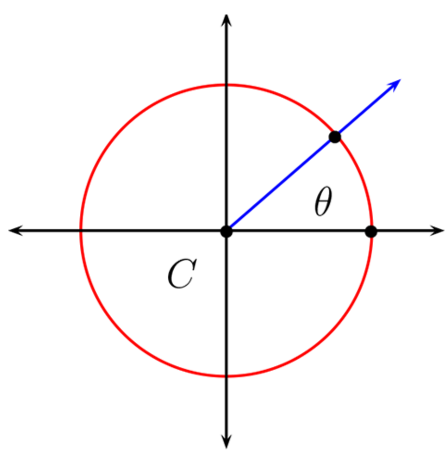
Capítulo 4

Trigonometría

En este capítulo trabajaremos con las funciones trigonométricas, es decir, con la función **seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante**, que en sus inicio estaban definida como proporciones en un triángulo rectángulo, de este hecho proviene el nombre del capítulo Trigonometría que significa "medida triángulo"

4.1 Introducción

Un concepto previo y muy importante para introducir las funciones trigonométricas es el de **ángulo**, que es una figura geométrica plana que consiste en un sector del plano limitado por dos semirrectas con el punto extremo en común. Para medir un ángulo, situamos el punto extremo en el centro de circunferencia y uno de los lados en el semi-eje positivo X, decimos que el ángulo es positivo si se mide en sentido del contrario al movimiento del manecillas del reloj en caso contrario es ángulo es negativo.



Existen varias formas de medir un ángulo, entre las más conocida están: **Radianes, Sexagesimal y Centesimal,** cada una de ella consiste en dividir, la circunferencia en 2π, 360 o 400 partes iguales respectivamente.

Proposición 4.1.1 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, donde β es el ángulo medido en grados sexagesimales y*

α el ángulo medido en radianes entonces

$$\frac{\beta}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Observación: Por medio de esta relación obtenemos

$$\theta = \tfrac{180 \cdot \alpha}{\pi} \quad y \quad \alpha = \tfrac{\pi \cdot \theta}{180}$$

4.2 Funciones Trigonométricas

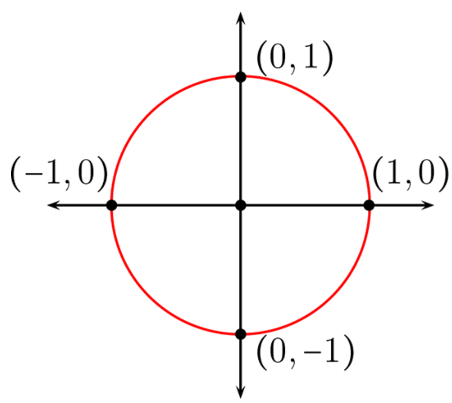
Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia unitaria de centro en el origen, es decir, de centro en $C = (0,0)$ y radio 1, entonces la ecuación que la define la circunferencia está dada por:

$$x^2 + y^2 = 1$$

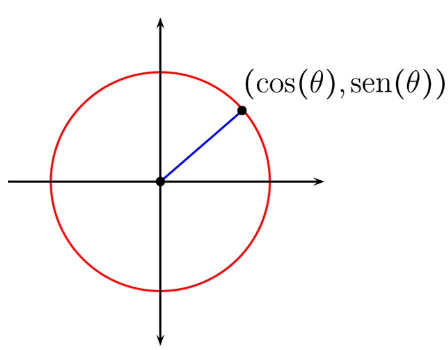
Así tenemos que

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Algunos puntos distinguidos de la circunferencia unitaria son $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$



Sea θ un ángulo, ubiquemos el lado inicial en el semieje X, luego el lado final del ángulo θ interseca la circunferencia en un punto, la primera coordenada se denota por $\cos(\theta)$, y la segunda por $\sin(\theta)$.



De esta manera se definen las primeras funciones trigonométricas.

Definición 4.2.1

a La función **seno**, esta definida por:

$$\begin{array}{rcccc} \sin & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & & \theta & \longmapsto & \sin(\theta) \end{array}$$

donde $\sin(\theta)$ representa la segunda coordenada del punto de intersección del lado final del ángulo θ con la circunferencia, cuando el lado inicial se encuentra en el semieje positivo.

b La función **coseno**, esta definida por:

$$\begin{array}{rcccc} \cos & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & & \theta & \longmapsto & \cos(\theta) \end{array}$$

donde $\cos(\theta)$ representa la primera coordenada del punto de intersección del lado final del ángulo θ con la circunferencia, cuando el lado inicial se encuentra en el semieje positivo.

$\Diamond$

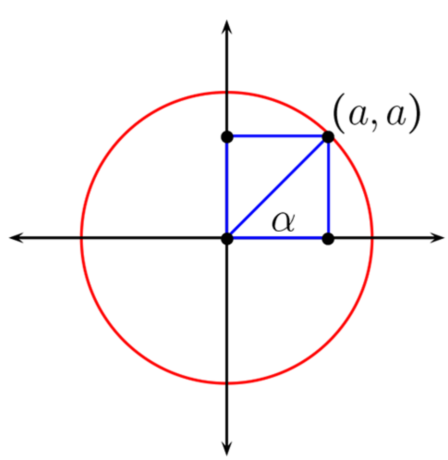
Los puntos distinguidos de la circunferencia nos permiten calcular algunos valores que a continuación listamos

$$\begin{array}{rcl} (1,0) & = & \big(\cos(0°), \sin(0°)\big) \\ (0,1) & = & \big(\cos(90°), \sin(90°)\big) \\ (-1,0) & = & \big(\cos(180°), \sin(180°)\big) \\ (0,-1) & = & \big(\cos(270°), \sin(270°)\big) \\ (1,0) & = & \big(\cos(360°), \sin(360°)\big) \end{array}$$

Podemos ordenar algunos de los valores de las funciones seno y coseno en la siguiente tabla

θ	$0° \equiv 0$	$90° \equiv \frac{\pi}{2}$	$180° \equiv \pi$	$270° \equiv \frac{3\pi}{2}$	$360° \equiv 2\pi$
$\sin(\theta)$	0	1	0	-1	0
$\cos(\theta)$	1	0	-1	0	1

Otros valores los podemos obtener, al dibujar un cuadrado de lado a en el primer cuadrante.



Como el vértice pertenece a la circunferencia luego se tiene que

$$a^2 + a^2 = 1$$

y por lo tanto $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pero además el ángulo α es $\pi/4$, con lo cual tenemos que

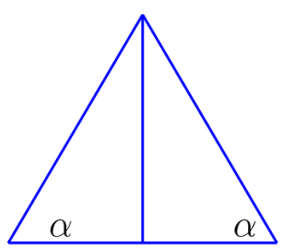
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

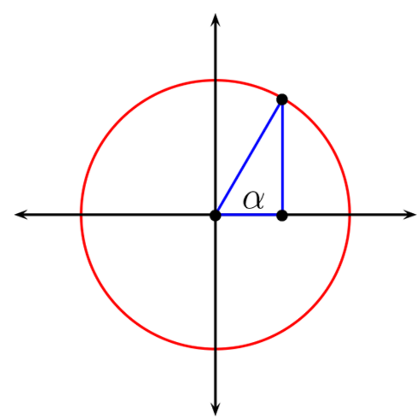
Ahora bien, este cuadrado lo podemos situar en diferentes cuadrante y ello nos permite calcular otros valores.

$$\begin{array}{rclcrcl}
\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}, & & \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) & = & \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}, & & \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) & = & \frac{\sqrt{2}}{2}, & & \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{array}$$

Para calcular otro valores, usaremos una propiedad de los triángulos equiláteros, los ángulos son todos iguales y la alturas son mediana.

Consideremos un triángulo equilátero, con lado de longitud 1 y el ángulo interior $\alpha = 60°$, luego usando pitágoras tenemos que la altura mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$.





Luego ubicamos el triángulo en la circunferencia unitaria y teniendo presentes la longitudes, obtenemos que las coordenadas tiene los siguiente valores:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

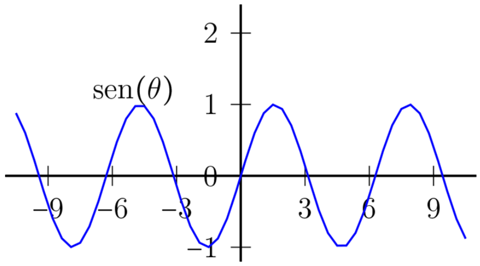
Realizando un reemplazo similar, es decir, ubicando el otro vértice del triángulo en el origen, obtenemos

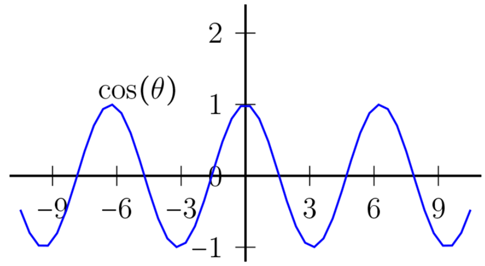
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

como resumen de los valores obtenidos hasta el momento ellos son:

sin	$0° \equiv 0$	$30° \equiv \frac{\pi}{6}$	$45° \equiv \frac{\pi}{4}$	$60° \equiv \frac{\pi}{3}$	$90° \equiv \frac{\pi}{2}$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$90° \equiv \frac{\pi}{2}$	$60° \equiv \frac{\pi}{3}$	$45° \equiv \frac{\pi}{4}$	$30° \equiv \frac{\pi}{6}$	$0° \equiv 0$

Las gráfica de las funciones *seno* y *coseno* son:





Proposición 4.2.2 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces tenemos*

a $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

b $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

c $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

Demostración. La ecuación de la circunferencia unitaria esta dada por:

$$x^2 + y^2 = 1$$

y además $x = \cos(\theta)$ e $y = \sin(\theta)$, son las coordenadas de un punto de la circunferencia, satisface la ecuación de la circunferencia y de este modo obtenemos

$$(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 \;=\; 1$$

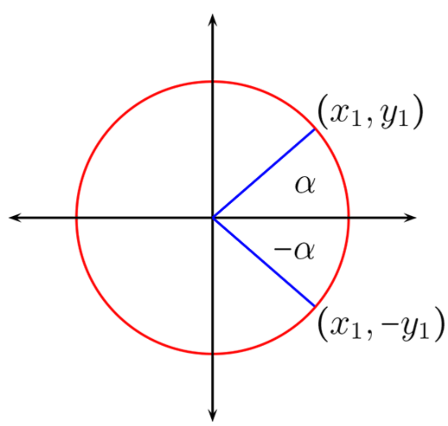
Despejando una de las funciones tenemos en

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) & ; & \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \\ |\cos(\theta)| = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} & ; & |\sin(\theta)| = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \end{array}$$

Para la segunda parte, es decir, para demostrar que la función *seno* es una función impar y la función *coseno* es una función par, veremos lo siguiente. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, luego grafiquemos los correspondiente puntos, $(x_1, y_1), (x_1, -y_1)$ en el plano



Se obtiene claramente que

$$(x_1, y_1) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)); \quad (x_1, -y_1) = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$$

de lo cual tenemos que

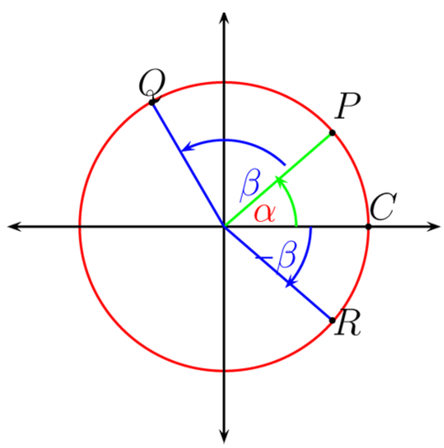
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \blacksquare$$

Definición 4.2.3 Una igualdad de funciones trigonométricas, en el dominio común es llamada una **identidad trigonométrica**. $\Diamond$

Teorema 4.2.4 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tenemos que:*

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $C(1,0), P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, pertenecen a la circunferencia unitaria, tales que α es el ángulo que termina en el segmento $\overline{CP}$ y β que se encuentra entre los segmentos $\overline{CQ}$ y $\overline{CP}$.



Por lo tanto el ángulo que termina en el segmento $\overline{CQ}$ es $\alpha+\beta$ y escogemos R de modo que el ángulo que termina en $\overline{CR}$ es $-\beta$.

Además, si tenemos presente que la función *seno* es una función impar y *coseno* una función par. Luego se obtiene

$$\begin{aligned}P &= (\cos(\alpha), \sin(\alpha))\\ Q &= (\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))\\ R &= (\cos(-\beta), \sin(-\beta)) = (\cos(-\beta), \sin(-\beta)) = (\cos(\beta), -\sin(\beta))\end{aligned}$$

Recordemos que, si los arcos son iguales entonces los segmentos son iguales y además la distancia entre dos puntos esta dada por:

$$dist(P,Q) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$$

Basándonos en que el arco $\widehat{CQ}$ mide le mismo ángulo que el arco $\widehat{PR}$ de la circunferencia unitaria, luego sus distancia al cuadrado son iguales tenemos $dist^2(C,Q) = dist^2(P,R)$, las veremos por separado

$$\begin{aligned} dist^2(C,Q) &= (1-\cos(\alpha+\beta))^2 + (0-\sin(\alpha+\beta))^2 \\ &= 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) \\ &= 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 \end{aligned}$$

Note que $\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma) = 1$.

La otra distancia

$$\begin{aligned} & dist^2(P,R) \\ =\ & (\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha) + \sin(\beta))^2 \\ =\ & \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin^2(\beta) \\ =\ & -2\cos(\alpha)\cos(\beta) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + 2 \end{aligned}$$

Igualando tenemos

$$\begin{aligned} dist^2(C,Q) &= dist^2(P,R) \\ 2 - 2\cos(\alpha+\beta) &= -2\cos(\alpha)\cos(\beta) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + 2 \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

De este modo se obtiene que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Además, también obtenemos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha + -\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot -\sin(\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$ ■

Corolario 4.2.5 *Sea $\beta \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos que se cumple:*

$$\begin{array}{llll} 1) & \cos(\frac{\pi}{2}+\beta) = -\sin(\beta) & 2) & \cos(\frac{\pi}{2}-\beta) = \sin(\beta) \\ 3) & \cos(\pi-\beta) = -\cos(\beta) & 4) & \cos(\pi+\beta) = -\cos(\beta) \\ 5) & \cos(\frac{3\pi}{2}+\beta) = \sin(\beta) & 6) & \cos(\frac{3\pi}{2}-\beta) = -\sin(\beta) \\ 7) & \cos(2\pi-\beta) = \cos(\beta) & 8) & \cos(2\pi+\beta) = \cos(\beta) \end{array}$$

La demostración son directas, basta con aplicar la identidad del teorema anterior y los valores conocidos de las funciones seno y coseno

Teorema 4.2.6 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ entonces tenemos que:*

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Demostración. En la parte (2) del corolario tenemos que $\cos(\frac{\pi}{2} - \beta) = \sin(\beta)$, realizando es cambio de variable $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ tenemos

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Y esto nos permite calcular:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\beta) \\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \\ &= \sin(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos(\alpha) \\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha). \end{aligned}$$

■

Corolario 4.2.7 *Sea $\beta \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos que se cumple:*

1) $\sin(\frac{\pi}{2} + \beta) = \cos(\beta)$	2) $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos(\beta)$
3) $\sin(\pi - \beta) = \sin(\beta)$	4) $\sin(\pi + \beta) = -\sin(\beta)$
5) $\sin(\frac{3\pi}{2} + \beta) = -\cos(\beta)$	6) $\sin(\frac{3\pi}{2} - \beta) = -\cos(\beta)$
7) $\sin(2\pi - \beta) = -\sin(\beta)$	8) $\sin(2\pi + \beta) = \sin(\beta)$

Observación: Tenga presente que en general $\cos(2\alpha)$ es distinto de $2\cos(\alpha)$, de la misma manera $\sin(2\alpha)$ es distinto de $2\sin(\alpha)$, es decir,

$$\cos(2\alpha) \neq 2\cos(\alpha) \qquad \sin(2\alpha) \neq 2\sin(\alpha)$$

lo que si es verdadero es

Proposición 4.2.8 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos que se cumple:*

1. $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
3. $\cos(2\alpha) = -1 + 2\cos^2(\alpha)$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) \\ &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) && (1) \\ &= (1 - \sin^2(\alpha)) - \sin^2(\alpha) \\ &= 1 - 2\sin^2(\alpha) && (2) \end{aligned}$$

o de otra forma

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ &= \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= -1 + 2\cos^2(\alpha) && (3) \end{aligned}$$

■

Observación: Para conocer otros valores de las funciones trigonométricas seno, coseno podemos usar las identidades trigonométricas obtenidas.

Ejemplo 4.2.9 Calcule el valor de $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ □

Solución 1. El calculo lo podemos realizar en grados o radianes

$$\begin{array}{rcl} \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) & = & \sin(210°) \\ \sin(\pi+\frac{\pi}{6}) & = & \sin(180°+30°) \\ \sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{6})\cos(\pi) & = & \sin(180°)\cos(30°)+\sin(30°)\cos(180°) \end{array}$$

Como $\sin(\pi)=0$ y $\cos(-1)$ reemplazando obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \sin(\pi+\frac{\pi}{6}) & = & \sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{6})\cos(\pi) \\ & = & 0\cdot\cos(\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{6})\cdot -1 \\ & = & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ & = & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Ejemplo 4.2.10 Calcular los valores de

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

□

Solución 2. Para ello usamos un desarrollo similar, solo hacemos notar que

$$\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

luego tenemos

$$\begin{array}{rcl} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) & = & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ & = & \frac{\sqrt{1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & = & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{array}$$

con lo cual obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Para el otro valor tenemos,

$$\begin{array}{rcl} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) & = & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ & = & \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & = & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

con lo cual obtenemos

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ahora definiremos las otras funciones trigonométricas

Definición 4.2.11

1 La función *tangente*

$$\begin{array}{rcccc} \tan & : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \alpha & \longmapsto & \tan(\alpha):=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{A} = \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2 La función *cotangente* se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \cot & : & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \alpha & \longmapsto & \cot(\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{B} = \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3 La función *secante*

$$\begin{array}{rccc} \sec & : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \alpha & \longmapsto & \sec(\alpha) := \frac{1}{\cos(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{A} = \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

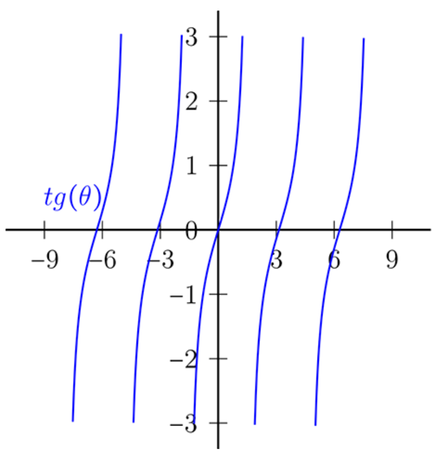
4 Y por último la función *cosecante*

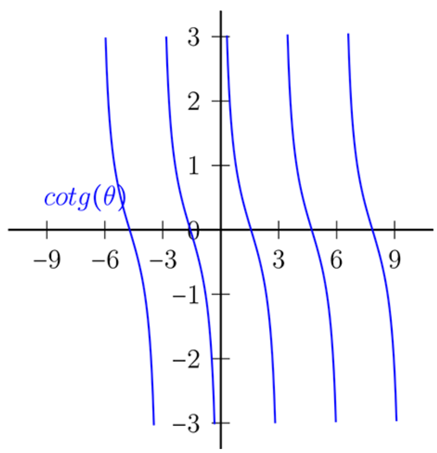
$$\begin{array}{rccc} \csc & : & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \alpha & \longmapsto & \csc(\alpha) := \frac{1}{\sin(\alpha)} \end{array}$$

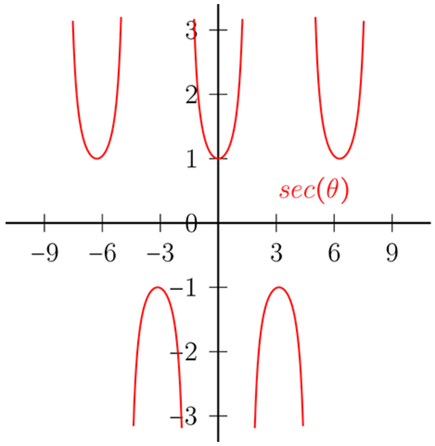
Donde $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

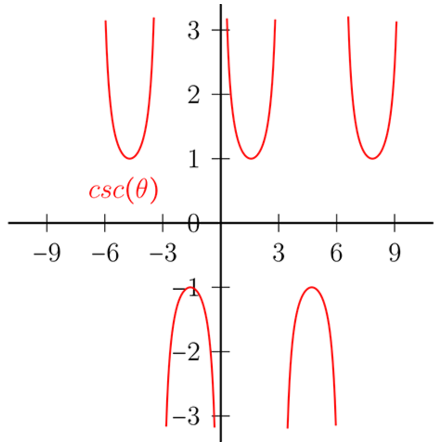
$\Diamond$

Las gráficas de esta funciones son las siguientes:









Proposición 4.2.12 *La función tangente al igual que la función seno es una función impar,*

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

además tenemos

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Demostración.

a Tomemos $\tan(-\alpha)$ tenemos:

$$\tan(-\alpha) \quad = \quad \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha)$$

Además podemos obtener la siguiente formula

b

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)} \end{aligned}$$

Amplifiquemos por $\frac{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}$, entonces

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} \\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\frac{\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} \\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1-\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} \\ &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} \end{aligned}$$

■

Observación: Para conocer el valor de las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante en ángulo, nos basta saber su valor en el primer cuadrante, algunos de los cual podemos resumir en la siguiente tabla

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
$\cot(\theta)$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec(\theta)$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	$\nexists$
$\csc(\theta)$	$\nexists$	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

4.2.1 Identidades Trigonométricas

Basándonos en las seis funciones antes definidas **seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante** tenemos la siguiente lista de identidades trigonométricas básicas:

1 $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

2 $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$

3 $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$

4 $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

5 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

6 $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

7 $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

8 $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

9 $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

10 $\mid \sin(\frac{\alpha}{2}) \mid = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

11 $\mid \cos(\frac{\alpha}{2}) \mid = \sqrt{\frac{\cos(\alpha)+1}{2}}$

12 $\mid \sin(\alpha) \mid = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$

13 $\mid \cos(\alpha) \mid = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$

14 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

15 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

16 $\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$

17 $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

18 $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$

19 $\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)+1}{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}$

20 $1+\cot^2(\alpha) = \csc(\alpha)$

21 $\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}$

22 $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big]$

23 $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big]$

24 $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big]$

25 $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\big]$

26 $\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

27 $\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

28 $\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

29 $\cos(\alpha)-\cos(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

30 $\mid\tan(\frac{\alpha}{2})\mid = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$

31 $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

32 $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

Ejemplo 4.2.13 Compruebe la siguiente identidad trigonométrica

$$\frac{\sin^3(\alpha)+\sin(3\alpha)}{\cos^3(\alpha)-\cos(3\alpha)} = \cot(\alpha)$$

□

Solución. La justificación la haremos comenzando por el lado izquierdo de la igualdad y obtendremos el lado derecho, para lo cual consideremos lo siguiente, simplifiquemos las expresiones

a

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin(2\alpha)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\cos(2\alpha)$$

Por identidades 6 y 7 tenemos

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha), \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha) \\
&= \big[2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\big]\cos(\alpha) + \sin(\alpha)[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] \\
&= 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\big[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big]
\end{aligned}$$

b Por otro lado

$$\begin{aligned}
\sin^3(\alpha) + \sin(3\alpha) &= \sin^3(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\big[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big] \\
&= \sin^3(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha) \\
&= 3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)
\end{aligned}$$

c

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha)$$

Ocupando lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha) \\
&= \big[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big]\cos(\alpha) - \big[2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\big]\sin(\alpha) \\
&= \cos^3(\alpha) - \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

entonces

d

$$\begin{aligned}
\cos^3(\alpha) - \cos(3\alpha) &= \cos^3(\alpha) - \big[\cos^3(\alpha) - \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)\big] \\
&= \cos^3(\alpha) - \cos^3(\alpha) + \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) + 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Tomando en consideración todos los resultados obtenidos y reemplazando en lo que deseamos demostrar tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^3(\alpha)+\sin(3\alpha)}{\cos^3(\alpha)-\cos(3\alpha)} &= \frac{3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)}{3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)} \\
&= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\
&= \cot(\alpha)
\end{aligned}$$

Lo cual concluye la justificación.

4.2.2 Ejercicios Propuestos

Demostrar las siguientes identidades

1 $\dfrac{1}{\sin(x)\cos(x)} - \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$

2 $\dfrac{\sin(x) + \tan(x)}{\cot(x) + \csc(x)} = \sin(x)\tan(x)$

3 $\dfrac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} - \cot(x) = \csc(x)$

4 $\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)} - \dfrac{1+\cos(x)}{\sin(x)} = -2\cot(x)$

5 $\dfrac{\cos(x)}{1-\tan(x)} + \dfrac{\sin(x)}{1-\cot(x)} = \sin(x)+\cos(x)$

6 $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos(x)} = 2$

7 $\dfrac{\cos(3x)}{\sin(x)} + \dfrac{\sin(3x)}{\cos(x)} = 2\cot(2x)$

8 $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \tan(x).$

9 $\cos(2x) = 1-2\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1$

10 $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

11 $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}.$

12 $\cot(2x) = \dfrac{\cot^2(x)-1}{2\cot(x)}$

13 $\sin(4x) = 4\sin(x)\cos(x) - 8\sin^3(x)\cos(x)$

14 $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$

15 $\cos(3x)+\sin(2x) = \sin(4x)+\cos(3x)(1-2\sin(x))$

16 $\sin(3x)-\sin(x)-\sin(5x) = (1-2\cos(2x))\sin(3x)$

17 $\tan^2(x)+\sec^2(y) = \sec^2(x)+\tan^2(y)$

18 $\dfrac{\tan(x)+\cot(y)}{\cot(x)+\tan(y)} = \dfrac{\tan(x)}{\tan(y)}.$

4.3 Funciones Trigonométricas Inversas

La existencia de la función inversa para las funciones trigonométricas están basada en el siguiente teorema:
Teorema 4.3.1

a La función $\sin : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ *es una función biyectiva.*

b La función $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *es una función biyectiva.*

c La función $\tan :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *es una función biyectiva.*

Como las funciones son biyectiva existe su inversa, por razones de no confundir la inversa con las anteriores funciones trigonométricas, es que las inversa se llama usando el prefijo *arco*, ya que es un trozo o un arco de la circunferencia que se considera.

Al igual que con cualquier otra función, debe tenerse cuidado en el dominio-recorrido en que esta definida cada una de las funciones inversas

Definición 4.3.2

a La función arcoseno dada por: $\arcsin : [-1,1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es la función inversa de la función seno

b La función arcocoseno dada por: $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ es la función inversa de la función coseno.

c La función arcotangente dada por: $\arctan : \mathbb{R} \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es la función inversa de la función tangente.

$\Diamond$

No olvidemos que, el decir que una función es la inversa de otra, nos entrega la siguiente información, por ejemplo tenemos que:

a $\sin(x) = a$ si y sólo si $x = \arcsin(a)$, con $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], a \in [-1,1]$

b $\cos(x) = a$ si y sólo si $x = \arccos(a)$, con $x \in [0,\pi], a \in [-1,1]$

c $\tan(x) = a$ si y sólo si $x = \arctan(a)$, con $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], a \in \mathbb{R}$

Usando lo anterior obtenemos los valores de las funciones Trigonométricas Inversas:

	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(a)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos(a)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

4.3.1 Ecuaciones Trigonométricas

El resolver una ecuaciones trigonométricas, al igual que las ecuaciones de funciones de números reales, consiste en determinar todos los valores en el universo (restricción o dominio común) que al ser reemplazado en la incógnitas satisfacen o cumplen la igualdad.

De otro modo, es resolver una ecuación que contiene al menos una función trigonométrica en cuyo argumento esta la incógnita.

Ejemplo 4.3.3 Resolver

$$2\sin(x) - 1 = 0$$

$\square$

Solución 1. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$2\sin(x) - 1 = 0$$

luego despejando obtenemos

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la solución básica o en $[0, 2\pi]$ es

$$x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

es decir,

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Para resolver las ecuaciones, recurrimos a la siguiente propiedad.

Proposición 4.3.4 *Sean $x, a \in \mathbb{R}$ entonces:*

a *Si $a \in [-1, 1]$ entonces*

$$\sin(x) = a \quad \textit{si y sólo si} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,(x = 2k\pi + \arcsin(a) \vee x = (2k+1)\pi - \arcsin(a))$$

b *Si $a \in [-1, 1]$ entonces*

$$\cos(x) = a \quad \textit{si y sólo si} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,(x = \arccos(a) + 2k\pi \vee x = -\arccos(a) + 2k\pi)\,.$$

c *Si $a \in \mathbb{R}$ entonces*

$$\tan(x) = a \quad \textit{si y sólo si} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,(x = \arctan(a) + k\pi)\,.$$

Algunos ejemplos de interés, donde aplicaremos la propiedad anterior en la resolución de los distintos tipos de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 4.3.5 Resolver

$$5\sin(x) - 3 = 0$$

$\square$

Solución 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$5\sin(x) - 3 = 0$$

luego despejando obtenemos

$$\sin(x) = \frac{3}{5}$$

Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi \vee x = -\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + (2k+1)\pi$$

es decir,

$$S = \left\{ \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ejemplo 4.3.6 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ constante. Comprueba que la ecuación

$$\sin(ax) = \cos(bx)$$

tiene como solución

$$(a-b)x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad (a+b)x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ $\square$

Solución 3. Sabemos que $\cos(bx) = \sin(\frac{\pi}{2} - bx)$ reemplazando tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sin(ax) & = & \cos(bx) \\ \sin(ax) & = & \sin\left(\frac{\pi}{2} - bx\right) \end{array}$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\begin{array}{rcl} \sin(ax) - \sin(\frac{\pi}{2} - bx) & = & 0 \\ 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - bx + ax}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - bx - ax}{2}\right) & = & 0 \end{array}$$

es decir,

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + (a-b)x}{2}\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - (a+b)x}{2}\right) = 0$$

con lo cual, existe $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\frac{\pi}{2} + (a-b)x}{2} & = & \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad \frac{\frac{\pi}{2} - (a+b)x}{2} = k\pi \\ (a-b)x & = & \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad (a+b)x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}$$

Ejemplo 4.3.7 Resolver

$$\sin(7x) = \cos(3x)$$

$\square$

Solución 4.

$$\begin{array}{rcl} \sin(7x) & = & \cos(3x) \\ \sin(7x) & = & \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sin(7x) - \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) & = & 0 \\ 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 3x + 7x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 3x - 7x}{2}\right) & = & 0 \end{array}$$

es decir,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0$$

con lo cual,

$$\begin{array}{rcl} \frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi & \vee & \frac{\pi}{4} - 5x = k\pi \\ x = \frac{(1+4k)\pi}{8} & \vee & x = \frac{(1-4k)\pi}{10} \end{array}$$

$$S = \left\{ \frac{(1+4k)\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{(1-4k)\pi}{10} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ejemplo 4.3.8 Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, resolver la ecuación

$$A\sin(x) + B\cos(x) = C$$

$\square$

Solución 5.

$$\begin{array}{rcl} A\sin(x) + B\cos(x) & = & C \\ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x) & = & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{array}$$

Como tenemos que

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$$

Es un punto del plano que pertenece a la circunferencia, luego existe $\alpha \in [0, 2\pi[$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ y } \sin(\alpha) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

reemplazando tenemos

$$\begin{array}{rcl} \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x) & = & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \cos(\alpha)\sin(x) + \sin(\alpha)\cos(x) & = & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin(\alpha + x) & = & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{array}$$

la ecuación tiene solución si y sólo si $\left|\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leq 1$ y están dadas por

$$\alpha + x = \arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) + 2k\pi \vee \alpha + x = -\arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) + (2k' + 1)\pi$$

Ejemplo 4.3.9 Encuentre todas las soluciones para la siguiente ecuación

$$\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 1$$

$\square$

Solución 6. Dada $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 1$$

luego calculamos $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) & = & 1 \ \ /\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Busquemos en una solución de

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \sin(\alpha) = \frac{1}{2}$$

una solución es: $\alpha = \frac{\pi}{3}$, es decir,

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) & = & \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x) & = & \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Como

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{luego} \quad \frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por propiedad anterior obtenemos

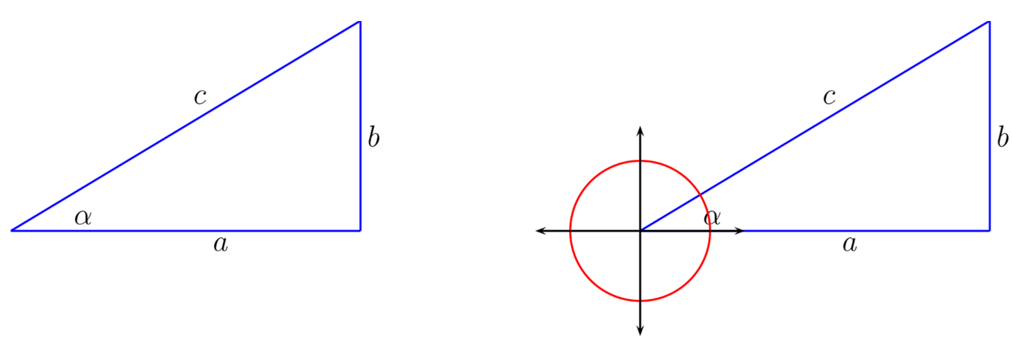
$$\begin{array}{rcl} \frac{\pi}{3} + 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} & \text{o} & \frac{\pi}{3} + 2x = -\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{(12k-1)\pi}{12} \ , \ k \in \mathbb{Z} & \text{o} & x = \frac{(4k+1)\pi}{4} \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

4.4 Funciones Trigonométricas en Triángulos

En esta sección veremos la utilidad de las funciones, para determinar los valores de los ángulos y la longitud de los lados en un triángulo cualquiera.

4.4.1 Triángulo Rectángulo

Sean $\alpha, a, b, c \in \mathbb{R}^+$, tales que son las longitudes de un triángulo rectángulo, y α es el ángulo de unos de los lados como en la figura.



Podemos construir una circunferencia unitaria, con centro en el ángulo α y por Thales tenemos

$$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{a}{c} = \frac{cat.ady.}{hip.}$$

donde *cat.ady.* representa la longitud de cateto adyacente e *hip* es la longitud de la hipotenusa desde el ángulo α.

Otra proporciones

$$\frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{b}{c}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{cat.op.}{hip.}$$

donde *cat.op.* representa la longitud de cateto opuesto e *hip.* es la longitud de la hipotenusa en el triángulo desde el ángulo α. y también tenemos otra proporciones

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$$

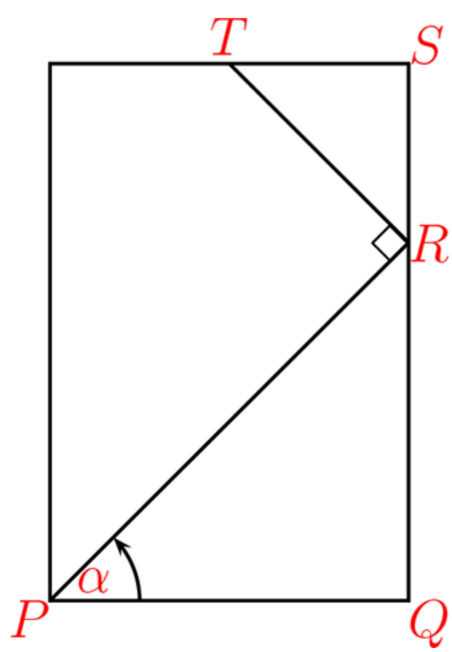
$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{cat.op.}{cat.ady.}$$

La otras funciones las podemos describir por las siguientes proporciones:

$$\cot(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{cat.ady.}{cot.op.} \qquad \sec(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{hip.}{cat.ady.} \qquad \csc(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{hip.}{cat.op.}$$

Los resultados anteriormente obtenidos nos sirven para poder resolver ejercicios como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.1 En el rectángulo siguiente se ha inscrito la figura



donde $\overline{RS} = 1cm$, $\overline{RQ} = 2cm$ y el $\measuredangle PRT = \frac{\pi}{2}$.
Determine α de manera que $\overline{PR}$ sea el doble de $\overline{TR}$. $\square$

Solución. De la figura anterior, obtenemos

$$\beta = \measuredangle\, TRS = \alpha$$

Para ello, notemos que $\measuredangle\, PRQ = \frac{\pi}{2} - \alpha$ y $\measuredangle\, TRS = \beta$ de donde tenemos

$$\beta + \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} - \alpha \;\; = \;\; \pi$$

Luego $\beta = \alpha$. Entonces

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \tfrac{\overline{RS}}{\overline{TR}} = \tfrac{1}{\overline{TR}}$$

Por lo tanto

$$\overline{TR} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

Por otro lado tenemos

$$\sin(\alpha) = \tfrac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \tfrac{2}{\overline{PR}}$$

De lo cual

$$\overline{PR} = \frac{2}{\sin(\alpha)}$$

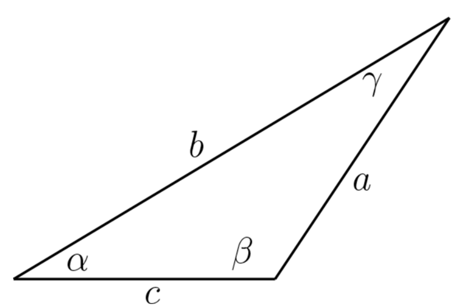
Como debe tenerse que $\overline{PR} = 2\overline{TR}$ obtenemos

$$\tfrac{2}{\sin(\alpha)} = 2\tfrac{1}{\cos(\alpha)} \quad \text{de lo cual,} \quad \tan(\alpha) = 1$$

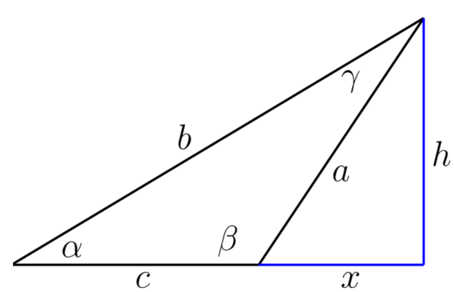
De este modo tenemos $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

4.4.2 Teorema del Seno

Sean α, β, γ los ángulos internos de un triángulos arbitrario y a, b, c las longitudes de los lados como en la figura.



Tracemos una altura en el triángulo



Sabemos que

$$\sin(\alpha) = \frac{cat.op.}{hip.} = \frac{h}{b}$$

y además

$$\sin(\pi - \beta) = \frac{cat.op}{hip.} = \frac{h}{a}$$

pero

$$\sin(\pi - \beta) = \sin(\beta)$$

Despejando h e igualando tenemos

$$h = b\sin(\alpha) = a\sin(\beta)$$

Por lo tanto

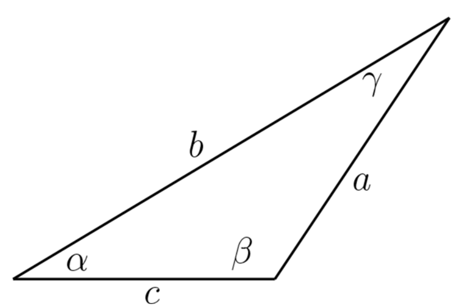
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

con un proceso similar obtenemos

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Igualando las dos expresiones obtenemos el teorema del seno

Teorema 4.4.2 [Teorema Ley del Seno]. *Sean $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$, los ángulos interiores, y la longitudes de los lados de un triángulo, como en la figura*



entonces se cumple que

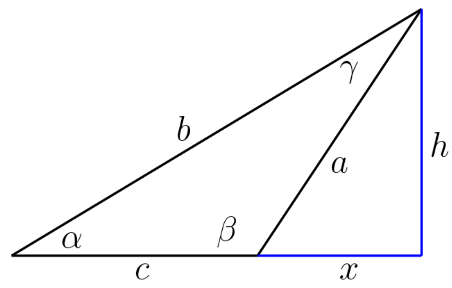
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

o de igual manera

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

4.4.3 Teorema Ley del Coseno

Sean α, β, γ los ángulos internos de un triángulos arbitrario y a, b, c las longitudes de los lados y además tracemos una altura como en la figura.



Usando el teorema de pitágoras en los triángulos tenemos

$$a^2 = h^2 + x^2$$

y en el otro tenemos

$$b^2 = h^2 + (c + x)^2$$

desarrollando el cuadrado de binomio,

$$b^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

reemplazando obtenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2cx$$

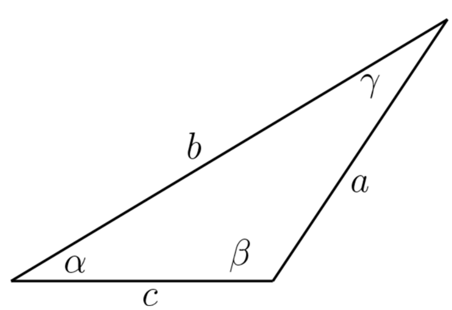
En el triángulo rectángulo se tiene

$$-\cos(\beta) = \cos(\pi - \beta) = \frac{x}{a}$$

luego tenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2c(-a\cos(\beta))$$

Teorema 4.4.3 [Ley del Coseno]. *Sean $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$, los ángulos interiores, y la longitudes de los lados de un triángulo, como en la figura*



entonces se cumple que

$$\begin{array}{rcl} a^2 & = & b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 & = & a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{array}$$

4.4.4 Resolución de Triángulos

Es el proceso mediante el cual se obtiene las longitudes de los lados y la medida de los tres ángulos de un triángulo.

Por congruencia de triángulo, tenemos que las únicas cuatro posibilidades en que se obtiene un único triángulo son las siguientes.

a Dados un lados y dos ángulos.

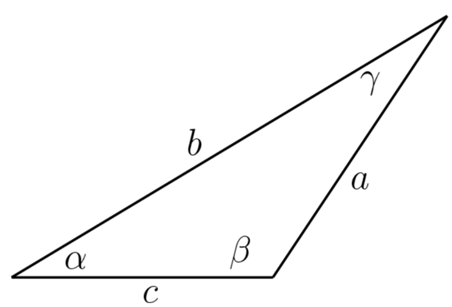
b Dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

c Dados dos lados y el ángulo opuesto al mayor.

d Dados los tres lados.

En caso contrario, puede ocurrir que hay más de una solución o no existe el triángulo que cumpla las condiciones descrita en el problema.

Veamos ahora cada una de las esta situación, para ellos tengamos presente las notación de acuerdo a la siguiente figura:



Ejemplo 4.4.4 [Primer Caso]. Con las notaciones de la figura, sean a, α, β conocidos. Determinar b, c, γ □

Solución 1. Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, luego $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.
Además por Ley de los Seno

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}, \qquad \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

de lo cual

$$c = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}, \qquad b = \frac{a\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

Ejemplo 4.4.5 [Segundo Caso]. Con las notaciones de la figura, sean a, b, γ conocidos. Determinar c, α, β □

Solución 2. Por la ley del Coseno tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

luego

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}$$

Además por Ley de los Seno

$$\sin(\alpha) = \frac{a\sin(\gamma)}{c}$$

tiene dos soluciones menores que 180° y esta son

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a\sin(\gamma)}{c}\right) \qquad \alpha = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{a\sin(\gamma)}{c}\right)$$

Además

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma,$$

que nos entregan el mismo triángulo.
Ejemplo 4.4.6 [Tercer Caso]. Con las notaciones de la figura, sean a, c, γ, $a < c$ conocidos. Determinar b, α, β □

Solución 3. Por ley del seno y además $\frac{a\sin(\gamma)}{c} < 1$, luego

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a\sin(\gamma)}{c}\right)$$

de lo cual

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

Además por Ley de los Seno

$$b = \frac{c\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

Ejemplo 4.4.7 [Cuarto Caso]. Con las notaciones de la figura, sean a, b, c conocidos. Determinar α, β, γ □

Solución 4. Por la ley del Coseno tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

luego

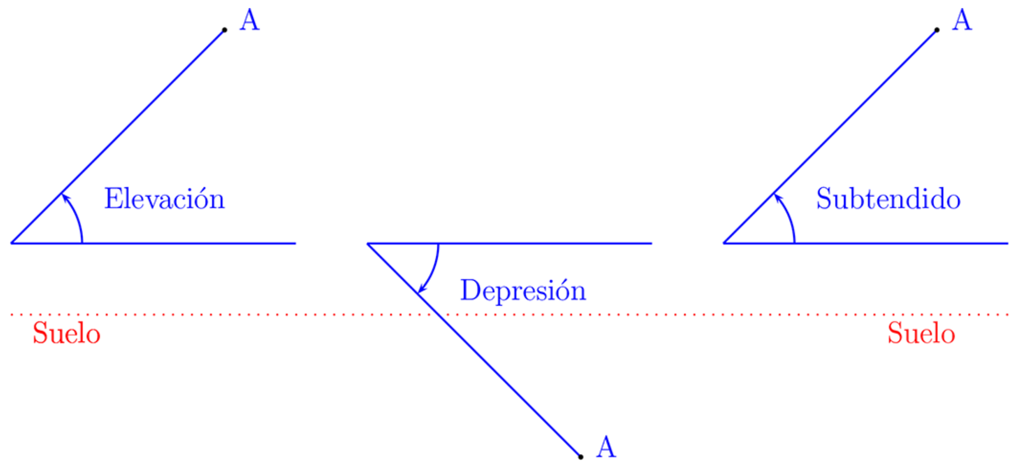
$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

análogamente

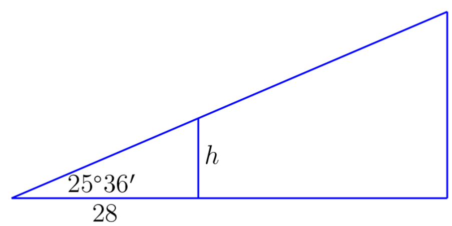
$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right), \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right).$$

Observación: Para poder resolver algunos problemas de planteo es necesario tener claro algunos términos empleado al referirnos a ciertos **ángulos**.
ángulo de elevación: Es el ángulo formado por la línea del horizonte del observador y la línea formada por el observador y el objeto observado sobre el horizonte.
ángulo de depresión: Es el ángulo formado por la linea del horizonte del observador y la línea formada por el observador y el objeto observado bajo el horizonte.
ángulo subtendido: El ángulo subtendido por un objeto es el ángulo formado por la línea del horizonte del observador y la línea formada por el observador y el objeto observado.



Ejemplo 4.4.8 Cuando el sol esta a $25°36'$ sobre el horizonte un silo da una sombra de 28 metros. Calcular la altura del silo. □

Solución 5. Grafiquemos el problema,



Calculando tangente se obtiene que

$$\tan(25°36') = \frac{h}{28}$$

es decir, $h = 28\tan(25°36') = 28\tan(25,6°) \approx 13.4153$.

La altura del silo aproximadamente es $13.4153mts$

4.5 Ejercicios Propuestos

Valor de la función trigonométrica

Calcule los siguientes valores, expresando el resultado con la función trigonométrica evaluada en un ángulo en $[0, \pi/2]$.

a $\cos(\frac{109\pi}{30})$

b $\sin(\frac{109\pi}{30})$

c $\tan(\frac{163\pi}{90})$

d $\cot(\frac{272\pi}{45})$

e $\sec(\frac{109\pi}{30})$

f $\csc(\frac{163\pi}{90})$

g $\sec(\frac{272\pi}{45})$

h $\sin(7\pi)$

i $\sec(7\pi)$

j $\tan(9\pi)$

Identidades Trigonométricas Compruebe las siguientes identidades.

1 $\cos(\alpha)\sec(\alpha) = 1$

2 $\sin(\alpha)\sec(\alpha) = \tan(\alpha)$

3 $\frac{\csc(\alpha)}{\sec(\alpha)} = \cot(\alpha)$

4 $(1+\cos(\alpha))(1-\cos(\alpha)) = \sin^2(\alpha)$

5 $\frac{\sin(\alpha)}{\csc(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{\sec(\alpha)} = 1$

6 $(\tan(\alpha)+\cot(\alpha))\tan(\alpha) = \sec^2(\alpha)$

7 $\tan(\alpha)\cot(\alpha) = 1$

8 $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

9 $\cos^2(\alpha)(\sec^2(\alpha) - 1) = \sin^2(\alpha)$

10 $1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

11 $(1+\sin(\alpha))(1-\sin(\alpha)) = \frac{1}{\sec^2(\alpha)}$

12 $(1-\sin^2(\alpha))(1+\tan^2(\alpha)) = 1$

13 $\frac{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 1 + \tan(\alpha)$

14 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta) + \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta) = \cos(\alpha)$

15 $\frac{1}{1+\sin(\alpha)} + \frac{1}{1-\sin(\alpha)} = 2\sec^2(\alpha)$

16 $\sec^2(\alpha) + \csc^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)\csc^2(\alpha)$

17 $\tan(\alpha) + \cot(\alpha) = \sec(\alpha)\csc(\alpha)$

18 $\frac{\cos(\alpha)}{1-\sin(\alpha)} - \frac{1-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\tan(\alpha)$

19 $\cot(2\alpha) = \frac{1}{2}[\cot(\alpha) - \tan(\alpha)]$

20 $\frac{\sin^3(\alpha)+\sin(3\alpha)}{\cos^3(\alpha)-\cos(3\alpha)} = \cot(\alpha)$

21 $\csc^4(\alpha) - \cot^4(\alpha) = \csc^2(\alpha)[\sin^2(\alpha) + 2\cos^2(\alpha)]$

22 $\frac{1-\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)} = \tan(\alpha)$

23 $\tan(\frac{\alpha}{2}) + \cot(\frac{\alpha}{2}) = 2\csc(\alpha)$

24 $\frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \cos(2\alpha)$

25 $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$

26 $\frac{2\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)+\cot(\alpha)} + \cos(2\alpha) = 1$

27 $\frac{\sin(2\alpha)-\frac{1}{\sec(\alpha)}}{1-\sin(\alpha)+\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)} = \cot(\alpha)$

28 $\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$

29 $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$

30 $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big]$

31 $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big]$

32 $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big]$

33 $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)\big]$

34 $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

35 $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

36 $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

37 $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Ecuaciones Trigonométricas

1 $\sin(\alpha) = 1[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

2 $\sin^2(\alpha) - 2\cos(\alpha) + \frac{1}{4} = 0[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

3 $\cos^2(\alpha) + 2\sin(\alpha) + 2 = 0[Resp.\ \alpha \in \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

4 $\sec(\alpha)\cos^2(\alpha) = \sqrt{3}\sin(\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

5 $\sin(5\alpha - \frac{23\pi}{180}) = \cos(2\alpha + \frac{5\pi}{18})[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{20} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

6 $2\csc^2(\alpha) = 3 + \cot^2(\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

7 $3\cos^2(\alpha) = 3 - \sin^2(\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

8 $2(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) = 1[Resp.\ \alpha \in \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

9 $\sec^2(\alpha) + \tan^2(\alpha) = 7[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

10 $\csc(\alpha)\sin^2(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{3}\cos(\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

11 $\frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{2}[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

12 $\frac{1}{\cot^2(\alpha)+\frac{1}{\csc^2(\alpha)}} = 2 - \frac{1}{\sec^2(\alpha)}[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

13 $1 + \frac{1}{\cot^2(\alpha)} = \frac{\cot(\alpha)}{1-\sin^2(\alpha)}[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

14 $\sin(\alpha) - \frac{1}{\cot^2(\alpha)} = 1[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

15 $\frac{2}{\sec^2(\alpha)} = 2 + \frac{\tan(\alpha)-\cot(\alpha)}{\tan(\alpha)+\cot(\alpha)}[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

16 $\frac{2}{\csc^2(\alpha)} = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{1+\cot^2(\alpha)}[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

17 $\frac{2\sin^2(\alpha)-1}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \sec(\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{\frac{1258\pi}{1125} + 2k\pi, \frac{4229\pi}{2250} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

18 $\frac{\sin(\alpha)}{\csc(\alpha)-\cot(\alpha)} + \frac{1}{\sec(\alpha)} = 2[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

19 $\frac{\cot(\alpha)}{1+\tan(\alpha)} - \frac{1}{1+\cot(\alpha)} = 2\tan(\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7663\pi}{9000} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

20 $\tan^2(\alpha) = 2\cot^2(\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

21 $\frac{1}{\sec^2(\alpha)} - 4\sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - 3[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

22 $\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{3}[Resp.\ \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

23 $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \cos(\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{\frac{-3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

24 $-\tan(\alpha) = \cos(2\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{2k\pi, \pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

25 $\sqrt{3}\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) = 1[Resp.\ \alpha \in \{\frac{-\pi}{12} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

26 $\frac{1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)} = 1 - \sin(2\alpha)[Resp.\ \alpha \in \{k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

27 $2\cos^2(x) - 3\cos(x) = 2[Resp.\ S_0 = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}]$

28 $\sin(x)\sec(x) + \sqrt{2}\sin(x) - \sec(x) - \sqrt{2} = 0[Resp.\ S_0 = \{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}]$

29 $\sqrt{3}\sec^2(x) + 2\tan(x) - 2\sqrt{3} = 0[Resp.\ S_0 = \{\frac{2\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}]$

30 $\tan(x) - \sin(2x) = 0[Resp.\ S_0 = \{0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}\}]$

31 $\sin(2x) + \sin(4x) = 2\sin(3x)[Resp.\ S_0 = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}]$

32 $\tan^2(x) + \sec^2(x) = 7[Resp.\ S_0 = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}]$

33 $\cos(6x) - 3\cos(3x) = -2$[*Resp.* $S_0 = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$]

Ejercicios de Planteo

1 Desde un barco se observan 2 puntos de la costa en direcciones que forman un ángulo de 135°. Si la distancia desde el barco a cada uno de esos puntos es de 20 y 5 millas, respectivamente, entonces. ¿Cuál es la distancia entre ambos puntos?

[*Resp.* $23.76 millas$]

2 Desde un vehículo que se desplaza por una carretera en linea recta, se divisa sobre la cima de un cerro, que se encuentra ubicado en la misma dirección del vehículo una antena repetidora de T.V. en un ángulo de elevación de 35°. Momentos antes de entrar al puente y cuando se ha avanzado $0.8km$ desde el punto anterior la antena se observa con un ángulo de elevación de 42°. ¿Cuál es la menor distancia la que pasara respecto de la base de la altura?

[*Resp.* $3.82mts$]

3 Al poco rato de haber despegado 2 aviones se cruzan en el aire cuando son las 16 : 00 hrs. Uno se dirige en linea recta hacia una isla ubicada a 68° al noreste, mientras el otro va a una ciudad ubicada al este. Si el primero se desplaza con una velocidad de 650 km/hrs y el segundo a 820 km/hrs. ¿Qué distancia habrá entre ellos a las 17 : 15 hrs?

[*Resp.* $1800.87mts$]

4 Durante una carrera de atletismo, 3 jueces A, B, C se ubican en 3 puntos distintos de la pista de forma oval de modo que, medidas las distancias que hay entre ellos de línea recta al juez A dicta $100mts$ de B, este dicta $140mts$ de C, y este ultimo dicta $160mts$ del juez A. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo que se forman al unir los puntos que representan la posición de los jueces?

[*Resp.* $\alpha = 60°, \beta = 78°5'$ *o* $101°5'$ *y* $\gamma = 41°5'$ *o* $18°5'$]

5 Calcular el ancho de una calle (incluido vereda) si una escalera de $22mts$ de largo al apoyarla contra la pared forma un ángulo de 18° con el suelo y al apoyarla contra la pared del frente sin cambiar el punto de apoyo forma un ángulo de 24° con el suelo.

[*Resp.* $20.9mts$]

6 ¿A que altura se encuentra un volantín si el hilo que lo sostiene mide $120mts$ y el ángulo de elevación del volantín es de 40°?

[*Resp.* $76.8mts$]

7 Un observador ve una torre con un ángulo de elevación de 40°, si se acerca a $100mts$ hacia la torre el ángulo de elevación seria de 62°. Calcular la altura de la torre si el instrumento que sirvió para medir los ángulos de elevación se encuentra a $1.6mts$ del suelo.

[*Resp.* $150.19mts$]

8 El asta de una bandera de $6mts$ de longitud esta ubicado sobre el techo de una casa. Desde un punto en el plano de la base de la casa los ángulos de elevación a la punta y a la base del asta son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$ respectivamente. Hallar la altura de la casa.

[*Resp.* $8.2mts$]

9 El piloto de un avion observa que el ángulo de depresión a una luz situada exactamente abajo de su linea de vuelo es de $\frac{\pi}{6}$. Un minuto mas tarde el ángulo de depresión es de $\frac{\pi}{4}$. Si esta volando horizontalmente a una velocidad de $900km/hrs$. Hallar

a La altura a la que esta volando.

b La distancia de la luz al primer punto de observación.

[*Resp.* $a)\ h = 19.88km \quad b)\ d = 39.76$]

10 Un navío sale exactamente rumbo al este a una velocidad uniforme. A las $7:00$ hrs se observa desde el barco, un faro hacia el norte a 10.32 millas de distancia y a las $7:30$hrs el faro esta a $18°13'$ al oeste del norte. Hallar la velocidad a la que se mueve el navío y el rumbo de este a las $10:00$ horas.

[*Resp.* $v = 6.6\ mill/hrs\ d = 19.8\ millas$]

11 Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte situado en una planicie que se encuentra desde una cierto lugar, el fuerte se ve con un ángulo de $10°$ y que desde otro lugar $200mts$ mas cerca del fuerte este se ve con un ángulo de $15°$. ¿Cuál es la altura del fuerte?, ¿Cuál es su distancia del segundo lugar de observación?

[*Resp.* $h = 98.22mts \quad d = 377.77mts$]

12 Un hombre observa desde un globo que las visuales a las bases de dos torres que están separadas por una distancia de 1 km, medido sobre un plano horizontal forman un ángulo de $70°$. Si el observador esta exactamente sobre la vertical del punto medio de la distancia de las dos torres. Calcular la altura del globo.

[*Resp.* $714.28km$]

13 Dos bollos son observados en la dirección sur desde lo alto de un acantilado cuya parte superior esta a $312mts$ sobre el nivel del mar. Hallar la distancia entre los bollos si sus ángulos de elevación medidos desde la punta del acantilado son $46°$ y $27°$ respectivamente.

[*Resp.* $321.09mts$]

14 Una escalera de $3mts$ de largo esta apoyada sobre la pared de un edificio estando su base a $1.5mts$ del edificio. ¿Que ángulo forma la escalera con el piso?

[*Resp.* $\frac{\pi}{3}$]

15 Los lados iguales del triángulo isosceles miden $40cm$ cada uno y los ángulos basales son de $25°$ cada uno. Resolver el triángulo y calcular su área.

[*Resp.* $604.8cm$]

16 Desde una determinada posición de un camino una persona observa la parte mas alta de una torre de alta tensión con un ángulo de elevación de 25°. Si avanza $45mts$ en linea recta hacia la base de la torre, divisa ahora su parte mas alta con un ángulo de elevación de 55°. Considerando que la vista del observador esta a $1.70mts$ del suelo. ¿Cuál es la altura de la torre?

[*Resp.* $32.31mts$]