cubrimiento de Y, pero Y es compacto, entonces existen $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tal que $Y = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Luego, basta considerar

$$U = \bigcap_{i=1}^n V_{x_o,y_i}, \qquad V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i},$$

claramente $U, V \in \mathcal{T}$ y $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Teorema 4.12 *Si* X *es compacto y* $f : X \to Y$ *es continua, entonces* $f(X)$ *es compacto.*

Demostración Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de $f(X)$, como f es continua, entonces para todo $i \in I$, $f^{-1}(U_i)$ es abierto en X, además, para todo $x \in X$, $f(x) \in U_i$, entonces

$$X \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i),$$

pero X es compacto, entonces existe $n < \infty$ de modo que

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{i_j}).$$

Por lo tanto

$$f(X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j},$$

esto prueba que $f(X)$ es compacto. □

Proposición 4.6 *Sean* X *compacto,* Y *un espacio de Hausdorff y* $f : X \to Y$ *una función continua y biyectiva. Entonces* f *es un homeomorfismo.*

Demostración Basta probar que $f^{-1} : Y \to X$ es continua, para esto utilicemos el Teorema 2.3, demostrando que para todo A cerrado en X, entonces, $(f^{-1})^{-1}(A)$ es cerrado en Y. Sea A un cerrado en X, como X es compacto, por Teorema 4.10, entonces A es compacto, luego, por Teorema 4.12, $f(A)$ es compacto en Y, pero Y es un espacio de Hausdorff, entonces por Teorema 4.11 tenemos que $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ es cerrado en Y. Por lo tanto f^{-1} es continua y así f es un homeomorfismo. □

Teorema 4.13 *Sean* X, Y *dos espacio compactos, entonces* $X \times Y$ *es compacto.*

Claramente, para todo $a \in X$ y $b \in Y$, las siguientes funciones son homeomorfismos

$$f_b : X \to X \times \{b\}, \qquad f_b(x) := (x, b),$$

$$f_a : Y \to \{a\} \times Y, \qquad f_a(y) := (a, y).$$

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de $X \times Y$, entonces

$$X \times \{b\} \subseteq X \times Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i,$$

pero X es compacto, entonces, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ de modo que

$$X \times \{b\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} =: U.$$

Como U es abierto, para todo $x \in X$, existen, $V_x \in \mathcal{V}(x)$ y $V_{x,b} \in \mathcal{V}(b)$ tal que

$$(x, b) \in V_x \times V_{x,b} \subseteq U, \qquad V_x \times V_{x,b} \in \mathcal{V}((x, b)),$$

es decir, $\bigcup_{x \in X} V_x$ es un cubrimiento de X, luego, existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ de manera que $X = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$, ya que es compacto. Además, $b \in \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i,b} =: W_b \in \mathcal{T}_Y$, por lo tanto

$$X \times \{b\} \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i} \right) \times W_b \subseteq U.$$

Luego, para todo $b \in Y$ existe $W_b \in \mathcal{V}(b)$, es decir, $\bigcup_{b \in Y} W_b$ es un cubrimiento de Y, por la compacticidad de Y existen $b_1, \ldots, b_r \in Y$ tal que $Y = \bigcup_{k=1}^{r} W_{b_k}$.

Así, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} X \times Y &= X \times \textstyle\bigcup_{k=1}^{r} W_{b_k}, \\ &= \textstyle\bigcup_{k=1}^{r} (X \times W_{b_k}), \\ &= \textstyle\bigcup_{k=1}^{r} \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\right), \\ &= \textstyle\bigcup_{(k,j)=1}^{(r,n)} U_{(k,j)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $X \times Y$ es compacto.

Definición 4.11 *Sea X un conjunto. Se dice que una familia de subconjuntos de X satisface la condición de intersección finita, si y sólo si, toda intersección finita de elementos de la familia es no vacía.*

Teorema 4.14 *Sea X un espacio topológico.*

X es compacto, si y sólo si, toda familia de cerrados en X que satisface la condición de intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $\mathcal{C} = \{F_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados en X de modo que $\mathcal{C}$ satisface la condición de intersección finita, probaremos que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{D} = \{F_i^c\}_{i \in I}$, sabemos que para todos

$i_1, \ldots, i_n \in I$ con $n < \infty$, se tiene $\bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j} \neq \emptyset$, entonces

$$\bigcup_{j=1}^{n} F_{i_j}^c \neq X,$$

es decir, toda unión finita de elementos de $\mathcal{D}$ no cubre a X, luego, como X es compacto, $\mathcal{D}$ no es un cubrimiento de X, entonces

$$\bigcup_{i\in I} F_i^c \neq X \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset.$$

$\Leftarrow$) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de X, supongamos que no existe un subcubrimiento finito de X, es decir, para todos $i_1, \ldots, i_n$ con $n < \infty$ se tiene que $\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \neq X$, de otro modo, $\bigcap_{j=1}^{n} U_{i_j}^c \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{D} = \{U_i^c\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados que cumple la condición de intersección finita, por lo tanto $\bigcap_{i\in I} U_i^c \neq \emptyset$, entonces

$$\bigcup_{i\in I} U_i \neq X,$$

lo cual es una contradicción, pues $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de X.

Esto demuestra el teorema. $\square$

Teorema 4.15 *Todo intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto.*

Demostración Sean $I_x^y = [x, y]$ con $x < y$, un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{C} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de I_x^y. Definamos el siguiente conjunto:

$$C := \left\{ \; t \in I_x^y | I_x^t \text{ tiene un subcubrimiento finito de } \mathcal{C} \; \right\}.$$

Tenemos que existe $i_o \in I$ tal que $x \in U_{i_o}$, luego $C \neq \emptyset$ ya que

$$x \in C \subseteq I_x^y, \qquad [x, x] = \{x\} \subseteq U_{i_o} \in \mathcal{C}.$$

Probemos ahora que $\sup C = y$, supongamos que $\sup C =: s < y$, como $s \in I_x^y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $j_o \in I$ tal que $s \in U_{j_o}$, además, como U_{j_o} es abierto, existe $\epsilon > 0$ de modo que $]s - \epsilon, s + \epsilon[\subseteq U_{j_o}$. Como s es el supremo y $\epsilon > 0$, existe $t \in M$ tal que $s - \epsilon < t < s$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \epsilon, \qquad t = s - \delta \in M.$$

Luego, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tal que $[x, s-\delta] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$ por lo tanto

$$[x, s+\delta] \subseteq [x, s-\delta] \cup [s-\epsilon, s+\epsilon] \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}\right) \cup U_{j_o} = \bigcup_{k=1}^{n+1} U_{i_k},$$

donde $i_{n+1} := j_o$. Lo cual es una contradicción, ya que s es el supremo.

Por lo tanto $s = y$, es decir I_x^y es compacto. □

Teorema 4.16 *Sea $F \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, F es compacto, si y sólo si, F es cerrado y acotado.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sabemos que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico, luego Hausdorff. Además, por Teorema 4.11, si F es compacto, entonces es cerrado, basta probar luego que F es acotado. Sabemos que $F \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{R}}]-r, r[$, pero F es compacto, por lo tanto, existen $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ con $n < \infty$, de manera que $F = \bigcup_{i=1}^{n}]-r_i, r_i[$, llamemos $R = \{r_i\}_{i=1}^{n}$ y sea $r = \max R$, luego se tiene lo siguiente:

$$F = \bigcup_{i=1}^{n}]-r_i, r_i[\subseteq]-r, r[,$$

por lo tanto F es acotado.

$\Leftarrow$) Sea F un conjunto cerrado y acotado, entonces, existe $m \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo par de puntos $x, y \in F$, $d(x, y) < m$, luego para $x_o \in F$ obtenemos:

$$F \subseteq [x_o - m, x_o + m] =: K,$$

como F es un cerrado dentro de un compacto K, por Teorema 4.10, F es compacto. □

Teorema 4.17 *Sean X un espacio topológico compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existen $a, b \in X$ tal que para todo $x \in X$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.*

Demostración Sea $x \in X$, como X es compacto, entonces, por Teorema 4.12, $f(X)$ es compacto, luego, por Teorema 4.16, $f(X)$ es cerrado y acotado. Supongamos que $s = \sup f(X) \notin f(X)$, entonces $s \in f(X)^c$ un abierto, luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $s \in]s-\epsilon, s+\epsilon[\subseteq f(X)^c$, lo cual es una contradicción ya que $s - \epsilon$ es cota superior de $f(X)$ y s es el supremo. Por lo tanto $s \in f(X)$, luego, existe $b \in X$ de modo que $f(b) = s$, entonces para todo $x \in X$, se tiene

$f(x) \leqslant f(b)$. Análogamente probamos que existe $a \in X$ tal que $f(a) = r = \text{ínf} f(X) \in f(X)$ y así

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b),$$

para todo $x \in X$. □

4.5. Espacios Localmente Compactos

Definición 4.12 *Sea* X *un espacio topológico y* $x \in X$

1. *Se dice que* X *es localmente compacto en* x*, si y sólo si, existen* K *compacto en* X *y* $U \in \mathcal{V}(x)$ *y tal que*

$$x \in U \subseteq K \subseteq X.$$

2. *Se dice que* X *es localmente compacto, si y sólo si,* X *es localmente compacto en* x*, para todo* $x \in X$.

Ejemplo 4.14 *El espacio real* $\mathbb{R}$ *no es compacto, pero es localmente compacto, en efecto, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se tiene lo siguiente:*

$$x \in]x-1, x+1[\subseteq [x-1, x+1], \qquad]x-1, x+1[\in \mathcal{V}(x), \quad I_{x-1}^{x+1} \textit{ compacto.}$$

En general, $\mathbb{R}^n$ *no es compacto, ya que el cubrimiento por abiertos* $B(0, m)$ *con* $m \in \mathbb{N}$*, no tiene subcubrimiento finito, pero es locamente compacto.*

$$x \in \prod]x_i - 1, x_i + 1[\subseteq \prod [x_i - 1, x_i + 1]$$

Teorema 4.18 (Compactificación por un Punto) *Sea* X *un espacio topológico.*

X *es de Hausdorff y localmente compacto, si y sólo si, existe un espacio topológico* Y *que satisface con las siguientes condiciones:*

i) $X \subseteq Y$.

ii) $Y \backslash X$ *contiene un solo punto.*

iii) Y *es compacto y Hausdorff.*

Además, si Y *e* Y' *son dos espacios similares entonces existe un homeomorfismo* $h : Y \to Y'$ *que restringido a* X *es la identidad.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $Y = X \cup \{p\}$ para algún $p \notin X$. Definamos una topología sobre Y que cumpla con las condiciones anteriores.

$$\mathcal{T}_Y = \left\{ \; U \subseteq Y | U \in \mathcal{T}_X, \text{ o existe } C \subseteq X \text{ compacto, tal que } U = Y \backslash C \; \right\}.$$

Claramente $X \subseteq Y$ y $\#(Y \backslash X) = \#\{p\} = 1$.

Veamos que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio topológico:

i) Como $\emptyset \in \mathcal{T}_X$ entonces $\emptyset \in \mathcal{T}_Y$, además, como $\emptyset$ es compacto en X, se tiene $Y \backslash \emptyset = Y \in \mathcal{T}_Y$.

ii) Sean $U, V \in \mathcal{T}_Y$, distingamos tres casos:

a) Si $U, V \in \mathcal{T}_X$. Entonces $U \cap V \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$.

b) Si $U \in \mathcal{T}_X$ y $V = Y \backslash C$ con C un compacto en X, entonces:

$$U \backslash C = U \cap C^c = U \cap Y \cap C^c = U \cap (Y \cap C^c) = U \cap V \in \mathcal{T}_y.$$

c) Si $U = Y \backslash C_1$ y $V = Y \backslash C_2$ con C_1, C_2 compactos en X. Claramente $C_1 \cup C_2$ es un compacto en X, luego:

$$Y \backslash (C_1 \cup C_2) = Y \cap C_1^c \cap C_2^c = (Y \cap C_1^c) \cap (Y \cap C_2^c) = U \cap V \in \mathcal{T}_Y.$$

iii) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos en Y. Distingamos tres casos:

a) Si $U_i \in \mathcal{T}_X$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$.

b) Si $U_i = Y \backslash C_i$ con C_i compacto en X para todo $i \in I$. Sabemos que $\bigcap_{i \in I} C_i$ es compacto en X, entonces:

$$Y \backslash \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) = Y \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} C_i^c \right) = \bigcup_{i \in I} (Y \cap C_i^c) = \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_Y.$$

c) Si $I = J \dot{\cup} K$ donde $U_j \in \mathcal{T}_X$ para todo $j \in J$ y $U_k = Y \backslash C_k$ con C_k compacto en X para todo $k \in K$, entonces:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\in I} U_i &= \left(\bigcup_{j\in J} U_j\right) \cup \left(\bigcup_{k\in K}(Y\backslash C_k)\right), \\ &= \left(\bigcup_{j\in J} U_j\right) \cup \left(Y\backslash \left(\bigcap_{k\in K} C_k\right)\right), \\ &= \left(\bigcup_{j\in J} U_j\right) \cup \left(Y \cap \left(\bigcap_{k\in K} C_k\right)^c\right), \\ &= Y \cap \left(\left(\bigcup_{j\in J} U_j\right) \cup \left(\bigcap_{k\in K} C_k\right)^c\right), \\ &= Y\backslash \left(\left(\bigcup_{j\in J} U_j\right)^c \cap \left(\bigcap_{k\in K} C_k\right)\right) \in \mathcal{T}_Y. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{T}_Y$ es una topología sobre Y.

Por último resta probar que Y es compacto y Hausdorff:

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de Y, como $p \in Y \neq X$, entonces existe $i_o \in I$ y C_{i_o} compacto en X, tal que $p \in U_{i_o} = Y \backslash C_{i_o}$, además $Y = C_{i_o} \dot{\cup} (Y \backslash C_{i_o})$. Recordemos que cada U_i puede ser de dos formas:

$$U_i = U_i \in \mathcal{T}_X, \qquad U_i = (Y \cap C_i^c),$$

Luego intersección con X

$$U_i \cap X \in \mathcal{T}_X, \qquad U_i \cap X = (Y \cap C_i^c) \cap X = X \cap C_i^c \in \mathcal{T}_X,$$

es decir, abiertos en X. Luego

$$C_{i_o} \subseteq \left(\bigcup_{i\in I\backslash\{i_o\}} U_i\right) \cap X \subseteq \bigcup_{i\in I\backslash\{i_o\}} (U_i \cap X),$$

como C_{i_o} es compacto, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tal que

$$C_{i_o} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}(U_{i_j} \cap X) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}.$$

Por lo tanto

$$Y = C_{i_o} \dot{\cup} (Y \backslash C_{i_p}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \cup U_{i_o} = \bigcup_{j=0}^{n} U_{i_j},$$

esto demuestra que Y es compacto.

Sean $x, y \in Y$, si $x, y \in X$, como X es Hausdorff entonces existen $V_x, V_y \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$ tal que $x \in V_x$, $y \in V_y$ y $V_x \cap V_y = \emptyset$, ahora si $x \in X$ e $y = p$ entonces, como X es localmente compacto, existen $U \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$ y K compacto en X de modo que

$$x \in U \subseteq K \subseteq X, \qquad y = p \in Y \backslash K \in \mathcal{T}_Y, \qquad U \cap (Y \backslash K) = \emptyset,$$

por lo tanto Y es un espacio de Hausdorff.

Claramente, si Y_1, Y_2 son espacios similares tal que

$$Y_1 = X \cup \{p_1\}, \qquad Y_2 = X \cup \{p_2\}, \qquad p_1, p_2 \notin X,$$

entonces existe un homeomorfismo $h : Y_1 \to Y_2$ definido como sigue

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in X \\ p_2 & \text{si} \quad x = p_1 \end{cases}, \qquad\qquad x \in Y_1.$$

$\Leftarrow$) Sea $Y = X \cup \{p\}$ con $p \notin X$ un espacio topológico con las propiedades i), ii) y iii), probemos que X es un espacio de Hausdorff localmente compacto:

Sean $x_1, x_2 \in X \subseteq Y$ luego, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_Y$ tal que $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, basta considerar $x_i \in U_i = X \cap V_i \in \mathcal{T}_X$ para $i = 1, 2$ y claramente $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, por lo tanto X es de Hausdorff.

Sea $x \in X \subseteq Y$, como Y es de Hausdorff, existen $U, V \in \mathcal{T}_Y$ tal que $x \in U$, $p \in V$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces

$$x \in U \subseteq V^c,$$

como V^c es cerrado en Y entonces es compacto, ya que Y es compacto, luego X es localmente compacto. $\square$

Ejemplo 4.15 *Sea* $p = \infty$*, entonces:*

1. $Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = S^1$.

2. $Y = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} = S^n$.

Teorema 4.19 *Sea* X *un espacio de Hausdorff.*

X *es localmente compacto, si y sólo si, para todo* $x \in X$ *y todo* $U_x \in \mathcal{V}(x)$*, existe* $V_x \in \mathcal{V}(x)$ *de modo que* $\overline{V}_x$ *es compacto y además:*

$$x \in \overline{V}_x \subseteq U_x.$$

Demostración

$\Leftarrow$) Claramente, ya que $x \in V_x \subseteq \overline{V}_x$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in X$ y $U_x \in \mathcal{V}(x)$. Consideremos $Y = X \dot{\cup} \{\infty\}$ con la topología de compactificación por un punto, entonces Y es compacto y Hausdorff, además $U_x \in \mathcal{T}_Y$, luego $U_x^c = Y \backslash U_x$ es cerrado y por lo tanto compacto. Por Proposición 4.5, existen $V, W \in \mathcal{T}_Y$ de modo que:

$$U_x^c \subseteq V, \qquad x \in W, \qquad V \cap W = \emptyset,$$

entonces, $x \in W \subseteq V^c \subseteq U_x$. Como V^c es cerrado e Y es compacto, entonces V^c es compacto, luego, basta considerar $V_x = V^c$, así obtenemos $x \in \overline{V}_x \subseteq U_x$. □

Corolario 4.4 *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y localmente compacto, y $A \subseteq X$. Si A es abierto o cerrado, entonces A es localmente compacto.*

Demostración

Caso 1: Si A es cerrado, consideremos $x \in A \subseteq X$. Como X es localmente compacto, existen $U \in \mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{T}_X$ y K un compacto en X de modo que

$$x \in U \subseteq K \subseteq X,$$

entonces $x \in U \cap A \subseteq K \cap A$, pero $K' = K \cap A$ es cerrado en A y está contenido en el compacto K, entonces K' es compacto, además, $U' = U \cap A$ es abierto en A, luego $x \in U' \subseteq K'$, por lo tanto A es localmente compacto.

Caso 2: Si A es abierto, consideremos $x \in A$, como $A \in \mathcal{T}_X$ y X localmente compacto, entonces, por Teorema 4.19, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ compacto tal que

$$x \in \overline{V}_x \subseteq A,$$

por lo tanto A es localmente compacto. □

Corolario 4.5 *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto y de Hausdorff, si y sólo si, X es localmente compacto y Hausdorff.*

Demostración

$\Leftarrow$) Supongamos que X es localmente compacto y de Hausdorff. Consideremos $Y = X \cup \{\infty\}$ y el homeomorfismo inclusión $\iota : X \to Y$, luego X es homeomorfo a $\iota(X) = X \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$, donde Y es compacto y de Hausdorff (Teorema 4.18).

⇒) Supongamos que X es homeomorfo mediante f a A un subespacio abierto de Y el cual es compacto y de Hausdorff. Como Y es de Hausdorff entonces A lo es, así X lo es.

Además, dado $x \in A \subseteq Y$, como A es abierto e Y compacto, existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y K un compacto, tal que

$$x \in U \subseteq A \subseteq Y = K,$$

por lo tanto X es localmente compacto. □

Recordemos: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, de modo que todo singleton en X es cerrado. Se dice que:

1. X es un espacio regular, si y sólo si, para todo A cerrado de X y todo $x \in A^c$, existen $U, V \in \mathcal{T}$ de manera que $x \in U$ y $A \subseteq V$.

2. X es un espacio normal, si y sólo si, para todos A, B cerrados y disjuntos en X, existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Teorema 4.20 *Si X es compacto y Hausdorff, entonces X es normal.*

Demostración Sean A, B cerrados y disjuntos en X, por Teorema 4.10, A, B son compactos. Sea $x \in A$, luego existen $U_x \in \mathcal{V}(x)$ y $W_x \in T_X)$ tal que $U_x \cap W_x = \emptyset$, proposición 4.5, es decir,

$$B \subseteq W_x \in \mathcal{T}, \qquad U_x \cap W_x = \emptyset, \qquad x \in A,$$

entonces $A \subseteq \bigcup_{x\in A} U_x$, como A es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, luego, basta considerar $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, además definamos $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}$.

Claramente se tiene que $B \subseteq W$ y $A \subseteq U$, además

$$U \cap W = (\cup_{i=1}^{n} U_{x_i}) \cap (\cap_{j=1}^{n} W_{x_j}) = \cup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap (\cap_{j=1}^{n} W_{x_j})) = \phi$$

Por lo tanto X es normal. □

Teorema 4.21 (Lema de Urysohn) *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico normal y A, B cerrados disjuntos. Entonces, existe $f : X \to [0, 1]$ continua, tal que*

$$f(A) = \{0\}, \qquad f(B) = \{1\}.$$

Demostración Sea $P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ un conjunto numerable y ordenado. Definamos una sucesión $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ de la siguiente manera:

Como $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$A \subseteq B^c =: U_1 \in \mathcal{T}, \qquad P_1 := \{1\}.$$

Como X es normal, A es cerrado y U_1 abierto, entonces, existe $U_0 \in \mathcal{T}$ tal que

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq U_1, \qquad P_2 := \{0,1\}$$

Donde s_3 es el siguiente a 0 en P

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq U_{s_3} \subseteq \overline{U}_{s_3} \subseteq U_1, \qquad P_3 = \{0, s_3, 1\}.$$

De esta manera construimos U_{s_n}, donde s_n es el siguiente a s_{n-1} en P. Así, el término n-ésimo viene dado por $P_n = \{0, s_3, s_4, \dots, s_n, 1\}$ (los primeros n números de la sucesión), donde

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq \cdots \subseteq U_{s_i} \subseteq \overline{U}_{s_i} \subseteq \cdots \subseteq U_1 = B^c.$$

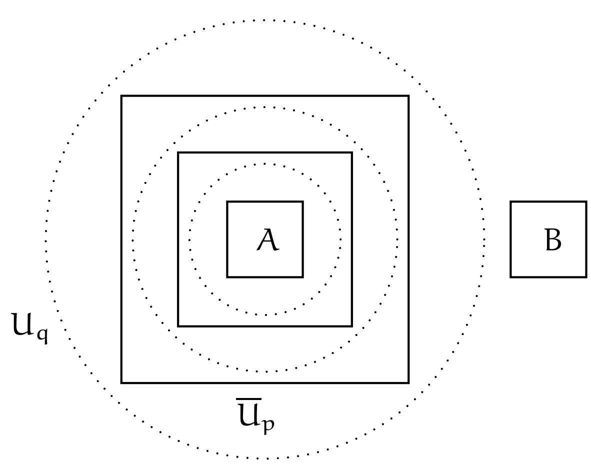
Es una sucesión definida por recurrencia U_{s_j}, están definido para todo $s_j \in P$

El conjunto $\{U_t | t \in P_n\}$ es ordenado por inclusión, tal como los respectivos subíndices en la recta real, notemos además que $P_n \cup \{s_{n+1}\} = P_{n+1} \subseteq [0,1]$.

Luego, como $s_{n+1} \neq 0 = \text{mín}\, P_{n+1}$ y $s_{n+1} \neq 1 = \text{máx}\, P_{n+1}$, existen $p, q \in P_{n+1}$ de modo que $p < s_{n+1} < q$. Usando la definición $U_{s_{n+1}}$ tenemos que

$$\overline{U}_p \subset U_{s_{n+1}} \subseteq \overline{U}_{s_{n+1}} \subset U_q. \tag{4.3}$$

Así afirmamos que (4.3) se cumple para todo $p, q \in P_{n+1} \subseteq P$.



Podemos también extender la definición de U_i a todo $i \in \mathbb{Q}$ como sigue:

$$V_i = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad i < 0 \\ U_i & \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant 1 \\ X & \text{si} \quad 1 < i \end{cases}$$

de modo que (4.3) sigue siendo cierto.

Para cada $x \in X$ definamos $Q(x) = \{i \in \mathbb{Q} | x \in V_i\}$, nótese que este conjunto no contiene valores menores que cero, ya que $V_i = \emptyset$ para $i < 0$. Además, si $i > 1$, $x \in V_i = X$ para todo $x \in X$, entonces $\mathbb{Q} \cap]1, \infty[\subseteq Q(x)$, por lo tanto $Q(x)$ es acotado inferiormente y la mayor de sus cotas inferiores está en $[0, 1]$, esto nos permite definir la siguiente función:

$$f : X \to [0, 1], \qquad f(x) = \text{ínf}\,(Q(x))\,.$$

Notemos que, si $x \in A$ entonces $f(x) = 0$ ya que $A \subseteq V_0 \subseteq V_i$, $i \geqslant 0$, por otro lado, si $x \in B$ se tiene $x \notin V_1 = B^c$ y así $x \in V_i$ para $i > 1$, luego $f(x) = 1$.

Veamos ahora que f es continua:

Para esto primero probemos que

$$x \in \overline{V}_r \quad \Rightarrow \quad f(x) \leqslant r, \qquad\qquad x \notin V_r \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant r. \tag{4.4}$$

Ya que:

Si $x \in \overline{V}_r$, entonces $x \in V_s$ para todo $s > r$, por lo tanto $]r, \infty[\cap \mathbb{Q} \subseteq Q(x)$, luego

$$f(x) = \text{ínf}(Q(x)) \leqslant r.$$

Si $x \notin V_r$, entonces $x \notin V_s$ para todo $s < r$, por lo tanto $(] - \infty, r[\cap \mathbb{Q}) \cap Q(x) = \emptyset$, luego

$$f(x) = \text{ínf}(Q(x)) \geqslant r.$$

Sean $]a, b[\subseteq [0, 1]$ abierto, $x \in f^{-1}(]a, b[)$, entonces $a < f(x) < b$, luego, existen $p, q \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$a < p < f(x) < q < b,$$

como $p < q$ entonces $\overline{V}_p \subseteq V_q$.

Definimos $V = V_q - \overline{V}_p$ es un abierto, y el contrapositivo de (4.4) obtenemos lo siguiente

$$f(x) > p \quad \Rightarrow \quad x \notin \overline{V}_p, \qquad\qquad f(x) < q \quad \Rightarrow \quad x \in V_q.$$

por lo tanto $x \in V$.

Además, si $y \in f(V)$ entonces existe $z \in V \subseteq X$ tal que $f(z) = y$, luego $z \in V_q \subseteq \overline{V}_q$ implica que $f(z) \leqslant q$, y $z \notin \overline{V}_p$ implica que $f(z) \geqslant p$, por lo tanto

$$f(z) \in [p, q] \subseteq]a, b[, \qquad f(V) \subseteq]a, b[.$$

Esto prueba que $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{T}$, concluyendo la demostración. □

4.6. Ejercicios Propuestos

1. Demostrar que los siguientes conjuntos son conexos:

   $[0, 1] \times [0, 1], B((0, 0), 1) \cup \{(1, 0)\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy < 1\}$.

2. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, se define los siguientes conjuntos

   $$A = [-1, 1] \times [-1, 1] - \{(x, x) | \quad x \in [-1, 1] - \{0\}\}$$

   Determinar si A es conexo, es compacto

3. Sea (X, T) un espacio topológico y $B \subseteq X$ un subconjunto conexo, abierto y cerrado. Probar que B es una componente conexa.

4. Sean (X, T) un espacio topológico conexo y $A \subseteq X$ conexo. Si B es abierto y cerrado de $X - A$, probar que $A \cup B$ es conexo.

5. Demuestre que (X, T) es un espacio conexo si y sólo si para todo $M \subset X$ no vació y distinto de X entonces $Fr(M) \neq \phi$

6. Demostrar que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es conexo

7. Demostrar que $S^2 - \{e_1, -e_1\}$ es conexo

8. Demostrar que S^2 no es homeomorfo a S^1.

9. ¿Cuántas componentes conexas tiene $\mathbb{R}^3 - S^2$?.

10. Sea $(X, \mathcal{T})$ una espacio conexo y $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ entonces. Demostrar que $(X, \mathcal{T}_1)$ es conexo.

11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subseteq X$ conexo. ¿Es $\mathring{A}$ conexo?.

12. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua, entonces existe un punto de $x \in [0,1]$, tal que $f(x) = x$.

13. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ formado por la unión de las rectas $y = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ y los ejes coordenados. Muestre que X es conexo, pero no localmente conexo.

14. Sean C, X dos subconjuntos de un espacio métrico M. Si C es conexo y tiene un punto en común con X entonces C tiene un punto en común con la frontera de X.

15. Sea $U(a,b) = \{an + b \in \mathbb{Z} \quad : \quad n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Z}^+$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

$$B = \{U(a,b) \quad : \quad (a,b) = 1, a, b \in \mathbb{Z}^+\}$$

   a) Demuestre que B es una base, sea $\mathcal{T}$ esta topología.

   b) Para todo p primo, el conjunto $\{kp \quad : \quad k \in \mathbb{Z}^+\}$ es cerrado en $\mathcal{T}$

   c) Si P es el conjunto de primo, $\mathring{P} = \phi$.

   d) $(\mathbb{Z}^+, \mathcal{T})$ es conexo.

16. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que: $(X, \mathcal{T})$ es conexo $\Leftrightarrow$ para cualquier subconjunto A no vacío tal que $A \neq X$ se tiene que $Fr(A) \neq \phi$.

17. Sea X un espacio conexo por camino y sea $f : X \to Y$ continua entonces $f(X)$ es conexo por camino.

18. Demostrar que si X es conexo por camino entonces X es conexo.

19. Sea X un conjunto infinito con la topología de complemento finito. Demostrar que X es conexo.

20. Usando la definición, estudiar si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican

   a) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.

   b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.

c) $[0,1]\times\{3\}\subset\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico.

21. Determinar si

$$\begin{aligned} X = \;& \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] \quad : \quad (\exists n\in\mathbb{N})\,(x=\tfrac{1}{n}\vee y=\tfrac{1}{n})\} \\ & \cup\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] \quad : \quad (x=0\vee y=0)\} \end{aligned}$$

es compacto.

22. Demostrar que la unión finita de compacto es compacto.

23. Sean:

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{S}^1\cup(\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R}) \\ X_2 &= (\mathbb{R}\times\{0,1\})\cup(\{0,1\}\times\mathbb{R}) \\ X_3 &= (\mathbb{R}\times\{0\})\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-x+2\} \end{aligned}$$

Demostrar que ninguno es homeomorfo a cualquier otro.

24. Pruebe que los espacios siguientes son dos a dos homeomorfos

   a) $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2+y^2=1\}$

   b) $Y=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2+y^2=z^2, z>0\}$

   c) $Z=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

   d) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad 1<x^2+y^2<2\}$

   e) $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2+y^2+z^2=1\}-\{(0,0,1),(0,0,-1)\}$

25. Determine si los espacios siguientes son o no homeomorfos dos a dos

   a) $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2+y^2=1\}$

   b) $\mathbb{R}$

   c) $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad x^2+y^2+z^2=1\}$

   d) $[0,1[$

26. Demostrar que $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$, con $n>1$

27. Decir cuáles son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, con la topología de los complementos numerables y, finalmente, con la topología discreta.

28. Determine si las siguientes son verdadera o falsas justifique

    a) Un conjunto compacto siempre es cerrado

    b) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topológica cofinita es compacto

    c) Sean X, Y, Z espacios topológicos Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ no son continua entonces $g \circ f : X \to Z$ no es continua.

    d) Sea $A = \{x \in \mathbb{R}^2 | 1 < d(0, x) < 2\}$ es un conjunto conexo (con la topología usual)

    e) la intersección de dos conexos con un punto en común es conexo

    f) Si $f : X \to S^1$ continua y epiyectiva entonces X es compacto.

    g) Si Y no es conexo, $f : X \to Y$ continua y epiyectiva entonces X es no conexo.

29. Sea X un espacio de Hausdorff y sean $K_1, K_2 \subset X$ dos compactos disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ con $K_1 \subset \mathcal{U}_1$ y $K_2 \subset \mathcal{U}_2$.

30. Sean A, B compactos con la topología relativa de X e Y respectivamente entonces $A \times B$ es compacto con la topología relativa de $X \times Y$

31. Demostrar que si Y es compacto entonces $\pi_1 : X \times Y \to X$ es cerrada.

32. Sea X un espacio compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \to Y$ continua.

    Demostrar que f es cerrada.

33. Sea X un espacio topológico e Y un espacio de Hausdorff compacto y $f : X \to Y$.

    Probar que f es continua si y sólo si la gráfica de f, Γ_f, es cerrada en $X \times Y$.

34. Si X, Y son espacio de Hausdorff compacto. Demostrar

    $f : X \to Y$ es continua si y sólo si Γ_f es compacta en $X \times Y$.

35. Sea X un espacio compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ continua.

    Demostrar que existen $c, d \in X$ tal que

$$(\forall x \in X)\,(f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d))$$

36. Se dice X es un espacio métrico es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

    Demostrar que todo espacio métrico compacto es completo

Índice alfabético