

Capítulo 1

Espacios Topológicos

1.1. Conceptos Básicos

Sea X un conjunto y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se dice que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, si y sólo si, se cumplen las siguientes propiedades:

- i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
- ii) Si $U, V \in \mathcal{T}$, entonces, $U \cap V \in \mathcal{T}$.
- iii) Si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{T}$, entonces, $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, diremos que $\mathcal{T}$ es una topología de X .

Definición 1.1 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

- 1. Se dice que U es abierto en $(X, \mathcal{T})$, si y sólo si, $U \in \mathcal{T}$.
- 2. Se dice que U es cerrado en $(X, \mathcal{T})$, si y sólo si, $U^c \in \mathcal{T}$.

Ejemplo 1.1 Sea X un conjunto.

- 1. Sea $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. El par $(X, \{\emptyset, X\})$ se llama espacio topológico trivial.
- 2. Sea $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. El par $(X, \mathcal{P}(X))$ se llama espacio topológico discreto.

3. Sea $p \in X$. Entonces el par $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, con

$$\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid U = X \text{ o } p \notin U\}.$$

i) $X \in \mathcal{T}$ y $\emptyset \in \mathcal{T}$, ya que $p \notin \emptyset$.

ii) Sean $U, V \in \mathcal{T}$

Si $U = X$. Entonces $U \cap V = V \in \mathcal{T}$.

Si $U \neq X$. Entonces $p \notin U$, luego $p \notin U \cap V$, por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{T}$.

iii) Sea $U_i \in \mathcal{T}$, para todo $i \in I$

Si existe $i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} = X$. Entonces $X = U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$. Luego

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X \in \mathcal{T}.$$

Si para todo $i \in I$, $U_i \neq X$. Entonces para todo $i \in I$, $p \notin U_i$, luego $p \notin \bigcup_{i \in I} U_i$.

Por lo tanto $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Caso particular, si $X = \{1, 2, 3\}$ y $p = 2$. Entonces

$$\mathcal{T} = \left\{ \emptyset, X, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\} \right\},$$

y los cerrados son: $\emptyset, X, \{2\}, \{1, 2\}$.

4. Si G es un grupo y $\mathcal{T} = \{H \mid H \leq G\} \cup \{\emptyset\}$.

El par $(G, \mathcal{T})$ no es un espacio topológico, pues la unión de subgrupos no es un subgrupo.

5. Si $\mathcal{T} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$.

El par $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es un espacio topológico.

6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $p \notin X$. Definamos

$$Y = X \cup \{p\}, \quad \mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{Y\}.$$

Entonces $(Y, \mathcal{T}')$ es un espacio topológico.

i) Por definición $Y \in \mathcal{T}'$ y $\emptyset \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

ii) Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}'$

Si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$, entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Si $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{V} = Y$, entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U} \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

iii) Sea $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}'$, para todo $i \in I$

Si para todo $i \in I$, $\mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Si existe $i_0 \in I$ tal que $\mathcal{U}_{i_0} = Y$, entonces $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = Y \in \mathcal{T}'$.

Ejercicio 1.2

1. Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $S \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, se define $V(S)$ como sigue

$$V(S) := \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(z) = 0, \forall f \in S\},$$

y consideremos

$$\mathcal{T}_z = \{\mathbb{R}^n \setminus V(S) \mid S \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]\} \cup \{\emptyset\}.$$

Compruebe que $(X, \mathcal{T}_z)$ es un espacio topológico.

La colección $\mathcal{T}_z$ es llamada Topología de Zariski.

2. Sea X un conjunto. Comprobar que el par $(X, \mathcal{T}_c)$ es un espacio topológico

$$\mathcal{T}_c = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid \mathcal{U}^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

La colección $\mathcal{T}_c$ es conocida como Topología del Complemento Finito.

3. Sea $(X, \mathcal{R})$ un conjunto totalmente ordenado. Comprobar que el par $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico

$$\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[\mid I \text{ conjunto de índice, } a_i, b_i \in X\}.$$

donde $]a_i, b_i[= \{x \in X \mid a_i \mathcal{R} x \wedge x \mathcal{R} b_i\}$.

La colección $\mathcal{T}$ es conocida como Topología del Orden.

4. Sean X, Y dos espacios topológicos disjuntos. Comprobar que el par $(X \cup Y, \mathcal{T}_{X \cup Y})$ es un espacio topológico

$$\mathcal{T}_{X \cup Y} = \{\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{T}_X, \mathcal{V} \in \mathcal{T}_Y\}.$$

La colección $\mathcal{T}_{X \cup Y}$ es conocida como Topología Union disjunta.

Observación Dos conjuntos se pueden modificar de modo de poder obtener una union disjunta, por ejemplo, dados X, Y , se tienen que $X \times \{0\}, Y \times \{1\}$, son disjuntos.

Observación 1.1 Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico. Entonces

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X) \quad \text{y} \quad \mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)).$$

Además, como $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Luego el conjunto de todas las topologías de X es un conjunto parcialmente ordenado. Su primer elemento es $\{\emptyset, X\}$ la topología trivial y su último elemento es $\mathcal{P}(X)$ la topología discreta .

Definición 1.2 Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías de X .

1. Se dice que $\mathcal{T}'$ es mas fina que $\mathcal{T}$, si y sólo si, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.
2. Se dice que $\mathcal{T}$ es menos fina que $\mathcal{T}'$, si y sólo si, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

1.2. Base de una Topología

Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base de una topología de X , si y sólo si, se cumplen las siguientes propiedades:

- i) Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
- ii) Para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Ejemplo 1.3

1. $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base para una topología de $\mathbb{R}$.

i) Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \in]x-1, x+1[\in \mathcal{B}$.

ii) Si $x \in]a, b[\cap]c, d[$, entonces

$$x \in]f, g[\subseteq]a, b[\cap]c, d[,$$

donde $f = \max\{a, c\}$ y $g = \min\{b, d\}$.

2. $\mathcal{B} = \{H \subseteq G \mid H \leq G\}$ es una base para una topología de G .

i) Para todo $g \in G$, se tiene $G \leq G \in \mathcal{B}$.

ii) Si $H, K \in \mathcal{B}$ y $g \in H \cap K$, se tiene $H \cap K \leq G$, luego $H \cap K \in \mathcal{B}$.

Ejercicio 1.4 Sea $x \in \mathbb{R}^2$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, se define

$$B(x, \epsilon) := \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \epsilon \right\},$$

donde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base para una topología de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{B} = \left\{ B(x, \epsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2, \epsilon \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Proposición 1.1 Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base de una topología de X , se define

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} := \left\{ U \subseteq X \mid (\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B})(x \in B \subseteq U) \right\} \cup \left\{ \emptyset \right\}.$$

Entonces $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ es un espacio topológico.

Demostración

i) Tenemos $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

ii) Sea $x \in X$. Como $\mathcal{B}$ es una base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

iii) Sean $U, V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Si $x \in U$ y $x \in V$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_1 \subseteq U, \quad x \in B_2 \subseteq V.$$

Entonces $x \in B_1 \cap B_2$. Como $\mathcal{B}$ es una base, existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que

$$x \in B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V,$$

luego $U \cap V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

iv) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ y sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Por lo tanto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}.$$

Luego $(X, \mathcal{T}_B)$ es un espacio topológico. $\square$

Definición 1.3 Se dice que $\mathcal{T}_B$ es la topología generada por la base B .

Observación 1.2 Si B es una base de una topología de X y $U \in \mathcal{T}_B$. Entonces, para todo $x \in U$, existe $B_x \in B$ tal que

$$x \in B_x \subseteq U, \quad U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Notese que $\mathcal{T}_B$ es la topología mas pequeña que contiene a B .

Ejemplo 1.5

1. La topología $(G, \mathcal{T}_B)$ generada por la base en el Ejemplo 1.3.2 es llamada Topología de los Subgrupos, en la vecindad del neutro. En efecto $U \in \mathcal{T}_B$, si y sólo si, para todo $x \in U$ existe $H \leq G$ de modo que $x \in H \subseteq U \subseteq G$.

En general,

$$B = \{gH \subseteq G | H \leq G, g \in G\}$$

es un base, que genera la topología de grupo.

2. Sea X un conjunto. Entonces $B = \{A \in \mathcal{P}(X) | |A| = 1\}$ es una base de una topología de X .

i) Para todo $x \in X$, $x \in \{x\} \in B$.

ii) Sean $B_1, B_2 \in B$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces

$$x \in B_1 = B_2 = \{x\} = B_1 \cap B_2.$$

Notar que $\mathcal{T}_B = \mathcal{P}(X)$ topología discreta en X .

Ejercicio 1.6

1. Para todo $p(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$, se define $B_{p(x, y)}$ como sigue:

$$B_{p(x, y)} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | p(a, b) \neq 0\}.$$

Demostrar que B es una base de una topología de $\mathbb{R}^2$ (Topología de Zariski)

$$B = \{B_{p(x, y)} | p(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]\}.$$

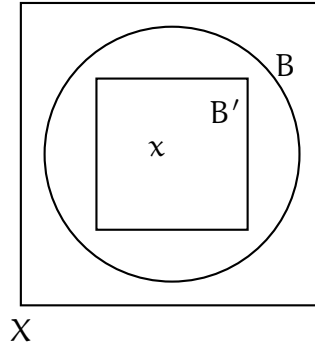
2. Demostrar que la siguiente colección es una base para una topología de $\mathbb{R}$ (Topología de Débil o Sorgenfrey)

$$\mathcal{B} = \{[a, b[\subseteq \mathbb{R} \mid a < b\}$$

Proposición 1.2 Sean X un conjunto y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de topologías de X . Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ es más fina que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

2) Para todo $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x , existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.



Demostración Sabemos que:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid (\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B})(x \in B \subseteq U)\},$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}'} = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid (\forall x \in U)(\exists B' \in \mathcal{B}')(x \in B' \subseteq U)\}.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ y $x \in U$, luego existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Por 2) existe $B'_x \in \mathcal{B}'$ de modo que

$$x \in B'_x \subseteq B_x \subseteq U,$$

luego

$$U = \bigcup_{x \in U} B'_x \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}.$$

Por lo tanto $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x . Entonces $B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$, luego existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que

$$x \in B' \subseteq B.$$

Esto demuestra la proposición. □

Ejemplo 1.7 En $\mathbb{R}$ se tienen las siguientes bases:

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\subseteq \mathbb{R} \mid a < b\}, \quad \mathcal{B}' = \{[a, b[\subseteq \mathbb{R} \mid a < b\}.$$

Probaremos que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $x \in]a, b[$, entonces $a < x < b$. Luego tenemos:

$$x \in [x, b[\subseteq]a, b[, \quad [x, b[\in \mathcal{B}'.$$

Por lo tanto $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ es mas fina que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

1.2.1. Sub-Base

Definición 1.4 Sean X un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{S}$ es una sub-base para una topología de X , si y sólo si,

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X.$$

Ejercicio 1.8

¿Todas las bases son sub-bases?, ¿Por qué?

2. Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Comprobar que:

a) $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ es base y sub-base de X .

b) $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ es sub-base pero no base de X .

Proposición 1.3 Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para una topología de X , entonces la siguiente colección, denotada por $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$, es una base para una topología sobre X

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} := \left\{ \bigcap_{i=1}^s S_i \mid s \in \mathbb{N}, S_i \in \mathcal{S} \right\}.$$

Demostración

i) Sea $x \in X$, como $\mathcal{S}$ es una sub-base, existe $A_0 \in \mathcal{S}$ tal que

$$x \in A_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}.$$

ii) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ y $x \in B_1 \cap B_2$. Sabemos que:

$$B_1 = \bigcap_{i=1}^{s_1} S_i, \quad B_2 = \bigcap_{j=1}^{s_2} T_j, \quad S_i, T_j \in \mathcal{S}.$$

Entonces

$$x \in B_1 \cap B_2 = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_{s_1} \cap T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_{s_2} \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}.$$

Por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ es una base de una topología de X . □

Observación 1.3 *La topología mas pequeña que contiene a $\mathcal{S}$ está dada por:*

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{s_i} S_{i_j} \right) \mid S_{i_j} \in \mathcal{S} \right\}.$$

Notemos además que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

1.3. Topología Producto

Sean $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ dos espacios topológicos. Se desea construir una topología en $X \times Y$.

Para esto consideremos la siguiente colección:

$$\mathcal{C} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}.$$

i) Es claro que $\emptyset, X \times Y \in \mathcal{C}$.

ii) Sean $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2, \dots, U_n \times V_n \in \mathcal{C}$. Tenemos

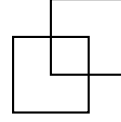
$$\begin{aligned} (a, b) \in \bigcap_{i=1}^n U_i &\Leftrightarrow (a, b) \in U_i \times V_i, \quad \forall i, \\ &\Leftrightarrow a \in U_i, \quad \forall i, \quad \text{y} \quad b \in V_i, \quad \forall i, \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{i=1}^n U_i, \quad \text{y} \quad b \in \bigcap_{i=1}^n V_i, \quad \forall i, \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n V_i \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \times V_i = \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n V_i \right).$$

- iii) La unión arbitraria de elementos en $\mathcal{C}$ no necesariamente está en $\mathcal{C}$. Por ejemplo, sean $X = Y = \mathbb{R}$, ambos con la topología usual, es fácil ver que la unión de rectángulos no es siempre un rectángulo

$$([1, 3[\times]1, 3[) \cup ([2, 4[\times]2, 4[) \notin \mathcal{B}.$$



En general $\mathcal{C}$ no es una topología. La siguiente proposición demuestra que $\mathcal{C}$ es una base para una topología de $X \times Y$ la cual llamaremos topología producto.

Proposición 1.4 *$\mathcal{C}$ es una base para una topología de $X \times Y$.*

Demostración

- i) Se tiene $(x, y) \in X \times Y \in \mathcal{C}$.
- ii) Si $(x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$, entonces

$$(x, y) \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \subseteq (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2),$$

$$\text{con } (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{C}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es una base para una topología de $X \times Y$. □

Definición 1.5 *La topología generada por la base anterior se llama Topología producto de $X \times Y$.*

Notación 1.1 *La topología producto de $(X, \mathcal{T}_1)$ con $(Y, \mathcal{T}_2)$ se denota por*

$$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2.$$

Proposición 1.5 *Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases para las topologías $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ respectivamente. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para la topología producto de $X \times Y$*

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 | B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}.$$

Demostración

- i) Sea $(x, y) \in X \times Y$, luego $a \in X$, $b \in Y$, por lo tanto existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $B_2 \in \mathcal{B}_2$ de modo que:

$$x \in B_1, \quad y \in B_2, \quad (x, y) \in B_1 \times B_2.$$

- ii) Sean $B_1 \times D_1, B_2 \times D_2 \in \mathcal{B}$ y $(x, y) \in (B_1 \times D_1) \cap (B_2 \times D_2)$, entonces

$$(x, y) \in (B_1 \cap B_2) \times (D_1 \cap D_2) = (B_1 \times D_1) \cap (B_2 \times D_2),$$

luego $x \in B_1 \cap B_2$ y $y \in D_1 \cap D_2$, por lo tanto existen $B \in \mathcal{B}_1$ y $D \in \mathcal{B}_2$ de modo que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$ e $y \in D \subseteq D_1 \cap D_2$. Tenemos:

$$(x, y) \in B \times D \subseteq (B_1 \cap B_2) \times (D_1 \cap D_2).$$

- iii) Sea $U \in \mathcal{T}_1$, $V \in \mathcal{T}_2$ y $(u, v) \in U \times V$, luego existen $B_u \in \mathcal{B}_1$ y $D_v \in \mathcal{B}_2$ tal que $u \in B_u \subseteq U$ y $v \in D_v \subseteq V$, es decir:

$$(u, v) \in B_u \times D_v \subseteq U \times V, \quad U \times V = \bigcup_{(u, v) \in U \times V} B_u \times D_v. \quad (1.1)$$

Luego, si W es un abierto en la topología producto, entonces

$$W = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i,$$

donde $U_i \in \mathcal{T}_1$ y $V_i \in \mathcal{T}_2$.

Por (1.1) se tiene que:

$$W = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{(u, v) \in U_i \times V_i} (B_{u, i} \times D_{v, i}) \right).$$

Esto prueba que todo abierto de la topología producto pertenece a la topología generada por $\mathcal{B}$. □

Ejercicio 1.9 Sean $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ dos espacios topológicos, se define:

$$\mathcal{S} = \{X \times V \mid V \in \mathcal{T}_2\} \cup \{U \times Y \mid U \in \mathcal{T}_1\}.$$

Demostrar que $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología producto de $X \times Y$.

Proposición 1.6 Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ e $(X_2, \mathcal{T}_2)$ dos espacios topológicos.

Si F_i es cerrado en X_i , entonces, $F_1 \times F_2$, es cerrado en $X_1 \times X_2$.

Demostración

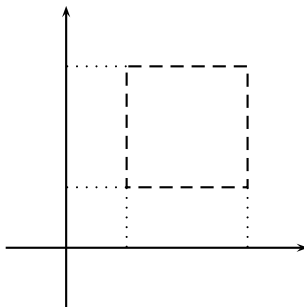
Sea F_i cerrado en X_i , luego tenemos que F_i^c es abierto en X_i

Pero $F_1^c \times X_2 \cup X_1 \times F_2^c = (F_1 \times F_2)^c$ es abierto, de lo cual $F_1 \times F_2$ es cerrado.

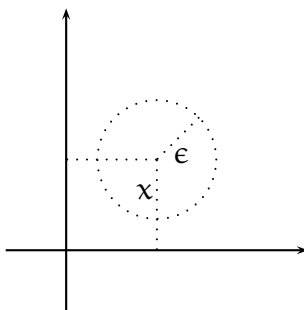
□

Observación 1.4

1. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual, fabricamos $\mathbb{R}^2$ con la topología producto. Un elemento basal de $\mathbb{R}^2$ representa gráficamente un cuadrado



2. Sea $x \in \mathbb{R}^2$ y $\epsilon > 0$. Consideremos $B(x, \epsilon)$ como en el Ejercicio 1.4. Un elemento de esta forma representa gráficamente una circunferencia de centro x y radio ϵ



Ejercicio 1.10 Demostrar que:

1. El conjunto de elementos $B(x, \epsilon)$ es una base para una topología de $\mathbb{R}^2$.
2. Las dos topologías anteriores de $\mathbb{R}^2$ son iguales.

1.4. Topología Reducida

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $Y \subseteq X$. Se desea definir una topología en Y . Consideremos la siguiente colección de subconjuntos de Y

$$\mathcal{T}_Y = \left\{ U \cap Y \mid U \in \mathcal{T} \right\} \subseteq \mathcal{P}(Y).$$

Proposición 1.7 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio topológico.

Demostración

i) Es fácil ver que $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$ ya que

$$\emptyset = \emptyset \cap Y, \quad Y = X \cap Y.$$

ii) Sean $A, B \in \mathcal{T}_Y$, luego existen $U, V \in \mathcal{T}$ de modo que

$$A = U \cap Y, \quad B = V \cap Y.$$

Por lo cual $A \cap B \in \mathcal{T}_Y$ ya que

$$A \cap B = U \cap Y \cap V \cap Y = (U \cap V) \cap Y, \quad U \cap V \in \mathcal{T}.$$

iii) Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos en $\mathcal{T}_Y$, entonces, existe $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos en $\mathcal{T}$ de modo que $A_i = U_i \cap Y$ para todo $i \in I$. Sabemos que $\bigcup_{i \in I} U_i$ es un abierto en X , luego

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

Por lo tanto $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio topológico. □

Definición 1.6 Si Y tiene la topología reducida con respecto a X , diremos que Y es un subespacio de X .

Observación 1.5 Consideremos $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Para todo $U \in \mathcal{T}$, se tiene $U = U \cap X$, es decir, la topología reducida con respecto al subespacio X es igual a la topología inicial. Por lo tanto no hay confusión al denotar $\mathcal{T}$ por $\mathcal{T}_X$ como la topología sobre el espacio X .

Proposición 1.8 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $Y \subseteq X$. Entonces, F es cerrado en Y , si y sólo si, $F = A \cap Y$, donde A es cerrado en X .

Demostración

$\Leftarrow$) Sea A un cerrado en X y $F = A \cap Y$, probemos que F es cerrado en Y . Sabemos que $A^c \in \mathcal{T}$, entonces $A^c \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, veamos ahora que $F^c = A^c \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, tenemos que

$$(A \cap Y) \cap (A^c \cap Y) = A \cap A^c \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset,$$

además, como $Y \subseteq Y \cup A^c, A \cup Y$, entonces

$$\begin{aligned} (A \cap Y) \cup (A^c \cap Y) &= ((A \cap Y) \cup A^c) \cap ((A \cap Y) \cup Y), \\ &= ((A \cup A^c) \cap (Y \cup A^c)) \cap ((A \cup Y) \cap (Y \cup Y)), \\ &= X \cap ((Y \cup A^c) \cap (A \cup Y)) \cap Y, \\ &= X \cap Y, \\ &= Y. \end{aligned}$$

Por lo tanto $F^c = A^c \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, así F es cerrado en Y .

$\Rightarrow$) Supongamos que F es cerrado en Y , es decir, $F^c \in \mathcal{T}_Y$, luego existe $U \in \mathcal{T}$ de manera que $F^c = U \cap Y$, consideremos $A = U^c$ un cerrado en X y probemos que $F = A \cap Y$

$\subset$) Sea $x \in F \subseteq Y$, basta probar que $x \in A$. Como $x \in F = U^c \cup Y^c$, entonces $x \in U^c = A$, por lo tanto $F \subseteq A \cap Y$.

$\supset$) Sea $x \in A \cap Y$, luego $x \notin A^c = U$, entonces $x \notin U \cap Y = F^c$, por lo tanto $x \in F$, esto prueba que $A \cap Y \subseteq F$.

Por lo tanto $F = A \cap Y$. □

1.5. Topología Cuociente o Final

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función y $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

$$\mathcal{T}_f = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

$(Y, (\mathcal{T}_f))$ es un espacio topológico. Llamada Topología Final o Cuociente

Ejemplo 1.11 Sea $\mathcal{B} = \{\{0, 1\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ una base de la topología, del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y el conjunto $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Si $f: X \rightarrow \mathbb{Z}_3$, es la función modulo 3. Determine la topología cuociente de $\mathbb{Z}_3$.

Ejemplo 1.12 Sea $I = [0, 1] \times [0, 1]$ y la relación de equivalencia dada por

$$(x, y) \sim (z, w) \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (z, w) \\ x = z & y = 0, w = 1 \\ x = z & y = 1, w = 0 \end{cases}$$

Sea la proyección $p: I \rightarrow I/\sim$. Luego la proyección define la topología cuociente en el cilindro.

Definición 1.7 Sea $f: X \rightarrow Y$ una función y $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

$$\mathcal{T}_i = \{f^{-1}(U) \quad : \quad U \in \mathcal{T}\}$$

$(X, (\mathcal{T}_i))$ es un espacio topológico. Llamada Topología Inicial

1.6. Conjuntos Notables

Definición 1.8 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$

1. El interior de A , denotado $\overset{\circ}{A}$, se define como

$$\overset{\circ}{A} := \bigcup_{U \in \mathcal{T}} U, \quad \mathcal{I} = \left\{ U \in \mathcal{T} \mid U \subseteq A \right\}.$$

2. La adherencia de A , denotada por $\overline{A}$, se define como

$$\overline{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{J}} F, \quad \mathcal{J} = \left\{ F \subseteq X \mid A \subseteq F, F^c \in \mathcal{T} \right\}.$$

3. La frontera de A , denotada por $\text{Fr}A$, se define como

$$\text{Fr}A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}.$$

Ejemplo 1.13

1. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\mathcal{T} = \{ \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X \}$, el interior, la adherencia y la frontera del conjunto $A = \{b, c\}$ son:

$$\overset{\circ}{A} = \emptyset, \quad \overline{A} = X \cap \{a\}^c = X \cap \{b, c, d\} = \{b, c, d\}, \quad \text{Fr}A = \{b, c, d\}.$$

2. Sea $X = [1, 2] \cup \{3\} \subseteq \mathbb{R}$ con la topología usual reducida. Determinemos el interior, la adherencia y la frontera del conjunto $A = \{1, 3\}$.

Primero veamos que $\{1\}$ no es abierto en X . Supongamos que $\{1\}$ puede escribirse como $U \cap X$ donde U es un abierto con la topología usual de $\mathbb{R}$, sabemos que

$$U = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[,$$

luego,

$$U \cap X = \left(\bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[\right) \cap X = \bigcup_{i \in I} (]a_i, b_i[\cap X).$$

Entonces, existe $i_0 \in I$ tal que $1 \in]a_{i_0}, b_{i_0}[$, además, como $]a_{i_0}, b_{i_0}[$ es un abierto en $\mathbb{R}$, existe $0 < \epsilon < 1$ tal que

$$1 \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[\subseteq]a_{i_0}, b_{i_0}[$$

entonces $[1, 1 + \epsilon[\subseteq X \cap]a_{i_0}, b_{i_0}[$, lo cual no puede ser, por lo tanto $\{1\}$ no es abierto en X .

Claramente $\{3\}$ es abierto en X , basta considerar $U =]3 - 1/2, 3 + 1/2[$ abierto en $\mathbb{R}$, entonces

$$\{3\} = X \cap U.$$

Del mismo modo que $\{1\}$ probamos que $\{1, 3\}$ no es abierto en X , luego $\overset{\circ}{A} = \{3\}$.

Veamos ahora que A es cerrado en X , sea $U :=]1, 2[$ abierto en $\mathbb{R}$, luego $U \cap X \in \mathcal{T}_X$, se tiene además

$$\{1, 3\} = (U \cap X)^c,$$

por lo tanto A es cerrado en X , así, $A = \overline{A}$. Por último

$$\text{Fr}A = \{1, 3\} \setminus \{3\} = \{1\}.$$

3. Sea $\mathbb{Z}$ con la topología de los subgrupos y $A = \{1, 3\}$, entonces claramente

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{J}} U = \emptyset, \quad \mathcal{J} = \left\{ U \in \mathcal{T}_{\mathbb{B}} \mid U \subseteq A \right\}.$$

Como ejercicio verifique que

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{J}} F = \{-3, -1, 1, 3\}, \quad \mathcal{J} = \left\{ F \subseteq \mathbb{Z} \mid A \subseteq F, F^c \in \mathcal{T}_{\mathbb{B}} \right\}.$$

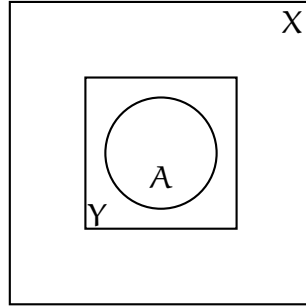
Proposición 1.9 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces

$$A \text{ es abierto, si y sólo si, } A = \overset{\circ}{A}.$$

Demostración $\Rightarrow$) Sabemos que $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{J}} U$, pero $A \in \mathcal{J}$, luego $A \subseteq \overset{\circ}{A}$, además para todo $U \in \mathcal{J}$, $U \subseteq A$ entonces $\overset{\circ}{A} \subseteq A$. Por lo tanto $A = \overset{\circ}{A}$.

$\Leftarrow$) Sabemos que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{T}$, luego $A = \bigcup_{U \in \mathcal{J}} U \in \mathcal{T}$. Por lo tanto A es abierto. $\square$

Proposición 1.10 Sea Y un subespacio de $(X, \mathcal{T})$ y $A \subseteq Y$. Si $\overline{A}$ es la clausura de A en X , entonces $\overline{A} \cap Y$ es la clausura de A en Y .



Demostración Sabemos que $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{J}} F$ es la clausura de A en X . Por demostrar que

$$\overline{A} \cap Y = \bigcap_{K \in \mathcal{J}'} K =: B, \quad \mathcal{J}' = \left\{ K \subseteq Y \mid K^c \in \mathcal{T}_Y, A \subseteq K \right\}.$$

$\subset$) Sea $x \in \overline{A} \cap Y$, entonces $x \in F$ para todo $F \in \mathcal{J}$. Probemos que $x \in B$, sea $K \in \mathcal{J}'$, entonces existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $K^c = U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, luego

$$A \subseteq K = U^c \cup Y^c.$$

Como $A \subseteq Y$ entonces $A \subseteq U^c \in \mathcal{J}$, por lo tanto $x \in U^c \subseteq U^c \cup Y^c = K$, para todo $K \in \mathcal{J}'$, así $x \in B$, es decir $\overline{A} \cap Y \subseteq B$.

⊃) Sea $x \in B$, es decir, $x \in K \subseteq Y$ para todo $K \in \mathcal{J}'$. Basta probar que $x \in \overline{A}$, para ello sea $F \in \mathcal{J}$, entonces $F^c \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, luego $L = F \cap Y \in \mathcal{J}'$ entonces

$$x \in L, \quad x \in Y,$$

por lo tanto $x \in F$ para todo $F \in \mathcal{J}$, luego $x \in \overline{A}$, así $B \subseteq \overline{A} \cap Y$.

Esto prueba que $\overline{A} \cap Y = B$. □

Teorema 1.1 Sea $(X, \mathcal{T}_B)$ un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces:

1. $x \in \overline{A}$, si y sólo si, $(\forall U \in \mathcal{T}) (x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset)$.
2. $x \in \overline{A}$, si y sólo si, $(\forall B \in \mathcal{B}) (x \in B \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset)$.

Demostración Tenemos:

1. $\Leftarrow$) Supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces existe $F \in \mathcal{J}$ tal que $x \notin F$, pero $A \subseteq F$, luego

$$U := F^c \in \mathcal{T}, \quad A \cap F^c = \emptyset, \quad x \in F^c.$$

$\Rightarrow$) Supongamos que existe $U \in \mathcal{T}$ de modo que $x \in U$ y $A \cap U = \emptyset$, entonces tenemos

$$A \subseteq U^c, \quad x \notin U^c.$$

Luego $U^c \in \mathcal{J}$, entonces $x \notin \overline{A}$, ya que $A \subseteq \overline{A} \subseteq U^c$.

2. $\Leftarrow$) Supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces existe $F \in \mathcal{J}$ tal que $x \notin F$, pero $A \subseteq F$, luego

$$x \in F^c \in \mathcal{T}, \quad A \cap F^c = \emptyset.$$

Como F^c es abierto, existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in B \subseteq F^c$ y $A \cap B = \emptyset$.

$\Rightarrow$) Supongamos que existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in B$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces tenemos

$$A \subseteq B^c, \quad x \notin B^c.$$

Luego $B^c \in \mathcal{J}$, entonces $x \notin \overline{A}$, ya que $A \subseteq \overline{A} \subseteq B^c$. □

Definición 1.9 Sea $A \subseteq X$ y $x \in X$. Se dice que x es un punto de acumulación de A , si y sólo si,

$$(\forall U \in \mathcal{T}) (x \in U \Rightarrow (U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset).$$

Notación 1.2 Denotemos por A' el conjunto de todos los puntos de acumulación de A .

Ejemplo 1.14 Sea X con la topología discreta y $A \subseteq X$. Entonces $A' = \emptyset$.

Ejemplo 1.15 Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y $A = \{1/n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. El único punto de acumulación de A es 0.

Proposición 1.11 Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Demostración

⊃) Sabemos que $A \subseteq \overline{A}$. Veamos ahora que $A' \subset \overline{A}$,

$$\begin{aligned} x \in A' &\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{T}) (x \in U \Rightarrow (U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset), \\ &\Rightarrow (\forall U \in \mathcal{T}) (x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset), \\ &\Rightarrow x \in \overline{A}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A \cup A' \subset \overline{A}$.

⊂) Sea $x \in \overline{A}$, si $x \in A$ entonces $x \in A \cup A'$.

Ahora, si $x \notin A$, es decir, $x \in \overline{A} \setminus A$, se tiene:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \setminus A &\Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{T}) (x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset), \\ &\Rightarrow (\forall U \in \mathcal{T}) (x \in U \Rightarrow (U \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset), \\ &\Rightarrow x \in A'. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in A' \subseteq A \cup A'$. □

1.7. Separación entre Puntos

En esta sección se abordara el problema de separar dos puntos por abiertos, lo cual es una necesidad a tratar mas adelante la convergencia

Definición 1.10 Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que $\mathcal{U}$ es una vecindad de x , si y sólo si, $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ y $x \in \mathcal{U}$.

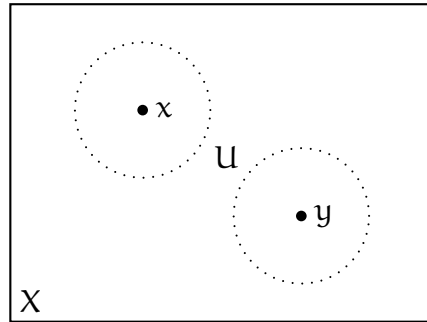
Si $\mathcal{U}$ es vecindad de x , es común anotar $\mathcal{U} = \mathcal{U}_x$.

Notación 1.3 El conjunto de todas las vecindades de un punto x se anota por $\mathcal{V}_X(x)$ o simplemente $\mathcal{V}(x)$, esto es:

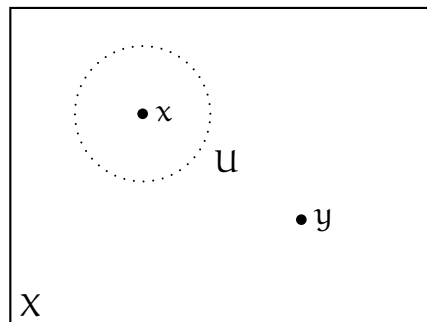
$$\mathcal{V}(x) = \left\{ \mathcal{U} \in \mathcal{T} \mid x \in \mathcal{U} \right\}.$$

Observación 1.6 Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces $V \in \mathcal{T}$, si y sólo si, para todo $x \in V$, existe $\mathcal{U}_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $x \in \mathcal{U}_x \subseteq V$.

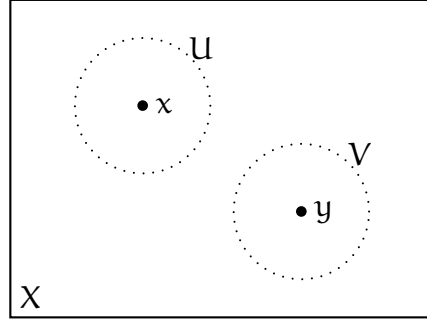
Definición 1.11 (Espacio T_0) Sea X un espacio topológico, se dice que X es T_0 (o que tiene la propiedad T_0) o espacio de Kolmogorov, si y sólo si, para todos $x, y \in X$ distintos, existe una $\mathcal{U}$ vecindad tal que $x \in \mathcal{U} \wedge y \notin \mathcal{U}$ o bien $x \notin \mathcal{U} \wedge y \in \mathcal{U}$.



Definición 1.12 (Espacio T_1) Sea X un espacio topológico, se dice que X es T_1 (o que tiene la propiedad T_1) o espacio de Fréchet, si y sólo si, para todos $x, y \in X$ distintos, existe una vecindad de uno que no contiene al otro.



Definición 1.13 (Espacio T_2 o Hausdorff) Se dice que un espacio topológico X es de Hausdorff o que tiene la propiedad T_2 , si y sólo si, para todos $x, y \in X$ distintos, existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.



Es decir $U \in \mathcal{V}(x)$, $V \in \mathcal{V}(y)$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ejemplo 1.16 1. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}, \}$, entonces $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_0 , y no T_1

2. Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{cf})$, topología del complemento finita, entonces un espacio T_0, T_1 y no T_2

Ejercicio 1.17 Determinar si los siguientes son espacios de Hausdorff

1. $\mathbb{Z}$ con la topología de los subgrupos.
2. $\mathbb{R}$ con la topología del complemento finito.
3. $\mathbb{R}^2$ con la topología de Zariski.

Teorema 1.2 Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces todo subconjunto finito de X , es cerrado.

Demostración Sea F un subconjunto finito de X , esto es:

$$F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Luego, basta probar que $\{x\}$ es cerrado para $x \in F$.

Si $X = \{x\}$, entonces $\{x\} = \emptyset^c$, luego $\{x\}$ es cerrado.

Si $X \neq \{x\}$, existe $y \in X \setminus \{x\}$. Como X es un espacio de Hausdorff, existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(y)$ tal que $V \subseteq X \setminus \{x\}$, por lo tanto $\{x\}^c$ es abierto. Luego $\{x\}$ es cerrado.

Por lo tanto F es cerrado. $\square$

Corolario 1.1 *Si X es finito y Hausdorff, entonces X tiene la topología discreta.*

Teorema 1.3 *Sea X un espacio de Hausdorff y $A \subseteq X$. Entonces, $x \in A'$, si y sólo si, todo abierto que contiene a x tiene infinitos puntos de A .*

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $x \in A'$ y $U \in \mathcal{V}(x)$. Supongamos que U contiene finitos puntos de A , es decir:

$$A \cap U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} =: B.$$

Por Teorema 1.2, $B \setminus \{x\}$ es un conjunto cerrado en X , luego $V := (B \setminus \{x\})^c$, es un abierto en X , además, $U \cap V$ es también una vecindad de x , entonces

$$(A \cap U) \cap V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap V \subset \{x\}.$$

Luego $A \cap (U \cap V) \setminus \{x\} = \emptyset$. Por lo tanto $x \notin A'$, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$) Sea $U \in \mathcal{V}(x)$, entonces $A \cap U$ tiene infinitos puntos, por lo tanto

$$A \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Luego $x \in A'$. $\square$

Corolario 1.2 *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff y A un conjunto finito entonces $A' = \emptyset$.*

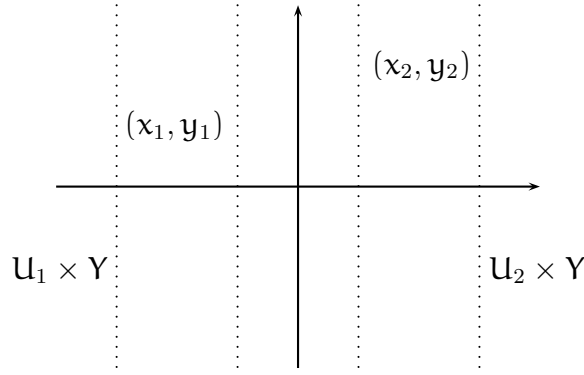
Proposición 1.12 *Sea X, Y dos espacios Hausdorff, entonces $X \times Y$ con la topología producto es un espacio de Hausdorff.*

Demostración Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ distintos, es decir $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$, distingamos estos casos:

Caso 1: Si $x_1 \neq x_2$, como X es de Hausdorff, existen $U_1 \in \mathcal{V}(x_1)$ y $U_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ disjuntos, además

$$(x_1, y_1) \in U_1 \times Y, \quad (x_2, y_2) \in U_2 \times Y.$$

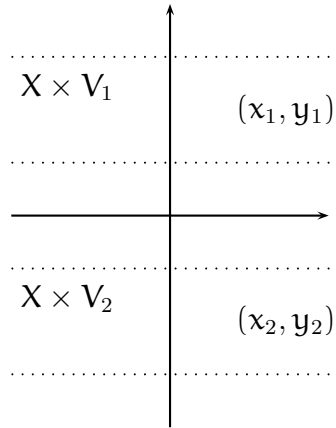
Si existiera $(x, y) \in (U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y)$ entonces $x \in U_1 \cap U_2$ lo cual no puede ser.



Caso 2: Si $y_1 \neq y_2$, como X es de Hausdorff, existen $V_1 \in \mathcal{V}(y_1)$ y $V_2 \in \mathcal{V}(y_2)$ disjuntos, además

$$(x_1, y_1) \in X \times V_1, \quad (x_2, y_2) \in X \times V_2.$$

Si existiera $(x, y) \in (X \times V_1) \cap (X \times V_2)$ entonces $y \in V_1 \cap V_2$ lo cual no puede ser.



Por lo tanto $X \times Y$ es un espacio de Hausdorff □

Observación 1.7 $\mathcal{T}_{X \times Y}$ tiene como base la siguiente colección:

$$\left\{ U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \right\}.$$

Proposición 1.13 Sea X un espacio de Hausdorff y $A \subseteq X$, entonces A es un espacio de Hausdorff con la topología relativa.

Demostración Sean $x, y \in A \subseteq X$, como X es un espacio de Hausdorff, existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(y)$ disjuntos, además,

$$x \in U \cap A, \quad y \in V \cap A.$$

Veamos la intersección

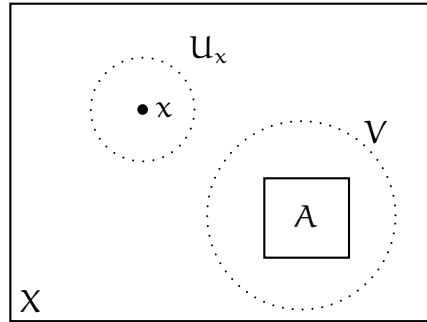
$$\begin{aligned} (U \cap A) \cap (V \cap A) &= (U \cap V) \cap A, \\ &= \emptyset \cap A, \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio de Hausdorff. $\square$

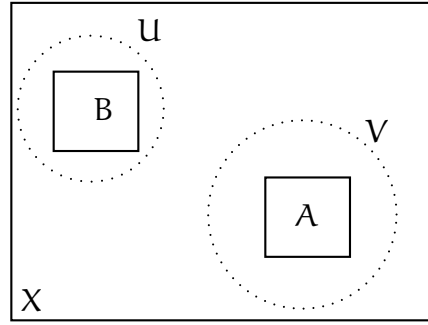
Teorema 1.4 *Un subespacio de un espacio de T_i y el producto de espacios de T_i , son también espacios de T_i , con $i = 0, 1, 2$.*

1.8. Axiomas de Separación

Definición 1.14 (Espacio T_3 o Regular) *Un espacio topológico X es regular si y sólo si es T_1 y para cada punto $x \in X$ y cualquier cerrado $F \subset X$ tal que x no pertenece a F . Entonces existen entornos U_x y U_F tales que su intersección es vacía. Es decir, podemos separar puntos de cerrados.*



Definición 1.15 (Espacio T_4 o Normal) *Un espacio topológico X es normal si y sólo si es T_1 y para cada par de cerrados $F_1, F_2 \subset X$ con intersección vacía existen unos entornos que los contengan U_{F_1} y U_{F_2} tal que su intersección sea vacía. Es decir, podemos separar todos los cerrados del espacio. En particular los espacios métricos son normales.*



Definición 1.16 (Espacio T_5) Un espacio topológico X es T_5 si y sólo si es T_1 y para cada par $A, B \subset X$ tal que $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$ existen unos entornos que los contengan U_A y U_B tal que su intersección sea vacía.

Proposición 1.14 Si X es un espacio topológico normal T_4 , entonces es regular T_3 .

Teorema 1.5 Un subespacio de un espacio de T_3 y el producto de espacios de T_3 , son también espacios de T_3 .

Demostración Sean $A \subseteq X$, $x \in A$, $F \subseteq A$ cerrado, luego existe G cerrado en X , tal que $F = G \cap A$ y $x \notin G$.

Como X es un espacio T_3 , existen U_x y V_F abiertos y disjuntos, además,

$$x \in U, \quad G \subseteq V_F.$$

es decir, $x \in U \cap A$, $F = G \cap A \subseteq V_F \cap A$. Veamos la intersección

$$\begin{aligned} (U \cap A) \cap (V \cap A) &= (U \cap V) \cap A, \\ &= \emptyset \cap A, \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio T_3 .

Sean X, Y , dos espacios topológicos T_3 , consideremos $(x, y) \in X \times Y$, $F \subseteq X \times Y$ cerrado, tal que $(x, y) \notin F$. luego existe elemento basal $U \times V$ en la topología producto tal que $(x, y) \in U \times V \subseteq F^c$, es decir

$$(x, y) \notin (U \times V)^c = U^c \times Y \cup X \times V^c$$

De lo cual, U^c es cerrado y no contiene a x , análogamente V^c es cerrado y no contiene a y .

Entonces existen U_x, V_1 abiertos disjuntos en X tales que $x \in U_x, U^c \subseteq V_1$, además existen U_y, V_2 abiertos disjuntos en Y tales que $y \in U_y, V^c \subseteq V_2$.

De lo cual obtenemos $(x, y) \in U_x \times U_y, F \subseteq V_1 \times Y \cup X \times V_2$, que son abiertos y disjuntos en $X \times Y$. $\square$

Proposición 1.15 *Sea X un espacio topológico tal que todo singleton es cerrado. Entonces*

1. *X es regular, si y sólo si, para todo $x \in X$ y todo $U_x \in \mathcal{V}(X)$, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ de modo que $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$.*
2. *X es normal, si y sólo si, para todo F cerrado de X y $U \in \mathcal{T}$ que contiene a F , existe $V \in \mathcal{T}$ de modo que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración Como $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$ y por Observación 1.14, basta probar solamente la segunda parte del lema:

$\Leftarrow$) Sean A, B cerrados disjuntos en X , como A^c es abierto y $B \subseteq A^c$, entonces existe $V_B \in \mathcal{T}$ que contiene a B tal que $B \subseteq \overline{V_B} \subseteq A^c$, entonces $A \subseteq \overline{V_B}^c$, así

$$A \subseteq \overline{V_B}^c \in \mathcal{T}, \quad B \subseteq V_B \in \mathcal{T}, \quad V_B \cap \overline{V_B}^c = \emptyset,$$

por lo tanto X es normal.

$\Rightarrow$) Sea F un cerrado y U un abierto tal que $F \subseteq U$, entonces $F \cap U^c = \emptyset$ y F, U^c son cerrados en X , pero X es normal, entonces, existen $V, W \in \mathcal{T}$ tal que

$$F \subseteq V, \quad U^c \subseteq W, \quad V \cap W = \emptyset.$$

Notemos que $F \subseteq V \subseteq W^c \subseteq U$, luego $F \subseteq V \subseteq \overset{\circ}{W} \subseteq W^c \subseteq U$

además W^c es cerrado, luego

$$F \subseteq \overline{W^c} \subseteq U,$$

esto concluye la demostración. $\square$