Capítulo 3

Formas τ-lineal

La necesidad de estudiar las formas multilineal esta íntimamente relacionado con cálculo vectorial, una de las funciones multilineal con la cual primero nos relacionamos es el determinante.

En este capitulo enfatizaremos en las bi-lineales y las sesqui-lineales

3.1. Formas Bilineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, tal que $2 \neq 0$ y $f : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ una función.

Se dice que f es una `forma bilineal` si y sólo si:

1. $f(v + \alpha v', w) = f(v, w) + \alpha f(v', w), \quad$ para todo $v, v' \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{K}$.
2. $f(v, w + \alpha w') = f(v, w) + \alpha f(v, w'), \quad$ para todo $v \in V; w, w' \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

Ejemplo 18 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Demostrar que f es una forma bilineal

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}^2$, luego tenemos

i)

$$\begin{aligned}
f(x + \alpha x', y) &= f((x_1, x_2) + \alpha(x_1', x_2'), (y_1, y_2)) \\
&= f((x_1 + \alpha x_1', x_2 + \alpha x_2'), (y_1, y_2)) \\
&= (x_1 + \alpha x_1')y_1 + (x_2 + \alpha x_2')y_2 \\
&= x_1 y_1 + \alpha x_1' y_1 + x_2 y_2 + \alpha x_2' y_2 \\
&= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \alpha(x_1' y_1 + x_2' y_2) \\
&= f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \alpha f((x_1', x_2'), (y_1, y_2)) \\
&= f(x, y) + \alpha f(x', y)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
f(x, y+\alpha y') &= f((x_1,x_2),(y_1,y_2)+\alpha(y_1',y_2')) \\
&= f((x_1,x_2),(y_1+\alpha y_1', y_2+\alpha y_2')) \\
&= x_1y_1+\alpha x_1y_1'+x_2y_2+\alpha x_2y_2' \\
&= x_1y_1+x_2y_2+\alpha(x_1y_1'+x_2y_2') \\
&= f(x,y)+\alpha f(x,y')
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es una forma bilineal.

Ejemplo 19 *Sea* $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$$

Demostrar que f *es una forma bilineal.*

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}^2$, luego tenemos

i)

$$\begin{aligned}
f(x+\alpha x', y) &= f((x_1,x_2)+\alpha(x_1',x_2'),(y_1,y_2)) \\
&= f((x_1+\alpha x_1', x_2+\alpha x_2'),(y_1,y_2)) \\
&= (x_1+\alpha x_1')y_2-(x_2+\alpha x_2')y_1 \\
&= x_1y_2+\alpha x_1'y_2-x_2y_1-\alpha x_2'y_1 \\
&= x_1y_2-x_2y_1+\alpha(x_1'y_2-x_2'y_1) \\
&= f((x_1,x_2),(y_1,y_2))+\alpha f((x_1',x_2'),(y_1,y_2)) \\
&= f(x,y)+\alpha f(x',y)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
f(x, y+\alpha y') &= f((x_1,x_2),(y_1,y_2)+\alpha(y_1',y_2')) \\
&= f((x_1,x_2),(y_1+\alpha y_1', y_2+\alpha y_2')) \\
&= x_1y_2+\alpha x_1y_2'-x_2y_1-\alpha x_2y_1' \\
&= x_1y_2-x_2y_1+\alpha(x_1y_2'-x_2y_1') \\
&= f(x,y)+\alpha f(x,y')
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es una forma bilineal.

Ejercicio 20 *Demuestre que* $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que*

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

es una forma bilineal.

Definición 16 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, se denota por*

$$V^* = L(V,\mathbb{K}) = \{f : V \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es lineal } \}.$$

el Espacio Dual*.*

Ejercicio 21 *Sean $f, g \in V^*$ y*

$$\begin{array}{rccl} f \times g : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (v,w) & \longmapsto & f(v)\cdot g(w) \end{array}$$

Demuestre que $f \times g$ es una forma bilineal.

Ejercicio 22 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f \in V^*$, $g \in W^*$, entonces*

$$\begin{array}{rccl} f \times g : & V \times W & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (v,w) & \longmapsto & f(v)\cdot g(w) \end{array}$$

Demuestre que $f \times g$ es una forma bilineal.

Ejemplo 23 *Un caso particular, del ejercicio anterior lo tenemos con, dada las transformaciones lineales*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{tal que } f(x) = 3x_1 + 2x_2,$$

y

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{tal que } g(y) = 7y_3 + y_2 + 5y_1.$$

Luego

$$\begin{array}{rccl} f \times g : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x_1+2x_2)(7y_3+y_2+5y_1) \end{array}$$

es bilineal.

Notación: Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales,

$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) = \{f : V \times W \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es una forma bilineal } \}$$

Propiedad 44 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, $v_0 \in V, w_0 \in W$ entonces*

$$\begin{array}{rccl} f_{(v_0,\ )} : & W & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & w & \longmapsto & f(v_0,w) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f_{(\ ,w_0)} : & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & v & \longmapsto & f(v,w_0) \end{array}$$

son transformaciones lineales

Demostración: es inmediata. $\square$

Corolario 45 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, $v_1, v_2, \cdots v_r \in V$ entonces*

$$\begin{array}{rccl} f_{v_1,v_2,\cdots,v_r}: & W & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ & w & \longmapsto & (f(v_1,w), f(v_2,w), \cdot, f(v_r,w)) \end{array}$$

es una transformación lineal.

Propiedad 46 *Sean V, W dos espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) \text{ es un } \mathbb{K} - \text{espacio vectorial.}$$

es decir,

$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) \leq F(V \times W, \mathbb{K})$$

Definición 17 *Sea $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$.*

Se dice que f es una **forma bilineal simétrica** *si y sólo si*

$$(\forall v, w \in V)(f(v,w) = f(w,v)).$$

Se dice que f es una **forma bilineal antisimétrica** *si y sólo si*

$$(\forall v, w \in V)(f(v,w) = -f(w,v)).$$

Ejemplo 24

1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x,y) = \sum x_i y_i,$$

   luego

$$f(x,y) = \sum x_i y_i = \sum y_i x_i = f(y,x).$$

   Por lo tanto f es una forma bilineal simétrica.

2. *Sea $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, entonces*

$$\begin{array}{rccl} F := f \times f: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x) \cdot f(y) \end{array}$$

   $f \times f$ es una forma bilineal simétrica.

3. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$,*

   Dado $x, y \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$f(y,x) = y_1 x_2 - y_2 x_1 = x_2 y_1 - x_1 y_2 = -(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -f(x,y)$$

   f es una forma bilineal antisimétrica.

4. *Sea $f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$, entonces*

$$\begin{array}{rlcl} G: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x)\cdot g(y) - f(y)\cdot g(x) \end{array}$$

G es una forma bilineal antisimétrica.

Notación: Sean V un $\mathbb{K}$-espacios vectoriales,
$Bil_s(V \times V, \mathbb{K}) = \{f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \mid f$ es una forma bilineal simétrica $\}$.
$Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) = \{f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \mid f$ es una forma bilineal antisimétrica $\}$.

Propiedad 47 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

$$Bil_s(V \times V, \mathbb{K}) \leq Bil(V \times V, \mathbb{K})$$

$$Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) \leq Bil(V \times V, \mathbb{K})$$

Propiedad 48 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $2 \neq 0$.*

$$Bil_s(V \times V, \mathbb{K}) \oplus Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) = Bil(V \times V, \mathbb{K})$$

Demostración: Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$, una forma bilineal, entonces tenemos que

$$\begin{array}{rlcl} f_s: & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) + f(y,x) \end{array}$$

es una forma bilineal simétrica, además

$$\begin{array}{rlcl} f_a: & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) - f(y,x) \end{array}$$

es una forma bilineal antisimétrica.

Luego tenemos que

$$f_s(x,y) + f_a(x,y) = 2f(x,y)$$

Además si f es una forma simétrica y antisimétrica, tenemos que

$$f(y,x) = f(x,y) = -f(y,x)$$

luego la función es nula. $\square$

3.1.1. Matriz Asociada

Sea $f \in L(V, \mathbb{R})$, y $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$, una base de V, entonces dado $v \in V$ existe escalares tales que $v = \sum \alpha_i v_i$ luego

$$f(v) = f\left(\sum \alpha_i v_i\right) = \sum \alpha_i f(v_i) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \cdot \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_r) \end{pmatrix}$$

Ahora consideremos $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, y podemos realizar algo similar, para ello sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ base de V y $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_s\}$ base de W. Luego dado $v \in V, w \in W$ tenemos que existen los escalares tales que

$$v = \sum^{r} \alpha_i v_i; \quad w = \sum^{s} \beta_j w_j,$$

de donde se sigue que

$$f(v, w) = f\left(\sum^{r} \alpha_i v_i, w\right) = \sum^{r} \alpha_i f(v_i, w).$$

Luego

$$[f(v, w)] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \cdot \begin{pmatrix} f(v_1, w) \\ \vdots \\ f(v_r, w) \end{pmatrix} = [v]_B^t \cdot \begin{pmatrix} \sum^{s} \beta_j f(v_1, w_j) \\ \sum^{s} \beta_j f(v_2, w_j) \\ \vdots \\ \sum^{s} \beta_j f(v_r, w_j) \end{pmatrix}$$

$$= [v]_B^t \cdot \begin{pmatrix} f(v_1, w_1) & f(v_1, w_2) & \cdots & f(v_1, w_s) \\ \vdots & & & \\ f(v_r, w_1) & f(v_r, w_2) & \cdots & f(v_r, w_s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}$$

$$= [v]_B^t \cdot [f(v_i, w_j)]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} \cdot [w]_{\mathcal{C}}$$

Lo anterior, nos permite definir lo siguiente con la respectiva propiedad

Definición 18 *Sean $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, $\mathcal{B}$ una base ordenada de V y $\mathcal{C}$ una base ordenada de W.*

Se define la matriz asociada a la forma bilineal por

$$[f]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} = [(f(v_i, w_j))_{ij}]_{r \times s},$$

donde $dim(V) = r$ y $dim(W) = s$.

Si $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$ y $\mathcal{C}$ una base ordenada de V, entonces denotamos simplemente.

$$[f]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}$$

Propiedad 49 *Sea $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, entonces*

$$[f(v,w)] = [v]_{\mathcal{B}}^t \cdot [f]_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}} \cdot [w]_{\mathcal{C}}.$$

Ejemplo 25 *Dada la forma bilineal*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) \end{array}$$

Determina la matriz asociada en la base canónica $\mathcal{C}$.

Solución: Veamos los valores en

$$\begin{array}{rcr} f(e_1,e_1) & = & 1 \\ f(e_1,e_2) & = & 1 \\ f(e_2,e_1) & = & -1 \\ f(e_2,e_2) & = & -1 \end{array}$$

Por lo tanto

$$[f]_{\mathcal{C}} = [b]_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

además tenemos que

$$f(e_1,e_2) = -f(e_2,e_1),$$

y además

$$(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) = [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 26 *Dada la forma bilineal*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x_1y_1 + x_2y_2 \end{array}$$

Determina la matriz asociada en la base canónica $\mathcal{C}$.

Solución: En este caso tenemos que luego

$$[f]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y finalmente se tiene

$$x_1y_1 + x_2y_2 = [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Propiedad 50 *Sean $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$ y $\mathcal{B}$ una base ordenada de V, entonces*

1. *f es simétrica si y sólo si $[f]_{\mathcal{B}}$ es simétrica*

2. *f es antisimétrica si y sólo si $[f]_{\mathcal{B}}$ es antisimétrica*

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V

1. Si f es simétrica,luego $f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i)$, por lo tanto la matriz es simétrica,
   En el otro sentido, si $[f]_\mathcal{B}$ es simétrica, luego $f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i)$, sean $x, y \in V$
$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\left(\sum x_i v_i, \sum y_j v_j\right) = \sum x_i y_j f(v_i, v_j) \\ &= \sum x_i y_j f(v_j, v_i) = f\left(\sum y_j v_j, \sum x_i v_i\right) \\ &= f(y,x) \end{aligned}$$

2. Si f es antisimétrica,luego $f(v_i, v_j) = -f(v_j, v_i)$, por lo tanto la matriz es antisimétrica,
   En el otro sentido, si $[f]_\mathcal{B}$ es antisimétrica, luego $f(v_i, v_j) = -f(v_j, v_i)$, sean $x, y \in V$
$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\left(\sum x_i v_i, \sum y_j v_j\right) = \sum x_i y_j f(v_i, v_j) \\ &= -\sum x_i y_j f(v_j, v_i) = -f\left(\sum y_j v_j, \sum x_i v_i\right) \\ &= -f(y,x) \end{aligned}$$

$\square$

Propiedad 51 *Sean $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, las bases ordenadas $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V y $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ bases ordenadas de W, entonces:*
$$[f]_{\mathcal{B}' \times \mathcal{C}'} = ([Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^t \cdot [f]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} \cdot [Id]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}.$$
En particular se tiene $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}, \mathcal{B}$ bases ordenadas de V, entonces:
$$[f]_\mathcal{B} = ([Id]_\mathcal{B}^\mathcal{C})^t \cdot [f]_\mathcal{C} \cdot [Id]_\mathcal{B}^\mathcal{C}.$$

Demostración:
$$f(v, w) = ([v]_\mathcal{B})^t \cdot [f]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} \cdot [w]_\mathcal{C},$$
pero
$$[w]_\mathcal{C} = [Id]_{\mathcal{C}'}^\mathcal{C} \cdot [w]_{\mathcal{C}'}, \quad [v]_\mathcal{B} = [Id]_{\mathcal{B}'}^\mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}'},$$
luego
$$f(v, w) = [v]_{\mathcal{B}'}^t \cdot ([Id]_{B'}^B)^t \cdot [f]_{B \times \mathcal{C}} \cdot [Id]_{\mathcal{C}'}^\mathcal{C} \cdot [w]_{\mathcal{C}'}$$
con lo cual obtenemos
$$[f]_{B' \times \mathcal{C}'} = ([Id]_{\mathcal{B}'}^\mathcal{B})^t \cdot [f]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} \cdot [Id]_{\mathcal{C}'}^\mathcal{C}.$$

$\square$

Observación: Note que la segunda parte de la propiedad anterior define una relación de equivalencia en $M_n(\mathbb{K})$
$$A \sim B \Longleftrightarrow (\exists P \in GL_n(\mathbb{K}))\left(B = P^t \cdot A \cdot P\right)$$

Definición 19 *Sea $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$, tal que la dimensión de V es finita*
Se dice que f es **`no degenerada`** *si y sólo si $det([f]_B) \neq 0$, donde B es una base de V.*
En caso contrario se dice que f es **`degenerada`** *o bien f es una* **`forma degenerada`**.

Ejemplo 27 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que*

$$f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2,$$

Demostrar que f es una forma bilineal simétrica no degenerada

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, luego se tiene que:

1. f es simétrica pues

$$\begin{aligned} f(y, x) &= y_1x_1 - y_2x_2 \\ &= x_1y_1 - x_2y_2 \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

2. f es bilineal, basta probar un sola linealidad, ya que es simétrica.

$$\begin{aligned} f(x + \alpha x', y) &= f((x_1, x_2) + \alpha(x'_1, x'_2), (y_1, y_2)) \\ &= f((x_1 + \alpha x'_1, x_2 + \alpha x'_2), (y_1, y_2)) \\ &= (x_1 + \alpha x'_1)y_1 - (x_2 + \alpha x'_2)y_2 \\ &= x_1y_1 + \alpha x'_1y_1 - x_2y_2 - \alpha x'_2y_2 \\ &= x_1y_1 - x_2y_2 + \alpha(x'_1y_1 - x'_2y_2) \\ &= f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \alpha f((x'_1, x'_2), (y_1, y_2)) \\ &= f(x, y) + \alpha f(x', y) \end{aligned}$$

3. f es no degenerada, para ello sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$, luego

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad det([f]_{\mathcal{C}}) = -1 \neq 0$$

Ejercicio 28 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que*

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

Demuestre que

1. *f es bilineal*
2. *f es simétrica*
3. *f es degenerada.*

Propiedad 52 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, D base de W y $B = \{v_1, v_2, \cdots v_r\}$ base de V entonces la matriz asociada a*

$$\begin{array}{rccl} f_{v_1,v_2,\cdots,v_r} : & W & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ & w & \longmapsto & (f(v_1, w), f(v_2, w), \cdot, f(v_r, w)) \end{array}$$

en la base D es

$$[f_{v_1,v_2,\cdots,v_r}]_D^C = [f]_{B\times D}$$

Además si f es no degenerada entonces $f_{v_1,v_2,\cdots,v_r}$ es un isomorfismo

Definición 20 (Ortogonal) *Sean $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ y $S \subseteq V$, no vacío.*

Se define el ortogonal S del siguiente modo:

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid (\forall u \in S)(f(u, v) = 0)\}.$$

Note que la definición incluye el caso que $S \leq V$.

Observación: la definición se puede ampliar a una bilineal arbitraria, en cuyo caso el ortogonal debe diferenciarse entre el ortogonal izquierdo del ortogonal derecho.

Sean $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$ y $S \subseteq V$, no vacío.

Se define el ortogonal a izquierda de S del siguiente modo:

$$S^{\perp}_{izq} = \{v \in V \mid (\forall u \in S)(f(v, u) = 0)\}.$$

Se define el ortogonal a derecha de S del siguiente modo:

$$S^{\perp}_{der} = \{v \in V \mid (\forall u \in S)(f(u, v) = 0)\}.$$

Propiedad 53 *Sea $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$, $U \leq V$ y B es una base de U entonces*

$$U^{\perp} = B^{\perp} \leq V$$

Demostración: Veremos que, si $v \in U^{\perp}$, luego se tiene que $(\forall u \in U)(f(u, v) = 0)$, en particular para un subconjunto, luego $(\forall u \in B)(f(u, v) = 0)$, por lo tanto $v \in B^{\perp}$.

La otra contención se tiene que, dado $v \in B^{\perp}$ luego, $(\forall u \in B)(f(u, v) = 0)$.

Si $x \in U$, se tiene que

$$x = \sum \alpha_i u_i$$

donde $u_i \in B$ y $\alpha_i \in \mathbb{K}$, ya que B es base de U.

$$f(x, v) = f(\sum \alpha_i u_i, v) = \sum \alpha_i f(u_i, v) = 0$$

por lo tanto $v \in U^{\perp}$. $\square$

Ejemplo 29 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2,$$

y $U = \langle (1, -1) \rangle$. Determinar el espacio ortogonal a U.

Solución:

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{v \in V \ \mid \ f(v, (1, -1)) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid 0 = 0\} \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Así

$$\langle (1, -1) \rangle^{\perp} = \mathbb{R}^2.$$

Ejemplo 30 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

y $U = \langle(1, 1)\rangle$. Determine $U^\perp$.

Solución: Sea $x \in U^\perp$, luego

$$f(x, (1, 1)) = x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

luego

$$x \in U^\perp \Leftrightarrow x = \alpha(1, 1),$$

por tanto $U^\perp = \langle(1, 1)\rangle = U$.

Teorema 54 *Sea $U \leq V$, tal que $dim(V) < \infty$.*
Si $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ simétrica y no degenerada, entonces

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp).$$

Demostración: Sea $B' = \{u_1, \dots, u_r\}$ base de U, por propiedad anterior

$$v \in U^\perp \Leftrightarrow (\forall u \in B')(f(u, v) = 0$$

Al extender la base B' de U a la base B de V, tenemos la matriz asociada correspondiente $[f]_B$, con ello podemos volver a reescribir la condición que $v \in U^\perp$, del siguiente modo

$$f(u_i, v) = [u_i]_B^t \cdot [f]_B \cdot [v]_B = 0$$

Lo cual corresponde a sistema de ecuaciones, cuyas filas de la matriz del sistema son:

$$[u_i]_B^t \cdot [f]_B,$$

Como son filas de una matriz invertible, luego el rango de la matriz del sistema es máximo.

De otro modo las filas son independiente, lo cual también se puede demostrar directamente, del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\sum(\beta_i[u_i]_B^t \cdot [f]_B) &= \vec{0} \\
\left(\sum \beta_i[u_i]_B^t\right) \cdot [f]_B &= \vec{0} \qquad /([f]_B)^{-1} \\
\sum \beta_i[u_i]_B^t &= \vec{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\sum \beta_i u_i\right]_B^t &= \vec{0} \\
\sum \beta_i u_i &= \vec{0} \\
\beta_i &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $dim(U^\perp) = n - r = \dim(V) - dim(U)$, de donde obtenemos

$$dim(V) = dim(U) + dim(U^\perp).$$

$\square$

Ejemplo 31 *Sea $f : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$, una forma bilineal tal que*

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado el subespacio vectorial

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_5 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Determinar $U^{\perp}$ respecto a la forma bilineal f.

Solución: Es fácil obtener que

$$U = \langle (-3, 0, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 1, 1) \rangle$$

luego

$$B = \{(-3, 0, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 1, 1)\}$$

es una base de U, entonces

$$U^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f(x, u_1) = 0 \wedge f(x, u_2) = 0\}$$

Determine las ecuaciones, para el primer vector

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, u_1) \\ &= [x]^t_{\mathcal{C}} \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [x]^t_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= -4x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 2x_5. \end{aligned}$$

En el otro vector de la base

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, u_2) \\ &= [x]^t_{\mathcal{C}} \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [x]^t_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= 4x_1 + 8x_2 + 6x_4 + 3x_5. \end{aligned}$$

Luego debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -4x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 2x_5 & = & 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_4 + 3x_5 & = & 0 \end{array}\right|$$

Para ello vemos la escalonada del sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 6 & 3 \\ -4 & -4 & 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longmapsto$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longmapsto \Big([\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

luego

$$x_1 = -2x_3 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5,$$

y

$$x_2 = -x_3 - \frac{1}{4}x_5$$

Por lo tanto

$$U^\perp = \langle (2, -1, 1, 0, 0), (-3/2, 0, 0, 1, 0), (-1/4, -1/4, 0, 0, 1) \rangle.$$

3.1.2. Diagonalización Formas Bilineales

Definición 21 *Sea $x \in V$ no nulo y $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$.*

*Se dice que x es un vector **isótopro** si y sólo si $f(x, x) = 0$.*

*En caso contrario se dice que el vector es **anisótropo**, es decir $f(x, x) \neq 0$.*

*Un espacio es **totalmente isótropo** si dados dos vectores en el espacio estos son ortogonales.*

Ejemplo 32 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$.*

Determinaremos los vectores isótropos.

Solución: Sea $x \neq 0$ tal que

$$\begin{array}{c} f(x, x) = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{array}$$

entonces

$$x_1 = x_2 \ \vee \ x_1 = -x_2.$$

Luego el conjunto de vectores isótropos es:

$$\{\alpha(1, 1), \beta(1, -1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*\}.$$

Ejemplo 33 *Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3.$$

Determinaremos los vectores isótropos.

Dado $x \in \mathbb{R}^3$
$$f(x,x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0,$$
de donde $x_1^2 + x_3^2 = x_2^2$. Por lo tanto el conjunto de vectores isótropos es:
$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \mid x_1^2 + x_3^2 = x_2^2\}.$$

Propiedad 55 *Sea $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ no nula entonces f tiene un vector anisótropo.*

Demostración: Supongamos que todos los vectores son isótropos, es decir
$$(\forall x \in V)(f(x,x) = 0).$$

Sean $x, y \in V$, entonces
$$\begin{aligned}
0 &= f(x+y, x+y)\\
0 &= f(x+y, x) + f(x+y, y)\\
0 &= f(x,x) + f(y,x) + f(x,y) + f(y,y)\\
0 &= 2f(x,y)
\end{aligned}$$

luego
$$f(x,y) = 0,$$
y esto es una contradicción. □

Corolario 56 *Sea $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ y $B = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ base del espacio vectorial V. Si f es no nula entonces existen i, j tales que v_i o $v_i + v_j$ es un vector anisótropo.*

Demostración: Si v_i y $v_i + v_j$ son vector isótropo, entonces $f(v_i, v_j) = 0$, luego la matriz es nula en esta base B, y por ende f es nula □

Teorema 57 (Diagonalización método Ortogonal) *Sea V un espacio de dimensión finita, $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ y x_0 vector anisótropo entonces tenemos que*

1. $\dim < x_0 >^{\perp} = \dim V - 1$.
2. $V = < x_0 > \oplus < x_0 >^{\perp}$.

Demostración: Sea $U = \langle x_0 \rangle$, luego
$$U^{\perp} = \{y \in V \mid f(y, x_0) = 0\},$$
pero notemos lo siguientes
$$f_{(\ ,x_0)} : V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f_{(\ ,x_0)}(y) = f(y, x_0)$$
$f_{(\ ,x_0)}$ es una transformación lineal no nula ya que $T(x_0) = f(x_0, x_0) \neq 0$, luego $Imf_{(\ ,x_0)} = \mathbb{K}$ y por lo tanto $\dim \ker f_{(\ ,x_0)} = \dim V - 1$ de donde
$$\dim(U^{\perp}) = \dim(V) - 1.$$

ya que $U^{\perp} = \ker f_{(\ ,x_0)}$.

Además tenemos que $v \in U \cap U^{\perp}$, luego $v = tx_0$ y $0 = f(v,v) = t^2 f(x_0,x_0)$ con lo cual obtenemos que $t = 0$ y por lo tanto $v = 0$.

Así
$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

Observación: Sea $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$, no nula $\dim V < \infty$, por propiedad 55 tenemos que existe x_1 vector anisótropo. Luego por propiedad 57 tenemos que $V =< x_1 > \oplus < x_1 >^{\perp}$ sea B' una base de $U^{\perp}$, entonces $B = \{x_1\} \cup B'$ es una base de V, luego

$$[f]_B = \left[\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & [f]_{B'} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

donde $f : U^{\perp} \times U^{\perp}$ es bilineal y simétrica, $a = f(x_1,x_1)$.

Ejemplo 34 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Determinar $P \in GL_3(\mathbb{R})$ *tal que* $P^t AP$ *sea diagonal.*

Solución: Apliquemos el teorema anterior, para diagonalizar.
Primer Paso: Búsqueda de un vector anisótropo y su ortogonal

$$f(x,y) = [x]^t_{\mathcal{C}} \cdot A \cdot [y]_{\mathcal{C}},$$

y $f(e_1,e_1) = 1$.

Tomemos a $x = e_1$.
$$\langle e_1 \rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(e_1,v) = 0\}$$
como $v \in \mathbb{R}^3$, entonces $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, luego

$$[e_1]^t_{\mathcal{C}} \cdot A \cdot [v]_{\mathcal{C}} = 0,$$

donde
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 + 3v_2 + v_3 = 0.$$

Por lo tanto
$$\langle e_1 \rangle^{\perp} = \langle 3e_1 - e_2, -e_1 + e_3 \rangle.$$

Segundo Paso Búsqueda de otro vector anisótropo en $\langle e_1 \rangle^{\perp}$ y su espacio ortogonal.

Como $f(-e_1 + e_{3,} - e_1 + e_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,$

es decir, el vector $-e_1 + e_3$, es anisótropo.

Su espacio ortogonal es:

$$\langle -e_1+e_3\rangle^\perp = \{v \in \langle e_1\rangle^\perp \mid f(v,-e_1+e_3)=0,$$

luego

$$\langle e_1, -e_1+e_3\rangle^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v,e_1)=0 \wedge f(v,-e_1+e_3)=0\}$$

donde

$$f(v,e_1) = v_1+3v_2+v_3 \quad \text{y} \quad f(v,-e_1+e_3) = -4v_2+v_3$$

por tanto $\left.\begin{array}{rcl} v_1+3v_2+v_3 &=& 0\\ -4v_2+v_3 &=& 0 \end{array}\right|$ de donde $v_3 = 4v_2, v_1=-7v_2$, luego

$$\langle -e_1+e_3\rangle^\perp = \langle -7e_1+e_2+4e_3\rangle$$

Ahora $B=\{(1,0,0),(-1,0,1),(-7,1,4)\}$, de donde obtenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = [Id]_B^{\mathcal{C}}$$

Por último

$$\begin{aligned} P^tAP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ -7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 35 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determinar $P \in Gl_3(\mathbb{R})$, *tal que* P^tAP *sea diagonal*

Solución: Apliquemos el teorema anterior, para diagonalizar.
Primer Paso: Búsqueda de un vector anisótropo y su ortogonal

$$f(x,y) = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [y]_{\mathcal{C}},$$

y $f(e_1+e_2, e_1+e_2) = 2$.

Tomemos a $x = e_1+e_2$.

$$\langle e_1+e_2\rangle^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(e_1+e_2, v) = 0\}$$

como $v \in \mathbb{R}^3$, entonces $v = v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3$, luego

$$[e_1+e_2]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [v]_{\mathcal{C}} = 0,$$

donde

$$[\ 1 \quad 1 \quad 3\ ] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 + v_2 + 3v_3 = 0.$$

Por lo tanto

$$\langle e_1 \rangle^{\perp} = \langle e_1 - e_2, 3e_1 - e_3 \rangle.$$

Segundo Paso Búsqueda de otro vector anisótropo en $\langle e_1 + e_2 \rangle^{\perp}$ y su espacio ortogonal.

Como $f(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = [\ 1 \quad -1 \quad 0\ ] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2,$

es decir, el vector $e_1 - e_2$, es anisótropo.

Su espacio ortogonal es:

$$\langle e_1 - e_2 \rangle^{\perp} = \{ v \in \langle e_1 \rangle^{\perp} \mid f(v, e_1 - e_2) = 0,$$

luego

$$\langle e_1, e_1 - e_2 \rangle^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v, e_1) = 0 \wedge f(v, e_1 - e_2) = 0 \}$$

donde

$$f(v, e_1) = v_1 + v_2 + 3v_3 \quad \text{y} \quad f(v, e_1 - e_3) = -v_1 + v_2 + v_3$$

por tanto $\left. \begin{array}{rcl} v_1 + v_2 + 3v_3 & = & 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 & = & 0 \end{array} \right|$ de donde $v_2 = -2v_3, v_1 = -v_3$, luego

$$\langle e_1 - e_2 \rangle^{\perp} = \langle -e_1 - 2e_2 + e_3 \rangle$$

Ahora $B = \{(1, 0, 0), (1, -1, 0), (-1, -2, 1)\}$, de donde obtenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [Id]_B^{\mathcal{C}}$$

Por último

$$\begin{aligned} P^t A P &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 58 (Diagonalización Mediante Operaciones Elementales) *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ simétrica, entonces existe una matriz invertible P tal que $P^t A P$ es diagonal.*

Demostración: Sea A una matriz simétrica

Primer Caso: Supongamos que $a_{11} \neq 0$, aplicando las operaciones elementales filas

$$F_{i1}\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right), \forall i = 2, \dots, n,$$

y luego las correspondientes operaciones elementales columnas

$$C_{i1}=\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right),\forall i=2,\dots,n.$$

Luego

$$\left[\prod_{i=2}^{n}F_{i1}\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right)\right]\cdot A\cdot\left[\prod_{i=2}^{n}C_{i1}\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right)\right]=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Segundo Caso: Supongamos $a_{11}=0$, pero existe i tal que $a_{ii}\neq 0$, luego aplicamos

$$F_{1i}\cdot A\cdot C_{1i}$$

es una matriz, que en la posición $(1,1)$ el coeficiente $a_{ii}\neq 0$. Luego aplicamos el Primer Caso.

Tercer Caso: Supongamos que todos los $a_{ii}=0$, sean $a_{ij}\neq 0$. Luego aplicamos

$$F_{ij}(1)\cdot A\cdot C_{ij}(1)$$

Es una matriz que en la posición (i,i) tiene por coeficiente a $2a_{ij}\neq 0$. Aplicando el Segundo Caso.

En cada caso se reduce a una matriz del tipo :

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$$

Y por inducción se obtiene que A es diagonalizable. $\square$

Observación: Note que el método inductivo, a concluir la posición $(1,1)$ antes de continuar a la otra posición.

Ejemplo 36 *Sea* $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

Diagonalizar usando operaciones elementales

Solución: Luego

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \underset{F_{31}(-1)}{\overset{F_{21}(-3)}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \underset{C_{31}(-1)}{\overset{C_{21}(-3)}{\longmapsto}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1\\ \hline 1 & -3 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \overset{F_{32}(\frac{-4}{7})}{\longmapsto} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} & 1\\ \hline 1 & -3 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \overset{C_{32}(\frac{-4}{7})}{\longmapsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} & 1 \\ \hline 1 & -3 & \frac{5}{7} & & & \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{7} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 37 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Diagonalizar usando operaciones elementales*

Solución: Solo marcaremos las operaciones filas

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{F_{12}(1)}{\longmapsto} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{C_{12}(1)}{\longmapsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{31}(-\frac{3}{2})}{\overset{F_{21}(-\frac{1}{2})}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \underset{C_{31}(-\frac{3}{2})}{\overset{C_{21}(-\frac{1}{2})}{\longmapsto}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \underset{C_{32}(-1)}{\overset{F_{32}(-1)}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Observación: Consideremos ahora la base canónica, $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, entonces la forma bilineal que tenemos es

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x,y) &= [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [y]_{\mathcal{C}} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$\mathcal{B}(x,y) = x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2.$$

En cambio, si consideramos la base $B = \{(1,1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (-1,-2,1)\}$, entonces la forma bilineal que obtenemos es

Sea $[x]_B = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$ e $[y]_B = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix}$ y además

$$[v]_{\mathcal{C}} = [Id]_B^{\mathcal{C}} \cdot [v]_B$$

se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x,y) &= [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [y]_{\mathcal{C}} \\ &= ([Id]_B^{\mathcal{C}} \cdot [x]_B)^t \cdot A \cdot [Id]_B^{\mathcal{C}} \cdot [y]_B \\ &= [x]_B^t \cdot ([Id]_B^{\mathcal{C}})^t \cdot A \cdot [Id]_B^{\mathcal{C}} \cdot [y]_B \end{aligned}$$

Aquí tenemos $\mathcal{B}$, la forma bilineal, escrita en la base B. Tomando el ejemplo anterior

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2y'_1 \\ -\frac{1}{2}y'_2 \\ -4y'_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x'_1y'_1 - \frac{1}{2}x'_2y'_2 - 4x'_3y'_3. \end{aligned}$$

3.1.3. Ejercicios

1. Sea $B : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $B(z,w) = 3z_1w_2 + 3z_2w_1$.

   Demostrar que B es una forma bilineal

2. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ y dada la función $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

   $$f(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

   a) Demostrar que f es una forma bilineal simétrica

   b) ¿Es f una forma no degenerada?

   c) ¿Existen un vectores isótropos?

3. Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por $\{1, \sin x, \cos x\}$ y la función

   $$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

   definida por

   $$f(p,q) = \int_0^{\pi/2} p(x)q(x)dx$$

   a) Demostrar que f es una forma bilineal simétrica *b*) ¿Es f una forma no degenerada?

c) Determinar $\langle \cos x \rangle^{\perp}$

4. Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal y los coeficiente de la matriz sean 0 o 1 o -1.

5. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ y dada la función $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(p, q) = \sum_{i=0}^{4} p^{(i)}(0) q^{(i)}(0)$$

a) Demostrar que f es una forma bilineal simétrica

b) ¿Es f una forma no degenerada?

6. Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^4$, tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

a) Determinar una base de $< e_1 + e_2, e_2 + 2e_3 + e_4 >^{\perp}$

b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

7. Sea $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida por

$$B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

y el espacio vectorial

$$\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 2x + y - z = 0\}$$

Determinar una base de $\mathbb{U}^{\perp}$.

8. Sea $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida por

$$B((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

   y el espacio vectorial

$$\mathbb{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x+y-z=0\}$$

   Determinar una base de $\mathbb{U}^\perp$.

9. Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $U =< e_1 + e_4, e_1 - e_3 >$. Determinar $U^\perp$

10. Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}_3[x] =< \mathcal{B} >$; con $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

    a) Hallar $< 1+x, 1-x^2 >^\perp$

    b) Hallar una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $[f]_{\mathcal{B}'}$ es diagonal.

11. Sean V y W espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y m respectivamente.

$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) = \{f : V \times W \to \mathbb{K} \quad | \quad f \text{ es una forma bilineal}\}.$$

    Demostrar $Bil(V \times W, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial y calcular su dimensión

12. Demostrar que dada una forma bilineal simétrica no degenerada, siempre existe un vector no isótropo.

13. Sea g una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

    En la base $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$, encuentre de dos maneras diferentes la matriz asociada a g.

14. Sea $V =< \sin(t), \cos(t) >$, h una forma bilineal definida por $h(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. Hallar la matriz de h, con respecto a la base $\{\sin(t), \cos(t)\}$.

15. Sea $V = M(n, \mathbb{C})$. Demostrar que $f(A, B) = n \cdot tr(AB) - tr(A)tr(B)$ es una forma bilineal simétrica sobre V,

    a) ¿f tiene vectores isótropos?

    b) ¿Existe un espacio isótropo para f?

    c) ¿Existe un espacio totalmente isótropos para f?

16. Sea f una forma bilineal sobre un espacio de dimensión finita entonces
    f es antisimétrica si y sólo si la matriz asociada a esta forma es antisimétrica

17. Sea $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por

    $$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$$

    a) Demostrar que B es una forma bilineal

    b) ¿B es una forma simétrica?

    c) Gráficas el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad B((x, y), (x, y)) = 0\}$

18. Sea $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por

    $$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

    a) Demostrar que B es una forma bilineal

    b) ¿B es una forma simétrica?

    c) Gráficas el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad B((x, y), (x, y)) = 0\}$

19. Sea $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica tal que

    $$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

    a) ¿f es degenerada?

    b) ¿f es positiva definida?

    c) Determinar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal y los elementos de ella sean $0, 1, -1$.

3.1.4. Problemas Propuestos

Problema 30.

Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida por

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d, a'x^3 + b'x^2 + c'x + d) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix}.$$

1. Determinar una base de $V =< \{1 - x, 3 + x - 2x^2\} >^{\perp}$.
2. Determinar la matriz asociada a f en la base $\{1 - x, x, 1 + x + x^2, x^3 - x^2\}$

Problema 31.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida por

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Determinar la matriz asociada a f en la base $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

Problema 32.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}_3[x] =< \mathcal{B} >$; con $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar $< 1 - x + x^2, 1 - x^2, 2 - x >^{\perp}$

Problema 33.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^5$, tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^5$. Determinar una base de $< e_1 + e_2, e_2 + 2e_3 + e_4 >^{\perp}$

Problema 34.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x+y = z \wedge 3x-2y+z = w\}$.

Determinar $U^{\perp}$

Problema 35.

Sea $V = M_{2\times 1}(\mathbb{R})$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(A, B) = \det(C)$, donde C es la matriz cuya primera columna es A y la segunda columna es B.

1. Demostrar que f es una forma bilineal.
2. Determinar si f es simétrica o antisimétrica ($f(A, B) = -f(B, A)$)
3. Determinar el conjunto vectores isótropos.

Problema 36.

Sean $U, W \leq V$, tales que $V = U\oplus, W$ y $f \in Bil(U \times U, \mathbb{K}), g \in Bil(W \times W, \mathbb{K})$, se define la función dada por $h(u_1 + w_1, u_2 + w_2) = f(u_1, u_2) + g(w_1, w_2)$, con $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$

1. Demostrar que $h \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$
2. Si f, g es simétrica entonces h es simétrica

Problema 37.

Sea $V = M_2(\mathbb{R})$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(A, B) = 2tr(AB) - tr(A)tr(B)$

1. Demostrar que es una forma bilineal simétrica
2. Determinar la matriz asociada en la base $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$
3. Determinar la matriz asociada en la base $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$

Problema 38.

Para cada una de las siguientes funciones. Determine si es una forma bilineal (y en caso afirmativo es) simétrica

1. $V = M_2(\mathbb{R})$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(A, B) = \det(AB) - \det(A)\det(B)$
2. $V = \mathbb{R}^3$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$

3.2. Formas Cuadráticas

Definición 22 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.*
*Una **forma cuadrática** Q sobre V es una función $Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que*

1. $(\forall t \in \mathbb{K})(\forall v \in V)(Q(t \cdot v) = t^2 Q(v))$
2. $B(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$ *es una forma bilineal simétrica asociada a Q.*

Propiedad 59 *Sea $B \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ entonces la función*

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & f(x) = B(x, x) \end{array}$$

es una forma cuadrática

Demostración: Verifiquemos que f es una forma cuadrática, sean $x, y \in V,\ t \in \mathbb{K}$

$$\begin{array}{rcl} f(tx) & = & B(tx, tx) \\ & = & t^2 B(x, x) \\ & = & t^2 f(x). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(x + y) - f(x) - f(y) & = & B(x + y, x + y) - B(x, x) - B(y, y) \\ & = & B(x, x + y) + B(y, x + y) - B(x, x) - B(y, y) \\ & = & B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) - B(x, x) - B(y, y) \\ & = & 2B(x, y) \end{array}$$

luego f es una forma cuadrática. $\square$

Ejemplo 38 *Dada la forma bilineal simétrica tenemos la forma cuadrática asociada*

1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, luego*
$$Q(x) = B(x, x) = x_1^2 + x_2^2.$$
2. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$, $B(x, y) = 2x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_2 y_2 - 4x_3 y_3$, luego*
$$Q(x) = 2x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 - 4x_3^2.$$
3. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$, luego*
$$Q(x) = 2x_1 x_2.$$

Propiedad 60 *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial.*

$$Q(V) = \{q : V \to \mathbb{K} \quad | \quad q \text{ es una forma cuadrática}\}.$$

Entonces $Q(V)$ es un $\mathbb{K}$- espacio vectorial
Además si V tiene dimensión finita entonces $Q(V)$ también tiene dimensión finita

Observación: Si $\mathcal{B}$ es una forma bilineal, entonces tenemos que

$$Q(x) = \mathcal{B}(x,x) = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot [\mathcal{B}]_{\mathcal{C}} \cdot [x]_{\mathcal{C}},$$

si $[\mathcal{B}]_{\mathcal{C}}$ es diagonal tenemos

$$Q(x) = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2, \quad \text{donde } [x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Note que algunos a_{ii} podrían ser ceros.

Propiedad 61 *Sea $Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática, entonces existe B base de V tal que*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2, \qquad [x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{K} - \{0\}$

Observación: Note que por cambio de base el rango de la matriz no cambia, ya que

$$[\mathcal{B}]_B = ([Id]_B^C)^t \cdot [\mathcal{B}]_C \cdot [Id]_B^C,$$

como $[Id]_B^C$ y $([Id]_B^C)^t$ son matrices invertibles, es decir, se están realizando operaciones elementales filas y columnas y a través de ellas el rango se mantiene. Así tenemos

$$Rg([\mathcal{B}]_B) = Rg([\mathcal{B}]_C) = r \leq n.$$

Por lo tanto, en cualquier base el rango de la matriz es el mismo, es decir. Si D y E son dos bases ordenadas tal que la matriz asociada a B es diagonal entonces

$$B(v,v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i^2$$

donde $[\alpha_i]$ y $[\beta_i]$ son las coordenadas de v respecto a las bases D, E respectivamente.

Definición 23 *Se dice que dos formas cuadráticas Q_1, Q_2 son* **`equivalentes`** *si y sólo si existe $\psi \in Aut(V)$ tal que*

$$Q_1(v) = Q_2(\psi(v)), \quad \forall v \in V.$$

Además note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1(v,w) &= \frac{1}{2}[Q_1(v+w) - Q_1(v) - Q_1(w)] \\
&= \frac{1}{2}[Q_2(\psi(v+w)) - Q_2(\psi(v)) - Q_2(\psi(w))] \\
&= \frac{1}{2}[Q_2(\psi(v)+\psi(w)) - Q_2(\psi(v)) - Q_2(\psi(w))] \\
&= \mathcal{B}_2(\psi(v), \psi(w)), \quad \forall v, w \in V.
\end{aligned}$$

Matricialmente:

$$[\mathcal{B}_2] = P^t[\mathcal{B}_1]P,$$

y con respecto a la base

$$[\mathcal{B}_2]_B = [\psi]_B^t[\mathcal{B}_1][\psi]_B.$$

Teorema 62 *Toda forma cuadrática sobre $\mathbb{C}$ de rango r es equivalente a:*

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2.$$

Demostración: Por la propiedad 61, tenemos que existe $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V tal que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2, \qquad [x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Además $\alpha_i = \mathcal{B}(v_i, v_i) = Q(v_i)$.

Sea $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_i^2 = \alpha_i$, reemplazando

$$\lambda_i^2 = Q(v_i),$$

luego

$$1 = \frac{1}{\lambda_i^2} Q(v_i) = Q\left(\frac{v_i}{\lambda_i}\right)$$

definamos ahora una nueva base,

$$B' = \left\{\frac{v_1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{v_r}{\lambda_r}, \ldots, \frac{v_n}{\lambda_n}\right\},$$

donde $\lambda_i = 1$, con $i = r+1, \cdots, n$.

Dado $x \in V$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} x &=& x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n &=& \sum x_i v_i \\ &=& \lambda_1 x_1 \frac{v_1}{\lambda_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{v_n}{\lambda_n} &=& \sum \lambda_i x_i \frac{v_i}{\lambda_i} \end{array}$$

con lo cual tenemos

$$[x]_{B'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}.$$

luego

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i^2 x_i^2) = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i x_i)^2 = \sum_{i=1}^{r} (x_i')^2.$$

$\square$

Teorema 63 *Sea Q una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}$, entonces Q es equivalente a una de la forma:*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 \qquad 0 \leq s \leq r$$

donde s es un número que solo depende de Q.

Demostración: Por la propiedad 61, tenemos que existe $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V tal que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} Q(v_i) x_i^2, \qquad [x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Reordenando la base de modo que, los primeros s elementos cumplen con $Q(v_i')$ son positivos y los últimos $Q(v_i')$ son negativos, definimos los escalares del siguiente modo

$$Q(v_i) > 0, \quad \forall i \leq s, \ \lambda_i = \sqrt{Q(v_i)}, \quad \lambda_i^2 = Q(v_i),$$

y además

$$Q(v_i) < 0, \quad s < i \leq r, \ \lambda_i = \sqrt{-Q(v_i)}, \quad -\lambda_i^2 = Q(v_i).$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^{s} (\lambda_i x_i)^2 - \sum_{i=s+1}^{r} (\lambda_i x_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s} (x_i')^2 - \sum_{i=s+1}^{r} (x_i')^2, \end{aligned}$$

donde

$$[x]_{B'} = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

además $B' = \left\{ \frac{v_1'}{\lambda_1}, \ldots, \frac{v_r'}{\lambda_r}, \ldots, \frac{v_n'}{\lambda_n} \right\}$.

Veamos la unicidad de s. Supongamos que existen dos bases ortogonales tal que

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s'} y_i^2 - \sum_{i=s'+1}^{r} y_i^2 \end{aligned}$$

donde

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B' = \{v_1'', \ldots, v_n''\}$$

y

$$[x]_{B'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad B^{''} = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

Definamos los espacios

$$W = \langle v_1'', \ldots, v_s'' \rangle, \quad U = \langle v_{s+1}'', \ldots, v_n'' \rangle; \qquad W' = \langle w_1, \ldots, w_{s'} \rangle, \quad U' = \langle w_{s'+1}, \ldots, w_n \rangle$$

Sea $x \in W \cap U'$ supongamos que $x \neq 0$, entonces
Como $x \in W$, $x = \sum_{i=1}^{s} x_i v_i$, con $x_{i_0} \neq 0$, luego

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 > 0.$$

Por otro lado tenemos $x \in U'$; $x = \sum_{i=s'+1}^{n} y_i w_i$, con $y_{i_0} \neq 0$, luego

$$Q(x) = -\sum_{i=s'+1}^{r} y_i^2 \leq 0,$$

por lo tanto es una contradicción, luego $W \cap U' = \{0\}$. Análogamente $W' \cap U = \{0\}$.
Ahora calculemos las dimensiones de los subespacios

$$dim(W + U') = s + n - s' \leq n$$

$$dim(W' + U) = s' + n - s \leq n$$

De lo cual obtenemos

$$s - s' \leq 0 \quad \wedge \quad s' - s \leq 0,$$

es decir, $s = s'$. □

Definición 24 *Sea $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática de rango r entonces se define la **signatura** de Q igual a $(s, r - s)$, donde s esta definida en el teorema anterior.*

Ejemplo 39 *Determinar la signatura de la forma cuadrática*

$$Q(x) = x_1(x_1 + 3x_2 + x_3) + x_2(3x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(x_1 - x_2 + 2x_3).$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$.

Solución: Notemos que

$$Q(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

Luego la matriz asociada en la base canónica es

$$[f_Q] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinemos la base y la signatura

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{31}(-1)}{\overset{F_{21}(-3)}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{C_{31}(-1)}{\overset{C_{21}(-3)}{\longmapsto}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{C_{32}(-\frac{4}{7})}{\overset{F_{32}(-\frac{4}{7})}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{array}\right] \underset{C_2(\frac{1}{\sqrt{7}})}{\overset{F_2(\frac{1}{\sqrt{7}})}{\longmapsto}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{array}\right] \underset{C_3(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}})}{\overset{F_3(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}})}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{\sqrt{161}} & -\frac{4}{\sqrt{161}} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}} \end{array}\right]$$

Luego tenemos que la signatura es $(2, 1)$ y la base correspondiente es

$$B = \left\{ (1,0,0), \left(\frac{12}{\sqrt{161}}, -\frac{4}{\sqrt{161}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}} \right), \left(-\frac{3}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, 0 \right) \right\}$$

3.2.1. Método de Gauss

Observación: Cada vez que hemos completamos un cuadrado, para obtener centro o un vértice de una cónica, hemos usado este método, de otro modo, al buscar el centro de

$$x^2 + 2x + y^2 + 3y - 7 = 0$$
$$(x+1)^2 - 1 + (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{2} - 7 = 0$$

El método de Gauss consiste en escribir la expresión como suma de cuadrado, de modo en cada etapa, la variable escogida no figure en el resto de la expresión, para ello desarrollemos el siguiente ejemplo

Dada la forma cuadrática

$$q(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + xz + z^2$$

Iniciaremos en la variable x

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= x^2 + xy + y^2 + xz + z^2 \\ &= x^2 + x(y+z) + y^2 + z^2 \\ &= \left(x + \frac{y+z}{2} \right)^2 - \left(\frac{y+z}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

A continuación reordenemos el resto de la expresión y continuamos con la variable y

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= \left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}\left(y^2-\frac{2}{3}yz\right)+\frac{3}{4}z^2 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}\left[\left(y-\frac{1}{3}z\right)^2-\frac{1}{9}z^2\right]+\frac{3}{4}z^2 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{1}{3}z\right)^2-\frac{1}{12}z^2+\frac{3}{4}z^2 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{1}{3}z\right)^2+\frac{2}{3}z^2 \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable correspondiente, tenemos que

$$q(v)=x_1^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{2}{3}x_3^2,$$

donde

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z \\ y-\frac{1}{3}z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Notemos que podemos encontrar, una base $\mathcal{B}$ que cumpla lo anterior, ya que la matriz es invertible.

$$[B]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [B]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

tal que

$$[B]_{\mathcal{C}}=[P]^t[B]_{\mathcal{B}}[P],$$

o de otro modo

$$[B]_{\mathcal{B}}=([P]^{-1})^t[B]_C[P]^{-1},$$

Si

$$P=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \qquad [v]_{\mathcal{B}}=P[v]_{\mathcal{C}}$$

o bien

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=[Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \qquad [v]_{\mathcal{C}}=P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$$

Luego

$$\mathcal{B}=\left\{v_1=(1,0,0),v_2=\left(-\frac{1}{2},1,0\right),v_3=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right)\right\}$$

Además

$$\begin{gathered} B(v_1,v_2)=0, \quad B(v_1,v_3)=0, \quad B(v_3,v_2)=0 \\ B(v_1,v_1)=1, \quad B(v_2,v_2)=\frac{3}{4}, \quad B(v_3,v_3)=\frac{2}{3}. \end{gathered}$$

En Resumen, al considerar la forma cuadrática, utilizamos el método de la eliminación de Gauss, de este modo se obtiene la matriz cambio base, y a partir de ella la base correspondiente.
Observación: El caso anterior se puede realizar siempre que una de las variables este al cuadrado, lo cual no siempre es cierto, (cuando la matriz asociada tiene la diagonal nula). En el caso que que no hay una variable al cuadrado se realiza algo similar, paras ello debemos tener presente lo siguiente

$$\begin{aligned} g(x,y) &= xy \\ &= \frac{1}{4}[4xy] \\ &= \frac{1}{4}[(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)] \\ &= \frac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2] \end{aligned}$$

Teorema 64 (Gauss) *Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces existe una base tal que*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2.$$

Demostración: Sea Q una forma cuadrática
Primer Caso: Supongamos que en Q existe un elemento del tipo x_i^2, es decir $a_{ii} \neq 0$ entonces reordenando tenemos

$$Q(x) = \lambda_i x_i^2 + x_i R(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n) + Q'(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots x_n)$$

Donde $R(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)$ es una expresión lineal que no contiene x_i y $Q'(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots x_n)$ es una forma cuadrática en las otras variables

$$\begin{aligned} Q(x) = \lambda_i \left(x_i + \frac{1}{2\lambda_i} R(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n) \right)^2 + Q'(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n) \\ - \frac{1}{4\lambda_i} R^2(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n) \end{aligned}$$

Recordemos que el producto de dos forma lineal es una forma cuadrática, y suma de cuadrática es cuadrática, luego tenemos el siguiente cambio de base

$$\begin{aligned} u_1 &= x_i + \frac{1}{2\lambda_i} R(x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n) \\ u_i &= x_1 \\ &\vdots \\ u_j &= x_j, \quad \forall j \in \{2,\dots,n\} - \{i\} \end{aligned}$$

Como R es una expresión lineal, luego es un cambio de variables lineal biunívoco.

Reemplazando obtenemos

$$Q(x) = \lambda_i u_1^2 + Q''(u_2, \ldots, u_n)$$

Luego obtenemos la forma cuadrática en una variable menos.
Segundo Caso: Suponemos que en Q no hay elementos del tipo x_i^2, es decir $a_{ii} = 0$ para todo i y $\lambda = a_{12} \neq 0$.

$$Q(x) = \lambda x_1 x_2 + x_1 R(x_3, \ldots, x_n) + x_2 S(x_3, \ldots, x_n) + Q'(x_3, \ldots, x_n)$$

Donde $R(x_3, \ldots, x_n), S(x_3, \ldots, x_n)$ son expresión lineal y $Q'((x_3, \ldots, x_n)$ es una forma cuadrática.

$$\begin{aligned} Q(x) &= \lambda \left(x_1 + \frac{S}{\lambda}\right)\left(x_2 + \frac{R}{\lambda}\right) - \frac{SR}{\lambda} + Q' \\ &= \frac{\lambda}{4}\left[\left(x_1 + x_2 + \frac{S+R}{\lambda}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{S-R}{\lambda}\right)^2\right] - \frac{SR}{\lambda} + Q' \end{aligned}$$

Así tenemos el cambio de base x_i

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 + x_2 + \frac{S+R}{\lambda} \\ u_2 &= x_1 - x_2 + \frac{S-R}{\lambda} \\ &\vdots \\ u_i &= x_i, \quad \forall i \in \{3, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Como R, S son expresión lineal, luego es un cambio de variables lineal biunívoco.

Reemplazando obtenemos

$$Q(x) = \lambda' u_1^2 - \lambda' u_2^2 + Q''(u_3, \ldots, u_n).$$

Inductivamente se concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 40 *Por el método de Gauss, diagonalizar la siguiente forma cuadrática (primer caso)*

$$g(x, y, z, w) = x^2 + xy + xw + z^2 + zw + w^2$$

Solución:

$$\begin{aligned} g(x, y, z, w) &= x^2 + xy + xw + z^2 + zw + w^2 \\ &= x^2 + x(y+z) + z^2 + zw + w^2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}(y+w)\right)^2 - \frac{1}{4}(y+w)^2 + z^2 + zw + w^2 \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + \frac{w}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(y+w)^2 + \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 - \frac{w^2}{4} + w^2 \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + \frac{w}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(y+w)^2 + \left(z + \frac{w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}w^2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
x' &= x + \frac{y}{2} + \frac{w}{2} \\
y' &= y + w \\
z' &= z + \frac{w}{2} \\
w' &= w
\end{aligned}$$

de donde

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{C}}$$

Así

$$q(v) = (x')^2 - \frac{1}{4}(y')^2 + (z')^2 + \frac{3}{4}(w')^2.$$

Ejemplo 41 *Por el método de Gauss, diagonalizar la siguiente forma cuadrática (primer caso).*

$$g(x,y,z,w) = xy + xz + z^2 + zy + w^2 + zw$$

Solución:

$$\begin{aligned}
g(x,y,z,w) &= xy + xz + z^2 + zy + w^2 + zw \\
&= z^2 + z(x+y+w) + xy + w^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+y+w}{2}\right)^2 + xy + w^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}[(x+y)^2 + 2(x+y)w + w^2] + xy + w^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2) - \frac{1}{2}(x+y)w + \frac{3}{4}w^2 + xy \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}\left(w^2 - \frac{4}{6}(x+y)w\right) \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{2}{6}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{12}(x+y)^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{1}{3}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}y^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{2}{6}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{3}(x^2 - xy) - \frac{1}{3}y^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{2}{6}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{3}y^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{2}{6}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{2}y)^2 - \frac{1}{4}y^2
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x' &= z + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{w}{2} \\ y' &= w - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \\ z' &= x - \frac{y}{2} \\ w' &= y \end{aligned}$$

de donde

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{C}}$$

Así

$$q(v) = (x')^2 + \frac{3}{4}(y')^2 - \frac{1}{3}(z')^2 - \frac{1}{4}(w')^2.$$

Ejemplo 42 *Diagonalizar la siguiente forma cuadrática (segundo caso).*

$$q(x, y, z, w) = xy + yz + yw + xz + zw$$

Solución:

$$\begin{aligned} q(x, y, z, w) &= xy + yz + yw + xz + zw \\ &= xy + xz + y(w + z) + zw \\ &= (x + z + w)(y + z) - z(z + w) + zw \\ &= (x + z + w)(y + z) - z^2 \\ &= \frac{1}{4}[(x + y + 2z + w)^2 - (x + w - y)^2] - z^2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z + w \\ y' &= x - y + w \\ z' &= z \\ w' &= w \end{aligned}$$

el vector w' se escoge con precaución ya que la matriz obtenida debe ser invertible.

Luego tenemos de donde

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{C}}$$

Así

$$q(v) = \frac{1}{4}(x')^2 - \frac{1}{4}(y')^2 - (z')^2$$

Definición 25 *Sea $\mathcal{B} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que $\mathcal{B}$ es* ***positiva definida*** *si y sólo si*

$$(\forall v \in V - \{0\})(\mathcal{B}(v,v) > 0).$$

además si $\mathcal{B}$ es simétrica, decimos que es un ***producto interno real.***

Observación:

1. En el cuerpo de los números complejo.

   Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ bilineal, se tiene

   $$-f(v,v) = f(iv,iv) = (i^2)f(v,v),$$

   luego

   $$f(v,v) > 0 \Leftrightarrow f(iv,iv) < 0, \text{ para todo } v \in V$$

   Por lo tanto es imposible en el caso complejo, que un forma bilineal sea positiva definida.

2. Es relativamente fácil obtener una condición, para que una forma cuadrática sea positiva, cuando la dimensión del espacio real es 2.

   Sean $B = \{v_1, v_2\}$ una base de V, tal que

   $$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

   Apliquemos el método de Gauss

   $$\begin{aligned} q(x,y) &= f((x,y),(x,y)) \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy\right) + cy^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - a\left(\frac{b}{a}y\right)^2 + cy^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ca - b^2}{a}y^2 \\ &= a(x')^2 + \left(\frac{ca-b^2}{a}\right)(y')^2 \end{aligned}$$

   La forma cuadrática es positiva si y sólo si $a > 0,\ ca - b^2 > 0$.

3.2.2. Ejercicios

1. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n .

   $$Q(V) = \{q : V \to \mathbb{K} \quad | \quad q \text{ es una forma cuadrática}\}.$$

   Demostrar $Q(V)$ es un espacio vectorial y calcular su dimensión

2. Sea Q una forma cuadrática tal que la matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Determine una base ortogonal por el método del suplemento ortogonal

3. Encontrar el tipo (signatura) de la forma cuadráticas y determine una base ortogonal, en cada caso

   a) $q(x, y, z) = xy + yz$
   b) $q(x, y, z) = 2xy - 2y^2 + z^2 + 4xz + 2yz$
   c) $q(x, y, z) = x^2 + xz + z^2$
   d) $q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz + 3yz$
   e) $q(x, y, z, w) = x^2 + 2y^2 - 2zw + wx + 3xy - yw - 6w^2$

4. Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 2\alpha xy - (\alpha^2 + \alpha - \beta)y^2 + 2\beta^2 yz + \beta z^2$, con $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$

   a) Determinar condiciones para α, β tal que Q sea positiva definida
   b) Determinar condiciones para α, β tal que Q sea del tipo (2,1)
   c) Determinar condiciones para α, β tal que Q tenga un espacio isótropo

5. Sea q la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica f.

   Demuestre
$$4 \cdot f(u, v) = q(u + v) - q(u - v)$$

6. Sea Q una forma cuadrática con n variables
$$Q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$$
   Probar que existen una base tal que
$$Q = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \cdots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$$

7. Sea A una matriz cuadrada simétricas de orden n con coeficiente reales.

   Si existe k un entero mayor de 2 tal que $A^k = I$, entonces $A^2 = I$.

8. Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la forma bilineal simétrica f_λ sobre $\mathbb{R}^4$, tal que la matriz asociada en la base canónica es
$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$
   sea un producto interno

9. Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la forma bilineal simétrica f_λ sobre $\mathbb{R}^4$, tal que la matriz asociada en la base canónica es

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   sea un producto interno.

10. Sea f_λ una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^4$, tal que la matriz asociada en la base canónica es

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

   a) Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que f_λ sea un producto interno.

   b) Determinar $< e_1 + e_2, e_2 + e_4 >^\perp$ para $\lambda = 5$.

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica

   a) Demostrar que f es un definida positiva si y sólo si $f(e_1, e_1) > 0$ y $\det([f]_{\mathcal{C}}) > 0$

   b) ¿El resultado anterior es válido para $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

12. Determinar una base ortogonal de

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x = z + w\}$$

   con el producto usual.

13. Considere el producto usual en $\mathbb{R}^4$. Si

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x = y + z + w, \quad x + 2y - 3z = 0\}$$

   a) Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$

   b) Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

14. Considere el producto usual en $\mathbb{R}^4$ Si

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x = y + w, \quad x + 2y - 3z = 0\}$$

   a) Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$

   b) Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

3.2.3. Ejercicios Propuestos

Problema 39.

Encontrar una base ortogonal de la forma cuadrática

$$q(x,y,z,w) = x^2 + 2xy - 2xz - 2yw - 10zw - w^2$$

por el método de Gauss.

Problema 40.

Encontrar el tipo (signatura) de la forma cuadráticas y Determine una base ortogonal

$$q(x,y,z,w) = x^2 + 2xy - 2xz - y^2 + 2yz - 2z^2 - 4yw + 10zw - 11w^2$$

Problema 41.

Encontrar la signatura de la forma cuadrática y determine una base ortogonal, por "Gauss"

$$q(x,y,z,w) = x^2 + 4y^2 - 2zw + wx + 2xy - yw + 6w^2$$

Problema 42.

Encontrar una base ortogonal de la forma cuadrática

$$q(x,y,z,w) = x^2 + 2xy - 2xz + 2yz - 2z^2 - 2yw + 6zw$$

por el método de Gauss.

Problema 43.

Encontrar la signatura de la forma cuadrática y determine una base ortogonal,

$$q(x,y,z,w) = x^2 + 2xy + 4xz + 6yz + 4z^2 - 4yw + 6zw - 3w^2$$

Problema 44.

Sea Q_t una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^4$

$$Q_t(x,y,z,w) = x^2 + 2xy - 2xz + 2yz - 2z^2 - 2yw + 6zw + tw^2$$

a) Encontrar el tipo (o signatura) de la forma cuadráticas Q_t para todo valor de t.

b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $[B_{Q_0}]_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

Problema 45.

Sea $\mathcal{B} = \{1+x, 2-x, x+x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y Q una forma cuadrática tal que la matriz asociada en esta base es $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine una base de $\mathbb{R}_2[x]$ de modo que $[Q]_{\mathcal{B}'}$ sea diagonal

Problema 46.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{U} =< \mathcal{B} >$, donde $\mathcal{B} = \{(1,0,0,1,1), (1,0,1,2,2), (1,2,1,0,1), (1,0,2,1,2)\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< (2,2,1,1,2), (2,2,2,2,3) >^{\perp}$
2. Determinar la forma cuadrática asociada a f.
3. Determine una base ortogonal por el método de Gauss.

Problema 47.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{U} =< \mathcal{B} >$, donde $\mathcal{B} = \{(1,-1,0,0,0), (-1,1,1,0,0), (-1,1,1,1,0), (-1,1,1,1,1)\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< (0,0,1,2,0), (0,0,0,2,1) >^{\perp}$
2. Determinar la forma cuadrática asociada a f.
3. Determine una base ortogonal por el método de Gauss.

Problema 48.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{U} =< \mathcal{B} >$, donde $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0,0), (1,1,1,0,0), (1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1)\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< (0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1) >^{\perp}$
2. Determinar la forma cuadrática asociada a f.
3. Determine una base ortogonal por el método de Gauss.

Problema 49.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{U} =< \mathcal{B} >$, donde $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0,1),(1,0,0,1,1),(1,0,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< (0,0,1,0,0),(0,1,0,0,0) >^{\perp}$
2. Determinar la forma cuadrática asociada a f.
3. Determine una base ortogonal por el método de Gauss.

Problema 50.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{B} = \{1, 1+x^2, 1+x^3, 1-x\}$ una base tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< 1+x, 1-x^2 >^{\perp}$
2. Hallar una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $[f]_{\mathcal{B}'}$ es diagonal

Problema 51.

Sea $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. ¿ f es degenerada?,
2. ¿ f es positiva ?,

3. Determinar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal y los elementos de ella sean $0, 1, -1$

Problema 52.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, tal que la matriz en la base canónica es:

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & 36 \end{bmatrix}$$

1. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea no degenerada
2. Determinar condiciones para λ tal que f_λ no tenga vectores isótropos

Problema 53.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétricas, tal que la matriz en la base canónica es:

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

1. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea no degenerada
2. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea positiva definida

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que f_λ sea positiva definida.

Problema 54.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_\lambda : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, tal que la matriz en la base canónica es:

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 36 \end{bmatrix}$$

1. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea no degenerada
2. Determinar condiciones para λ tal que f_λ no tenga vectores isótropos

Problema 55.

Sea $V = M_2(\mathbb{R})$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(A, B) = 2tr(AB) - tr(A)tr(B)$

1. Demostrar que es una forma bilineal simétrica.
2. Determinar la signatura de f
3. Explícita el conjunto vectores isótropos sobre las triangulares superiores

Problema 56.
Determinar si es verdadero o falso la afirmación. **Justifique**

1. Si V y W son espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y m respectivamente entonces
$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) \simeq M_{n\times m}(\mathbb{K}).$$
2. El conjunto de vectores isótropos de una forma bilineal es un subespacio vectorial
3. El conjunto de vectores anisótropos de una forma bilineal es un subespacio vectorial
4. Si $C^1[1,3] = \{f : [1,3] \to \mathbb{R} \quad | \quad f' \text{ es derivable en }]1,3[\ \}$
$$D(f,g) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$$
es una forma bilineal simétrica sobre V.
5. Si $V = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad | \quad f \text{ es continua en } [a,b]\}$
$$q(f) = \int_a^b f^2(x)dx.$$
es una forma cuadrática sobre V.
6. Si f es una forma bilineal no degenerada $\mathbb{R}^2$, entonces f no tiene vectores isótropos
7. Si f es una forma bilineal simétrica no degenerada $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces
$$\dim\left(< x >^{\perp}\right) = n - 1.$$
8. Si $Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) = \{f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})| \quad (\forall u, v \in V)(f(u,v) = -f(v,u)\}$ entonces
$$Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) \leq Bil(V \times V, \mathbb{K})$$
9. Sean $A \in M_2(\mathbb{R})$ y $q(A) = \det(A)$ es una forma cuadrática en $M_2(\mathbb{R})$.
10. Sean $A \in M_2(\mathbb{R})$ y $q(A) = \text{traza}(\mathrm{A}^2)$ es una forma cuadrática en $M_2(\mathbb{R})$.

3.3. Formas Sesquilineales

Sean V, W dos $\mathbb{C}$ espacios vectorial y $f : V \times W \longrightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es una forma sesquilineal si y sólo si

1. $f(v + \alpha v', w) = f(v, w) + \alpha f(v', w)$, para todo $v, v' \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{C}$.

2. $f(v, w + \alpha w') = f(v, w) + \overline{\alpha} f(v, w')$, para todo $v \in V; w, w' \in W$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 43 *Sea* $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que*

$$f(z, w) = z\overline{w}$$

es una forma sesquilineal, ya que

i)

$$\begin{aligned} f(z + \alpha u, w) &= (z + \alpha u)\overline{w} \\ &= z\overline{w} + \alpha u\overline{w} \\ &= f(z, w) + \alpha f(u, w) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f(z, u + \alpha w) &= z\overline{(u + \alpha w)} \\ &= z(\overline{u} + \overline{\alpha w}) \\ &= z(\overline{u} + \overline{\alpha w}) \\ &= z\overline{u} + \overline{\alpha} z\overline{w}) \\ &= f(z, u) + \overline{\alpha} f(z, w) \end{aligned}$$

Ejercicio 44 *Demuestre que las siguientes funciones son sesquilineales:*

1. $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, *tal que*

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

2. *Sea* $V^* = L(V, \mathbb{C}) = \{f : V \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es lineal}\}$, *sean* $f, g \in V^*$, *y*

$$\begin{array}{rccc} f \times \overline{g} : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (v, w) & \longmapsto & f(v) \cdot \overline{g(w)} \end{array}$$

3. *En general: Sean* V *y* W *dos* $\mathbb{C}$*-espacios vectoriales, y* $f \in V^*, g \in W^*$*,entonces*

$$\begin{array}{rccc} f \times \overline{g} : & V \times W & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (v, w) & \longmapsto & f(v) \cdot \overline{g(w)} \end{array}$$

es una forma sesquilineal.

Notación: Sean V y W dos $\mathbb{C}$-espacios vectoriales

$$Ses(V \times W, \mathbb{C}) = \{f : V \times W \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es una forma sesquilineal}\}$$

Propiedad 65 *Sean V, W espacios vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces se tiene que $Ses(V \times W, \mathbb{C})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.*

Observación: En general se tiene que si $\tau : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un automorfismo de cuerpo tal que $\tau^2 = id.$ entonces las dos definiciones (bilineal y sesquilineal) se unen del siguiente modo.

Sea $f : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ una función. f es una forma $\tau-$lineal si y sólo si:

1. $f(v + \alpha v', w) = f(v, w) + \alpha f(v', w)$, para todo $v, v' \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{K}$.
2. $f(v, w + \alpha w') = f(v, w) + \tau(\alpha) f(v, w')$, para todo $v \in V; w, w' \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

Si τ es la identidad entonces f es bilineal, y si τ es la conjugación en $\mathbb{C}$ es sesquilineal.

Matriz asociada

Si los espacios son de dimensión finita, escogemos bases de los espacios correspondiente y las coordenadas de los vectores en las bases respectivos y procedemos de manera análoga a las formas bilineales, para definir la matriz asociada al par de base.

Definición 26 *Sean $f \in Ses(V \times W, \mathbb{C})$, $\mathcal{B}$ una base ordenada de V y $\mathcal{C}$ una base ordenada de W.*

*Se define la **matriz asociada** a la forma sesquilineal por*

$$[f]_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}} = [f(v_i, w_j)_{i,j}] \in M_{r\times s}(\mathbb{C}),$$

donde $dim(V) = r$ y $dim(W) = s$.

Propiedad 66 *Sea $f \in Ses(V \times W, \mathbb{C})$, entonces*

$$[f(v, w)] = [v]^t_{\mathcal{B}} \cdot [f]_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}} \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}}.$$

Propiedad 67 *Sea $f \in Ses(V \times W, \mathbb{C})$, B, B' bases ordenadas de V, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ bases ordenadas de W, entonces:*

$$[f]_{B'\times\mathcal{C}'} = ([Id]^{B}_{B'})^t \cdot [f]_{B\times\mathcal{C}} \cdot \overline{[Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}}.$$

Definición 27 *Sea $f \in Ses(V \times V, \mathbb{C})$; donde la $dim(V)$ es finita. Se dice que f es **no degenerada** si y sólo si $det([f]_B) \neq 0$ con B base de V. En caso contrario se dice que f es **degenerada**.*

Observación: Sea V un $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ sesquilineal y simétrica

$$f(v, w) = f(w, v) \wedge f(v, iw) = f(iw, v)$$

luego

$$f(v, w) = 0, \text{ para todo } v \in V$$

Por lo tanto es imposible en el caso complejo, que un forma sesquilineal no nula sea simétrica.

Definición 28 *Sea $f \in Ses(V \times V, \mathbb{C})$. Se dice que f es una hermitíana si y sólo si*

$$(\forall v, w \in V)\left(f(v,w) = \overline{f(w,v)}\right).$$

Notación:

$$Ses_h(V \times V, \mathbb{C}) = \{f \in Ses(V \times V, \mathbb{C}) \mid f \text{ es una forma hermitiana}\}$$

Propiedad 68 *Sea V espacios vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces se tiene que $Ses_h(V \times V, \mathbb{C})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.*

Definición 29 *Sea $f \in Ses_h(V \times V, \mathbb{C})$ y $S \subseteq V$, se define a S ortogonal del siguiente modo*

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid (\forall u \in S)(f(u,v) = 0)\}.$$

Propiedad 69 *Sea $f \in Ses_h(V \times V, \mathbb{C})$ y $U \leq V$ tal que B es una base de U entonces*

$$U^{\perp} = B^{\perp}$$

Teorema 70 *Sea $U \leq V$, donde la $dim(V) < \infty$, $f \in Ses(V \times V, \mathbb{C})$ hermitiana y no degenerada, entonces*

$$dim(V) = dim(U) + dim(U^{\perp}).$$

Observación: Para Diagonalizar una Forma Sesquilineal, se emplean métodos muy similares a los obtenidos para el caso de formas bilineales.

Primer Método: Complemento ortogonal

Segundo Método: Operaciones Elementales

Tercer Método: Gauss.

Primer Método: Complemento ortogonal

Propiedad 71 *Sea $f \in Ses(V \times V, \mathbb{C})$ hermitiana no nula, entonces, existe un vector anisótropo.*

Demostración: Supongamos que todos los vectores son isótropos.

Sean $u, v \in V$

$$\begin{array}{rcl} f(u+v, u+v) & = & f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v) \\ 0 & = & f(u,v) + f(v,u) \\ 0 & = & f(u,v) - \overline{f(u,v)} \\ 2Im(f(u,v) & = & 0 \end{array}$$

Además

$$\begin{array}{rcl} f(u+iv,u+iv) & = & f(u,u)+if(u,v)-if(v,u)+f(v,v) \\ 0 & = & i(f(u,v)-f(v,u)) \\ 0 & = & f(u,v)+\overline{f(u,v)} \\ 2Re(f(u,v) & = & 0 \end{array}$$

Luego $f(u,v)=0$, para todo $u,v\in V$, por lo tanto f es la función nula, no puede ser luego existe un vector anisótropo. □

Propiedad 72 *Sean $f\in Ses(V\times V,\mathbb{C})$ hermitiana, $w\in V$ un vector anisótropo, entonces*

$$<w>\oplus<w>^{\perp}=V.$$

Demostración: Para la primera parte, sea $v\in V$, luego tenemos que

$$f(v-\alpha w,w)=0,\quad \text{para } \alpha=\frac{f(u,v)}{f(w,w)}$$

de lo cual se tiene que $v-\alpha w\in<w>^{\perp}$ y de este modo tenemos que $v=v-\alpha w+\alpha w$, luego

$$<w>+<w>^{\perp}=V.$$

Veamos ahora la intersección, sea $z\in<w>\cap<w>^{\perp}$, luego se tiene que

$$0=f(z,z)=f(tw,tw)=t\overline{t}f(w,w)$$

pero w es anisótropo, es decir, $t\overline{t}=0$, de lo cual $t=0$.

Por lo tanto se tiene

$$V=<w>\oplus<w>^{\perp}.$$

□

Ejemplo 45 *Sea $f:\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$,*

$$f(x,y)=x_1\overline{y}_1+2ix_1\overline{y}_2-2ix_2\overline{y}_1+x_2\overline{y}_2+x_3\overline{y}_3$$

Diagonalizar empleando el método del complemento ortogonal.

Solución: La matriz de f en la base canónica esta dada por

$$[f]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer Paso: Búsqueda de un vector anisótropo

$$f(e_1,e_1)=1.$$

Escogemos $w_1 = e_1$.

Segundo Paso: Determinaremos el espacio ortogonal y un vector anisótropo en este espacio.

$$\langle e_1\rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid f(e_1, v) = 0\}$$

Sea $v \in \langle e_1\rangle^{\perp} \subset \mathbb{C}^3$, entonces $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, tal que

$$f(e_1, v) = 0,$$

de donde

$$0 = f(e_1, v) = \overline{v}_1 + 2i\overline{v}_2 = \overline{v_1 - 2iv_2}$$

es decir

$$\langle e_1\rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid v_1 - 2iv_2 = 0\}$$

Por lo tanto

$$\langle e_1\rangle^{\perp} = \langle 2ie_1 + e_2, e_3\rangle$$

Además $f(e_{3,}e_3) = 1$, es decir, el vector e_3, es anisótropo.

Tercer Paso: Determinaremos el espacio ortogonal y un vector anisótropo en este espacio.

$$\langle e_3\rangle^{\perp} = \{v \in \langle e_1\rangle^{\perp} \mid f(v, e_3) = 0\},$$

luego

$$\langle e_1, e_3\rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid f(v, e_1) = 0 \quad \wedge \quad f(v, e_3) = 0\}$$

por tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} f(v,e_1) & = & 0 \\ f(v,e_3) & = & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} v_1 - 2iv_2 & = & 0 \\ v_3 & = & 0 \end{array}\right|$$

de donde $v_3 = 0, v_1 = 2iv_2$, luego

$$\langle e_1, e_3\rangle^{\perp} = \langle 2ie_1 + e_2\rangle$$

además

$$f(2ie_1 + e_2, 2ie_1 + e_2) = 4 + -4 + -4 + 1 = -3$$

Ahora $B = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (2i, 1, 0)\}$, de donde obtenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [Id]_B^{\mathcal{C}}$$

Por último

$$P^t[f]_{\mathcal{C}}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2i & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = [f]_B$$

Operaciones Elementales

Este método se basa en la propiedad 67, es decir, si $f \in Ses(V \times W, \mathbb{C})$, B, B' bases ordenadas de V, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ bases ordenadas de W, entonces:

$$[f]_{B' \times \mathcal{C}'} = ([Id]_{B'}^{B})^t \cdot [f]_{B \times \mathcal{C}} \cdot \overline{[Id]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}}.$$

Además notemos lo siguiente:

$$\overline{F_{ij}} = C_{ij}, \quad \overline{F_{ij}}(k) = C_{ij}(\overline{k}), \quad \overline{F_i}(k) = C_i(\overline{k})$$

Ejemplo 46 *Sea* $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$f(x, y) = x_1\overline{y}_1 + (1 + 2i)\, x_1\overline{y}_2 + (1 - 2i)\, x_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3$$

Diagonalizar empleando el método de operaciones elementales.

Solución:

La matriz asociada en la base canónica es $[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 0 \\ 1-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{F_{21}(-1+2i)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{C_{21}(-1-2i)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Luego la matriz cambio de base es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1+2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [Id]_B^{\mathcal{C}}$$

donde la base $B = \{(1,0,0), (-1+2i, 1, 0), (0,0,1)\}$ y además

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 0 \\ 1-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1-2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

Al igual que el caso anterior debemos tener cuidado, con las diferencia, ahora el buscamos expresiones del tipo $w\overline{w}$, para ello debemos tener presente las siguientes situaciones:

$$\begin{aligned} (a+b)(\overline{a+b}) &= a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b} \\ a\overline{b} + b\overline{a} &= \frac{1}{2}\left((a+b)(\overline{a+b}) - (a-b)(\overline{a-b})\right) \end{aligned}$$

Teorema 73 *Sean V un espacio de dimensión finita y $f : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitíana, entonces existe una base de V tal que f es diagonal.*

Demostración: Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base ordenada de V.

$$f(x,y) = \sum f(v_i, v_j) x_i \overline{y}_j,$$

donde $x = \sum x_i v_i$ e $y = \sum y_i v_i$.

Como f es hermitiana, se tiene que

$$\begin{aligned} f(v_i, v_j) &= a_{ij} = \overline{f(v_j, v_i)} = \overline{a}_{ji} \\ f(v_i, v_i) &= a_{ii} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

es decir.

$$f(x,y) = \sum f(v_i, v_j) x_i \overline{y}_j = \sum a_{ij} x_i \overline{y}_j$$

Primer Caso $a_{11} \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x,x) &= \sum a_{ij} x_i \overline{x}_j \\ &= a_{11} x_1 \overline{x}_1 + x_1 \sum_{j \neq 1} a_{1j} \overline{x}_j + \overline{x}_1 \sum_{i \neq 1} a_{i1} x_i + \sum_{j \neq 1 \neq i} a_{ij} x_i \overline{x}_j \\ &= a_{11} x_1 \overline{x}_1 + x_1 \overline{\sum_{i \neq 1} a_{i1} x_i} + \overline{x}_1 \sum_{i \neq 1} a_{i1} x_i + f_2(x,x) \\ &= a_{11} x_1 \overline{x}_1 + x_1 \overline{L}(x) + \overline{x}_1 L(x) + f_2(x,x) \\ &= a_{11} \left(x_1 + \frac{1}{a_{11}} L(x) \right) \overline{\left(x_1 + \frac{1}{a_{11}} L(x) \right)} + \frac{1}{a_{11}} \left(L(x) \right) \left(\overline{L(x)} \right) + f_2(x,x) \end{aligned}$$

donde

$$L(x) = \sum_{i \neq 1} a_{i1} x_i, \quad f_2(x,y) = \sum_{j \neq 1 \neq i} a_{ij} x_i \overline{y}_j$$

Luego realizando el cambio de base

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \frac{1}{a_{11}} L \\ x'_j &= x_j \end{aligned}$$

hemos concluido con la primera variable, ya que $\frac{1}{a_{11}} \left(L(x) \overline{L}(y) \right) + f_2(x,y)$ es un forma sesquilineal hermitiana en dimensión menor.

Segundo Caso $a_{ii} = 0$ para todo i y $a_{12} \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
& \sum a_{ij} x_i \overline{x}_j \\
= \; & a_{12} x_1 \overline{x}_2 + a_{21} x_2 \overline{x}_1 + x_1 \sum_{j>2} a_{1j} \overline{x}_j + \overline{x}_1 \sum_{i>2} a_{i1} x_i + x_2 \sum_{j>2} a_{2j} \overline{x}_j + \overline{x}_2 \sum_{i>2} a_{i2} x_i + q_2(x) \\
= \; & a_{12} x_1 \overline{x}_2 + a_{21} x_2 \overline{x}_1 + x_1 \overline{\sum_{j>2} a_{j1} x_j} + \overline{x}_1 \sum_{i>2} a_{i1} x_i + x_2 \overline{\sum_{j>2} a_{j2} x_j} + \overline{x}_2 \sum_{i>2} a_{i2} x_i + q_2(x) \\
= \; & a_{12} x_1 \overline{x}_2 + a_{21} x_2 \overline{x}_1 + x_1 \overline{L} + \overline{x}_1 L + x_2 \overline{M} + \overline{x}_2 M + q_2(x) \\
= \; & (a_{12} x_1 + M) \overline{\left(x_2 + \frac{1}{\bar{a}_{12}} L \right)} + \overline{(a_{12} x_1 + M)} \left(x_2 + \frac{1}{\bar{a}_{12}} L \right) - \frac{1}{\bar{a}_{12}} \overline{L} M - \frac{1}{\bar{a}_{12}} L \overline{M} + q_2(x) \\
= \; & (a_{12} x_1 + M) \overline{\left(x_2 + \frac{1}{\bar{a}_{12}} L \right)} + \overline{(a_{12} x_1 + M)} \left(x_2 + \frac{1}{\bar{a}_{12}} L \right) + f_3(x,x) \\
= \; & \frac{1}{2} \left(a_{12} x_1 + x_2 + M + \frac{1}{\bar{a}_{12}} L \right) \overline{\left(a_{12} x_1 + x_2 + M + \frac{1}{\bar{a}_{12}} L \right)} + \ldots \\
& \ldots - \frac{1}{2} \left(a_{12} x_1 - x_2 + M - \frac{1}{\bar{a}_{12}} L \right) \overline{\left(a_{12} x_1 - x_2 + M - \frac{1}{\bar{a}_{12}} L \right)} + f_3(x,x)
\end{aligned}
$$

donde

$$
L(x) = \sum_{i>2} a_{i1} x_i, \;\; M(x) = \sum_{i>2} a_{i2} x_i, \;\; f_3(x,y) = \sum_{i>2, j>2} a_{ij} x_i \overline{y}_j
$$

Luego realizando el cambio de base

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{12} x_1 + x_2 + M(x) + \frac{1}{\bar{a}_{12}} L(x) \\
x_2' &= a_{12} x_1 - x_2 + M(x) - \frac{1}{\bar{a}_{12}} L(x) \\
x_j' &= x_j, \quad j > 2
\end{aligned}
$$

hemos concluido el proceso con las dos la primera variable, inductivamente se concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 47 *Sea* $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$
f(x,y) = x_1 \overline{y}_1 + 2i x_1 \overline{y}_2 - 2i x_2 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + x_3 \overline{y}_3
$$

Diagonalizar empleando el método de Gauss.

Solución: aplicando el primer caso tenemos

$$
\begin{aligned}
f(x,x) &= x_1 \overline{x}_1 + 2i x_1 \overline{x}_2 - 2i x_2 \overline{x}_1 + x_2 \overline{x}_2 + x_3 \overline{x}_3 \\
&= x_1 \overline{x}_1 + x_1 2i \overline{x}_2 - \overline{x}_1 2i x_2 + (x_2 \overline{x}_2 + x_3 \overline{x}_3) \\
&= (x_1 - 2i x_2)(\overline{x}_1 + 2i \overline{x}_2) + 2i 2i x_2 \overline{x}_2 + (x_2 \overline{x}_2 + x_3 \overline{x}_3) \\
&= (x_1 - 2i x_2)(\overline{x}_1 + 2i \overline{x}_2) - 4 x_2 \overline{x}_2 + x_2 \overline{x}_2 + x_3 \overline{x}_3 \\
&= (x_1 - 2i x_2)(\overline{x}_1 + 2i \overline{x}_2) - 3 x_2 \overline{x}_2 + x_3 \overline{x}_3 \\
&= (x_1 - 2i x_2) \overline{(x_1 - 2i x_2)} - 3 x_2 \overline{x}_2 + x_3 \overline{x}_3.
\end{aligned}
$$

El cambio de variable esta dada por

$$u_1 = x_1 - 2ix_2, \quad u_2 = x_2, \quad u_3 = x_3$$

Matricialmente tenemos

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Luego la base de $\mathbb{C}^3$ es $B = \{(1,0,0), (2i,1,0), (0,0,1)\}$, y con ella se tiene que

$$[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 48 *Sea* $f : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1 + 3ix_1\overline{y}_3 - 3ix_3\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_4 + 2x_4\overline{y}_2$$

Diagonalizar empleando el método de Gauss.

Solución:

$$\begin{aligned}
&f(x,x) = \\
&= x_1\overline{x}_1 + (1+i)x_1\overline{x}_2 + (1-i)x_2\overline{x}_1 + 3ix_1\overline{x}_3 - 3ix_3\overline{x}_1 + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= x_1\overline{x}_1 + x_1\left[(1+i)\overline{x}_2 + 3i\overline{x}_3\right] + \overline{x}_1\left[(1-i)x_2 - 3ix_3\right] + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= x_1\overline{x}_1 + x_1\overline{\left[(1-i)x_2 - 3ix_3\right]} + \overline{x}_1\left[(1-i)x_2 - 3ix_3\right] + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= (x_1 + (1-i)x_2 - 3ix_3)\,\overline{(x_1 + (1-i)x_2 - 3ix_3)} - ((1-i)x_2 - 3ix_3)\,\overline{((1-i)x_2 - 3ix_3)} \\
&\;\; ... + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= u_1\overline{u}_1 - ((1-i)x_2 - 3ix_3)\,\overline{((1-i)x_2 - 3ix_3)} + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= u_1\overline{u}_1 - (3ix_3 - (1-i)x_2)\,\overline{(3ix_3 - (1-i)x_2)} + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= u_1\overline{u}_1 - u_2\overline{u}_2 + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= u_1\overline{u}_1 - u_2\overline{u}_2 + (x_2 + x_4)\,\overline{(x_2 + x_4)} - (x_2 - x_4)\,\overline{(x_2 - x_4)} \\
&= u_1\overline{u}_1 - u_2\overline{u}_2 + u_3\overline{u}_3 - u_4\overline{u}_4
\end{aligned}$$

es decir, el cambio de base esta dado por

$$u_1 = x_1 + (1-i)x_2 - 3ix_3, \quad u_2 = (1-i)x_2 - 3ix_3, \quad u_3 = x_2 + x_4, \quad u_4 = x_2 - x_4,$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -3 & 0 \\ 0 & -1+i & 3i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3}i & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Luego la base de $\mathbb{C}^4$ es

$$B = \{(1,0,0,0),(-i,0,-\frac{1}{3}i,0),(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i,\frac{1}{2}),(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i,-\frac{1}{2})\},$$

y con ella se tiene que

$$[f]_B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 49 *Sea* $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = x_1\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_1 + (1-i)x_2\overline{y}_3 + (1+i)x_3\overline{y}_2$$

Diagonalizar empleando el método de Gauss.

Solución: aplicando el segundo caso tenemos

$$\begin{aligned} f(x,x) &= x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_1 + (1-i)x_2\overline{x}_3 + (1+i)x_3\overline{x}_2 \\ &= x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_1 + x_2(1-i)\overline{x}_3 + \overline{x}_2(1+i)x_3 \\ &= (x_1 + (1+i)x_3)(\overline{x}_2) + x_2(\overline{x}_1 + (1-i)\overline{x}_3) \\ &= (x_1 + (1+i)x_3)(\overline{x}_2) + x_2\overline{(x_1 + (1+i)x_3)} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + (1+i)x_3)\overline{(x_1 + x_2 + (1+i)x_3)} \\ &... - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + (1+i)x_3)\overline{(x_1 - x_2 + (1+i)x_3)} \end{aligned}$$

el cambio de base esta dado por

$$u_1 = x_1 + x_2 + (1+i)x_3, \quad u_2 = x_1 - x_2 + (1+i)x_3, \quad u_3 = x_3$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+i \\ 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1-i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Luego la base de $\mathbb{C}^3$ es

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right), \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right), (-1-i,0,1) \right\},$$

y con ella se tiene que

$$[f]_B \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición 30 *Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitíana.*
Se dice que f es positiva definida si y sólo si

$$(\forall v \in V - \{0\})(f(v,v) > 0).$$

y en este caso decimos que f es un ***`producto interno complejo.`***

3.3.1. Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $f(z,w) = z_1\bar{w}_1 - z_2\bar{w}_2$. Demostrar que f es una forma sesquilineal no degenerada.

2. Sea F una forma hermítica sobre $\mathbb{C}^3$ tal que, la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & i & 1+i \\ -i & 0 & 2 \\ 1-i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

3. Sea $f : V \times V \to \mathbb{C}$, una forma sesquilineal tal que, para todo v en V se tiene $f(v,v) \in \mathbb{R}$, entonces
   Demostrar que f es una forma sesquilineal hermitiana

4. Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la forma sesquilineal hermitiana

$$f_\lambda(z,w) = 3z_1\bar{w}_1 - 2z_2\bar{w}_1 - 2z_1\bar{w}_2 + 9z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3 + \lambda z_4\bar{w}_3 + \lambda z_3\bar{w}_4 + z_4\bar{w}_4$$

   es positiva definida.

5. Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que la forma sesquilineal hermítica f sobre $\mathbb{C}^3$, dada en la base canónica por la matriz

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \overline{\lambda} \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

   sea positiva definida

3.3.2. Ejercicios Propuestos

Problema 57.

Sea F una forma hermítica sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base $B = \{(1,i,1),(1,0,1),(0,i,1)\}$ es:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1-2i \\ 0 & 1+2i & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar matriz asociada a F en la base $B = \{(1,2,1),(1,i,2),(1,0,-1)\}$ de $\mathbb{C}^3$

Problema 58.

Sea F una forma hermítica sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base $B = \{(1,i,1),(1,0,1),(0,i,1)\}$ es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 1-2i \\ 0 & 1+2i & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar matriz asociada a F en la base $D = \{(1,2,i),(1,1,0),(i,0,-1)\}$ de $\mathbb{C}^3$

Problema 59.

Sea F una forma sesquilineal hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 5 \\ 1-i & 2 & i \\ 5 & -i & 7 \end{bmatrix}.$$

Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

Problema 60.

Sea F una forma hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

Problema 61.

Sea F una forma hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 1-2i \\ 0 & 1+2i & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

Problema 62.

Sea F una forma hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & 2+i & 0 \\ 2-i & 1 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

Problema 63.

Sea $B : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitiana y $D = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[B]_D = \begin{bmatrix} 3 & 1-i & 1 \\ 1+i & 1 & 2+i \\ 1 & 2-i & 11 \end{bmatrix}.$$

Determinar una base de $\mathbb{C}^3$ de modo que la matriz asociada a B en la nueva base sea diagonal.

Problema 64.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 1+2i & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ y

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 \quad | \quad w = y \quad \wedge \quad x = 0\}.$$

1. Determinar una base ortogonal de U
2. Determinar una base de $U^{\perp}$

Problema 65.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 1+2i & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ y

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \quad | \quad z + w = y \quad \wedge \quad x = z\}.$$

Determinar una base de $U^\perp$

Problema 66.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i & 0 \\ 1-i & 3 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 1+2i & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ y

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \quad | \quad x + 2y = 3z \quad \wedge \quad 3x - 2y = w\}.$$

1. Determinar una base de $U^\perp$
2. Encontrar la signatura de f, por el método de Gauss.

Problema 67.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 1+2i & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ y

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \quad | \quad w = y + z \quad \wedge \quad x = 0\}.$$

1. Determinar una base ortogonal de U
2. Determinar una base de $U^\perp$

Problema 68.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_\lambda : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitiana, tal que la matriz en la base canónica es:

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3-i & 0 \\ 3+i & 12 & \lambda \\ 0 & \lambda & 36 \end{bmatrix}$$

1. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea no degenerada
2. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea un producto interno

Problema 69.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que la forma bilineal hermitiana f_λ sobre $\mathbb{C}^3$, dada en la base canónica por la matriz

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \overline{\lambda} \\ 0 & \lambda & 4 \end{bmatrix}$$

sea producto interno.

Problema 70.

Dada la forma sesquilineal hermitiana $f : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z,w) = 5z_1\bar{w}_1 + 5iz_2\bar{w}_1 - 5iz_1\bar{w}_2 + 8z_2\bar{w}_2 + 2z_3\bar{w}_3 + z_4\bar{w}_3 + z_3\bar{w}_4 + 11z_4\bar{w}_4$$

Determine la signatura.

Problema 71.

Sea $f \in Ses_h(\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4, \mathbb{C})$, definida por

$$f(v,v) = x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + 2iy\bar{z} - 2iz\bar{y} - 2z\bar{z} + (1+2i)y\bar{w} + (1-2i)w\bar{y} + 6w\bar{w}$$

donde $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$.

Encontrar la signatura de f, por el método de Gauss.

Problema 72.

Sea $f \in Ses_h(\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4, \mathbb{C})$, definida por

$$f(v,v) = x\bar{x} + (1+i)x\bar{y} + (1-i)y\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + (1+2i)y\bar{z} + (1-2i)z\bar{y} - 2z\bar{z} + y\bar{w} + w\bar{y} + 6w\bar{w}$$

donde $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$.

Encontrar la signatura de f, por el método de Gauss.

Problema 73.

Sea $f \in Ses_h(\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4, \mathbb{C})$, definida por

$$f(v,v) = x\bar{x} + ix\bar{y} - iy\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + (1+i)y\bar{z} + (1-i)z\bar{y} - 2z\bar{z} + y\bar{w} + w\bar{y} + 6w\bar{w}$$

donde $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4$.

Encontrar la signatura de f, por el método de Gauss.

Problema 74.

Sea $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4$, encontrar la signatura de la forma sesquilineal hermítica

$$f(v,v) = 4x\bar{x} + 2x\bar{y} + 2y\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + (1+2i)y\bar{z} + (1-2i)z\bar{y} - 2z\bar{z} + 2iy\bar{w} - 2iw\bar{y} - w\bar{w}$$

Problema 75.

Sea $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4$, encontrar la signatura de la forma sesquilineal hermítica

$$f(v,v) = x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + 2iy\bar{z} - 2iz\bar{y} - 2z\bar{z} + (1+2i)y\bar{w} + (1-2i)w\bar{y} - 4w\bar{w}$$

Problema 76.

Demostrar que la forma sesquilineal hermitiana

$$f(z,w) = 5z_1\bar{w}_1 + 5iz_2\bar{w}_1 - 5iz_1\bar{w}_2 + 8z_2\bar{w}_2 + 2z_3\bar{w}_3 + z_4\bar{w}_3 + z_3\bar{w}_4 + 11z_4\bar{w}_4$$

es un producto interno sobre $\mathbb{C}^4$.

Problema 77.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que la forma sesquilineal hermitiana

$$f_\lambda(z,w) = 5z_1\bar{w}_1 + 5iz_2\bar{w}_1 - 5iz_1\bar{w}_2 + 5z_2\bar{w}_2 + 8z_3\bar{w}_3 + \lambda z_4\bar{w}_3 + \lambda z_3\bar{w}_4 + 13z_4\bar{w}_4$$

sea un producto interno sobre $\mathbb{C}^4$.

Problema 78.

Sea $B : \mathbb{C}_2[x] \times \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitiana y $D = \{p_1(x) = x + x^2, p_2(x) = 1 + x, p_3(x) = 2 - x\}$ es una base de $\mathbb{C}_2[x]$ y $q(x) = up_1(x) + vp_2(x) + wp_3(x)$

$$B(q(x), q(x)) = \overline{u}v + 2i\overline{u}v + \overline{u}w + \overline{v}u - 2i\overline{v}u + 2\overline{v}w - i\overline{v}w + \overline{w}u + 2\overline{w}v + i\overline{w}v$$

por el método de "Gauss " determinar una base de ortogonal de $\mathbb{C}_2[x]$

3.4. Producto Interno

Definición 31

1. *Sea V un espacio vectorial real, un producto interno sobre V es $< \, , \, >: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, simétrica y positiva definida, es decir, $< \, , \, >: V \times V \to \mathbb{R}$ es una función tal que*

   a) $< v + cw, u >=< v, u > +c < w, u >$, *para todo* $u, v, w \in V, \; c \in \mathbb{R}$.

   b) $< v, w >=< w, v >$, *para todo* $v, w \in V$

   c) $< v, v > > 0$, *para todo* $v \in V - \{0\}$

2. *Sea V un espacio vectorial complejo, un producto interno sobre V, forma sesquilineal hermitiana positiva definida, es decir, $< \, , \, >: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función tal que*

   a) $< v + cw, u >=< v, u > +c < w, u >$, *para todo* $u, v, w \in V, \; c \in \mathbb{C}$.

   b) $< v, w >= \overline{< w, v >}$, *para todo* $v, w \in V$ *(hermitiana)*

   c) $< v, v > > 0$, *para todo* $v \in V - \{0\}$

Observación: En el producto interno complejo se tiene

$$\begin{aligned} < u, v + cw > &= \overline{< v + cw, u >} \\ &= \overline{< v, u > +c < w, u >} \\ &= \overline{< v, u >} + \overline{c}\overline{< w, u >} \\ &=< u, v > +\overline{c} < u, w > \end{aligned}$$

Ejemplo 50

1. *Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$*
$$\langle x, y \rangle = \sum x_i \overline{y_i}$$

2. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$*
$$\langle A, B \rangle = traza(AB^*)$$

3. *Sean $g, f \in C^0[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua } \}$*
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} \; dt$$

4. *Sea $\langle \, , \, \rangle$ un producto interno de V y $T : W \longrightarrow V$ inyectiva, entonces*
$$\langle w_1, w_2 \rangle_T = \langle T(w_1), T(w_2) \rangle$$
es un producto interno de W.

5. *Sea $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ base del V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n, \quad w = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n,$$

entonces se define

$$f(u, w) = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}.$$

Demostrar que f es un producto interno sobre V.

Definición 32 *Sea $v \in V$ un espacio vectorial con producto interno $< \ , \ >$, se define la norma de $v \in V$ a la raíz de $< v, v >$ y se denota por $||v||$, es decir:*

$$||v|| = \sqrt{< v, v >}$$

Propiedad 74 *Sea V un espacio con producto interno, entonces*

$$| < v, w > | \leq ||v|| \cdot ||w||, \text{ para todo } v, w \in V.$$

Demostración: Sean $v, w \in V$, luego

$$\begin{aligned}
&0 \leq < \alpha v - \beta w, \alpha v - \beta w > \\
&0 \leq \alpha\overline{\alpha} < v, v > -\alpha\overline{\beta} < v, w > -\beta\overline{\alpha} < w, v > +\beta\overline{\beta} < w, w > \\
&0 \leq |\alpha|^2||v||^2 - 2Re\ \alpha\overline{\beta} < v, w > +|\beta|^2||w||^2
\end{aligned}$$

Si $\alpha = ||w||^2$, $\beta =< v, w >$, reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}
&0 \leq ||w||^4 \cdot ||v||^2 - 2Re\ ||w||^2| < v, w > |^2 + | < v, w > |^2||w||^2 \\
&0 \leq ||w||^2[||w||^2||v||^2 - | < v, w > |^2]
\end{aligned}$$

Luego

$$| < v, w > | \leq ||v|| \cdot ||w||$$

□

Ejercicio 51 *Sean $a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}^*$ entonces*

$$n^2 \leq \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}\right)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2).$$

Propiedad 75 *Sea V un espacio con producto interno, entonces*

1. *$||v|| \geq 0$, para todo $v \in V$.*

2. *$||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$, para todo $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$.*

3. *$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$, para todo $v, w \in V$.*

Demostración: La propiedad tres la tenemos por

$$\begin{aligned} < v+w, v+w > &= ||v||^2 + 2Re \ < v, w > + ||w||^2 \\ &\leq ||v|| + 2||w||||v|| + ||w||^2 \end{aligned}$$

luego

$$||v+w||^2 \leq (||v|| + ||w||)^2$$

□

Definición 33 *Sean V espacio vectorial con producto interno, tal que $S \subseteq V$ y $v, w \in V$ entonces*

1. *v es ortogonal a w si y sólo si $< v, w >= 0$.*
2. *S es un conjunto ortogonal si y sólo si para todo $v, w \in S$ se tiene que $< v, w >= 0$.*
3. *S es un conjunto ortonormal si y sólo si S es ortogonal y $||v|| = 1$ para todo $v \in S$.*

Observación: Note que si $v \in V$ no nulo entonces $||\frac{1}{||v||}v|| = 1$.

Teorema 76 *Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.*

Demostración: Sea $< \ , \ >$ un producto interno en V y $S \subseteq V$, un conjunto ortogonal tal que

$$\sum \alpha_i s_i = 0, \text{ donde } \alpha_i \in \mathbb{F}, s_i \in S \text{ distintos}$$

calculando tenemos

$$0 =< 0, s_j >=< \sum \alpha_i s_i, s_j >= \sum \alpha_i < s_i, s_j >= \alpha_j < s_j, s_j >$$

luego $\alpha_j = 0$, para todo j. □

Proceso de Ortogonalización

Sea V un espacio con producto interno, y $u, vw \in V$,

1. Sea $\{v, w\}$ linealmente independientes, luego tenemos que los espacios generados son iguales
$$\langle v, w \rangle = \langle v, w + av \rangle,$$
buscar un vector ortogonal a v debemos determinar el escalar a tal que
$$0 =< w + av, v >=< w, v > +a < v, v > .$$
Con ello tenemos que $a = -\frac{<w,v>}{<v,v>}$, así los espacios generados son iguales
$$\langle v, w \rangle = \langle v, w - \frac{< w, v >}{< v, v >} v \rangle.$$

2. Para el caso de tres vectores tales que $\{v, w, u\}$ linealmente independientes, tenemos que usando el proceso anterior determinamos $w_1 = w - \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v$.

$$\langle v, w, u\rangle = \langle v, w_1, u\rangle$$
$$\langle v, w, u\rangle = \langle v, w_1, u + bv + cw_1\rangle$$

para determinar b y c

$0 =< u + av + bw_1, v >=< z, v > +a < v, v >$

$0 =< u + av + bw_1, w_1 >=< z, w_1 > +b < w_1, w_1 >.$

Luego
$$w_2 = z - \frac{< z, w >}{< v, v >}v - \frac{< z, w_1 >}{< w_1, w_1 >}w_1.$$
es decir
$$\langle v, w, u\rangle = \langle v, w_1, w_2\rangle.$$
el calculo anterior, es la demostración inductiva del siguiente teorema.

Teorema 77 (Gram-Schmidt, Ortogonalización) *Sea V un espacio con producto interno sobre $\mathbb{K}$y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vectores linealmente independientes de V, entonces existe $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ vectores ortogonales tal que*

$$\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle w_1, \ldots, w_n\rangle$$

donde

$$w_1 = v_1$$
$$w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{< v_k, w_j >}{< w_j, w_j >}w_j, \quad k > 1$$

Corolario 78 (Gram-Schmidt, Ortonormalización) *Sea V un espacio con producto interno sobre $\mathbb{K}$ y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vectores linealmente independientes de V, entonces existe $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ vectores ortonormales tal que*

$$\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$$

donde
$$w_1 = v_1, \quad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{< v_k, w_j >}{< w_j, w_j >}w_j, \quad k > 1$$

y
$$u_k = \frac{1}{||w_k||}w_k$$

Ejemplo 52 *Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$, donde*

$$< (x_1, x_2, x_3) \ , \ (y_1, y_2, y_3) >= x_1\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_1} + 4x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}.$$

Determinar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$.

Solución: Apliquemos el proceso a la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{C}^3$.

$$w_1 = e_1$$

$$w_2 = e_2 - \frac{1}{1}e_1 = e_2 - e_1$$

$$w_3 = e_3 - \frac{0}{1}(w_1) + \frac{0}{3}(w_2) = e_3$$

de donde $\{e_1, e_2 - e_1, e_3\}$ es base ortogonal.

La base ortonormal esta dada por

$$\left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e_2 - e_1\right), e_3\right\}$$

Definición 34 *Sea $v \in V$, no nulo,la función dada por*

$$\begin{array}{rccc} Proy_v : & V & \longrightarrow & V \\ & w & \longmapsto & \frac{<w,v>}{<v,v>}v \end{array}$$

es llamada ***proyección ortogonal*** *sobre v.*

Observación: Note que $w - Proy_v(w)$ es ortogonal a v.

El siguiente teorema permite definir la distancia de un vector v a $W \leq V$ en dimensión finita

Teorema 79 *Sea V un espacio con producto interno, $v \in V$ y W subespacio de dimensión finita de V, si*

$$A = \{||v - w|| \mid w \in W\},$$

entonces

1. $\min A = ||v - w_0||$, *con $w_0 \in W$ si y sólo si $v - w_0$ es ortogonal a W.*
2. *Si existe* $\min A$ *entonces w_0 es único.*
3. *Si $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base ortonormal de W, entonces* $\min A$ *existe y*

$$w_0 = \sum < v, w_i > w_i.$$

Demostración:

1. Sea $w_0 \in W$ tal que $v - w_0$ ortogonal a W, por demostrar que

$$||v - w_0|| \leq ||v - w||, \quad w \in W,$$

Para ello

$$\begin{aligned} < v - w, v - w > &=< v - w_0 + w_0 - w, v - w_0 + w_0 - w > \\ &=< v - w_0, v - w_0 > + < w_0 - w, w_0 - w > \qquad (*) \end{aligned}$$

Luego
$$||v-w||^2 \geq ||v-w_0||^2.$$

Sea $w_0 \in W$, tal que $\text{mín}(A) = ||v-w_0||$, por demostrar que $v-w_0$ es ortogonal a W. Para ello tenemos que

$$||v-w||^2 = ||v-w_0||^2 + 2\,\text{Re} < v-w_0, w_0-w > + ||w_0-w||^2$$

además
$$||v-w||^2 \geq ||v-w_0||^2$$

Así

$$\begin{array}{rcl} ||w_0-w||^2 + 2Re\langle v-w_0, w_0-w\rangle & \geq & 0 \quad (y = w_0 - w) \\ ||y||^2 + 2Re < v-w_0, y > & \geq & 0 \end{array}$$

Desigualdad que es válida para todo $y \in W$.

Sea $a \in \mathbb{F}$ luego tenemos

$$\begin{array}{rcl} ||ay||^2 + 2Re\langle v-w_0, ay\rangle & \geq & 0 \\ a\overline{a}||y||^2 + 2\overline{a}\,\text{Re}\langle v-w_0, y\rangle & \geq & 0 \end{array}$$

Escogiendo Supongamos que $y \neq 0$ $a = -\dfrac{< v-w_0, y >}{||y||^2}$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{< v-w_0, y >< y, v-w_0 >}{||y||^4}||y||^2 - \dfrac{1}{||y||^2}2 < y, v-w_0 >< v-w_0, y > & \geq & 0 \\ -| < v-w_0, y > | & \geq & 0 \\ < v-w_0, y > & = & 0. \end{array}$$

2. Unicidad: Sea w_0, u elementos tales que $\text{mín}\, A = ||v-w_0|| = ||v-u||$ usando (*), tenemos

$$\begin{array}{c} ||v-w_0||^2 = ||v-u||^2 + ||u-w_0||^2 \\ ||v-u||^2 = ||v-w_0||^2 + ||u-w_0||^2 \end{array}$$

entonces
$$||u-w_0||^2 = 0 \quad \Rightarrow u = w_0.$$

3. La demostración esta dada por Gram Schmidt.

Definición 35 *Sea V un espacio con producto interno, $v \in V$ y W subespacio de dimensión finita de V.*

Se define la distancia de v a W igual a

$$d(v, W) = \text{mín}\{||v-w|| \mid w \in W\}.$$

Ejemplo 53 *Calcular la distancia de* $(1, 7, 1, 9, 1)$ *a*

$$W = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 \mid x + -3y - 6t - w = 0 \wedge\ x - z - 3t = 0\}$$

Solución: Sea $(x, y, z, w, t) \in W$, luego tenemos

$$(x, y, x - 3t, t, x - 3y - 6t) = x(1, 0, 1, 0, 1) + y(0, 1, 0, 0, -3) + t(0, 0, -3, 1, -6)$$

Claramente $\{(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0, -3), (0, 0, -3, 1, -6)\}$ es una base de W.
Aplicando Gram Schimdt, y amplificando obtenemos

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, 0, 1, 0, 1) \\ w_2 &= (1, 1, 1, 0, -2) \\ w_3 &= (12, -9, -9, 7, -3) \end{aligned}$$

Luego tenemos que, $v = (1, 7, 1, 9, 1)$

$$\begin{aligned} d(v, W) &= ||v - \sum_{i=1}^{3} \frac{< v, w_i >}{< w_i, w_i >} w_i|| \\ &= ||(1, 7, 1, 9, 1) - (1, 0, 1, 0, 1) - (1, 1, 1, 0, -2)|| \\ &= ||(-1, 6, -1, 9, 2)|| = \sqrt{133} \end{aligned}$$

Definición 36 *Sea* $\phi \neq S \subset V$ *con producto interior,*

$$S^{\perp} = \{u \in V \mid (\forall s \in S)\langle u, s\rangle = 0\},$$

es ortogonal a S.

Propiedad 80 *Sea* $\phi \neq S \subset V$ *con producto interior, entonces*

$$S^{\perp} = < S >^{\perp}$$

Ejemplo 54

1. $\{0\}^{\perp} = V$
2. $V^{\perp} = \{0\}$
3. $\mathbb{C}^3$ *es un* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial, con el siguiente producto interno*

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_1} + 4x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$$

Sea $L = \langle (1, 1, 0)\rangle < \mathbb{C}^3$. *Determinar* $L^{\perp}$

Teorema 81 *Sea* W *un subespacio de dimensión finita de un espacio con producto interno* V *entonces*

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Demostración: Sea $x \in W \cap W^{\perp}$, como $x \in W$ tenemos

$$\langle x, u\rangle = 0 \quad \forall u \in W^{\perp}$$

Pero $x \in W^{\perp}$, por lo tanto $\langle x, x\rangle = 0$, es decir, $x = 0$.

Sea $\{w_1, \ldots, w_k\}$ base ortonormal de W, para $v \in V$, tenemos que

$$w_0 = \sum (v, w_i) v_i \in W,$$

entonces $v - w_0 \in W^{\perp}$. De lo cual

$$v = w_0 + v - w_0 \in W + W^{\perp}$$

luego

$$V = W + W^{\perp},$$

entonces

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

□

Observación: En cada una de las descomposiciones de suma directa se pueden construir los proyectores correspondiente

1. $V = W_1 \oplus W_2$, luego

$$\begin{array}{rlcl} P_1 : & V & \longrightarrow & W_1 \\ & w_1 + w_2 & \longmapsto & w_1 \end{array}$$

   el proyección 1 luego

$$P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2, \quad P_1 P_2 = 0, \quad v = P_1(v) + P_2(v).$$

2. $V = W \oplus W^{\perp}$, luego

$$P : V \longrightarrow W,$$

   es la proyección ortogonal, donde

$$P^2 = P, \text{ pero } P^{\perp} = I - P$$

3.4.1. Ejercicios Propuestos

Problema 79.

Sea F un producto interno sobre $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Usar Gram Schmidt para diagonalizar F

Problema 80.

Sea F un producto interno sobre $\mathbb{C}^3$, tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 2 & 1-2i \\ 1 & 1+2i & 12 \end{bmatrix}$$

Usar Gram Schmidt para diagonalizar F

Problema 81.

Sea F un producto interno sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 2+i & 6 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 15 \end{bmatrix}$$

Usar Gram Schmidt para diagonalizar F

Problema 82.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^6$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^6 \quad | \quad x_1 = x_2 + x_3, \quad x_4 = x_2 + 2x_3\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 83.

Sean $p, q \in \mathbb{R}_4[x]$ Considere el producto

$$f(p,q) = \sum_{i=0}^{4} p^{(i)}(0) q^{(i)}(0)$$

y sea

$$\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \in \mathbb{R}_4[x] \quad | \quad a + b - c + d + 2e = 0, \quad 3a + 2b - 5c = 0\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 84.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^5$ y sea

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \quad | \quad x + y - z + w - t = 0, \quad x + 2y - t = 0\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 85.

Sean $p = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,\ q = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$.
Dado el producto

$$f(p, q) = aa' + bb' + cc' + 2dd' + de' + ed' + ee'$$

y

$$\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \in \mathbb{R}_4[x] \quad | \quad a + b - c + 2d + 2e = 0, \quad 3a + 2b - 3c = 0\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 86.

Sean $p = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,\ q = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$
Dado el producto

$$f(p, q) = aa' + bb' + cc' + dd' + de' + ed' + 2ee'$$

y

$$\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \in \mathbb{R}_4[x] \quad / \quad a + b - c + d + 2e = 0, \quad 3a + 2b - 5c = 0\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 87.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^6$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^6 \quad | \quad x_1 = x_2 + x_3, \quad x_4 = x_2 + 2x_3\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$

2. Determinar una base de $\mathcal{W}^{\perp}$

Problema 88.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^6$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^6 \quad / \quad x_1 = x_2, \quad x_3 = x_4\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^{\perp}$

Problema 89.

Sea $\mathcal{C}$ la base canónica $\mathbb{R}^4$ y f una forma bilineal simétrica tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Demuestre que f es un producto interno
2. Aplicar Gram Schmidt a $\{(1,1,0,1)(1,2,1,0),(1,2,1,1\}$

Problema 90.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^5$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^5 \quad / \quad x_1 = x_2 + x_3, \quad x_4 = x_2 - x_3\}$$

Calcular la distancia de $(1,1,1,-1,-1)$ a $\mathcal{W}$

Problema 91.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^6$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^6 \quad / \quad x_1 = x_2 + x_3, \quad x_4 = x_2 + 2x_3\}$$

Calcular la distancia de $(1,1,2,3,1,2)$ a W

Problema 92.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la forma bilineal simétrica f_λ sobre $\mathbb{R}^4$, dada en la base canónica por la matriz

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

sea un producto interno.

Problema 93.

Determinar si es verdadero o falso la afirmación justifique

1. Si f es una forma sesquilineal hermitiana no degenerada $\mathbb{C}^n$ entonces f es un producto interno.
2. Sean $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ y $f(A,B) = traza(AB^*)$ es una forma sesquilineal hermitiana

3.4.2. Operadores Adjuntos

Teorema 82 *Sean V un espacio de dimensión finita y f una forma bilineal sesquilineal no degenerada y $T \in V^* = L(V,\mathbb{K})$ Entonces existe un único vector $w \in V$ tal que $T(v) = f(v,w)$, para todo v en V.*

Demostración: Supongamos que f es simétrica (hermitiana) y como es no degenerada existe $\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base ortogonal de vectores anisótropos de V.

$$w = \sum \frac{\overline{T(v_i)}}{f(v_i,v_i)} v_i.$$

veremos que

$$T(v) = f(v,w)$$

$$\begin{aligned}
T(v) &= T(\sum \alpha_i v_i) \\
&= \sum \alpha_i T(v_i) \\
&= \sum \alpha_i T(v_i) \frac{f(v_i,v_i)}{f(v_i,v_i)} \\
&= \sum f(\alpha_i v_i, \overline{\frac{T(v_i)}{f(v_i,v_i)}} v_i) \\
&= \sum f(\alpha_i v_i, w) \\
&= f(\sum \alpha_i v_i, w) \\
&= f(v,w)
\end{aligned}$$

En general el vector w se obtiene al considerar el siguiente sistema

$$[v]_B^t \, [f]_B \, [w]_B = [Tv]_B$$

donde $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, y con ellos el siguiente sistema

$$A\,[\alpha_i] = [b_i]$$

con $[w]_B = [\alpha_i]\,, A = [f]_B\,, b_i = T(v_i)$, luego

$$[\alpha_i] = A^{-1}\,[b_i]$$

Para la unicidad tenemos:

$$T(v) = f(v, w) = f(v, u)(\forall v \in V),$$

luego

$$f(v, w - u) = 0 \quad \forall v \in V,$$

de lo cual $w - u = 0$, así $w = u$. □

Ejemplo 55 *Sea $\mathbb{C}^3$ con la forma sesquilineal canónica.*

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C} \\ & (z_1, z_2, z_3) & \to & 3z_1 - z_2 + iz_3 \end{array}$$

Determinar w del teorema anterior

Solución: Sabemos que $w = z_1e_1 + z_2e_2 + e_3z_3$ y cumple con

$$L(v) = f(v, w)$$

Evaluando en los elementos de la base, tenemos las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} L(e_1) = f(e_1, w) = \overline{z_1} \\ L(e_2) = f(e_2, w) = \overline{z_2} \\ L(e_3) = f(e_3, w) = \overline{z_3} \end{aligned}$$

calculando obtenemos que

$$3 = f(e_1, w), \qquad -1 = f(e_2, w), \qquad i = f(e_3, w)$$

es decir,

$$w = 3e_1 - 1e_2 - ie_3$$

Ejemplo 56 *Sean $L \in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$, tal que $L(z_1, z_2, z_3) = 3z_1 - z_2 + iz_3$ y la forma sesquilineal tal que en la base canónica matriz asociada es*

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar w del teorema anterior

Solución: Sea $w = xe_1 + ye_2 + ze_3$, como se cumple

$$L(v) = f(v, w)$$

Evaluando en los elementos de la base, tenemos las siguiente igualdades

$$L(e_1) = f(e_1, w), \quad L(e_2) = f(e_2, w), \quad L(e_3) = f(e_3, w)$$

calculando obtenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 1\overline{x} + (1+i)\overline{y} & = & 3 \\ (1-i)\overline{x} + 3\overline{y} & = & -1 \\ \overline{z} & = & i \end{array}\right|$$

es decir, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 10 - i \\ y & = & -4 - 3i \\ z & = & -i \end{array}\right|$$

con lo cual obtenemos:

$$w = (10 - i)e_1 - (4 + 3i)e_2 - ie_3$$

Teorema 83 *Sean V un espacio de dimensión finita, f una forma bilineal (sesquilineal) no degenerada, entonces existe un isomorfismo dado por*

$$\begin{array}{rccccc} \phi: & V & \to & L(V, \mathbb{K}) & & \\ & x & \rightsquigarrow & x^* = f_x : & V & \to & \mathbb{K} \\ & & & & v & \rightsquigarrow & f(v, x) \end{array}$$

Teorema 84 *Sean V un espacio de dimensión finita, f una forma bilineal (sesquilineal) no degenerada y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces existe un único operador lineal T^* sobre V tal que*

$$f(Tv, w) = f(v, T^*w).$$

Demostración: Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $w \in V$

$$\begin{array}{rccl} L: & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & v & \longmapsto & L(v) = f(Tv, w) \end{array}$$

es una transformación lineal.

Para ello, sean $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} L(u + \alpha v) &= f(T(u + \alpha v), w) \\ &= f(Tu + \alpha Tv, w) \\ &= f(Tu, w) + \alpha f(Tv, w) \\ &= L(u) + \alpha L(v) \end{aligned}$$

Entonces existe un único w_0 tal que $f(Tv,w) = f(v,w_0)$, definimos a

$$w_0 = T^*(w)$$

luego para cada $v, w \in V$ se cumple que

$$f(Tv,w) = f(v,T^*w).$$

Usando este propiedad obtenemos la linealidad

$$\begin{aligned} f(v,T^*(w+aw')) &= f(Tv,w+aw') \\ &= f(Tv,w) + \overline{a}f(Tv,w') \\ &= f(v,T^*w) + \overline{a}f(v,T^*w') \\ &= f(v,T^*w) + f(v,aT^*w') \\ &= f(v,T^*w + aT^*w') \end{aligned}$$

por unicidad tenemos que

$$T^*(w+aw') = T^*(w) + aT^*(w')$$

$\square$

Definición 37 *Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal o sesquilineal no degenerada y T un endomorfismo de V.*

Se dice que T tiene un **`operador adjunto`** *sobre V si existe un operador lineal T^* sobre V tal que*

$$f(Tv,w) = f(v,T^*w), \quad (\forall v, w \in V).$$

Observación: El operador adjunto depende de T y de la forma bilineal o sesquilineal.

Ejemplo 57 *Sea $\mathbb{C}^3$ con la forma sesquilineal usual.*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (z_1,z_2,z_3) & \to & (z_1 - z_2, z_3 - iz_1, z_2) \end{array}$$

Determinar T^*.

Solución: Sabemos que se cumple

$$f(Tv,w) = f(v,T^*w)$$

En la base canónica, se tiene

$$f(Te_i,e_j) = f(e_i,T^*e_j)$$

Evaluando en $e_j = e_1$ tenemos las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} f(Te_1,e_1) &= f(e_1,T^*e_1) \\ f(Te_2,e_1) &= f(e_2,T^*e_1) \\ f(Te_3,e_1) &= f(e_3,T^*e_1) \end{aligned}$$

calculando obtenemos que

$$1 = f(e_1, T^*e_1), \quad -1 = f(e_2, T^*e_1), \quad 0 = f(e_3, T^*e_1).$$

es decir,

$$T^*e_1 = e_1 - e_2$$

Ahora evaluando en e_2 tenemos las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} f(Te_1, e_2) &= f(e_1, T^*e_2) \\ f(Te_2, e_2) &= f(e_2, T^*e_2) \\ f(Te_3, e_2) &= f(e_3, T^*e_2) \end{aligned}$$

calculando obtenemos que

$$-i = f(e_1, T^*e_2), \quad 0 = f(e_2, T^*e_2), \quad 1 = f(e_3, T^*e_2).$$

Así

$$T^*e_2 = ie_1 + e_3$$

Finalmente evaluando en e_3 y tenemos las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} f(Te_1, e_3) &= f(e_1, T^*e_3) \\ f(Te_2, e_3) &= f(e_2, T^*e_3) \\ f(Te_3, e_3) &= f(e_3, T^*e_3) \end{aligned}$$

calculando obtenemos que

$$0 = f(e_1, T^*e_3), \quad 1 = f(e_2, T^*e_3), \quad 0 = f(e_3, T^*e_3)$$

es decir,

$$T^*e_3 = e_2$$

Con lo cual la transformación esta definida por

$$\begin{array}{cccc} T^*: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (z_1, z_2, z_3) & \to & (z_1 + iz_2, z_3 - z_1, z_2) \end{array}.$$

Observación: En el ejercicio anterior, también lo podemos desarrollar matricialmente.

Para ello sabemos que

$$f(v, w) = [v]^t \cdot Id \cdot \overline{[w]}$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned} f(Tv, w) &= [Tv]^t_{\mathcal{C}} \cdot Id \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}} = [v]^t_{\mathcal{C}}[T]^t_{\mathcal{C}} \cdot Id \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}} \\ f(v, T^*w) &= [v]^t_{\mathcal{C}} \cdot Id \cdot \overline{[T^*w]_{\mathcal{C}}} = [v]^t_{\mathcal{C}} \cdot Id \cdot \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}[w]_{\mathcal{C}}} \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos que

$$[T]^t_{\mathcal{C}} = \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}} \quad [T^*]_{\mathcal{C}} = \overline{[T]^t_{\mathcal{C}}}$$

En el ejercicio tenemos que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$[T^*]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir

$$\begin{array}{rccc} T^* : & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (z_1, z_2, z_3) & \to & (z_1 + iz_2, z_3 - z_1, z_2) \end{array}.$$

En general tenemos el siguiente resultado.

Propiedad 85 *Sea V un espacio de dimensión finita, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal o sesquilineal no degenerada y T un endomorfismo de V, entonces para toda $\mathcal{C}$ base de V,*

$$[T^*]_{\mathcal{C}} = \overline{[f]_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}}}$$

Demostración: Sea $\mathcal{C}$ una base de V luego

$$\begin{aligned} f(Tv, w) &= [Tv]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}} = [v]_{\mathcal{C}}^t [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}} \\ f(v, T^*w) &= [v]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[T^*w]_{\mathcal{C}}} = [v]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}[w]_{\mathcal{C}}} \end{aligned}$$

Al evaluar en $v_i, v_j \in \mathcal{C}$, obtenemos la siguiente igualdad matricial

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} &= [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}} \\ [f]_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} &= \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}} \\ [T^*]_{\mathcal{C}} &= \overline{[f]_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}}} \end{aligned}$$

Ejemplo 58 *Sea $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$.*
Determinar T^* respecto al producto interno canónico
Determinar T^* respecto al producto interno $f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Solución: En el primer caso tenemos en la base canónica que

$$[T^*] = Id\,[T]^t\,Id = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$T^*(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2).$$

Para el otro producto interno tenemos

$$\begin{aligned} [T^*] = [f]^{-1}\,[T]^t\,[f] &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$T^*(x_1, x_2) = T(x_1, x_2)$$

Propiedad 86 *Sea V un espacio de dimensión finita, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal o sesquilineal no degenerada y T, L endomorfismo de V entonces*

1. $(cT)^* = \bar{c}T^*$

2. $(T + L)^* = T^* + L^*$

3. $(T \circ L)^* = L^* \circ T^*$

Demostración: Para las demostración tenemos que tener presente la unicidad del operador adjunto, notemos que

$$\begin{aligned} f(Tv, w) &= f(v, T^*w) \quad \forall v, w \in V \\ f(Lv, (cT)^*(w) &= f(v, L^*w) \quad \forall v, w \in V \end{aligned}$$

1. Dado $v, w \in V$

$$\begin{aligned} f(cTv, w) &= cf(Tv, w) = cf(v, T^*w) = f(v, \bar{c}T^*w) \\ f(v, (cT)^*(w)) &= f(v, \bar{c}T^*w) \end{aligned}$$

luego

$$(cT)^* = \bar{c}T^*$$

2. Sumando las igualdades tenemos

$$\begin{aligned} f(Tv, w) + f(Lv, w) &= f(v, L^*w) + f(v, T^*w) \\ f(Tv + Lv, w) &= f(v, L^*w + T^*w) \\ f((T + L)\, v, w) &= f(v, (L^* + T^*)\, w) \end{aligned}$$

por definición de operador adjunto tenemos

$$f(v, (T + L)^*\, w) = f(v, (L^* + T^*)\, w)$$

luego

$$(T + L)^* = (L^* + T^*)$$

3.

$$\begin{aligned} f((T \circ L)\, v, w) &= f(T\,(Lv)\,, w) \\ &= f(Lv, T^*w) \\ &= f(v, L^*\,(T^*w)) \\ &= f(v, (L^* \circ T^*)\, w) \end{aligned}$$

por definición de operador adjunto tenemos

$$f(v, (T \circ L)^* w) = f(v, (L^* \circ T^*) w)$$

es decir

$$(T \circ L)^* = L^* \circ T^*$$

$\square$

Propiedad 87 *Sea V un espacio de dimensión finita, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal simétrica (sesquilineal hermitiana) no degenerada y T un endomorfismo de V*

$$(T^*)^* = T$$

Demostración: Dadas las condiciones del teorema

$$f(T^*v, w) = f(v, (T^*)^* w)$$

además

$$f(v, Tw) = \overline{f(Tw, v)} = \overline{f(w, T^*v)} = f(T^*v, w)$$

luego

$$f(v, Tw) = f(T^*v, w) = f(v, (T^*)^* w)$$

por lo tanto

$$(T^*)^* = T$$

Propiedad 88 *Sea V un espacio de dimensión finita, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal o sesquilineal no degenerada y T un endomorfismo de V entonces*

1. *T es epiyectiva implica que T^* es inyectiva*

2. *T es inyectiva implica que T^* es epiyectiva*

Demostración: Supongamos que T es epiyectiva, y $u \in \ker T^*$

$$f(Tv, u) = f(v, T^*u) = 0 \quad \forall v \in V$$

Pero T es epiyectiva luego

$$f(w, u) = 0 \quad \forall w \in V$$

es decir, u es ortogonal a todo el espacio, por lo tanto $u = 0$.

2. Supongamos que T es inyectiva, y $u \in (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

$$f(Tu, w) = f(u, T^*w) = 0 \quad \forall w \in V$$

es decir, Tu es ortogonal a todo el espacio, por lo tanto $Tu = 0$, pero T es inyectiva luego $u = 0$, Por lo tanto

$$(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \{0\}$$

de lo cual obtenemos

$$\operatorname{Im} T^* = V.$$

$\square$

Definición 38 *Sea f :$V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica (sesquilineal hermitiana) no degenerada y $T : V \to V$ un transformación lineal entonces*

Se dice que T es una **`Operador Normal`** *si y sólo si $T \circ T^* = T^* \circ T$.*

Se dice que T es una **`Operador Unitaria`** *si y sólo si $T^* = T^{-1}$*

Se dice que T es una **`Operador Simétrico`** *(Hermítico) si y sólo si $T^* = T$.*

Propiedad 89 *Si T es una operador unitaria entonces T es una operador normal*

Demostración: Si T es unitario luego $T^* = T^{-1}$

Por lo tanto

$$T \circ T^* = T \circ T^{-1} = Id = T^{-1} \circ T = T^* \circ T$$

es decir, T es una operador normal □

Propiedad 90 *Si T es una operador simétrico (hermítica) entonces T es una operador normal*

Demostración: Si T es simétrico luego $T^* = T$

Por lo tanto

$$T \circ T^* = T \circ T = T^* \circ T$$

es decir, T es una operador normal □

Propiedad 91 *Sea f : $V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica (sesquilineal hermitiana) no degenerada y $T : V \to V$ un transformación lineal normal entonces*

1. *Si α es un valor propio de T entonces $T^*(V_\alpha) \subseteq V_\alpha$*

2. *Si α es un valor propio de T^* entonces $T(V_\alpha) \subseteq V_\alpha$*

Demostración: Sea v un vector propio de T asociado al valor propio α luego $T(v) = \alpha v$

$$T(T^*v) = T^*(Tv) = T^*(\alpha v) = \alpha T^*(v)$$

luego $T^*(v)$ es un vector propio asociado al valor propio α, por lo tanto $T^*(v) \in V_\alpha$.

Sea v un vector propio de T^* asociado al valor propio α luego $T^*(v) = \alpha v$

$$T^*(Tv) = T(T^*v) = T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

luego $T(v)$ es un vector propio asociado al valor propio α, por lo tanto $T(v) \in V_\alpha$.

□

Propiedad 92 *Sea f un producto interno sobre V de dimensión finita, T una transformación normal, entonces*

1. $\ker T = \ker T^*$

2. *Si α es un valor propio de T, con vector propio v entonces $\overline{\alpha}$ es un valor propio de T^*, con vector propio v.*

3. $\ker T \perp \operatorname{Im} T$.

4. $\ker T^i = \ker T$ *para todo* $i \in \mathbb{N}, i > 1$

Demostración:

1. Notemos que
$$f(Tu, Tu) = 0 \Leftrightarrow f(u, T^*Tu) = 0 \Leftrightarrow f(u, TT^*u) = 0 \Leftrightarrow f(T^*u, T^*u) = 0$$
Luego $u \in \ker T$ si y sólo si $u \in \ker T^*$.

2. Si $T(v) = \alpha v$, luego
$$\begin{aligned} & f(T^*v - \overline{\alpha}v, T^*v - \overline{\alpha}v) = \\ &= f(T^*v, T^*v) + f(\overline{\alpha}v, \overline{\alpha}v) - f(T^*v, \overline{\alpha}v) - f(\overline{\alpha}v, T^*v) \\ &= f(v, T^*Tv) + \alpha\overline{\alpha}f(v, v) - \alpha f(v, Tv) - \overline{\alpha}f(Tv, v) \\ &= f(Tv, \alpha v) + \alpha\overline{\alpha}f(v, v) - \alpha f(v, \alpha v) - \overline{\alpha}f(\alpha v, v) \\ &= f(\alpha v, \alpha v) + \alpha\overline{\alpha}f(v, v) - \alpha\overline{\alpha}f(v, v) - \alpha\overline{\alpha}f(v, v) = 0 \end{aligned}$$
De este modo $T^*v - \overline{\alpha}v = 0$.

3. Sea $u \in \ker T, v \in \operatorname{Im} T$, por (2) tenemos que $T^*u = 0$, además
$$f(u, v) = f(u, Tw) = f(T^*u, w) = 0.$$
Por lo tanto, $(\ker T)^{\perp} = \operatorname{Im} T$

4. $\ker T^2 = \ker T$, claramente $\ker T \subsetneq \ker T^2$
Sea $u \in \ker T^2$, como $T(Tu) = 0$ luego $Tu \in \ker T = \ker^*$
$$f(Tu, Tu) = f(u, T^*(Tu)) = f(u, 0) = 0$$
Es decir $Tu = 0$, de lo cual $u \in \ker T$

□

Teorema 93 *Sea T un operador normal sobre un espacio con producto interno complejo de dimensión finita entonces T es diagonalizable*

Demostración: Sea T un operador normal, y $P_T(x)$ el polinomio característico, y α un valor propio.

Ya que T es normal y como $(T - \alpha Id)^* = T^* - \bar{\alpha}Id$ entonces
$$(T^* - \bar{\alpha}Id) \circ (T - \alpha Id) = (T - \alpha Id) \circ (T^* - \bar{\alpha}Id)$$
luego $T - \alpha Id$ es normal.

Por la propiedad anterior se tiene que $\ker(T - \alpha Id) = \ker(T + \alpha Id)^j$, luego todo los valores propios tiene multiplicidad uno en el polinomio minimal.

De este modo se tiene que T es diagonalizable. □

Corolario 94 *Una transformación lineal simétrica sobre un espacio de dimensión finita entonces T es diagonalizable.*

Demostración: Sea T un operador simétrico, luego tenemos

$$\alpha v = Tv = T^* v = \bar{\alpha} v$$

Como v es no nulo, todo los valores propios son reales y además T es normal luego es diagonalizable □

Definición 39 *Sean V un espacio con producto interno, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal.*

Se dice que T **`preserva`** *el producto interno si y sólo si*

$$\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle \text{ con } v, w \in V.$$

Propiedad 95 *Sean V un espacio con producto interno, con $\mathcal{C}$ una base de V $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal.*

T preserva los producto interno si y sólo si

$$\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle \text{ con } v_i, v_j \in \mathcal{C}.$$

Demostración: Supongamos que preserva en la base, si $v, w \in V$ entonces

$$v = \sum_i a_i v_i, \qquad w = \sum_j b_j v_j$$

al evaluar tenemos

$$\begin{aligned}
\langle Tv, Tw \rangle &= \langle T(\sum_i a_i v_i), T(\sum_j b_j v_j) \rangle \\
&= \sum_i a_i \sum_j \overline{b_j} \langle T(v_i), T(v_j) \rangle \\
&= \sum_i a_i \sum_j \overline{b_j} \langle v_i, v_j \rangle \\
&= \langle \sum_i a_i v_i, \sum_j b_j v_j \rangle \\
&= \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

luego T preserva el producto interno, en el otro sentido es inmediata. □

Ejemplo 59 *Hallar $T \in End(\mathbb{R}^2)$, tal que preserva el producto interno canónico.*

Solución: Sea $T \in End(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Luego se tiene que

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando obtenemos que

$$\begin{bmatrix} x^2+z^2 & xy+zw \\ xy+zw & y^2+w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego tenemos que

$$x^2+z^2=1, \quad xy+zw=0, \quad y^2+w^2=1.$$

Ya que x e z no pueden ser ambos nulo, se despeja en la segunda ecuación y reemplazamos en la tercer para obtener:

$$[T]_{\mathcal{C}} \in \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a^2+b^2=1 \right\}$$

Propiedad 96 *Sean V un espacio de dimension finita con producto interno,*

$$G = \{T \in End(V) \quad | \quad (\forall x, y \in V)\,(< Tx, Ty >=< x, y >)\}$$

es un grupo con la composición.

Solución: Ya que V un espacio de dimension finita con producto interno, luego existe una base ortonormal $\mathcal{C}$ de V.

Sea $T \in G$, luego se tiene que

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [< >]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[T]_{\mathcal{C}}} &= [< >]_{\mathcal{C}} \\ [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot Id \cdot \overline{[T]_{\mathcal{C}}} &= Id \\ [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot \overline{[T]_{\mathcal{C}}} &= Id \end{aligned}$$

es decir, $T \in Aut(G)$.

Dados $T, L \in G$, $u, v \in V$, se tiene que

$$< L(Tu), L(Tv) >=< Tu, Tv >=< u, v >$$

Por lo tanto $L \circ T \in G$.

Finalmente $T \in G$, existe $T^{-1} \in Aut(V)$, dado $u, v \in V$, se tiene que

$$< T^{-1}(u), T^{-1}(v) >=< T(T^{-1}(u)), T(T^{-1}(v)) >=< u, v >$$

De lo cual tenemos que $G \leq Aut(V)$, es un grupo. □

Grupo Ortogonal

Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$, una forma bilineal simétrica no degenerada.

El conjunto de los automorfismo que preservan la forma f es un grupo y se llama `grupo ortogonal`

$$O(f) = \{T \in Aut(V) \quad | \quad (\forall x, y \in V)\,(f(Tx, Ty) = f(x, y))\}$$

Grupo Unitario

Sea $f : V \times V \to \mathbb{C}$, una forma sesquilineal hermitiana no degenerada.

El conjunto de los automorfismo que preservan la forma f es un grupo y se llama grupo unitario.

$$U(f) = \{T \in Aut(V) \quad | \quad (\forall x, y \in V)\, (f(Tx, Ty) = f(x, y))\}$$

Ejemplo 60 *Demostrar que el grupo que preserva el producto interno canónico de $\mathbb{C}^2$ es*

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & -\bar{b}u \\ b & \bar{a}u \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;\mid\; a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \wedge u\bar{u} = 1 \right\}$$

3.4.3. Ejercicios

1. Sea f un producto interno sobre V , y $T : W \to V$ una transformación lineal inyectiva. Demostrar que $f_T(x, y) = f(T(x), T(y))$ es un producto interno en W.

2. Sea f un producto interno sobre V y $S \subset V$, demostrar que

   a) $\{0\}^{\perp} = V$

   b) $S^{\perp} \leq V$

   c) $V = S^{\perp} \oplus \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$

3. Demostrar la desigualdad

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, (\forall a_i \in \mathbb{R}) \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}\right),$$

4. Sea $V = \mathbb{R}^3$, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y f el producto interno canónico

$$O_f(V) = \{T \in Aut(V) \quad | \quad f(Tx, Ty) = f(x, y)\}$$

   Determinar $A = \{g \in O_f(V) \quad | \quad g(e_2) = e_2\}$.

5. Sea $V = \mathbb{C}^3$, un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, y f el producto interno canónico

$$U_f(V) = \{T \in Aut(V) \quad | \quad f(Tx, Ty) = f(x, y)\}$$

   Determinar $A = \{g \in U_f(V) \quad | \quad g(e_2) = e_2\}$.

6. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_3, x_2 + ix_3).$$

   Hallar $T^*(x)$, respecto a la forma sesquilineal hermitiana no degenerada canónica (o usual) de $\mathbb{C}^3$.

7. Sea $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tal que $f(z,w) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3$. una forma sesquilineal no degenerada y $h_a : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $h_a(z) = az$. Hallar h_a^*

8. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $T(z) = (iz_1 + (2+3i)z_2, 3z_1 + (3-i)z_3, (2-5i)z_3)$.

   Hallar T^* respecto a la forma sesquilineal no degenerada hermitiana usual.

9. Sea f un producto interno en V y $T \in End(V)$ un operador normal tal que $T^2 = 0$.

   Demostrar que $T = 0$.

10. Sea f un producto interno en V y $T \in End(V)$ un operador normal en V Demostrar que,
$$(\forall r \in \mathbb{N}^*)(\ker(T^r) = \ker(T^{r+1}))$$

11. Sea f un producto interno en V y $T \in End(V)$ un operador normal tal que $T^3 = 0$ Demostrar que $T = 0$.

12. Demostrar que dada una forma sesquilineal hermitiana no degenerada, siempre existe un vector no isótropo.

13. Sea V un espacio con f un producto interno complejo de dimensión finita y T un operador lineal sobre V.

    Demostrar que T es simétrico o autoadjunto si y sólo si $f(Tx, x)$ es real para todo $x \in V$

14. Sea F un forma hermítica tal que F no tiene vectores isótropos no trivial entonces, F es positiva definida o bien negativa definida.

15. Sea $F(A,B) = ntr(A\bar{B}) - tr(A)tr(\bar{B})$, donde $A, B \in M(n,\mathbb{C})$. Demostrar que F es una forma hermítica.

    ¿Tiene vectores isótropos no nulo?

16. Sea F una forma sesquilineal no degenerada y simétrica sobre V y $T : V \to V$ una transformación lineal. Demostrar que $T + T^*$ es autoadjunto.

17. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica ($A = A^t$). Demostrar las siguientes afirmaciones:

    a) α es una raíz de $P_A(x)$ entonces α es real .

    b) A es simétrica (nilpotente) entonces A^2 es simétrica (nilpotente).

    c) A simétrica y nilpotente entonces $A = 0$.

    Sean $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r$ todas sus raíces $P_A(x)$ en $\mathbb{R}$. Consideremos $q(x) = \ (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \quad (x-\alpha_r)$.

    d) Si A es simétrica entonces $q(A)$ es simétrica y nilpotente.

    e) Si A es simétrica entonces A es diagonalizable.

3.4.4. Ejercicios Propuestos

Problema 94.

Sea $\mathcal{B} = \{1 + x, 2 - x, x + x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y f un producto interno tal que la matriz asociada en esta base es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Si

$$T(a + bx + cx^2) = a + b + (a + b + c)x + (2a - b + c)x^2$$

Determinar T^*, adjunto de T, respecto a f.

Problema 95.

Sea $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ y f una forma bilineal no degenerada tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b - c) + (a - b + c)\,x + (a - c + d)\,x^2 + (a + c - d)\,x^3.$$

1. Hallar $T^*(a + bx + cx^2 + dx^3)$, respecto a f
2. Determinar si T^* es biyectiva

Problema 96.

Sea $\mathcal{B} = \{1, 1 + x^2, 1 + x^3, 1 + x\}$ una base de $\mathbb{R}_3[x]$ y f una forma bilineal no degenerada tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (2a + b) + (b + c)\,x + (a - c)\,x^2 + (a - d)\,x^3.$$

una transformación lineal, entonces

1. Hallar $T^*(a + bx + cx^2 + dx^3)$, respecto a f
2. Determinar si T^* es biyectiva

Problema 97.

Sea F una forma hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 1 \end{bmatrix}$$

Si

$$T(x,y,z) = (3x+iz, y+(1+i)z, (1-i)x+(3+2i)y)$$

una transformación lineal, entonces

Determine T^* (operador adjunto), respecto a F.

Problema 98.

Sea $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y f un producto interno real tal que la matriz asociada en esta base es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(a+bx+cx^2) = a+b+(a+b+c)x+(2a-b+c)x^2$$

Determinar T^* adjunto de T, respecto a f.

Problema 99.

Sean $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4, a'+b'x+c'x^2+d'x^3+e'x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$

Considere el producto

$$f(p,q) = aa'+bb'+cc'+2dd'+de'+ed'+ee'$$

y

$$T(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4) = a+b+(c+2d)x+(a+e)x^2+(b-2b)x^4$$

una transformación lineal, entonces

Determinar T^* adjunto de T, respecto a f

Problema 100.

Sea $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tal que $f(z,w) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3$ producto interno complejo usual

1. Sea $h_a : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $h_a(z) = az$. Hallar h_a^*
2. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $T(u,v,w) = (iu+(2+3i)v, 3u+(3-i)v, (1-2i)v+(1-5i)w)$. Hallar T^* .

Problema 101.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & 1-i \\ 0 & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a,b,c) = (a+ib, ib+c, ia-c).$$

una transformación lineal, entonces

1. Determine una base ortogonal para f
2. Hallar $T^*(a,b,c)$, respecto a f
3. Determinar si T es normal

Problema 102.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 1 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a,b,c) = (ia+2b, b+(1-i)\,c, a-c).$$

Determinar T^* adjunto de T respecto a f

Problema 103.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 2+i & 6 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 15 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a,b,c) = (2a+ib, b+(1+i)\,c, a-c).$$

a) Hallar $T^*(a,b,c)$, respecto a f

b) Determinar si T^* es biyectiva

Problema 104.

Sea $\mathcal{B} = \{e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y f un producto interno tal que la matriz asociada en esta base es $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(a, b, c) = (c - a, a - b + c, 2a - b + c)$$

Determinar $[T^*]_{\mathcal{B}}$ y $T^*(e_3)$

Problema 105.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & 1 - i \\ 0 & 1 + i & 3 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a, b, c) = (a + ib, ib + c, ia - c).$$

1. Determine una base ortogonal para f
2. Hallar $T^*(a, b, c)$, respecto a f
3. Determinar si T es normal

Problema 106.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 2i & 0 \\ 1 + 2i & 0 & 3 - 2i \\ 0 & 3 + 2i & 1 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a, b, c) = (ia + 2b, b + (1 - i)\, c, a - c).$$

Determinar T^* adjunto de T respecto a f

Problema 107.

Sea f una producto interno real usual sobre $\mathbb{R}^n$ y $T_u \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$T_u(x) = x - 2f(u, x)u.$$

Para todo $u \in \mathbb{R}^n$

1. Determine el adjunto de T_u
2. T_u es un operador normal, simétrico.
3. Demuestre que si $f(u,u) = 1$ entonces T_u preserva el producto interno f.

Problema 108.

Sea f un producto interno sobre un espacio complejo de dimensión finita V y $T \in L(V,V)$ tal que $(\forall v \in V)\,(f(T(v),v) = 0)$, entonces

$$T = 0.$$

Problema 109.

Sea f un producto interno sobre V un espacio real de dimensión finita y T un transformación lineal que preserva f. Demostrar que $\det\left([T]_{\mathcal{C}}\right) = \pm 1$.

Problema 110.

Sea $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual y $T \in End(\mathbb{C}^2)$ tal que $T(a,b) = (ia - ib, -ia + ib)$
Determinar si T es normal, hermitiana, o unitaria.

Problema 111.

Sea f un producto interno sobre un espacio real de dimensión finita V y $T \in L(V,V)$ tal que $T = T^*$.

Demostrar que si α, β son dos valores propios distintos de T entonces $V_\alpha \subseteq (V_\beta)^\perp$.

Problema 112.

Sea f un producto interno sobre un espacio complejo de dimensión finita V y $T \in L(V,V)$ operador unitario

Si $W \leq V$ invariante por T, es decir $T(W) \subset W$, entonces $W^\perp$ invariante por T.

Problema 113.

Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de V y $T \in L(V,V)$ un operador unitario entonces

Demostrar que $\{Tv_1, Tv_2, ..., Tv_n\}$ una base ortonormal de V

Problema 114.

Sea $W \leq V$, f un producto interno sobre un espacio de dimensión finita V y $T \in End(V)$ normal entonces

Demostrar que W es T- invariante si y sólo si $W^\perp$ es T^*- invariante

es decir

$$T(W) \subset W \Longleftrightarrow T^*(W^\perp) \subset W^\perp$$