

Capítulo 5

Números Complejos.

En este capítulo, definiremos un nuevo conjunto que entrega solución a la ecuación $x^2 = -1$ y que contiene a los reales, de igual manera suponemos que i es una solución de esta ecuación, lo cual permite definir las operaciones esenciales para este nuevo conjunto.

Definición 47 Definimos el conjunto de los números complejos como

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

de donde $a + bi$ representa la forma binomial de un complejo el cual esta constituido por una parte Real que llamaremos

$$\operatorname{Re}(a + bi) = a$$

y una parte imaginaria

$$\operatorname{Im}(a + bi) = b$$

Observación: Tenemos que $\operatorname{Re}(a + bi), \operatorname{Im}(a + bi) \in \mathbb{R}$ y además

$$a + bi = \operatorname{Re}(a + bi) + \operatorname{Im}(a + bi)i$$

Observación: Sean $a_1 + b_1i, a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ tenemos que dos números complejos son iguales, es decir

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \quad \text{si y sólo si} \quad a_1 = a_2 \quad \text{y} \quad b_1 = b_2$$

5.1. Estructura de Cuerpo.

Adición: Sean $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ definiremos la adición en $\mathbb{C}$ como

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Multiplicación: Sean $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ definiremos la multiplicación en $\mathbb{C}$ como

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

Propiedad 144 La adición y multiplicación en $\mathbb{C}$ están bien definidos.

5.1.1. Suma en $\mathbb{C}$.

Teorema 145 $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano.

Demostración: Sean $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ y $z_3 = a_3 + b_3i \in \mathbb{C}$

Asociativa:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

Para ello $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ y $z_3 = a_3 + b_3i$ entonces

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1i) + [(a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)] \\ &= (a_1 + b_1i) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i] \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (a_3 + b_3i) \\ &= [(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)] + (a_3 + b_3i) \\ &= [z_1 + z_2] + z_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto la adición es asociativa en $\mathbb{C}$.

Neutro Aditivo: Existe $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ tal que cumple

$$z_1 + (0 + 0i) = z_1$$

Lo cual se comprueba del siguiente modo

$$z_1 + 0 + 0i = (a_1 + b_1i) + (0 + 0i) = a_1 + b_1i$$

luego tenemos que el neutro aditivo existe y es $0 = 0 + 0i$.

Inverso Aditivo: Sea $a_1 + b_1i \in \mathbb{C}$, luego existe $(-a_1) + (-b_1)i \in \mathbb{C}$ tal que cumple

$$(a_1 + b_1i) + (-a_1) + (-b_1)i = 0$$

Justifiquemos lo anterior

$$(a_1 + b_1i) + (-a_1) + (-b_1)i = (a_1 - a_1) + (b_1 - b_1)i = 0 + 0i$$

Lo anterior demuestra que existe el inverso aditivo de $a_1 + b_1i$ es $-a_1 - b_1i$.

Conmutatividad: Debemos probar

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Para ello

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ &= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i \\ &= (a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la adición en $\mathbb{C}$ es conmutativa.

5.1.2. Multiplicación en $\mathbb{C}$.

Teorema 146 $(\mathbb{C}, \cdot)$ es un monoide abeliano, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ es un grupo abeliano, con $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Demostración: Sean $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ y $z_3 = a_3 + b_3i \in \mathbb{C}$

Asociativa:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

Para ello

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (a_1 + b_1i) \cdot [(a_2 + b_2i) \cdot (a_3 + b_3i)] \\ &= (a_1 + b_1i) \cdot [(a_2a_3 - b_2b_3) + (a_3b_2 + a_2b_3)i] \\ &= (a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_3b_2 + a_2b_3)) + (a_1(a_2b_3 + a_3b_2) - b_1(a_2a_3 - b_2b_3))i \\ &= (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_3b_2 - b_1a_2b_3) + (a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - b_1a_2a_3 + b_1b_2b_3)i \\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3) + ((a_1a_2 + b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 - b_1a_2)a_3)i \\ &= [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i] \cdot (a_3 + b_3i) \\ &= [(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i)] \cdot (a_3 + b_3i) \\ &= [z_1 \cdot z_2] \cdot z_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto la multiplicación es asociativa.

Neutro Multiplicativo: Existe $1 + 0i \in \mathbb{C}$, tal que

$$(a_1 + b_1i) \cdot (1 + 0i) = a_1 + b_1i$$

Lo cual se comprueba del siguiente modo

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1i) \cdot (1 + 0i) &= (a_1 \cdot 1 - b_1 \cdot 0) + (1b_1 + a_1 \cdot 0)i \\ &= a_1 + b_1i \end{aligned}$$

luego tenemos que el neutro multiplicativo existe y es

$$1 = 1 + 0i.$$

Inverso Multiplicativo: Sea $a + bi \in \mathbb{C}^*$, existe $\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$, que cumple tenemos

$$(a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right) = 1 + 0i$$

Justifiquemos lo anterior

$$\begin{aligned} &(a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right) \\ &= \left(a \frac{a}{a^2 + b^2} - b \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) + \left(a \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \frac{a}{a^2 + b^2} \right) i \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{-ba + ba}{a^2 + b^2}i \\ &= 1 + 0i \end{aligned}$$

Por lo tanto el inverso multiplicativo de $a + bi$ es

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i.$$

Conmutatividad: Debemos probar

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Para ello

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \\ &= (a_2a_1 - b_2b_1) + (a_2b_1 + b_2a_1)i \\ &= (a_2 + b_2i) \cdot (a_1 + b_1i) \\ &= z_2 \cdot z_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la multiplicación en $\mathbb{C}$ es conmutativa.

Notación: $a + bi \in \mathbb{C}$ y $c + di \in \mathbb{C}^*$ entonces

$$(a + bi) : (c + di) = (a + bi) \cdot (c + di)^{-1}$$

Teorema 147 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Demostración: Se ha demostrado anteriormente que $(\mathbb{C}, +)$ y $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ son grupos abelianos, luego falta ver la distributividad, es decir debemos demostrar

$$(a_1 + b_1i) \cdot [(a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)] = [(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i) \cdot (a_3 + b_3i)].$$

Veamos

$$(a_1 + b_1i) \cdot [(a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)] = (a_1 + b_1i) \cdot [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i]$$

lo que es igual a

$$\begin{aligned} &= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)) + (a_1(b_2 + b_3) + b_1i(a_2 + a_3))i \\ &= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3) + (a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1)i \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1)i \\ &= [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i] + [(a_1a_3 - b_1b_3) + (a_1b_3 + a_3b_1)i] \\ &= [(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i)] + [(a_1 + b_1i) \cdot (a_3 + b_3i)]. \end{aligned}$$

5.2. Conjugado en $\mathbb{C}$.

Definición 48 Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$,

Se define el conjugación de $a + bi$ por $a - bi$ y se denota de la siguiente forma:

$$\overline{a + bi} := a - bi.$$

Observación: La conjugación es una función dada por

$$\begin{aligned} \overline{} &: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ a + bi &\mapsto \overline{a + bi} = a - bi. \end{aligned}$$

Cumple las siguientes propiedades

Propiedad 148 Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $\overline{z} = z$ si y sólo si $b = 0$
5. $\operatorname{Re}(z) = 0$ si y sólo si $\overline{z} = -z$

Demostración:

1. Tomemos $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) \\ &= \overline{(a_1 - b_1i)} + \overline{(a_2 - b_2i)} \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

2. Consideremos $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i)} \\ &= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i \\ &= (a_1a_2 - (-b_1)(-b_2)) + (a_1(-b_2) + a_2(-b_1))i \\ &= (a_1 - b_1i) \cdot (a_2 - b_2i) \\ &= \overline{(a_1 - b_1i)} \cdot \overline{(a_2 - b_2i)} \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \end{aligned}$$

3. Tenemos $z = a + bi$ luego

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{(a + bi)}} \\ &= \overline{(a - bi)} \\ &= a + bi \\ &= z.\end{aligned}$$

4. Si $\overline{z} = z$ por demostrar que $b = 0$, luego

$$\overline{z} = a - bi$$

pero $\overline{z} = z$ entonces

$$\begin{aligned}a - bi &= a + bi \\ -bi &= bi \\ 2bi &= 0.\end{aligned}$$

Como $2 \neq 0$ e $i = \sqrt{-1} \neq 0$ no queda mas que $b = 0$. Por otro lado debemos demostrar que

Si $b = 0$ por demostrar que $\overline{z} = z$, como $b = 0$ entonces $z = a + 0i = a$, calculemos su conjugado

$$\overline{z} = a - 0i = a = z.$$

5. Primero demostremos que

Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ por demostrar que $\overline{z} = -z$. Como

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(a + bi) = 0$$

entonces $z = bi$, calculemos

$$\overline{z} = \overline{bi} = -bi = -z.$$

5.3. Módulo de un Número Complejo.

Definición 49 Sea $a + bi \in \mathbb{C}$, se define el módulo de $a + bi$ por $\sqrt{a^2 + b^2}$ y se denota por

$$|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

y la norma de del complejo

$$\|a + bi\| := a^2 + b^2.$$

Observación: La módulo es una función dada por

$$\begin{array}{ccc} | \cdot | : \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ a + bi & \mapsto & |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{array}$$

Teorema 149 Sean $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$

$$i) \quad |\overline{a + bi}| = |a + bi|$$

$$ii) \quad |a + bi| = \sqrt{(a + bi)(\overline{a + bi})}$$

$$iii) \quad |(a + bi) \cdot (c + di)| = |a + bi| \cdot |c + di|$$

$$iv) \quad |a + bi| = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad a = 0 \wedge b = 0.$$

$$v) \quad |(a + bi) + (c + di)| \leq |a + bi| + |c + di|$$

Demostración:

iii) Tomemos $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i)| \\ &= |(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i| \\ &= \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2} \\ &= \sqrt{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)} \cdot \sqrt{(a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{(a_1 + b_1i)(a_1 - b_1i)} \cdot \sqrt{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} \\ &= |a_1 + b_1i| \cdot |a_2 + b_2i| \\ &= |z_1| \cdot |z_2|. \end{aligned}$$

Teorema 150 Sea $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, entonces $(\mathbb{U}, \cdot)$ es un grupo abeliano

Demostración: La demostración quedará como ejercicio para el estudiante.

5.3.1. Ecuación de Segundo Grado

Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. La ecuación de segundo grado

$$az^2 + bz + c = 0 \iff (2az + b)^2 = b^2 - 4ac$$

con un cambio de variable se obtiene

$$w^2 = \Delta$$

Observación: Las ecuación del tipo $w^2 = r \in \mathbb{R}$, se separan en dos caso, si $r \geq 0$, entonces $w = \pm\sqrt{r}$, y si $r < 0$, entonces $w = \pm\sqrt{|r|}i$.

Veremos ahora el caso en que Δ no es real. Consideremos $w = x + yi$, $\Delta = r + ti$. Luego se tiene que $x^2 - y^2 + 2xyi = r + ti$, es decir,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = r \\ 2xy = t \end{cases}$$

Amplificando por $4x^2$ la primer ecuación, y la segunda elevando al cuadrado, al sumar obtenemos

$$4x^4 = 4x^2r + t^2$$

es decir,

$$4x^4 - 4x^2r - t^2 = 0$$

luego $\Delta_1 = 16r^2 + 16t^2$,

$$x^2 = \frac{4r \pm \sqrt{16r^2 + 16t^2}}{8} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + t^2}}{2}$$

Uno de los valores no es admisible, luego

$$x = \pm \sqrt{\frac{r + \sqrt{r^2 + t^2}}{2}}$$

despejando de la primer a ecuación obtenemos que

$$y = \pm \sqrt{\frac{-r + \sqrt{r^2 + t^2}}{2}}$$

Verificando la segunda ecuación, obtenemos $\pm|s| = s$, luego sólo obtenemos signo posible a la vez, es decir,

$$w = \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{r^2 + t^2} + r}{2}} + sg(t) \sqrt{\frac{\sqrt{r^2 + t^2} - r}{2}} i \right]$$

Propiedad 151 *La ecuación de segundo grado*

$$\delta^2 = \Delta, \text{ con } Im(\Delta) \neq 0$$

tiene dos soluciones

$$\delta = \pm \left[\sqrt{\frac{|\Delta| + Re(\Delta)}{2}} + sg(Im(\Delta)) \sqrt{\frac{|\Delta| - Re(\Delta)}{2}} i \right]$$

Propiedad 152 *Dada la ecuación de segundo grado*

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

el discriminante de la ecuación de segundo grado es $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ y tiene dos soluciones

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

Ejemplo 109 Resolver las ecuaciones e segundo grado

1. $z^2 + (1 + 2i)z + (3 - i) = 0$
2. $(4 + 2i)z^2 - 2iz + (8 - i) = 0$

Solución:

1. Dado la ecuación $z^2 + (1 + 2i)z + (3 - i) = 0$, tenemos

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(3 - i) = 1 + 4i - 4 - 12 + 4i = -15 + 8i = \delta^2$$

Calculemos $|\Delta| = 17$, $Re(\Delta) = -15$, $sg(Im(\Delta)) = 1$ luego

$$\delta = \pm \left[\sqrt{\frac{17 - 15}{2}} + (1)\sqrt{\frac{17 + 15}{2}}i \right] = \pm [1 + 4i]$$

De lo cual obtenemos

$$z = \frac{-(1 + 2i) \pm (1 + 4i)}{2}$$

o bien

$$z_0 = i; \quad z_1 = -1 - 3i$$

2. Dada la ecuación $(4 + 2i)z^2 - 2iz + (8 - i) = 0$, tenemos

$$\Delta = (-2i)^2 - 4(4 + 2i)(8 - i) = -4(35 + 12i) = \delta^2$$

Calculemos $|\Delta| = 148$, $Re(\Delta) = -140$, $sg(Im(\Delta)) = -1$, luego

$$\delta = \pm \left[\sqrt{\frac{148 - 140}{2}} + (-1)\sqrt{\frac{148 + 140}{2}}i \right] = \pm [2 - 12i]$$

De lo cual obtenemos

$$z = \frac{2i \pm (2 - 12i)}{2(4 + 2i)} = \frac{i \pm (1 - 6i)}{4 + 2i}$$

o bien

$$z_0 = \frac{1 - 5i}{4 + 2i} = -\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i; \quad z_1 = \frac{-1 + 7i}{4 + 2i} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

5.4. Representación Cartesiana de $\mathbb{C}$.

El plano euclidiano

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

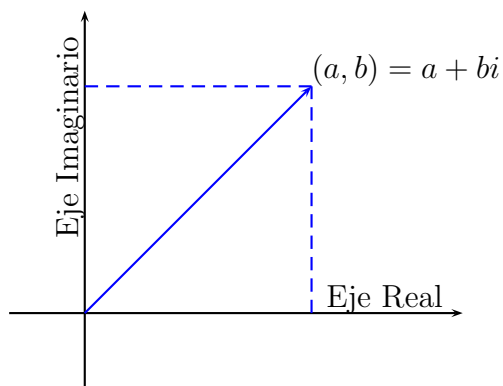
el conjunto número complejo

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

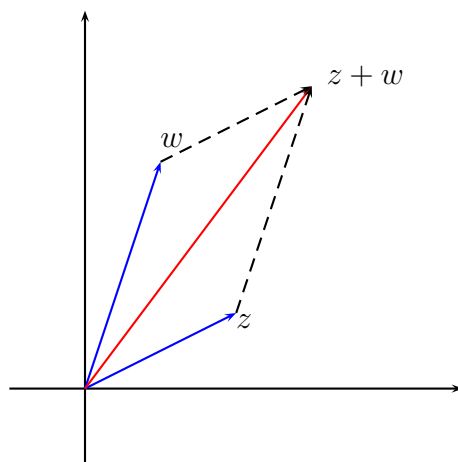
y la siguiente correspondencia

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\mapsto f(a, b) = a + bi. \end{aligned}$$

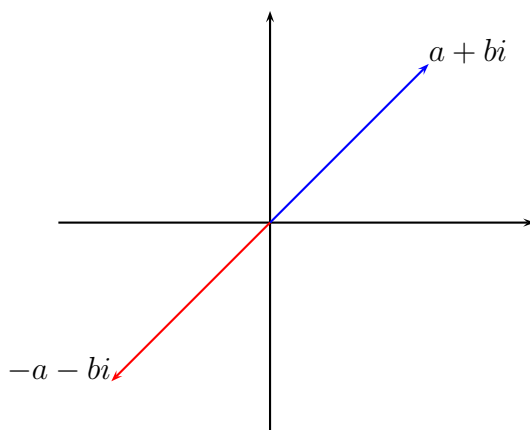
de esta manera todo número complejo puede ser representado de la siguiente manera

**Suma.**

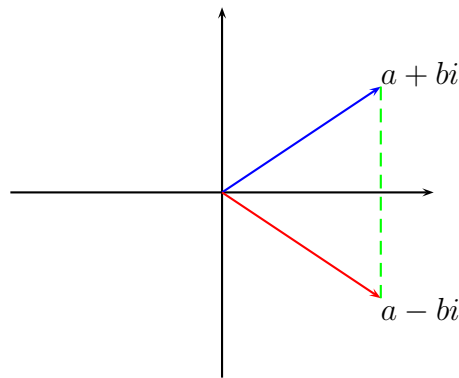
Adición: Sean $z, w \in \mathbb{C}$, donde $z = a + bi$ y $w = c + di$. construimos el paralelogramo con los vectores z y w



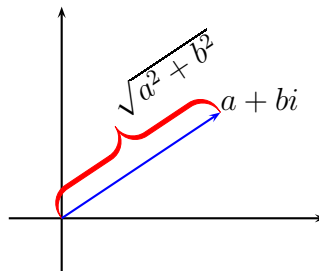
Inverso aditivo: La representación del inverso aditivo de un complejo en el plano es del siguiente figura

**Conjugación en el plano.**

Dada $a + bi \in \mathbb{C}$, el conjugado es $a - bi$

**Módulo en el plano.**

Dada $a + bi \in \mathbb{C}$, el módulo es $\sqrt{a^2 + b^2}$

**Traslación en el plano.**

Otra función que actúa de forma geométrica sobre los vectores, es la traslación, dada por

$$\begin{aligned} T_w &: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto T_w(z) = z + w. \end{aligned}$$

Distancia en el plano.

En el plano esta definida la distancia entre dos pares ordenados, que se puede interpretar en los números complejos del siguiente modo.

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, donde $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces la distancia entre z y w esta dada por

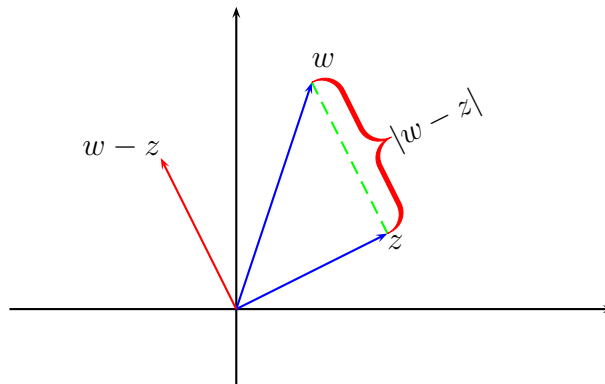
$$\text{dist}(z, w) = |w - z|$$

es decir,

$$|z - w| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Definición 50 Sean $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\text{dist}(z, w) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$



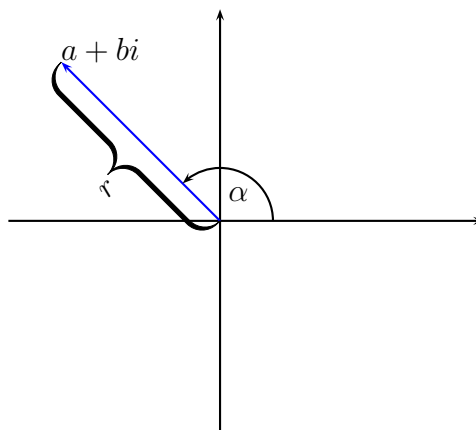
5.5. Forma Polar de un Número Complejo.

Dado un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, tiene su representación geométrica (a, b) en el plano euclidiano, dada las coordenadas en el plano existe un único α y r , tal que

$$(a, b) = (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$$

donde r es el módulo del complejo y α es ángulo con el semi eje positivo real.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \arg(z) = \alpha$$



Notación: Al considerar la forma polar de $z \in \mathbb{C}$, la podemos representar como

$$z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) = r \operatorname{cis}(\alpha)$$

Igualdad en forma Polar Dada dos complejos en forma polar $r_1 \operatorname{cis}(\alpha)$, $r_2 \operatorname{cis}(\beta)$ entonces se cumple que

$$r_1 \operatorname{cis}(\alpha) = r_2 \operatorname{cis}(\beta) \text{ si y sólo si } r_1 = r_2 \text{ y } \alpha = \beta + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

5.5.1. Multiplicación de Complejos.

Teorema 153 Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con forma polar

$$z_1 = |z_1| \operatorname{cis}(\alpha) \quad z_2 = |z_2| \operatorname{cis}(\beta)$$

entonces

$$1. \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \operatorname{cis}(\alpha + \beta).$$

$$2. \quad (z_1)^{-1} = \frac{1}{|z_1|} \operatorname{cis}(-\alpha).$$

$$3. \quad z_1 : z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|} \operatorname{cis}(\alpha - \beta).$$

$$4. \quad \overline{z_1} = |z_1| \operatorname{cis}(-\alpha).$$

Demostración: Veamos el producto

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (|z_1| \operatorname{cis}(\alpha)) \cdot (|z_2| \operatorname{cis}(\beta)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)i + \cos(\beta) \operatorname{sen}(\alpha)i - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)) + (\cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) + \cos(\beta) \operatorname{sen}(\alpha))i \end{aligned}$$

por identidades trigonométrica

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)) + (\cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) + \cos(\beta) \operatorname{sen}(\alpha))i \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)i) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \operatorname{cis}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Veremos el Inverso Multiplicativo en forma Polar.

$$\begin{aligned} z^{-1} &= (|z| \operatorname{cis}(\alpha))^{-1} = \frac{1}{|z| \operatorname{cis}(\alpha)} \\ z^{-1} &= \frac{1}{|z| (\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)i)} \cdot \frac{\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)i}{\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)i} \\ &= \frac{1}{|z|} \frac{\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)i}{\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)i^2} \\ &= \frac{1}{|z|} \frac{\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)i}{\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)} \\ &= \frac{1}{|z|} \cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)i \\ &= \frac{1}{|z|} \operatorname{cis}(-\alpha). \end{aligned}$$

Ahora la División de Complejos en forma Polar:

sea $z_2 = |z_2| \operatorname{cis}(\beta) \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (|z_1| \operatorname{cis}(\alpha))(|z_2| \operatorname{cis}(\beta))^{-1}$$

por lo anterior tenemos

$$(|z_2| \operatorname{cis}(\beta))^{-1} = \frac{1}{|z_2|} \operatorname{cis}(-\beta)$$

reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2^{-1} &= (|z_1| \operatorname{cis}(\alpha)) \frac{1}{|z_2|} \operatorname{cis}(-\beta) \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \operatorname{cis}(\alpha) \operatorname{cis}(-\beta) \end{aligned}$$

por multiplicación de complejos obtenemos

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \operatorname{cis}(\alpha - \beta)$$

Finalmente la conjugación, para ello calculemos el conjugado

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{|z| \cos(\alpha) + |z| \operatorname{sen}(\alpha)i} \\ &= |z| \cos(\alpha) - |z| \operatorname{sen}(\alpha)i \\ &= |z| (\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)i). \end{aligned}$$

Recordemos que la función coseno es par y la función seno es impar luego

$$\begin{aligned} \bar{z} &= |z| (\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(-\alpha)i) \\ &= |z| (\cos(-\alpha) + \operatorname{sen}(-\alpha)i) \\ &= |z| \operatorname{cis}(-\alpha). \end{aligned}$$

□

5.5.2. Teorema de Moivre.

El siguiente teorema es la generalización natural del teorema anterior y nos ayuda en poder calcular las potencias de un número complejo.

Teorema 154 Sea $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ donde $z = |z| \operatorname{cis}(\alpha)$ entonces

$$z^n = |z|^n \operatorname{cis}(n\alpha)$$

Demostración: Tomemos $z = |z| \operatorname{cis}(\alpha)$ y calculemos su potencia n -ésima

$$\begin{aligned} z^n &= (|z| \operatorname{cis}(\alpha))^n \\ &= |z|^n \operatorname{cis}^n(\alpha). \end{aligned}$$

Veamos el valor de $\operatorname{cis}^n(\alpha)$

$$\begin{aligned} \operatorname{cis}^n(\alpha) &= \operatorname{cis}^{n-1}(\alpha) \operatorname{cis}(\alpha) \\ &= \operatorname{cis}((n-1)\alpha) \operatorname{cis}(\alpha) \\ &= \operatorname{cis}((n-1)\alpha + \alpha) \\ &= \operatorname{cis}(n\alpha) \end{aligned}$$

La demostración es por inducción y sólo hemos realizado la parte medular □

5.5.3. Raíz n -ésima de un Complejo.

Encontrar o determinar los números complejos que a la n -ésima potencia nos dan un complejo conocido, es decir, dado $w \in \mathbb{C}$, cuales son los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^n = w$. Tales números complejos son llamados raíz n -ésima de w .

Propiedad 155 Sea $w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ donde $w = |w| \operatorname{cis}(\alpha)$ entonces la soluciones de la ecuación $z^n = w$ son

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$, llamadas las raíz n -ésima de w

Demostración: Supongamos que $z = |z| \operatorname{cis}(\beta)$ entonces

$$\begin{aligned} z^n &= w \\ (|z| \operatorname{cis}(\beta))^n &= |w| \operatorname{cis}(\alpha) \\ |z|^n \operatorname{cis}^n(\beta) &= |w| \operatorname{cis}(\alpha) \end{aligned}$$

Por teorema 154 tenemos

$$\begin{aligned} |z|^n \operatorname{cis}^n(\beta) &= |w| \operatorname{cis}(\alpha) \\ |z|^n \operatorname{cis}(n\beta) &= |w| \operatorname{cis}(\alpha) \end{aligned}$$

Luego

$$|z|^n = |w| \quad \text{y} \quad \operatorname{cis}(n\beta) = \operatorname{cis}(\alpha)$$

Por lo tanto

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}$$

y además

$$\operatorname{cis}(n\beta) = \operatorname{cis}(\alpha).$$

Por ser un punto de la circunferencia unitaria luego tenemos

$$\begin{aligned} n\beta &= \alpha + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \beta &= \frac{\alpha + 2k\pi}{n} & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Claramente todas $z_k = \sqrt[n]{|w|} \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ es una solución de la ecuación, ya que

$$\begin{aligned} z_k^n &= \left(\sqrt[n]{|w|} \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right)^n \\ &= \left(\sqrt[n]{|w|} \right)^n \left(\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right)^n \\ &= |w| \operatorname{cis}(\alpha + 2k\pi) = |w| \operatorname{cis}(\alpha) = w \end{aligned}$$

□

Observación: Un caso particular de la raíz n -ésima de un complejo es la raíz n -ésima de la unidad o 1.

Ejemplo 110 *Resolver*

$$z^n = 1$$

Solución: Antes de resolver la ecuación notemos que $1 = \operatorname{cis}(0)$, la ecuación esta dada por $z^n = \operatorname{cis}(0)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} z_k &= \operatorname{cis}\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \operatorname{cis}^k\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ k &\in 0, 1, 2, \dots, (n-1) \end{aligned}$$

Observación: Las raíces n -ésimas de la unidad, geométricamente representan los vertices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unitaria.

Si consideramos el conjunto de las n raíces de la unidad

$$\mathcal{R}_n := \left\{ \operatorname{cis}^k\left(\frac{2\pi}{n}\right) \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

Propiedad 156 *El conjunto $\mathcal{R}_n$ es un grupo abeliano.*

5.6. Los Enteros Gaussianos.

Definición 51 Sean $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Se define los enteros Gaussianos por:

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

Observación: Note que tenemos las operaciones definidas en $\mathbb{C}$, solamente no se cumple la propiedad del inverso multiplicativo, además tiene sentido el conjugado, el módulo y la norma.

Teorema 157 $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo.

5.6.1. La Norma de $\mathbb{Z}[i]$.

Definición 52 Sea $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, definiremos la norma de $a + bi$ como

$$\|a + bi\| := a^2 + b^2.$$

Observación: La norma la podemos considerar como una función de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{Z}[i] &\rightarrow \mathbb{Z} \\ a + bi &\mapsto \|a + bi\| = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Propiedad 158 Tenemos que la norma cumple con la siguiente propiedad

$$\|(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i)\| = \|a_1 + b_1i\| \cdot \|a_2 + b_2i\|.$$

Demostración: Sean $a_1 + b_1i, a_2 + b_2i \in \mathbb{Z}[i]$, luego

$$\begin{aligned} \|(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i)\| &= \|(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i\| \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \\ &= a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \\ &= a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + b_1^2b_2^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) \\ &= \|a_1 + b_1i\| \cdot \|a_2 + b_2i\|. \end{aligned}$$

Como la función norma tiene como resultante un número en $\mathbb{Z}$, tenemos que las propiedades de $\mathbb{Z}$ se pueden heredar a la función norma.

Observación: Repasaremos los conceptos anteriormente definidos para extensiones cuadráticas de los números racionales

5.6.2. Unidades de $\mathbb{Z}[i]$.

Definición 53 Sea $u \in \mathbb{Z}[i]$, se dice que u es una unidad de $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo existe $v \in \mathbb{Z}[i]$ tal que multiplicados por u , se obtiene el resultado 1, es decir,

$$u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i]) \quad \text{si y sólo si, existe } v \in \mathbb{Z}[i] \quad \text{tal que } u \cdot v = 1$$

Teorema 159 Sea $z \in \mathbb{Z}[i]$ diremos

$$z \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i]) \quad \text{si y sólo si} \quad \|z\| = 1$$

Demostración: Si $z \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$ por demostrar que $\|z\| = 1$

Como $z \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$ entonces $\exists v \in \mathbb{Z}[i]$ tal que

$$\begin{aligned} z \cdot v &= 1 \quad / \| \quad \| \\ \|z \cdot v\| &= \|1\| \\ \|z\| \cdot \|v\| &= 1 \end{aligned}$$

Como $\|z\|, \|v\| \in \mathbb{Z}$ y tienen inversos multiplicativos entonces

$$(\|z\| = 1 \wedge \|v\| = 1) \vee (\|z\| = -1 \wedge \|v\| = -1)$$

pero $\|z\|$ y $\|v\|$ son suma de números positivos entonces

$$\|v\| = 1 \quad \wedge \quad \|v\| = 1$$

En el otro sentido, si $\|v\| = 1$ por demostrar $z \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$ quedará como ejercicio para el lector. $\square$

Definición 54 Sean $z \in \mathbb{Z}[i] - \{0\}$, $w \in \mathbb{Z}[i]$, se dice que z divide a w si y sólo si existe $u \in \mathbb{Z}[i]$, tal que $w = zu$, es decir

$$z|w \iff (\exists u \in \mathbb{Z}[i])(w = z \cdot u).$$

Ejemplo 111

1. Determine $3|6i \in \mathbb{Z}[i]$.
2. Determine $3i|6 \in \mathbb{Z}[i]$.
3. Determine $(2-i)|(1+2i) \in \mathbb{Z}[i]$.
4. Determine $(3-i)|(2+5i) \in \mathbb{Z}[i]$.

Solución:

1. Determine $3|6i \in \mathbb{Z}[i]$. Como $6i = 3(2i)$, con $u = 2i \in \mathbb{Z}[i]$ Por lo tanto $3|6i$.
2. Determine $3i|6 \in \mathbb{Z}[i]$. Ya que $6 = 3i(-2i)$, con $u = -2i \in \mathbb{Z}[i]$ Por lo tanto $3i|6$.
3. Determine $(2-i)|(1+2i) \in \mathbb{Z}[i]$. Supongamos que $(2-i)|(1+2i)$, luego existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\begin{aligned} 1 + 2i &= (2 - i) \cdot (a + bi) \\ 1 + 2i &= 2a + 2bi - ai + b \\ 1 + 2i &= 2a + b + (-a + 2b)i \end{aligned}$$

Luego tenemos el sistema

$$\begin{cases} 1 = 2a + b \\ 2 = -a + 2b \end{cases}$$

Amplificando por 2 la segunda ecuación y sumando obtenemos

$$5 = 5b$$

de lo cual $b = 1$, reemplazando obtenemos $a = 0$, luego tenemos

$$1 + 2i = (2 - i)(i)$$

Por lo tanto $2 - i$ divide a $1 + 2i$ en $\mathbb{Z}[i]$.

4. Determine $(3 - i)|(2 + 5i) \in \mathbb{Z}[i]$. Supongamos que $(3 - i)|(2 + 5i)$, luego existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\begin{aligned} 2 + 5i &= (3 - i) \cdot (a + bi) \\ 2 + 5i &= 3a + 3bi - ai + b \\ 2 + 5i &= 3a + b + (-a + 3b)i \end{aligned}$$

Luego tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2 = 3a + b \\ 5 = -a + 3b \end{cases}$$

Amplificando por 3 la segunda ecuación y sumando obtenemos

$$17 = 10b$$

de lo cual $10|17$, lo que es imposible

Por lo tanto $3 - i$ no divide a $2 + 5i$ en $\mathbb{Z}[i]$

Propiedad 160 Sean $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ entonces se cumple

$$z|w \text{ en } \mathbb{Z}[i] \text{ implica } \|z\| \mid \|w\| \text{ en } \mathbb{Z}.$$

Demostración: Sean $z, w \in \mathbb{Z}[i]$, tal que $z|w$, luego existe $u \in \mathbb{Z}[i]$ tal que

$$\begin{aligned} w &= z \cdot u \quad / \| \quad \| \\ \|w\| &= \|z \cdot u\| \\ \|w\| &= \|z\| \cdot \|u\| \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos

$$\|z\| \mid \|w\|.$$

□

Definición 55 Sea $z \in \mathbb{Z}[i] - \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$ no nulo, se dice que z es **primo** en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si

$$(\forall w \in \mathbb{Z}[i] - \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i]))(\exists u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i]))(w|z \Rightarrow w = zu)$$

Observación: Sea p es un entero distinto de cero y tal que $p = a^2 + b^2$ entonces p no es primo de $\mathbb{Z}[i]$, ya que

$$p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$$

Ejemplo 112 No son primos en $\mathbb{Z}[i]$

$$2 = 1^2 + 1^2 = (1 + i)(1 - i); 5 = 2^2 + 1^2 = (2 - i)(2 + i); 13 = 3^2 + 2^2 = (3 - 2i)(3 + 2i)$$

Ejemplo 113 $1 + 2i$ es primo en $\mathbb{Z}[i]$

Solución: $1 + 2i$ es no nulo y no es unidad. Sea $w \in \mathbb{Z}[i] - \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$ tal que $w|z$, luego existe $u \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $z = wu$, calculando la norma obtenemos que $\|z\| = \|wu\| = \|w\|\|u\|$, por lo tanto $5 = \|w\|\|u\|$, pero w no es unidad, luego $\|w\| \neq 1$, de este modo se tiene que $\|u\| = 1$, por lo tanto invertible $w = zu^{-1} = z\bar{u}$, luego $1 + 2i$ es primo en $\mathbb{Z}[i]$.

Teorema 161 Sea p un número primo en $\mathbb{Z}$ tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$ entonces p no es un número primo en $\mathbb{Z}[i]$

Demostración: Sea p primo tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$, luego existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$, luego

$$p|(x - i)(x + i)$$

Supongamos que p es primo en $\mathbb{Z}[i]$ entonces

$$p|(x - i) \quad \vee \quad p|(x + i)$$

existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} x - i &= p(a + bi) & \vee & & x + i &= p(a + bi) \\ x - i &= pa + pbi & \vee & & x + i &= pa + pbi \end{aligned}$$

de lo cual $pb = \pm 1$, luego es una unidad en $\mathbb{Z}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto p no es un número primo en $\mathbb{Z}[i]$ $\square$

5.7. Algoritmo de la División

El algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$, corresponde a dado dos elementos $a, b \in \mathbb{Z}$, con a no nulo existen $q, r \in \mathbb{Z}$, tales que $b = aq + r$, con $0 \leq r < |a|$.

La anterior se puede reescribir del siguiente modo, existen $q, r \in \mathbb{Z}$, tales que $b = aq + r$, con $0 \leq |r| \leq \frac{|a|}{2}$.

Por ejemplo;

$$15 = 4(3) + 3 = 4(4) + (-1) \quad -13 = 4(-4) + 3 = 4(-3) + (-1)$$

los valores anteriores eran únicos, pero con la condición actual no son únicos, $14 = 4(3) + 2 = 4(4) + (-2)$.

Propiedad 162 Sean $z, w \in \mathbb{Z}[i]$, con z no nulo, entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}[i]$, tales que $w = zq + r$, con $0 \leq \|r\| < \|z\|$.

Demostración: Primer caso: Sea $w = a + bi$ y $z = c$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Luego existen $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$, tales que

$$a = cq_1 + r_1 \quad b = cq_2 + r_2, \text{ con } |r_i| \leq \frac{|c|}{2}.$$

Reescribiendo tenemos $a + bi = c(q_1 + q_2i) + (r_1 + r_2i)$

$$\|r_1 + r_2i\| = r_1^2 + r_2^2 \leq \frac{c^2}{2} < c^2$$

De este modo tenemos existen $q = q_1 + q_2i, r = r_1 + r_2i$, tal que $w = zq + r$ con $0 \leq \|r\| < \|z\|$.

Segundo caso: Sea $w = a + bi$ y $z = c + di$, con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Luego por el caso anterior existen $q, r_1 \in \mathbb{Z}$, tales que

$$w\bar{z} = (a + bi)(c - di) = (c^2 + d^2)q + r_1 \text{ con } \|r_1\| < \|c^2 + d^2\|.$$

de lo cual se tiene que $r_1 = (a + bi)(c - di) - (c^2 + d^2)q = [(a + bi) - (c + di)q](c - di)$.

Definamos $r = (a + bi) - (c + di)q$, luego tenemos $r_1 = r(c - di)$

$$\|r\|(c^2 + d^2) = \|r(c - di)\| = \|r_1\| \leq \|c^2 + d^2\|$$

Simplificando obtenemos $0 \leq \|r\| < \|z\|$ y se cumple que $w = zq + r$. □

Ejemplo 114 En cada caso, determine $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tal que

1. $13 + 21i = 4q + r$ con $\|r\| < \|4\|$
2. $7 + 2i = (3 + i)q + r$ con $\|r\| < \|3 + i\|$
3. $3 - 5i = (3 - 2i)q + r$ con $\|r\| < \|3 - 2i\|$

Solución:

1. $13 + 21i = 4q + r$ con $\|r\| < \|4\|$ Como $13 = 4(4) - 1$, $21 = 4(5) + 1$, por lo tanto

$$13 + 21i = (4(4) - 1) + (4(5) + 1)i = 4(4 + 5i) + (-1 + i)$$

Además $\|-1 + i\| = 2 < 16 = \|4\|$.

2. $7 + 2i = (3 + i)q + r$ con $\|r\| < \|3 + i\|$ Veamos primeros $\|3 + i\| = 10$ y $(7 + 2i)(3 - i) = 23 - i$ Como $23 = 10(2) + 3$, $-1 = 10(0) - 1$, luego tenemos $q = 2 + 0i$, $r_1 = 3 - i$

Sea $r = 7 + 2i - 2(3 + i) = 1$, luego $\|1\| = 1 < 10 = \|3 + i\|$ y se cumple que $7 + 2i = (3 + i)2 + 1$

3. $3 - 5i = (3 - 2i)q + r$ con $\|r\| < \|3 - 2i\|$ Veamos primeros $\|3 - 2i\| = 13$ y $(3 - 5i)(3 + 2i) = 19 - 9i$ Como $19 = 13(1) + 6$, $-9 = 13(-1) + 4$, luego tenemos $q = 1 - i$, $r_1 = 6 + 4i$

Sea $r = 3 - 5i - (1 - i)(3 - 2i) = 3 - 5i - (1 - 5i) = 2$, luego $\|2\| = 4 < 13 = \|3 - 2i\|$ y se cumple que $3 - 5i = (3 - 2i)(1 - i) + 2$.

5.8. Ejercicios Desarrollados

Ejemplo 115 Determinar $z \in \mathbb{C}$ tal que:

a) $|z| - z = 1 + i$ **Solución:** Sea $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned} 1 + i &= |z| - z \\ 1 + i &= \sqrt{a^2 + b^2} - a - bi, \end{aligned}$$

luego tenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a^2 + b^2} - a = 1 \\ -b = 1 \end{array} \right.$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 1} &= 1 + a \quad /()^2 \\ a^2 + 1 &= 1 + 2a + a^2 \\ 0 &= 2a \\ 0 &= a \end{aligned}$$

Por lo tanto $z = 0 - i$ es la solución.

b) $|z| + z = 3 + 2i$.

Solución: Sea $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned} 3 + 2i &= |z| + z \\ 3 + 2i &= \sqrt{a^2 + b^2} + a + bi \end{aligned}$$

luego tenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a^2 + b^2} + a = 3 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 4} &= 3 - a \quad /()^2 \\ a^2 + 4 &= 9 - 6a + a^2 \\ -5 &= -6a \\ \frac{5}{6} &= a \end{aligned}$$

Note que, para elevar al cuadrado era necesario que $3 - a$ es no negativo, con el valor encontrado lo cumple. Por lo tanto $z = \frac{5}{6} + 2i$ es la solución.

c) $z^2 + |z|^2 = 0$

Solución: Sea $z = a + bi$, $z^2 = a^2 + 2abi - b^2$, $|z|^2 = a^2 + b^2$

$$\begin{aligned} z^2 + |z|^2 &= 0 \\ a^2 + 2abi - b^2 + a^2 + b^2 &= 0 \\ a^2 + 2abi &= 0 \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos

$$\begin{array}{l} a^2 = 0 \\ 2ab = 0 \end{array}$$

Luego $a = 0$.

De este modo, el conjunto solución es $S = \{0 + bi \mid b \in \mathbb{R}\}$

d) $\left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1$

Solución: Sea $z = a + bi$

$$\begin{aligned} \frac{|z-4|}{|z-8|} &= 1 \\ |z-4| &= |z-8| \\ |a+bi-4| &= |a+bi-8| \\ |a-4+bi| &= |a-8+bi| \\ \sqrt{(a-4)^2+b^2} &= \sqrt{(a-8)^2+b^2} \quad /()^2 \\ a^2-8a+16+b^2 &= a^2-16a+64+b^2 \\ 16a-8a &= 64-16 \\ 8a &= 48 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{6 + bi; b \in \mathbb{R}\}$

Ejemplo 116 *Determinar el lugar geométrico en cada caso*

a) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4-i| = |z-5|\}$

Solución: Sea $z = a + bi$

$$\begin{aligned} |a+bi-4-i| &= |a+bi-5| \\ |a-4+(b-1)i| &= |a-5+bi| \\ \sqrt{(a-4)^2+(b-1)^2} &= \sqrt{(a-5)^2+b^2} \quad /()^2 \\ (a-4)^2+(b-1)^2 &= (a-5)^2+b^2 \\ a^2-8a+16+b^2-2b+1 &= a^2-10a+25+b^2 \\ 2a-2b &= 8 \quad / \div 2 \\ a-b &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{A} = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a - b = 4\}$, representa una recta en $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{z+2}{z-2} \right| = 2\}$

Solución: Sea $z = a + bi$

$$\begin{aligned} \frac{|z+2|}{|z-2|} &= 2 \\ |z+2| &= 2|z-2| \\ |a+bi+2| &= 2|a+bi-2| \\ |a+2+bi| &= 2|a-2+bi| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a+2)^2 + b^2} &= 2\sqrt{(a-2)^2 + b^2} \quad /()^2 \\
a^2 + 4a + 4 + b^2 &= 4a^2 - 16a + 16 + 4b^2 \\
0 &= 3a^2 - 20a + 12 + 3b^2 \quad / \div 3 \\
0 &= a^2 - \frac{20}{3}a + 4 + b^2 \\
0 &= \left(a - \frac{20}{6}\right)^2 + b^2 - \frac{400}{36} + 4 \\
\frac{256}{36} &= \left(a - \frac{20}{6}\right)^2 + b^2 \\
\left(\frac{16}{6}\right)^2 &= \left(a - \frac{20}{6}\right)^2 + b^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{A} = \left\{a + bi \in \mathbb{C} \mid \left(a - \frac{10}{3}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2\right\}$, representa una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid z - \bar{z} = i\}$

Solución: Sea $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$

$$\begin{aligned}
z - \bar{z} &= a + bi - a + bi \\
i &= 2bi \\
1 &= 2b \\
\frac{1}{2} &= b
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{A} = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid b = \frac{1}{2}\}$, representa una recta en $\mathbb{R}^2$.

d) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = |z|^2\}$

Solución: Sea $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned}
\bar{z} + z &= a - bi + a + bi \\
a^2 + b^2 &= 2a \\
a^2 - 2a + 1 + b^2 &= 1 \\
(a - 1)^2 + b^2 &= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{A} = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid (a - 1)^2 + b^2 = 1\}$, representa una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

e) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid |(1+i)z - (1+3i)| \leq 1\}$

Solución: Sea $z = a + bi$

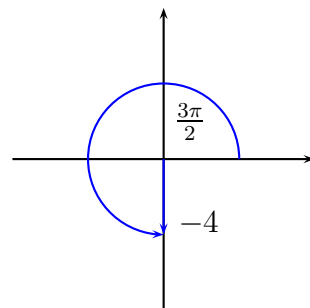
$$\begin{aligned}
 |(1+i)z - (1+3i)| &\leq 1 \\
 |(1+i) \cdot (a+bi) - (1+3i)| &\leq 1 \\
 |a+bi+ai-b-1-3i| &\leq 1 \\
 |(a-b-1) + (a+b-3)i| &\leq 1 \\
 \sqrt{(a-b-1)^2 + (a+b-3)^2} &\leq 1 \quad /()^2 \\
 (a-b-1)^2 + (a+b-3)^2 &\leq 1 \quad /()^2 \\
 a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a + 2b + b^2 + a^2 + 9 + 2ab - 6a - 6b &\leq 1 \\
 2a^2 - 8a + 2b^2 - 4b &\leq -9 \quad / \div 2 \\
 a^2 - 4a + b^2 - 2b &\leq -\frac{9}{2} \\
 (a-2)^2 - 4 + (b-1)^2 - 1 &\leq -\frac{9}{2} \\
 (a-2)^2 + (b-1)^2 &\leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{A} = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid (a-2)^2 + (b-1)^2 \leq \frac{1}{2}\}$, representa un disco de centro $(2, 1)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 117 Encontrar el $\text{Arg}(z)$ en cada caso

a) $z = -4i$

Por lo tanto $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{2}$



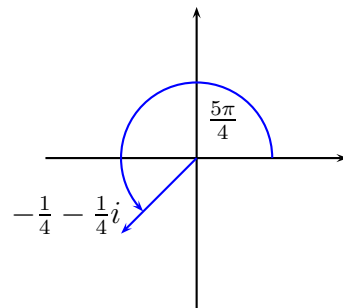
b) $z = \frac{i}{-2-2i}$

$$z = \frac{i}{-2-2i} \cdot \frac{-2+2i}{-2+2i} = \frac{-2-2i}{4+4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$\text{tg}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}}\right) = \text{tg}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

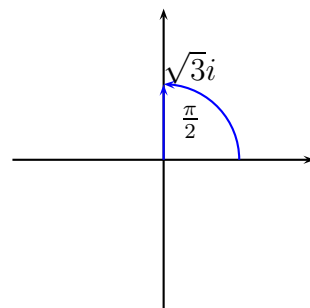
Pero el número complejo, esta en el tercer cuadrante luego

$$\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{4}$$



Ejemplo 118 Escriba en forma polar en cada caso

a) $z = \sqrt{3}i$



Por lo tanto $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$, $|z| = \sqrt{3}$

$$z = \sqrt{3} \cdot cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

b) $z = \frac{i}{-2-2i}$

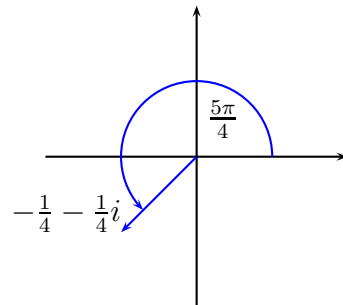
$$z = \frac{i}{-2-2i} \cdot \frac{-2+2i}{-2+2i} = \frac{-2-2i}{4+4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

Veamos ahora su módulo

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

De lo cual obtenemos

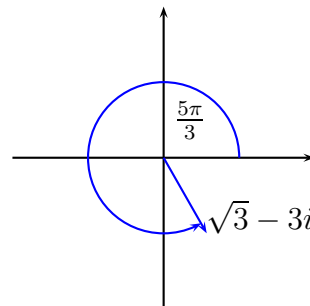
$$z = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$



Ejemplo 119 Encuentre el valor de:

a) $(\sqrt{3} - 3i)^6$

Solución: Sea $z = \sqrt{3} - 3i$, primero graficaremos para observar el cuadrante en que se encuentra



Además tenemos que

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{3}}\right) = -60$$

y el número complejo está en el cuarto cuadrante, luego $Arg(z) = \frac{5\pi}{3}$. El módulo es $|z| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}$. Veamos ahora su potencia

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - 3i)^6 &= \left(2 \cdot \sqrt{3} \cdot cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^6 = 2^6 \cdot 3^{\frac{6}{2}} \cdot cis\left(\frac{5 \cdot 6\pi}{3}\right) \\ &= 2^6 \cdot 3^3 \cdot cis(10\pi) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot (\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)) = 2^6 \cdot 3^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\sqrt{3} - 3i)^6 = 1728$.

b) $(1 + i)^{30}$

Solución: Sea $z = 1 + i$, note que está en el primer cuadrante y que $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$, luego tenemos $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$. además su módulo es $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Con lo cual obtenemos $1 + i = 2^{\frac{1}{2}} \cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

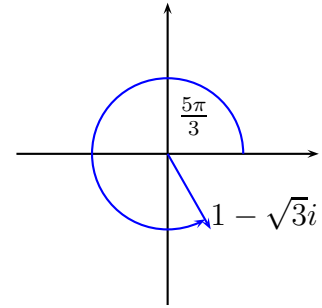
Reemplazando

$$\begin{aligned}(1+i)^{30} &= 2^{\frac{30}{2}} \cdot \text{cis} \left(\frac{30\pi}{4} \right) = 2^{15} \cdot \text{cis} \left(\frac{15\pi}{2} \right) \\ &= 2^{15} \cdot \text{cis} \left(\frac{3\pi}{2} \right) = 2^{15} \cdot \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que $(1+i)^{30} = 2^{15} \cdot (0-i) = -2^{15}i$

c) $(1 - \sqrt{3}i)^5$

Solución: Sea $z = 1 - \sqrt{3}i$, $\text{tg}^{-1} \left(\frac{-\sqrt{3}}{1} \right) = -60$.



Por lo tanto $\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{3}$ y $|z| = \sqrt{1+3} = 2$.

Reemplazando

$$\begin{aligned}(1 - \sqrt{3}i)^5 &= \left(2 \cdot \text{cis} \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right)^5 = 2^5 \cdot \text{cis} \left(\frac{25\pi}{3} \right) \\ &= 2^5 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) \\ z^5 &= 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right)\end{aligned}$$

Luego obtenemos $(1 - \sqrt{3}i)^5 = 2^4 \cdot (1 + \sqrt{3}i)$

Ejemplo 120 Determinar todos los $z \in \mathbb{C}$ tal que: $\left(\frac{1-z}{2z+i} \right)^4 = 1$

Solución:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-z}{2z+i} \right)^4 &= 1 = 1\text{cis}(0) \\ \frac{1-z}{2z+i} &= \text{cis} \left(\frac{2k\pi}{4} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3\end{aligned}$$

Luego despejando z tenemos

$$\begin{aligned}1-z &= \text{cis} \left(\frac{2k\pi}{4} \right) (2z+i) \\ (1+2\text{cis} \left(\frac{2k\pi}{4} \right))z &= 1 - i\text{cis} \left(\frac{2k\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

Ahora veremos las cuatro posibilidades

- $k = 0$, $\text{cis}(0) = 1$.

Reemplazamos obtenemos $3z = 1 - i$, luego $z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$.

- $k = 1, \quad \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

Reemplazamos obtenemos $(1 + 2i)z = 2$, luego

$$z = 2 \cdot (1 + 2i)^{-1} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$$

- $k = 2, \quad \text{cis}(\pi) = -1$

Reemplazamos obtenemos $-z = 1 + i$, luego $z = -1 - i$.

- $k = 3, \quad \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$

Reemplazamos obtenemos $(1 - 2i)z = 0$, luego $z = 0$

Por lo tanto $z \in \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i, \quad \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i, \quad -1 - i, \quad 0 + 0i\right\}$

Ejemplo 121 Resuelva en los siguientes casos

a) $z^2 = 2i$

Solución: Como $2i = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$z_k = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right); \quad k = 0, 1$$

Si $k = 0, \quad z_0 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 1 + i$

Si $k = 1, \quad z_1 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -1 - i.$

Por lo tanto el conjunto solución es

$$S = \{1 + i, -1 - i\}$$

b) $z^6 = 8$

Solución: Se tiene $8 = 8\text{cis}(0)$

$$z_k = \sqrt[6]{8} \cdot \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{6}\right); \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Si $k = 0, \quad z_0 = \sqrt[6]{8} \cdot \text{cis}(0) = \sqrt[6]{8} \cdot 1 = \sqrt[6]{8}$

Si $k = 1, \quad z_1 = \sqrt[6]{8} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{8} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Si $k = 2, \quad z_2 = \sqrt[6]{8} \cdot \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{8} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Si $k = 3, \quad z_3 = \sqrt[6]{8} \cdot \text{cis}(\pi) = \sqrt[6]{8} \cdot -1 = -\sqrt[6]{8}$

Si $k = 4, \quad z_4 = \sqrt[6]{8} \cdot \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{8} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Si $k = 5$, $z_5 = \sqrt[6]{8} \cdot \text{cis} \left(\frac{5\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{8} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$.

Por lo tanto el conjunto solución es

$$S = \left\{ \pm \sqrt[6]{8}, \pm \sqrt[6]{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right), \pm \sqrt[6]{8} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\}$$

c) $z^3 = -1 + i$

Solución: Como $-1 + i = \sqrt{2} \text{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right)$

$$z_k = \sqrt[6]{2} \cdot \text{cis} \left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right); \quad k = 0, 1, 2$$

Si $k = 0$ $z_0 = \sqrt[6]{2} \cdot \text{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$

Si $k = 1$ $z_1 = \sqrt[6]{2} \cdot \text{cis} \left(\frac{11\pi}{12} \right)$

Si $k = 2$ $z_2 = \sqrt[6]{2} \cdot \text{cis} \left(\frac{19\pi}{12} \right)$

Por lo tanto el conjunto solución es

$$S = \left\{ \sqrt[6]{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right), \sqrt[6]{2} \text{cis} \left(\frac{11\pi}{12} \right), \sqrt[6]{2} \text{cis} \left(\frac{19\pi}{12} \right) \right\}$$

Ejemplo 122 ¿El número 47 es primo en $\mathbb{Z}[i]$? Justifique

Solución: Sean $z_1 = a + bi$, $w = c + di$, no unidades, tales que

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 47 \quad / \parallel \parallel \\ \|z\| \cdot \|w\| &= \|47\| \\ \|z\| \cdot \|w\| &= 47^2 \end{aligned}$$

Considerando que son positivo y 47 es primo en $\mathbb{Z}$ tenemos

$$\|z\| = 47 \quad \wedge \quad \|w\| = 47$$

Supongamos

$$\begin{aligned} \|z\| &= 47 \\ a^2 + b^2 &= 47 \\ a^2 + b^2 &\equiv 0 \pmod{47} \\ a_1^2 &\equiv -b_1^2 \pmod{47} \quad / \cdot b_1^{-2}, b_1 \neq 0 \\ a_1^2 \cdot b_1^{-2} &\equiv -1 \pmod{47} \\ (a_1 \cdot b_1^{-1})^2 &\equiv -1 \pmod{47} \end{aligned}$$

Luego -1 es un cuadrado módulo 47. Por otro lado, determine si es un cuadrado con el símbolo de Legendre

$$\left(\frac{-1}{47}\right) = (-1)^{\frac{47-1}{2}} = -1$$

Lo que es una contradicción.

Por lo tanto 47 es primo en $\mathbb{Z}[i]$

Ejemplo 123 *Determine si $7 + 4i$ es primo en $\mathbb{Z}[i]$*

Solución: Sean $z_1 = a + bi$, $w = c + di$ no unidades, tales que

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 7 + 4i \quad / \| \quad \| \\ \|z\| \cdot \|w\| &= \|7 + 4i\| \\ \|z\| \cdot \|w\| &= 65 = 13 \cdot 5 \end{aligned}$$

Salvo orden obtenemos

$$\begin{aligned} \|z\| = 5 \quad \wedge \quad \|w\| = 13 \\ a^2 + b^2 = 5 \quad \wedge \quad c^2 + d^2 = 13 \end{aligned}$$

Una solución es

$$7 + 4i = (1 + 2i) \cdot (3 - 2i)$$

Por lo tanto $7 + 4i$ no es primo en $\mathbb{Z}[i]$.