UNIVERSIDAD DE VALPARAISO

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas


# Construcción de las Representaciones Irreducibles de $\mathrm{GL}_2$ Finito.

Tesis presentada por **Victor Bravo Gallardo.**
Para optar al grado de Licenciado en Matemáticas.

Profesor Guía Dr. Daniel Jiménez Briones.

Valparaíso, 2008.

# Índice general

# Introducción

Este trabajo se enmarca dentro del área de las representaciones de grupos, y tiene como objetivo principal determinar todas las representaciones irreducibles del Grupo General Lineal de matrices de orden dos $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo finito con $q > 2$ elementos.

El desarrollo de este trabajo está dividido en dos capítulos, a continuación se dará una breve descripción de cada uno.

En el Capítulo 1 se dan a conocer las herramientas necesarias para llevar acabo este trabajo, entre las cuales podemos destacar: nociones básicas de la Teoría de Representaciones de Grupos Finitos, Teoría de Caracteres, Representación Inducida y una breve descripción de la Máquina de Mackey, de gran utilidad durante el desarrollo de nuestro objetivo.

El Capítulo 2 comienza describiendo el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, sus clases de conjugación y algunos importantes subgrupos entre ellos, el grupo Afín, grupo Unipotente, destacando el subgrupo de matrices triangulares superiores llamado subgrupo de Borel $B$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, el cual tiene un rol central en nuestro estudio, pues a través de sus representaciones irreducibles podemos obtener representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ como veremos en la Sección 5. Luego pasamos a determinar todas las representaciones irreducibles del grupo que no aparecen en la descomposición de $\mathrm{Ind}_B^G(\mu)$, con $\mu$ un carácter de $B$, llamadas representaciones cuspidales del grupo. En la Sección 6 se demuestra que toda representación cuspidal tiene dimensión $q-1$ y en la Sección siguiente se da una presentación del grupo, que permite construir todas las representaciones de la serie cuspidal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ conociendo la imagen de $w'$ (definida en la Sección 7), la Sección 10 comienza relacionando un carácter no descomponible $\nu$ de $\mathbb{L}^\times$ (única extensión cuadrática de $\mathbb{K}$) y la respectiva representación cuspidal $\rho_\nu$ (Proposición 20). Concluimos esta Sección con la Tabla 1 que resume todas las representaciones irreducibles del grupo. Finalmente en la Sección 11, calculamos los caracteres de las representaciones irreducibles, en una primera etapa la tabla de caracteres de la serie principal, después explicitamos las representaciones cuspidales y concluimos con la tabla de caracteres de todas las representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

CAPíTULO 1

# Preliminares

## 1. Representaciones de Grupos Finitos

DEFINICIÓN 1. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, y sea $G$ un grupo finito. Diremos que el par $(V, \rho)$ es una *representación lineal compleja* de $G$ si y sólo si

$$\begin{array}{rcccl} \rho & : & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \\ & & g & \longmapsto & \rho(g) = \rho_g, \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos.

Se dice que $V$ es el espacio de la representación $\rho$, el cual denotaremos por $V_\rho$ y que la $\dim_{\mathbb{C}}(V)$ es el grado de la representación $\rho$. En adelante nos referiremos a la representación de un grupo $G$, sólo mencionando el espacio de representación $V_\rho$ o simplemente al homomorfismo $\rho$.

### 1.1. Representaciones de Grupos Abelianos.

Una representación de $G$ ($|G| < \infty$) de grado uno es un homomorfismo $\psi$ de $G$ en $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times$. Luego $(\psi_g)^{|G|} = \psi_{(g^{|G|})} = 1$, es decir $\psi_g$ es una raíz $|G|-$ésima de la unidad. En lo que sigue llamaremos carácter de $G$ a una representación de este tipo.

$$\hat{G} = \{\psi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times \mid \psi \text{ es homomorfismo } \}.$$

Si $G = \langle r \rangle$ es un grupo cíclico de orden $n$, para conocer $\psi$ basta conocer la imagen $\psi(r)$ donde $r$ es el generador del grupo, por lo anterior $\psi(r)$ debe ser una raíz de la unidad, ya que $1 = \psi(e) = \psi(r^n) = \psi(r)^n$.

Luego se obtienen $n$ representaciones de grado uno del grupo $G$, dadas por

$$\psi_j(r) = \mathrm{Cis}\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$$

con lo cual obtenemos que

$$\psi_j(r^k) = \psi_j^k(r) = \mathrm{Cis}\left(\frac{2\pi jk}{n}\right), \qquad j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

En el caso que $G$ sea un grupo abeliano finito, tenemos por el teorema fundamental de grupos abelianos que

$$G = G_{m_1} \times \cdots \times G_{m_t},$$

donde $G_{m_i}$ son grupos cíclicos. Luego si $\psi_i$, $i \in \{1, \ldots, t\}$ son caracteres de los grupos $G_{m_i}$, podemos obtener un carácter $\psi$ de $G$, del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcccl} \psi & : & G & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\times} \\ & & g & \longmapsto & \psi(g) = \psi_1(g_1)\psi_2(g_2)\cdots\psi_t(g_t) \end{array}$$

### 1.2. Álgebra de Representaciones.

Sean $(V, \rho)$ y $(W, \sigma)$ dos representaciones de un grupo $G$. Tenemos las siguientes representaciones de $G$

*Representación suma directa:*

$$\begin{array}{rcccl} \rho \oplus \sigma & : & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V \oplus W) \\ & & g & \longmapsto & (\rho \oplus \sigma)(g) = (\rho \oplus \sigma)_g, \end{array}$$

donde $(\rho \oplus \sigma)_g$ está dada por:

$$\begin{array}{rcccl} (\rho \oplus \sigma)_g & : & V \oplus W & \longrightarrow & V \oplus W \\ & & v + w & \longmapsto & (\rho \oplus \sigma)_g(v + w) = \rho_g(v) + \sigma_g(w). \end{array}$$

*Representación producto tensorial:*

$$\begin{array}{rcccl} \rho \otimes \sigma & : & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V \otimes W) \\ & & g & \longmapsto & (\rho \otimes \sigma)(g) = (\rho \otimes \sigma)_g, \end{array}$$

donde $(\rho \otimes \sigma)_g$ está definida sobre los generadores de $V \otimes W$ como sigue:

$$(\rho \otimes \sigma)_g(v \otimes w) = \rho_g(v) \otimes \sigma_g(w).$$

DEFINICIÓN 2. Sean $(V, \rho)$ y $(W, \sigma)$ dos representaciones de un grupo finito $G$. Un *operador de entrelazamiento o un $G-$homomorfismo* entre las representaciones $(V, \rho)$ y $(W, \sigma)$ es una transformación lineal $\phi : V \longrightarrow W$ tal que para todo $g \in G$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\sigma_g"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W, \end{tikzcd}$$

es decir,

$$(\forall g \in G)(\sigma_g \circ \phi = \phi \circ \rho_g).$$

Además el conjunto de todos los operadores de entrelazamiento lo denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, W)$.

DEFINICIÓN 3. Se dice que las representaciones $(V, \rho), (W, \sigma)$ de un grupo $G$ son *isomorfas* si y sólo si existe un $G-$isomorfismo $\phi : V \longrightarrow W$, es decir, es un $G-$homomorfismo biyectivo.

DEFINICIÓN 4. Sean $H$ un subgrupo de $G$, $(V, \rho)$ una representación del grupo $G$ y $\mu$ es un carácter de $H$ ($\mu \in \widehat{H}$), para el cual existe un elemento no nulo $v \in V_\rho$, tal que $\rho_h(v) = \mu_h(v)$, para todo $h \in H$. Entonces $\mu$ es llamado un *valor propio* de $H$ (con respecto a $\rho$) y $v$ es llamado *vector propio* de $H$ asociado a $\mu$.

DEFINICIÓN 5. Sea $(V, \rho)$ una representación del grupo $G$. Se dice que $(W, \rho)$ es una *subrepresentación* de $(V, \rho)$ si y sólo si:

1. $W$ es un subespacio vectorial de $V$.
2. $W$ es estable por $G$, es decir, $\rho_g(W) \subseteq W, \forall g \in G$.

DEFINICIÓN 6. Una representación $(V, \rho)$ se dice *irreducible*, si no posee subrepresentaciones no triviales, en caso contrario la representación $(V, \rho)$ se dice reducible.

TEOREMA 1 (Schur). *Sean $(V, \rho)$ y $(W, \sigma)$ dos representaciones irreducibles de un grupo $G$ y sea $\phi$ un operador de entrelazamiento entre $(V, \rho)$ y $(W, \sigma)$. Entonces:*

1. *Si $\rho$ y $\sigma$ no son isomorfas, se tiene que $\phi = 0$.*
2. *Si $V = W$ y $\rho = \sigma$, entonces $\phi$ es una homotecia.*

TEOREMA 2 (Maschke). *Toda representación $(V, \rho)$ de un grupo $G$ es suma directa de representaciones irreducibles.*

COROLARIO 3. *Toda representación $(V, \rho)$ de un grupo $G$, tiene una descomposición de la forma*

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^{k} n_i \rho_i,$$

*donde $n_i\rho_i$ denota la suma directa de $n_i$ (multiplicidad de $\rho_i$ en $\rho$) sumandos isomorfos a $\rho_i$ y $\rho_i$ son todas distintas (no isomorfas) representaciones irreducibles de*

*$G$. Esta descomposición es única salvo el orden de los sumandos, es decir si*

$$\rho = \bigoplus_{j=1}^{s} n'_j \rho'_j,$$

*es otra descomposición de $\rho$. Entonces $s = k, n'_j = n_{\sigma(j)}$ y $\rho'_j = \rho_{\sigma(j)}$ para alguna permutación $\sigma$ de $\{1, 2, \ldots, k\}$.*

TEOREMA 4. *El número de representaciones irreducibles de un grupo finito $G$ es igual al número de clases de conjugación de $G$.*

PROPOSICIÓN 1. *Si $\rho_1, \ldots, \rho_n$ son las distintas representaciones irreducibles de un grupo finito $G$, entonces sus respectivas dimensiones satisfacen la siguiente fórmula:*

$$\sum_{i=1}^{n} (\dim(\rho_i))^2 \quad = \quad |G|. \tag{1}$$

Si $G$ es un grupo abeliano, entonces el Teorema 4 nos dice que todas las representaciones de $G$ son de grado 1, más aún, la Proposición 1 nos dice que el número de representaciones irreducibles es igual a $|G|$, que en este caso corresponde al número de clases de conjugación de $G$.

PROPOSICIÓN 2. *Si $G$ es un grupo abeliano, entonces $G$ es isomorfo a $\hat{G}$.*

PROPOSICIÓN 3. *Si $\psi \in \hat{G}$, con $\psi \neq 1$, entonces se tiene la siguiente relación de ortogonalidad:*

$$\sum_{g \in G} \psi(g) = 0.$$

PROPOSICIÓN 4. *Con las notaciones anteriores tenemos que si*

$$\sum_{\psi \in \hat{G}} a_\psi \psi(g) = 0, \quad \forall g \in G,$$

*entonces se tiene que $a_\psi = 0$ para todo $\psi \in \hat{G}$.*

PROPOSICIÓN 5. *Sea $G$ es un grupo finito. Entonces $G$ tiene $[G : G']$ caracteres, donde $G'$ denota el subgrupo conmutador de $G$ y $[G : G']$ denota el índice entre $G$ y $G'$, es decir*

$$|\hat{G}| = [G : G'].$$

Observación 1. Dada una representación $(V,\rho)$, podemos dar a $V$ una estructura de $\mathbb{C}[G]-$módulo del siguiente modo

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\cdot v=\sum_{g\in G}\lambda_g\rho_g(v),\qquad v\in V.$$

Recíprocamente si $M$ es un $\mathbb{C}[G]-$módulo, podemos definir la representación

$$\begin{array}{rcccl}\rho & : & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(M)\\ & & g & \longmapsto & \rho_g,\end{array}$$

donde $\rho_g(m)=g\cdot m$.

Notación 1. *Sean $(V_\rho,\rho)$ y $(V_{\rho'},\rho')$ dos representaciones de un grupo finito $G$. Entonces la dimensión del espacio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_\rho,V_{\rho'})$ la denotaremos por $(\rho,\rho')$, de otra manera*

$$(\rho,\rho\prime)\;=\;\dim\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_\rho,V_{\rho'})\right). \tag{2}$$

La forma $(\rho,\rho')$ es claramente bilineal y simétrica con respecto a las sumas directas. Si $\rho$ y $\rho'$ son dos representaciones irreducibles, obtenemos por el Teorema 1 que

$$(\rho,\rho')\;=\;\begin{cases}1 & \text{si}\quad \rho=\rho'\\ 0 & \text{si}\quad \rho\neq\rho',\end{cases}$$

de donde se obtiene que dos representaciones cualesquiera $\rho$ y $\rho'$ son disjuntas, es decir, no tienen subrepresentaciones irreducibles en común, si y sólo si $(\rho,\rho')=0$. En particular una representación irreducible $\rho$ aparece en una representación $\rho'$, es decir, $\rho\leq\rho'$, si y sólo si $(\rho,\rho')\neq 0$, de hecho $(\rho,\rho')$ es igual a la multiplicidad en la cual $\rho$ aparece en $\rho'$.

El conjunto $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V_\rho)$ es una álgebra sobre $\mathbb{C}$, llamada el álgebra de *Schur*. Si $\rho$ es irreducible, entonces $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V_{n\rho})$ es isomorfo a $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, el álgebra de matrices de orden $n\times n$ sobre $\mathbb{C}$.

Proposición 6. *Si $\rho=\bigoplus n_i\rho_i$ es la descomposición en irreducibles de la representación $\rho$. Entonces $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V_\rho)=\bigoplus\mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C})$.*

Corolario 5. *Si $\rho=\bigoplus n_i\rho_i$ es la descomposición en irreducibles de la representación $\rho$. Entonces*

$$\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V_\rho))=\sum n_i^2.$$

## 2. Caracteres

DEFINICIÓN 7. Sea $(V,\rho)$ una representación de dimensión finita del grupo $G$. El *carácter* $\chi_\rho$ de la representación $(V,\rho)$ es la función definida por:

$$\begin{array}{cccl} \chi & : & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & g & \longmapsto & \chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g), \end{array}$$

donde Tr denota la traza de $\rho_g$.

PROPOSICIÓN 7. *Sean $(V,\rho)$ y $(W,\sigma)$ dos representaciones del grupo $G$. Entonces para todo $g,h \in G$ se tiene que*

1. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.
2. $\chi_{\rho\oplus\sigma}(g) = \chi_\rho(g) + \chi_\rho(g)$.
3. $\chi_{\rho\otimes\sigma}(g) = \chi_\rho(g) \cdot \chi_\rho(g)$.
4. $\chi_\rho(e) = \dim_{\mathbb{C}}(V)$.
5. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$.

OBSERVACIÓN 2. Notemos que (5) nos entrega que $\chi_\rho$ es constante en las clases de conjugación de $G$, además por propiedades de la traza, no depende de la base de $V$.

## 3. Representación Inducida

Sea $(V,\rho)$ una representación de $G$ y denotemos por $\mathrm{Res}_H^G\rho$ la restricción de $\rho$ a $H$, es decir,

$$\mathrm{Res_H^G}\rho : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}).$$

Sea $W$ un subespacio vectorial de $V$ que es $H-$estable, es decir, $\rho_h(W) \subseteq W$, para todo $h \in H$. Para cada $g \in G$, el subespacio $\rho_g(W) = \{\rho_g(w) \mid w \in W\}$ depende sólo de la clase de $g$ módulo $H$, para cada $r \in G/H = \{tH \mid t \in G\}$ definimos $W_r = \rho_g(W)$, con $g \in rH$.

PROPOSICIÓN 8. $(\sum_{r\in G/H} W_r, \tau)$ *es una representación de* $G:$

$$\begin{array}{cccl} \tau & : & G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\sum_{r\in G/H} W_r) \\ & & g & \longmapsto & \tau(g) = \tau_g, \end{array}$$

*donde $\tau_g$ está dada por:*

$$
\begin{array}{rcccc}
\tau_g & : & \sum\limits_{r \in G/H} W_r & \longrightarrow & \sum\limits_{r \in G/H} W_r \\
 & & \sum\limits_{r \in G/H} w_r & \longmapsto & \sum\limits_{r \in G/H} \rho_g(w_r).
\end{array}
$$

DEFINICIÓN 8. Se dice que $(V, \rho)$ es la *inducida* de la representación $(W, \tau)$ de $H$, si se tiene que:

$$V = \bigoplus_{r \in G/H} W_r.$$

Si $\mathcal{R}$ es un sistema de representantes de $G/H$, el espacio vectorial $V$ es la suma directa de $\rho_t(W)$, con $t \in \mathcal{R}$. En particular tenemos que $\dim_{\mathbb{C}}(V) = [G : H]\dim(W)$.

NOTACIÓN 2. La representación inducida $(V, \rho)$ de $(W, \tau)$ se denota por:

$$V = \mathrm{Ind}_H^G W \quad \text{y} \quad \rho = \mathrm{Ind}_H^G \tau.$$

Equivalentemente podemos definir la representación inducida desde el punto de vista funcional (modelo derecho) del siguiente modo:
Sea $H$ un subgrupo de un grupo finito $G$ y sea $(W, \tau)$ una representación de $H$. La *representación de* $G$ *inducida de* $(W, \tau)$ es isomorfa a la representación $(V, \rho)$ de $G$, donde

$$V = \{\, f : G \longrightarrow W \mid (\forall g \in G)(\forall h \in H)(\, f(hg) = \tau_h(f(g))\,)\,\}$$

y $\rho_g : V \longrightarrow V$ está dado por

$$(\rho_g f)(t) = f(tg), \quad t \in G.$$

PROPOSICIÓN 9. *Sea* $K$ *un subgrupo de* $H$*, con* $H$ *subgrupo de* $G$ *y* $(V, \rho)$ *una representación de* $K$*, entonces*

$$\mathrm{Ind}_K^G V = \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Ind}_K^H V).$$

La representación inducida $\mathrm{Ind}_H^G(W, \tau)$ satisface la siguiente propiedad universal.

TEOREMA 6. *Sea* $(U, \sigma)$ *una representación de* $G$ *y* $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(\tau, \sigma)$*. Entonces existe un único homomorfismo* $\Phi : \mathrm{Ind}_H^G(W, \tau) \longrightarrow (U, \sigma)$ *de* $G$*-representaciones tal que* $\Phi \circ i = \phi$*, donde* $i : (W, \tau) \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G(W, \tau)$ *es el* $H-$*monomorfismo canónico.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind}_H^G(W,\tau) \arrow[r, "\exists!\Phi"] & (U,\sigma) \\ (W,\tau) \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

TEOREMA 7 (Reciprocidad de Frobenius). *Sea $(W, \sigma)$ una representación de $H$ y $(V, \rho)$ una representación de $G$, con $H$ subgrupo de $G$, entonces*

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G V) \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, V).$$

TEOREMA 8. *Sea $(V, \rho)$ la inducida de $(W, \tau)$ con $\chi_\rho, \chi_\tau$ los correspondientes caracteres de $\rho, \tau$ y $\mathcal{R}$ es un sistema de representantes de $G/H$, entonces para cada $g \in G$ se tiene que:*

$$\chi_\rho(g) = \sum_{\substack{r \in \mathcal{R} \\ r^{-1}gr \in H}} \chi_\tau(r^{-1}gr) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}gs \in H}} \chi_\tau(s^{-1}gs).$$

### 3.1. Máquina de Mackey.

La Máquina de Mackey entrega un método para construir todas las representaciones irreducibles de un grupo $G = A \rtimes H$ (con $A$ subgrupo normal conmutativo de $G$) a partir de las representaciones de $A$ y las de algunos subgrupos de $H$.

Como $A$ es abeliano se tiene que sus representaciones irreducibles son de grado uno y forman el grupo $\hat{A} = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$, sobre el cual actúa $H$, del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcccl} \cdot & : & H \times \hat{A} & \longrightarrow & \hat{A} \\ & & (h, \mu) & \longmapsto & h \cdot \mu = \mu_h, \end{array}$$

donde

$$\mu_h(a) = \mu(h^{-1}ah) \qquad (a \in A).$$

Sea $\mathcal{R} = \{\chi_i \mid i \in I\}$ ($I$ un conjunto finito) un sistema de representantes para las $H$-órbitas de $\hat{A}$.

Denotamos por $G_i = A \rtimes \mathrm{Stab}_H \chi_i$ y extendemos $\chi_i$ a un carácter $\widetilde{\chi_i}$ de $G_i$ de la siguiente manera

$$\widetilde{\chi_i}(ak) = \chi_i(a) \qquad (a \in A, k \in \mathrm{Stab}_H \chi_i)$$

Luego tomamos $\rho$ una representación irreducible de $\mathrm{Stab}_H \chi_i$ y la extendemos a una representación irreducible $\widetilde{\rho}$ de $G_i$ del siguiente modo

$$\widetilde{\rho}(ak) = \rho(k) \qquad (a \in A, k \in \mathrm{Stab}_H \chi_i).$$

Así tenemos que el producto $\widetilde{\chi_i} \cdot \widetilde{\rho}$ es también una representación irreducible de $G_i$ la cual está definida por

$$(\widetilde{\chi_i} \cdot \widetilde{\rho})(ak) = \chi_i(a)\rho_k \qquad (a \in A, k \in \mathrm{Stab}_H \chi_i).$$

NOTACIÓN 3. La representación de $G$ inducida por la representación $\widetilde{\chi_i} \cdot \widetilde{\rho}$ la denotaremos por

$$\theta_{\chi_i,\rho} = \mathrm{Ind}_{G_i}^{G}(\widetilde{\chi_i} \cdot \widetilde{\rho}).$$

TEOREMA 9. *Conservando las notaciones anteriores tenemos:*

1. $\theta_{\chi_i,\rho}$ *es irreducible.*
2. $\theta_{\chi_i,\rho} \simeq \theta_{\chi_j,\sigma}$ *si y sólo si* $\rho \simeq \sigma$ *y* $i = j$.
3. *Si* $\pi$ *es una representación irreducible de* $G$*, entonces es isomorfa a una de las* $\theta_{\chi_i,\rho}$.

## 4. El Álgebra de Schur para la Representación Inducida

LEMA 10. *Sean* $H$ *y* $K$ *subgrupos de un grupo finito* $G$*. Sean* $(V,\rho)$ *y* $(W,\sigma)$ *representaciones de* $H$ *y* $K$ *respectivamente. Entonces*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ind}_H^G V, \mathrm{Ind}_K^G W) \simeq \mathbf{F}',$$

*donde* $\mathbf{F}'$ *es el espacio vectorial de las funciones* $\varphi : G \times G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$ *que satisfacen la siguiente relación*

$$\varphi(kg_1, hg_2) \;=\; \sigma_k \circ \varphi(g_1,g_2) \circ \rho_{h^{-1}}, \tag{3}$$

*para todo* $k \in K, g \in G$ *y* $h \in H$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\widehat{V} = \mathrm{Ind}_H^G V$, $\widehat{W} = \mathrm{Ind}_K^G W$ y $n = [G:H]$.

Definamos

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbf{F}' & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widehat{V}, \widehat{W}) \\ & & \varphi & \longmapsto & T_\varphi, \end{array}$$

donde $T_\varphi : \widehat{V} \longrightarrow \widehat{W}$ está dado por:

$$(T_\varphi f)(g) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{r \in G} \varphi(g,r)(f(r)). \tag{4}$$

$T$ es una función, en efecto:

Sean $f, l \in \widehat{V}, k \in K, g \in G$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, luego

1.
$$\begin{aligned}(T_\varphi f)(kg) &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(kg,r)(f(r))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}\sigma_k(\varphi(g,r)(f(r)))\\ &= \sigma_k\left(\frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(g,r)(f(r))\right)\\ &= \sigma_k((T_\varphi f)(g)),\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(T_\varphi(f+\lambda l))(g) &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(g,r)((f+\lambda l)(r))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(g,r)((f(r)+\lambda l(r))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}[\varphi(g,r)(f(r))+\lambda\varphi(g,r)(l(r))]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(g,r)(f(r))+\lambda\frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(g,r)(l(r))\\ &= (T_\varphi f)(g)+\lambda(T_\varphi l)(g).\end{aligned}$$

Así de (1) y (2) se tiene que $T_\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widehat{V},\widehat{W})$.
$T$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}-$espacios vectoriales: Sean $\varphi,\psi\in\mathbf{F}'$ y $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(T_{(\varphi+\lambda\psi)}f)(g) &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}(\varphi+\lambda\psi)(g,r)(f(r))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}[\varphi(g,r)(f(r))+\lambda\psi(g,r)(f(r))]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(g,r)(f(r))+\lambda\frac{1}{n}\sum_{r\in G}(\varphi(g,r)(f(r))\\ &= (T_\varphi f)(g)+\lambda(T_\psi f)(g).\end{aligned}$$

$T$ es inyectiva: Supongamos que $T_\varphi=0$. Sean $s\in G, v\in V$ y definamos la función $f_{sv}$ dada por:

$$f_{sv}(g)=\begin{cases}\rho_h(v) & \text{si}\quad g=hs\\ 0 & \text{si}\quad g\notin Hs\end{cases}$$

Debido a que $f_{sv}(h'g)=\rho_{h'h}(v)=\rho_{h'}(f_{sv}(g))$, si $g=hs$, se tiene que $f_{sv}\in\hat{V}$.

Evaluando $T_\varphi$ en $f_{sv}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
(T_\varphi f)(g) &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(g,r)(f_{sv}(r)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{hs\in Hs}\varphi(g,hs)(f_{sv}(hs)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{hs\in Hs}\varphi(g,hs)(\rho_h(v)) \qquad (5)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{hs\in Hs}(\varphi(g,s)\circ\rho_{h^{-1}}\circ\rho_h)(v) \qquad \text{(por (3))} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{hs\in Hs}\varphi(g,s)(v) \\
&= \frac{|H|}{n}\varphi(g,s)(v),
\end{aligned}
$$

luego $\varphi(g,s)(v)=0$ para todo $v\in V$, de donde $\varphi(g,s)=0$ para todo $g,s\in G$ y en consecuencia $\varphi=0$.

De la condición $\varphi(kg_1,hg_2)=\sigma_k\circ\varphi(g_1,g_2)\circ\rho_{h^{-1}}$ obtenemos que

$$\dim\mathbf{F}'=[G:H]\dim(\rho)[G:K]\dim(\sigma),$$

además como

$$\dim(\widehat{V})=[G:H]\dim(\rho) \text{ y } \dim(\widehat{W})=[G:K]\dim(\sigma),$$

tenemos que

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widehat{V},\widehat{W}))=[G:H]\dim(\rho)[G:K]\dim(\sigma),$$

así $T$ es un isomorfismo. □

Teorema 11. *Sean $H$ y $K$ subgrupos de un grupo finito $G$. Sean $(V,\rho)$ y $(W,\sigma)$ representaciones de $H$ y $K$ respectivamente. Entonces*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathrm{Ind}_H^G V,\mathrm{Ind}_K^G W)\simeq\mathbf{F},$$

*donde*

$$\mathbf{F}=\{\Lambda:G\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)\mid(\forall k\in K)(\forall h\in H)(\forall g\in G)(\Lambda(kgh)=\sigma_k\circ\Lambda(g)\circ\rho_h)\}$$

Demostración. Adoptaremos las mismas notaciones que en el lema anterior y además denotaremos por $\hat{\rho}$ y $\hat{\sigma}$ las respectivas acciones de $\widehat{V}$ y $\widehat{W}$.

Denotemos por

$$\mathbf{F}'_G = \{\varphi \in \mathbf{F}' \mid T_\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\widehat{V}, \widehat{W})\},$$

el cual es un subespacio de $\mathbf{F}'$.

Primero que todo notemos que $\varphi \in \mathbf{F}'_G$ si, y sólo si,

$$\sum_{r\in G} \varphi(g, rx^{-1})(f(r)) \;=\; \sum_{r\in G} \varphi(gx, r)(f(r)), \quad (\forall f \in \widehat{V}), \tag{6}$$

en efecto, si $\varphi \in \mathbf{F}'_G$, entonces $T_\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\widehat{V}, \widehat{W})$, luego para todo $g \in G$ y $\sum_{x\in G} \alpha_x x \in \mathbb{C}[G]$ se verifica que

$$\left[T_\varphi\left(\sum_{x\in G} \alpha_x x f\right)\right](g) \;=\; \sum_{x\in G} \alpha_x [T_\varphi f](gx),$$

ahora bien, del Lema anterior y la linealidad de $T_\varphi$ basta demostrar que

$$[T_\varphi(xf)](g) \;=\; [T_\varphi f](gx),$$

calculando por separado los términos de la igualdad se tiene que:

*a)*

$$\begin{aligned} [T_\varphi(xf)](g) &= T_\varphi(\hat{\rho}_x(f))(g) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G} \varphi(g, r)(\hat{\rho}_x(f)(r)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{r\in G} \varphi(g, r)(f(rx)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{s\in G} \varphi(g, sx^{-1})(f(s)), \quad \text{con } s = rx. \end{aligned}$$

*b)*

$$[T_\varphi f](gx) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{r\in G} \varphi(gx, r)(f(r)).$$

Así de $(a)$ y $(b)$ tenemos que (6) se satisface. Recíprocamente supongamos que (6) se cumple. Sea $\sum_{x\in G}\alpha_x x\in\mathbb{C}[G]$, luego

$$\begin{aligned}
\left[T_\varphi\left(\sum_{x\in G}\alpha_x xf\right)\right](g) &= T_\varphi\left(\sum_{x\in G}\alpha_x\hat{\rho}_x(f)\right)(g)\\
&= \sum_{x\in G}\alpha_x\left[T_\varphi(\hat{\rho}_x(f))\right](g)\\
&= \sum_{x\in G}\alpha_x\left[\frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(g,r)(\hat{\rho}_x(f)(r))\right]\\
&= \sum_{x\in G}\alpha_x\left[\frac{1}{n}\sum_{r\in G}\varphi(g,r)(f(rx))\right]\\
&= \sum_{x\in G}\alpha_x\left[\frac{1}{n}\sum_{s\in G}\varphi(g,sx^{-1})(f(s))\right],\quad \text{con } s=rx\\
&= \sum_{x\in G}\alpha_x\left[\frac{1}{n}\sum_{s\in G}\varphi(gx,s)(f(s))\right]\\
&= \sum_{x\in G}\alpha_x[T_\varphi f](gx)\\
&= \left[\sum_{x\in G}\alpha_x x(T_\varphi f)\right](g),
\end{aligned}$$

es decir, $T_\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\widehat{V},\widehat{W})$, por lo tanto $\varphi\in\mathbf{F}'_G$.

Si evaluamos $f_{sv}$ en (6) se obtiene con un cálculo similar al hecho en (5) del Lema anterior, que la igualdad en (6) es equivalente a la condición

$$\varphi(g,rx^{-1}) = \varphi(gx,r)\quad(\forall g,x,r\in G). \tag{7}$$

Por otro lado, para toda $\Lambda\in\mathbf{F}$, definamos

$$\begin{aligned}
\psi_\Lambda\ :\ G\times G &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)\\
(g_1,g_2) &\longmapsto \psi_\Lambda(g_1,g_2)=\Lambda(g_1g_2^{-1}),
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\psi_\Lambda(g_1,rg_2^{-1}) &= \Lambda(g_1(rg_2^{-1})^{-1})\\
&= \Lambda(g_1g_2r^{-1})\\
&= \psi_\Lambda(g_1g_2,r),
\end{aligned}$$

es decir, $\psi_\Lambda$ satisface (7), luego $\psi_\Lambda \in \mathbf{F}'_G$. Recíprocamente si $\psi \in \mathbf{F}'_G$, definimos

$$\begin{array}{rcccl} \Lambda_\psi & : & G & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W) \\ & & g & \longmapsto & \Lambda_\psi(g) = \psi(g,1), \end{array}$$

luego

$$\begin{aligned} \Lambda_\psi(kgh) &= \psi(kgh,1) \\ &= \sigma_k \circ \psi(gh,1) \\ &= \sigma_k \circ \psi(g,1h^{-1}) \\ &= \sigma_k \circ \Lambda_\psi(g) \circ \rho_h, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $\Lambda_\psi \in \mathbf{F}$. Así tenemos que $\mathbf{F} \simeq \mathbf{F}'_G$ y del Lema anterior $\mathbf{F}'_G \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\widehat{V},\widehat{W})$, luego $\mathbf{F} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\widehat{V},\widehat{W})$. Explícitamente dicho isomorfismo esta dado por

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbf{F} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\widehat{V},\widehat{W}) \\ & & \Lambda_\psi & \longmapsto & T_{\Lambda_\psi}, \end{array}$$

donde

$$(T_{\Lambda_\psi} f)(g) = \frac{1}{n}\sum_{r\in G} \Lambda_\psi(gr^{-1})(f(r)).$$

□

Corolario 12. *Con las notaciones del Teorema precedente, se tiene que:*

$$(\hat{\rho},\hat{\sigma}) \leq |K\diagdown G\diagup H|(\dim(V))(\dim(W)),$$

*donde $K\diagdown G\diagup H$ denota el conjunto de las dobles clases módulo $K$ y $H$.*

La conclusión más interesante del Teorema anterior se da cuando $H = K$ y $\rho = \sigma$. En este caso $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathrm{Ind}_H^G V, \mathrm{Ind}_K^G W) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(\widehat{V})$, el álgebra de *Schur* de $\hat{\rho}$. La biyección establecida en el Teorema anterior entre $\mathbf{F}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\widehat{V},\widehat{W})$ da a $\mathbf{F}$ una estructura de álgebra con el siguiente producto:

$$(\Lambda_1 * \Lambda_2)(g) = \frac{1}{[G:H]}\sum_{s\in G} \Lambda_1(gs^{-1}) \circ \Lambda_2(s),$$

el cual bajo el isomorfismo $T$ del teorema anterior corresponde a la compuesta de las funciones $T_{\Lambda_1}$ y $T_{\Lambda_2}$ en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(\widehat{V})$, en efecto:

$$\begin{aligned}
T_{\Lambda_1 * \Lambda_2}(f)(g) &= \frac{1}{[G:H]}\sum_{r\in G}(\Lambda_1 * \Lambda_2)(gr^{-1})(f(r)) \\
&= \frac{1}{[G:H]}\sum_{r\in G}\left(\frac{1}{[G:H]}\sum_{s\in G}\Lambda_1(g(sr)^{-1})\circ\Lambda_2(s)\right)(f(r)) \\
&= \frac{1}{[G:H]^2}\sum_{r\in G}\sum_{s\in G}\Lambda_1(g(sr)^{-1})[\Lambda_2(s)(f(r))] \\
&= \frac{1}{[G:H]^2}\sum_{t\in G}\sum_{r\in G}\Lambda_1(gt^{-1})[\Lambda_2(tr^{-1})(f(r))], \quad (\text{con } t = sr) \\
&= \frac{1}{[G:H]}\sum_{t\in G}\Lambda_1(gt^{-1})\left(\frac{1}{[G:H]}\sum_{r\in G}\Lambda_2(tr^{-1})(f(r))\right) \\
&= \frac{1}{[G:H]}\sum_{t\in G}\Lambda_1(gt^{-1})((T_{\Lambda_2}f)(t)) \\
&= (T_{\Lambda_1}\circ T_{\Lambda_2})(f)(g).
\end{aligned}$$

Corolario 13. *Con las notaciones del Teorema precedente, se tiene que:*

$$(\hat{\rho},\hat{\rho}) \leq |H\diagdown G\diagup H|(\dim(V))^2,$$

*donde* $H\diagdown G\diagup H$ *denota el conjunto de las dobles clases módulo* $H$*.*

CAPíTULO 2

# El grupo General Lineal

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo finito con $q$ elementos tal que $q > 2$. En el presente Capítulo describiremos el grupo general lineal $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ y algunos importantes subgrupos de él, todo esto para poder realizar nuestro propósito que es construir las representaciones del grupo, para ello usaremos la máquina de Mackey para obtener las representaciones de $P$ y también las de $B$. Con los caracteres de $B$ obtenemos las representaciones irreducibles del grupo de dimensión $1, q$ y $q+1$. Finalmente para contruir las representaciones que nos faltan, es decir, la serie cuspidal, se da una presentación del grupo $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{K})$.

## 1. El grupo General Lineal y Subgrupos Notables

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo finito de $q$ elementos con $q > 2$. El grupo general lineal consiste de las matrices cuadradas de orden dos invertibles, es decir,

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid ad - bc \text{ es invertible en } \mathbb{K} \right\}.$$

Denotaremos por $B$ al subgrupo de *Borel* de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, que esta formado por todas las matrices triangulares superiores, es decir,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \mid a, d \in \mathbb{K}^{\times}; b \in \mathbb{K} \right\}.$$

OBSERVACIÓN 3. *Sea* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, *y distingamos los casos:*

1. *Si* $a = 0$, *entonces*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

2. *Si* $a \neq 0$, *entonces*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}.$$

Así un sistema de representantes para las clases laterales izquierdas y para las clases derechas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ módulo $B$ está dado por

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{K} \right\}.$$

NOTACIÓN 4. *En adelante denotaremos el elemento distinguido por* $w$, *es decir,*

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

PROPOSICIÓN 10. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo de orden* $q > 2$, *entonces*

1. *El número de matrices invertibles de orden 2 es:*
$$q(q-1)^2(q+1).$$
2. *La cantidad de matrices triangulares superiores de orden 2 es:*
$$q(q-1)^2.$$

**Grupo unipotente.** Un subgrupo normal de $B$ es el conjunto de todas las matrices unipotentes triangulares superiores, a saber

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{K} \right\}.$$

Observemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que entrega un isomorfismo natural de $U$ en el grupo aditivo $\mathbb{K}$ denotado por $\mathbb{K}^+$. Al considerar

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

con lo cual obtenemos que el grupo cociente $B/U$ que es isomorfo al grupo de todas las matrices diagonales

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{K}^\times \right\},$$

este grupo es llamado grupo de *Cartan*.

Además el grupo de las matrices diagonales es isomorfo al grupo $\mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^\times$ y por lo tanto es abeliano, donde $\mathbb{K}^\times$ es el grupo multiplicativo $\mathbb{K}$.

De esta manera tenemos que $B = UD$, donde $U$ es subgrupo normal de $B$ y es fácil verificar que $U \cap D = \{\mathrm{Id}\}$ por lo tanto:

PROPOSICIÓN 11. *Con las notaciones anteriores tenemos que:*

1. $B = U \rtimes D$.

2. *El subgrupo conmutador de $B$ es $U$.*

COROLARIO 14. *El número de representaciones irreducibles de $B$ de dimensión uno es*

$$[B : U] = (q-1)^2.$$

**Grupo afín unidimensional.** Otro subgrupo importante de $B$, es el subgrupo normal afín unidimensional

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{K}^\times, b \in \mathbb{K} \right\},$$

cuyo orden es $(q-1)q$, con lo cual $[B : P] = q - 1$.

PROPOSICIÓN 12. *El subgrupo conmutador de $P$ es $U$.*

COROLARIO 15. *El número de representaciones irreducibles de $P$ de dimensión* 1 *es* $q - 1$.

También podemos descomponer $P$ en producto semidirecto de $U$ con el grupo

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{K}^\times \right\},$$

así tenemos que

$$P = U \rtimes A,$$

donde la acción por conjugación de $A$ en $U$ esta dada por

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual corresponde a la acción por multiplicación de $\mathbb{K}^\times$ en $\mathbb{K}$.

**Centro de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.** Es:

$$Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{K}^\times \right\}$$

y es también un subconjunto de $B$. Es claro que

$$Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})) \cap P = \{\mathrm{Id}\}$$

y $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}))P = B$, es decir,

$$B = P \rtimes Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})).$$

## 2. Clases de Conjugación de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$

A continuación calcularemos explícitamente las clases de conjugación de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, ya que este número es igual a la cantidad de representaciones irreducibles del grupo y permite un cálculo más fácil de la tabla de caracteres. Para lo anterior calcularemos en un sistema de representantes.

Observación 4. Un elemento $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tiene dos valores propios. Si uno de ellos pertenece a $\mathbb{K}$, el otro también, pues ambos satisfacen la misma ecuación cuadrática sobre $\mathbb{K}$, esta ecuación es $\det(g - x\mathrm{Id}) = 0$.

Proposición 13. *Todos los elementos en las clases de conjugación de $g$ tienen los mismos valores propios.*

Sea $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, usando la Proposición anterior clasificaremos las clases de conjugación viendo las distintas posibilidades para los valores propios.
I. Los valores propios de $g$ pertenecen a $\mathbb{K}$.

Como los valores propios pertenecen a $\mathbb{K}$, tenemos que existe un cambio de base, tal que $g$ en esta base es una matriz de Jordan.

*a*) Si ambos valores propios son iguales a un elemento $a \in \mathbb{K}$, entonces las posibles formas de Jordan son:

$$C_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \vee \quad C_2(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \tag{9}$$

dependiendo si el polinomio minimal de $g$ es igual o diferente al polinomio carácterístico de $g$.

*b*) Si los valores propios son $a, b \in \mathbb{K}$, con $a \neq b$, entonces la forma de Jordan es:

$$C_3(a,b) \quad = \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{10}$$

observemos que

$$w\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} w^{-1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

luego $C_3(a,b)$ es conjugada con la matriz $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Así obtenemos que existen:

*i)* $q-1$ matrices de la forma $C_1(a)$,

*ii)* $q-1$ de la forma $C_2(a)$ y

*iii)* $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ de la forma $C_3(a,b)$.

II. Los valores propios de $g$ no pertenecen a $\mathbb{K}$.

Sea $p(x) = \det(g - x\mathrm{Id})$ el polinomio carácterístico de $g$, como las raíces no pertenecen a $\mathbb{K}$. Luego tenemos una única extensión cuadrática $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$.

En este caso, los valores propios de $g$ están en $\mathbb{L}$. Si denotamos por $\mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha + \overline{\alpha}$ y $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$, entonces $p(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(\alpha)x + N(\alpha) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$.

Sea $v$ un vector no nulo en $\mathbb{K}^2$, entonces el conjunto $\{v, gv\}$ es una base para $\mathbb{K}^2$ sobre $\mathbb{K}$. De hecho si $\{v, gv\}$ no es base, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $gv = \lambda v$, es decir, $\lambda$ es un valor propio de $g$, lo cual es una contradicción, pues estamos suponiendo que los valores propios de $g$ no son elementos en $\mathbb{K}$.

Como $g$ es una transformación lineal en $\mathbb{K}^2$, se tiene que la matriz de $g$ con respecto a la base $\{v, gv\}$ es:

$$C_4(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -N(\alpha) \\ 1 & \mathrm{Tr}(\alpha) \end{pmatrix} = C_4(\overline{\alpha}). \tag{11}$$

Así $g$ es conjugada en $GL_2(\mathbb{K})$ con $C_4(\alpha)$.

Recíprocamente, dado $\alpha \in \mathbb{L} - \mathbb{K}$, entonces $C_4(\alpha)$ es una matriz en $GL_2(\mathbb{K})$ con valores propios $\alpha$ y $\overline{\alpha}$. Si $\beta \in \mathbb{L} - \mathbb{K}$ es otro elemento, entonces $C_4(\alpha)$ es conjugada a $C_4(\beta)$ si, y sólo si, $\beta = \alpha$ o $\beta = \overline{\alpha}$, de donde se tiene que $p(\beta) = 0$.

Existen $q^2 - q$ elementos en $\mathbb{L} - \mathbb{K}$, por lo tanto existen $\frac{1}{2}(q^2 - q)$ clases de conjugación de la forma $C_4(\alpha)$.

Proposición 14. *Las clases de conjugación de* $GL_2(\mathbb{K})$ *está clasificadas del siguiente modo:*

1. *Del tipo* $C_1(a)$ *con* $a \in \mathbb{K}^\times$ *existen* $q-1$.
2. *Del tipo* $C_2(a)$ *con* $a \in \mathbb{K}^\times$ *existen* $q-1$.
3. *Del tipo* $C_3(a,b)$ *con* $a, b \in \mathbb{K}^\times$*, distintos existen* $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$.
4. *Del tipo* $C_4(\alpha) = C_4(\overline{\alpha})$ *con* $\alpha \in \mathbb{L} - \mathbb{K}$ *existen* $\frac{1}{2}(q^2-q)$.

Proposición 15. *El número de representaciones irreducibles de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ *es*

$$q^2 - 1.$$

## 3. Representaciones Irreducibles de $P$

Recordemos que

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{K}^\times, b \in \mathbb{K} \right\}, \\ U &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{K} \right\}, \\ A &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{K}^\times \right\}. \end{aligned}$$

Para determinar las representaciones de $P$ usaremos el método llamado "Máquina de Mackey" descrito en la subsección 3.1 del primer capítulo.

Tenemos que $P = U \rtimes A$, donde $U \simeq \mathbb{K}^+$ y $A \simeq \mathbb{K}^\times$. Ahora veremos la acción sobre las representaciones y las respectivas órbitas. Consideremos la acción de $A$ sobre $\hat{U}$ definida por:

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & : & A \times \hat{U} & \longrightarrow & \hat{U} \\ & & (h, \psi) & \longmapsto & h \cdot \psi = \psi_h, \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{ccccc} \psi_h & : & U & \longmapsto & \mathbb{C}^\times \\ & & g & \longmapsto & \psi_h(g) = \psi(h^{-1}gh). \end{array}$$

Explicitando el conjugado, sean

$$h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

luego

$$h^{-1}gh = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo al isomorfismo anterior tenemos:

$$\begin{array}{rccc} \cdot & : & \mathbb{K}^{\times} \times \hat{\mathbb{K}^{+}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{K}^{+}} \\ & & (a, \psi) & \longmapsto & \psi_{a^{-1}}, \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccc} \psi_{a^{-1}} & : & \mathbb{K}^{+} & \longmapsto & \mathbb{C}^{\times} \\ & & b & \longmapsto & \psi_{a^{-1}}(b) = \psi(a^{-1}b). \end{array}$$

Determinemos las órbitas. Sea $\psi \in \hat{U}$.

I Si $\psi = \mathbb{1}$, se tiene que

$$(\forall h \in A)(\psi_h = \mathbb{1}),$$

de donde obtenemos que

$$O_{\mathbb{1}} = \{\mathbb{1}\} \quad \text{y} \quad \mathrm{Stab}_A \mathbb{1} = A. \tag{13}$$

II Si $\psi \neq \mathbb{1}$

$$\mathrm{Stab}_A \psi = \{h \in A \mid \psi_h = \psi\},$$

como $\psi \neq \mathbb{1}$, existe $k \in \mathbb{K}$, tal que $\psi(k) \neq 1$. Sea $h \in \mathrm{Stab}_A \psi$, luego

$$\begin{aligned} & (\forall g \in U)(\psi_h(g) = \psi(g)), \qquad \text{manteniendo las notaciones de (12)} \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall b \in \mathbb{K})(\psi(a^{-1}b) = \psi(b)), \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall b \in \mathbb{K})(\psi(a^{-1}b - b) = 1) \\ \Leftrightarrow \quad & (\forall b \in \mathbb{K})(\psi((a^{-1} - 1)b) = 1), \end{aligned}$$

ahora bien, si $h \neq \mathrm{Id}$ entonces evaluando en $(a^{-1} - 1)^{-1}k$ obtenemos una contradicción y en consecuencia $\mathrm{Stab}_A \psi = \{\mathrm{Id}\}$.

Luego como

$$|O_{\mathbb{1}}| + |O_{\psi}| = 1 + q - 1 = q = |\hat{U}|,$$

se tiene que el conjunto $\mathcal{R} = \{\mathbb{1}, \psi\}$ es un sistema de representantes para las $A$-órbitas de $\hat{U}$.

A continuación definiremos los subgrupos donde induciremos las representaciones

$$P_1 = U \rtimes \mathrm{Stab}_A \mathbb{1} \ ; \ P_2 = U \rtimes \mathrm{Stab}_A \psi,$$

y los denotamos por $\widetilde{\psi}^i$ de $P_i$ definido por:

$$\widetilde{\psi}^i(gk) = \psi^i(g) \qquad (g \in U, k \in \mathrm{Stab}_A\psi^i, i = 0, 1),$$

donde $\psi^0 = \mathbb{1}$ y $\psi^1 = \psi$.

Ahora para determinar las representaciones irreducibles de $P$ distingamos los siguientes casos:

**Caso 1** $\quad P_1 = U \rtimes \mathrm{Stab}_A\mathbb{1} = U \rtimes A = P$.

Sea $\rho$ una representación irreducible de $\mathrm{Stab}_A\mathbb{1} = A$, luego

$$\begin{array}{rcccl} \widetilde{\rho} & : & U \rtimes A & \longmapsto & \mathbb{C}^\times \\ & & gk & \longmapsto & \widetilde{\rho}(gk) = \rho(k), \end{array} \tag{14}$$

es una representación irreducible de $P_1 = P$, como $A \simeq \mathbb{K}^\times$ obtenemos $q-1$ representaciones irreducibles de grado uno de $P$, que denotamos por

$$\theta_{\mathbb{1},\rho} = \widetilde{\rho} \qquad (\rho \in \hat{A}).$$

**Caso 2** $\quad P_2 = U \rtimes \mathrm{Stab}_A\psi = U$.

Para obtener una representación irreducible de $P$, inducimos la representación $\widetilde{\psi}$ de $P_2 = U$, es decir,

$$\theta_\psi = \mathrm{Ind}_{P_2}^P(\widetilde{\psi}),$$

es una representación irreducible de $P$. La dimensión de dicha representación es $q-1$, en efecto

$$\dim(\theta_\psi) = [P : P_2]\dim(\widetilde{\psi}) = \frac{q(q-1)}{q} = q - 1.$$

En resumen tenemos

Teorema 16. *El grupo $P$ tiene $q$ representaciones irreducibles:*

*i)* $(q-1)$ *representaciones de dimensión uno*

$$\theta_{\mathbb{1},\rho} = \widetilde{\rho} \qquad (\rho \in \hat{A}).$$

*ii) Una única representación de dimensión* $q-1$,

$$\mathrm{Ind}_{P_2}^P(\widetilde{\psi}).$$

NOTACIÓN 5. Para cálculos posteriores denotaremos por $\pi$, la única representación de dimensión $q-1$ del Teorema precedente, es decir,

$$\pi = \mathrm{Ind}_{P_2}^{P}(\widetilde{\psi}).$$

## 4. Las Representaciones de $B$

Ya mencionamos que $U$ es el subgrupo conmutador de $B$, más aún, $B = D \ltimes U$. Como $D \simeq \mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^\times$, si $\mu_1, \mu_2$ son caracteres de $\mathbb{K}^\times$, se sigue de la Sección 1.1 que $\mu = \mu_1 \cdot \mu_2$ definido por

$$\begin{array}{rccc} \mu & : & D & \longmapsto & \mathbb{C}^\times \\ & & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \mu_1(a)\mu_2(d), \end{array}$$

es un carácter de $D$, el cual a su vez puede ser extendido a un carácter $\widetilde{\mu}$ de $B$, dado por

$$\widetilde{\mu}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \mu_1(a)\mu_2(d).$$

Del Teorema 4 obtenemos que los $(q-1)^2$ caracteres de $B$ obtenidos de esta forma son todas las representaciones irreducibles de dimensión uno de $B$.

Por otro lado tenemos que $B = Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})) \times P$. Como $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})) \simeq \mathbb{K}^\times$ obtenemos que tiene $q-1$ caracteres, los que denotaremos por $\chi_i$ con $i \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$

Con el propósito de describir las representaciones de $B$ de dimensión mayor lo haremos aplicando la maquina de Mackey, consideremos la acción de $P$ sobre $\widehat{Z(G)}$ definida por:

$$\begin{array}{rccc} \cdot & : & P \times \widehat{Z(G)} & \longmapsto & \widehat{Z(G)} \\ & & (p, \chi_i) & \longmapsto & p \cdot \chi_i \end{array}$$

donde

$$(p \cdot \chi_i)(z) = \chi_i(p^{-1}zp) = \chi_i(z) \qquad (\forall p \in P, \forall i \in \{1, \ldots, q-1\}, z \in Z(G)).$$

Tenemos que la órbita $O_{\chi_i}$ es trivial, es decir, el estabilizador $\mathrm{Stab}_P(\chi_i) = P$. Luego todas las representaciones de $B$ son de la forma

$$(\chi_i \cdot \tau)(zp) = \chi_i(z)\tau(p),$$

donde $\chi_i$ es una representación de $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}))$ y $\tau$ una representación de $P$.

Como nuestro interés es determinar las de dimensión mayor, las cuales son:

$$\widetilde{\chi_i} \cdot \widetilde{\pi}(zp) = \chi_i(z)\pi(p).$$

Así hemos demostrado lo siguiente:

TEOREMA 17. *El grupo $B$ tiene*

*i)* $(q-1)^2$ *caracteres dados por:*

$$\mu_1 \cdot \mu_2, \qquad (\mu_1, \mu_2 \in \widehat{\mathbb{K}^\times}).$$

*ii)* $q-1$ *representaciones de grado* $q-1$ *dadas por:*

$$\widetilde{\chi_i} \cdot \widetilde{\pi}, \qquad (\chi_i \in \widehat{Z(G)}).$$

## 5. Induciendo de $B$ a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$

Como primer paso para determinar las representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, veremos las que aparecen en $\mathrm{Ind}_B^G \mu$, donde $\mu$ es un carácter de $B$.

NOTACIÓN 6. En adelante anotaremos $\hat{\mu}$ para referirnos a la inducida de la representación $\mu$ de $B$ a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, es decir,

$$\hat{\mu} = \mathrm{Ind}_B^G \mu.$$

Pasamos ahora a determinar propiedades y relaciones entre $\mu$ y $\hat{\mu}$, para lo cual introducimos el siguiente conjunto:

DEFINICIÓN 9. Sea $\rho$ una representación de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, se define el *Módulo de Jacquet* como:

$$J(V_\rho) = \{v \in V_\rho \mid \rho_g(v) = v, \text{ para todo } g \in U\}.$$

LEMA 18. *Sea $\rho$ una representación de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ *entonces*

$$\rho_g(J(V_\rho)) \subseteq J(V_\rho), \qquad \forall g \in B,$$

*es decir, $J(V_\rho)$ es un $B-$espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil demostrar que $B$ actúa en $J(V_\rho)$, para ello basta tener presente que $U \trianglelefteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, sea $v \in J(V_\rho), b \in B$ y $g \in U$ entonces $b^{-1}gb = h \in U$, así

$$\rho_g(\rho_b(v)) = \rho_{gb}(v) = \rho_{bh}(v) = \rho_b(\rho_h(v)) = \rho_b(v).$$

□

Sin embargo podría pasar que $J(V_\rho)$ no sea un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})-$espacio.

LEMA 19. *Si $\rho_1$ y $\rho_2$ son representaciones de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, entonces*

$$J(V_{\rho_1} \oplus V_{\rho_2}) = J(V_{\rho_1}) \oplus J(V_{\rho_2}).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta mirar la definición de representación suma directa en el Capítulo 1. □

LEMA 20. *Si $\mu$ es un carácter de $B$, entonces* $\dim(J(V_{\hat{\mu}})) = 2$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición tenemos que

$$J(V_{\hat{\mu}}) = \{f \in V_{\hat{\mu}} \mid \hat{\mu}_u f = f, \text{ para todo } u \in U\}$$

Sea $f \in J(V_{\hat{\mu}}) \leq V_{\hat{\mu}}$, luego se tiene que si $b \in B, g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ y $u \in U$

$$f(bg) = \mu_b f(g) \quad \text{y} \quad f(bu) = f(b).$$

En particular tomando $g = 1$ y $g = wu$, obtenemos las igualdades siguientes

$$f(b) = \mu_b f(1) \quad \text{y} \quad f(bwu) = \mu_b f(w), \qquad \forall b \in B, \forall u \in U$$

Usando la descomposición de Bruhat $G = B \,\dot{\cup}\, BwB$, tenemos que $f$ queda determinada por sus valores en 1 y en $w$.

Luego una base para $J(V_{\hat{\mu}})$ está formada por las funciones $f_1$ y $f_2$ tales que:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} f_1(b) = \mu_b & , \quad x = b \in B \\ \\ f_1(x) = 0 & , \quad x \in BwB \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} f_2(b) = 0 & , \quad x = b \in B \\ \\ f_2(b_1wb) = \mu_\lambda & , \quad x = b_1wb \in BwB \end{cases} , \end{aligned} \tag{15}$$

donde $\lambda = b_1wdw^{-1},\ b = du$ con $d \in D, u \in U$. □

LEMA 21. *Si $\mu$ es un carácter de $B$, entonces la acción de $B$ en $J(V_{\hat{\mu}})$ tiene dos vectores propios $f_1, f_2$ (dados en (15)), los cuales corresponden a los valores propios $\mu$ y $\mu_w$ respectivamente. Explícitamente*

$$\hat{\mu}_b(f_1) = \mu_b f_1 \quad y \quad \hat{\mu}_b(f_2) = \mu_w(b) f_2, \tag{16}$$

*para todo $b \in B$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que las igualdades en (16) se verifican al evaluar en 1 y en $w$.

En primer lugar demostremos la igualdad para $f_1$, evaluando en 1 tenemos

$$(\hat{\mu}_b f_1)(1) = f_1(b) = (\mu_b f_1)(1).$$

Por la descomposición de Bruhat para todo $b \in B$ existen elementos $b_1 \in B$ y $u \in U$ tales que $wb = b_1 wu$, luego

$$(\hat{\mu}_b f_1)(w) = f_1(wb) = f_1(b_1 wu) = 0 = (\mu_b f_1)(w).$$

Demostremos ahora la igualdad para $f_2$, evaluando en 1 tenemos

$$(\hat{\mu}_b f_2)(1) = f_2(b) = (\mu_b f_2)(1) = 0 = ((\mu_w)_b f_2)(1).$$

El cálculo de $(\hat{\mu} f_2)(w)$ es un poco más difícil, por lo tanto como primer paso consideremos $d \in D$, entonces

$$(\hat{\mu}_d f_2)(w) = f_2(wd) = f_2(wdw^{-1}w) = (\mu_{wdw^{-1}} f_2)(w) = ((\mu_w)_d f_2)(w).$$

Ahora bien como $f_1$ y $f_2$ generan a $J(V_{\hat{\mu}})$, tenemos que para todo $b \in B$, existen $(\alpha_1)_b, (\alpha_2)_b \in \mathbb{C}$ tales que

$$\hat{\mu}_b f_2 \quad = \quad (\alpha_1)_b f_1 + (\alpha_2)_b f_2 \tag{17}$$

Evaluando en 1 la igualdad en (17) se tiene que $(\alpha_1)_b = 0$, de donde se obtiene que $\hat{\mu}_b f_2 = (\alpha_2)_b f_2$. Así tenemos que $(\alpha_2)_{b_1 b_2} = (\alpha_2)_{b_1}(\alpha_2)_{b_2}$ para $b_1, b_2 \in B$, es decir, $\alpha_2$ es un carácter de $B$. Observemos que

$$\mu_w \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

luego si

$$b = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad d = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

entonces

$$(\hat{\mu}_b f_2)(w) = ((\alpha_2)_b f_2)(w) = ((\alpha_2)_d f_2)(w) = (\hat{\mu}_d f_2)(w) = ((\mu_w)_d f_2)(w) = ((\mu_w)_b f_2)(w),$$

concluyendo así la demostración. □

La importancia del módulo de Jacquet para nuestro propósito radica en el siguiente resultado:

LEMA 22. *Sea $\rho$ una representación de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, entonces*

$$J(V_\rho) \neq 0 \text{ si y sólo si existe un carácter } \mu \text{ de } B \text{ tal que } (\rho, \hat{\mu}) \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $J(V_\rho) \neq 0$, luego podemos considerar a $J(V_\rho)$ como un $B/U$ espacio no trivial a través de $\rho$. Pero como $B/U = A$ es abeliano, entonces $J(V_\rho)$ se escribe como una suma directa de $B/U$ subespacios de dimensión uno, de esto se sigue que existe un carácter no trivial $\mu$ de $B$ y un elemento no nulo $v \in J(V_\rho)$ tal que $\rho_b(v) = \mu_b(v)$ para todo $b \in B$, así $(\mathrm{Res}_B^G \rho, \mu) \neq 0$ y por el Teorema de reciprocidad de Frobenius se tiene que $(\rho, \hat{\mu}) \neq 0$.

Supongamos ahora que $(\rho, \hat{\mu}) \neq 0$, nuevamente usando la reciprocidad de Frobenius $(\mathrm{Res}_B^G \rho, \mu) \neq 0$, luego existe un elemento no nulo $v \in V_\rho$ tal que $\rho_b(v) = \mu_b(v)$ para todo $b \in B$ y como $\mu$ es trivial en $U$ por ser este el conmutador de $B$, tenemos que $v \in J(V_\rho)$ y así $J(V_\rho) \neq 0$. $\square$

COROLARIO 23. *Sea $\rho$ una representación irreducible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, entonces*

$$J(V_\rho) \neq 0 \text{ si, y sólo si, existe un carácter } \mu \text{ de } B \text{ tal que } \rho \leq \hat{\mu}.$$

COROLARIO 24. *Si $\mu$ es un carácter de $B$, entonces $\hat{\mu}$ tiene a lo más dos componentes irreducibles.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\hat{\mu} = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ la descomposición de $\hat{\mu}$ en componentes irreducibles. Luego del Lema 19 se tiene que

$$J(V_{\hat{\mu}}) \;=\; J(V_{\rho_1}) \oplus \cdots \oplus J(V_{\rho_n}) \tag{18}$$

y del Corolario 23 obtenemos que $J(V_{\rho_i}) \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, por lo tanto la dimensión del lado derecho de la igualdad en (18) es mayor o igual que $n$, pero del Lema 20 sabemos que la dimensión de $J(V_{\hat{\mu}})$ es 2, así concluimos que $n \leq 2$. $\square$

LEMA 25. *Si $\mu$ es un carácter de $B$ y $\mu = \mu_w$, entonces $\hat{\mu}$ posee una componente de dimensión* 1.

DEMOSTRACIÓN. Como $\mu$ es un carácter de $B$, se sigue de la Sección 4 que $\mu$ corresponde a un par de caracteres $(\mu_1, \mu_2)$ de $\mathbb{K}^\times$, es decir, si $b = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ entonces $\mu(b) = \mu_1(\alpha)\mu_2(\delta)$, pero $\mu_w = \mu$, de donde se tiene que $\mu_1 = \mu_2$, y en consecuencia, $\mu(b) = \mu_1(\alpha\delta) = \mu_1(\det(\mathrm{b}))$. Definamos ahora la función

$$\begin{array}{rccl} f: & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & g & \longmapsto & f(g) = \mu_1(\det(g)) \end{array}$$

y observemos que dado $b \in B$ y $g \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(bg) &= \mu_1(\det(bg)) \\ &= \mu_1(\det(b)\det(g)) \\ &= \mu_1(\det(b))\mu_1(\det(g)) \\ &= \mu(b)f(g). \end{aligned}$$

Luego $f \in V_{\hat{\mu}}$, más aún $(\hat{\mu}_s f)(g) = f(gs) = \mu_1(\det(s))f(g)$ para todo $s, g \in G$, así tenemos que $f$ es un vector propio de $\hat{\mu}$ que pertenece al valor propio $\mu_1 \circ \det$. $\square$

LEMA 26. *Si $\mu$ es un carácter de $B$, entonces $\hat{\mu}$ posee a lo más una componente de dimensión* 1.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\hat{\mu}$ posee dos componentes de dimensión 1 y sean $\chi_1$ y $\chi_2$ dichas componentes. Por el Corolario 24, se tiene que $\hat{\mu} = \chi_1 \oplus \chi_2$, de donde obtenemos que $q+1 = \dim\hat{\mu} = 2$, lo cual es claramente una contradicción. $\square$

LEMA 27. *Si $\mu$ es un carácter de $B$, entonces*

$$\mathrm{Res}_P V_{\hat{\mu}} = \mathrm{Res}_P J(V_{\hat{\mu}}) \oplus V_\pi.$$

DEMOSTRACIÓN. $J(V_{\hat{\mu}})$ es una $B$-representación de dimensión 2 del espacio $V_{\hat{\mu}}$. En particular $J(V_{\hat{\mu}})$ es una $P$-representación de dimensión 2.

Sea $V$ una $P$-representación de $V_{\hat{\mu}}$, tal que

$$V_{\hat{\mu}} = J(V_{\hat{\mu}}) \oplus V$$

como $\dim(V_{\hat{\mu}}) = q+1$ y $\dim(J(V_{\hat{\mu}})) = 2$, entonces tenemos que $\dim(V) = q-1$.

Recordemos que las representaciones irreducibles de $P$ tienen dimensión 1 ó $q-1$.

Supongamos que $V$ contiene una representación de dimensión 1, es decir, existe $v \in V - \{0\}$ y $\chi$ un carácter de $P$ tal que

$$\hat{\mu}(p)v = \chi(p)v, \qquad \forall p \in P.$$

En particular, como $U \leq P$ y conocemos las representaciones irreducibles de $P$ entonces

$$\hat{\mu}(u)v = v.$$

De lo cual obtenemos que $v \in J(V_\mu)$, por lo tanto $v = 0$, lo cual es una contradicción.

Así $V$ es irreducible y

$$V \simeq V_\pi.$$

$\square$

LEMA 28. *Si $\mu$ es un carácter de $B$ y $\hat{\mu}$ es reducible, entonces*

1. *$\hat{\mu}$ tiene una componente de dimensión* 1.
2. $\mu = \mu_w$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Como $\hat{\mu}$ es reducible, existen $V$ y $V'$ subrepresentaciones no triviales tales que $V_{\hat{\mu}} = V \oplus V'$. Por el Lema anterior sabemos que $\mathrm{Res}_P V_{\hat{\mu}} = \mathrm{Res}_P J(V_{\hat{\mu}}) \oplus V_\pi$, y supongamos que $V_\pi \cap V \neq \{0\}$, luego $V_\pi \subseteq V$ ya que $V_\pi$ es irreducible.

Por otro lado, del Lema 22 tenemos que:

$$\{0\} \neq J(V) \subseteq J(V_{\hat{\mu}}) \cap V,$$

luego $V_\pi \neq V$; así tenemos que $\dim(V) = q$ y por lo tanto $\dim(V') = 1$.

2. Hemos probado que existe $\chi \in \widehat{\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})}$ carácter y $f \in V_{\hat{\mu}}$ no nula tal que

$$\widetilde{\mu}_g(f) = \chi(g)f, \qquad \forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}).$$

Como $f \in V_{\hat{\mu}}$ para todo $b \in B$ y para todos $g, s \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ se tiene que

$$f(bg) = \mu(b)f(g) \quad \text{y} \quad f(gs) = \chi(s)f(g).$$

Si $f(1) = 0$, como $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ es un grupo finito, dado $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = 1$, luego

$$f(1) = f(g^n) = \chi(g^{n-1})f(g).$$

Como $\chi(g^{n-1}) \in \mathbb{C}^\times$ se tiene que $f(g) = 0$ para todo $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, lo cual es una contradicción y en consecuencia $f(1) \neq 0$.

Sea $d \in D$, entonces

$$\mu(d)f(1) = f(d) = \chi(d)f(1);$$

y como $f(1) \neq 0$ se tiene que $\mu(d) = \chi(d)$. De esto se sigue que

$$\mu_w(d) = \mu(wdw) = \chi(wdw) = \chi(w^2)\chi(d) = \mu(d)$$

y por lo tanto $\mu_w = \mu$. $\square$

LEMA 29. *Sean $\mu$ y $\nu$ dos caracteres distintos de $B$. Entonces*

1. $(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \neq 0$ *si, y sólo si,* $\nu = \mu_w$.

2. *$\hat{\mu} = \hat{\nu}$ si, y sólo si, $\nu = \mu_w$*

Demostración.

1. Supongamos que $(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \neq 0$, esto implica que existe una representación irreducible $\rho$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tal que $\rho \leq \hat{\mu}$ y $\rho \leq \hat{\nu}$, luego del Corolario 23 tenemos que $J(V_\rho) \neq 0$ y además $B$ actúa en $J(V_\rho)$, por la demostración del Lema 22 existe $\chi$ carácter de $B$ tal que

$$\rho_b(v) = \chi_b(v), \quad v \in J(V_\rho).$$

Como $\rho \leq \hat{\mu}$ tenemos que

$$J(V_\rho) \subseteq J(V_{\hat{\mu}})$$

y $B$ actúa en $J(V_{\hat{\mu}})$ y los únicos valores propios son $\mu$ y $\mu_w$. Luego

$$\chi = \mu \quad \text{o} \quad \chi = \mu_w.$$

Del mismo modo $\chi = \nu$ o $\chi = \nu_w$, pero $\mu \neq \nu$ entonces $\nu = \mu_w$.

Recíprocamente supongamos que $\nu = \mu_w$. Consideremos $f_2$ dada en (15), luego como $f_2(b) = 0$ para todo $b \in B$, basta ver que

$$\begin{aligned} (\hat{\mu}_b f_2)(b'wb'') &= f_2(b'wb''b); \quad b'' = d''u'', b = du \\ &= \mu(b'wd''dw^{-1}) \\ &= \mu(wdw^{-1})\mu(b'wd''w^{-1}) \\ &= (\mu_w)_b f_2(b'wb''), \end{aligned}$$

además como $f_2(b) = 0$ para todo $b \in B$, se tiene que $f_2 \in \mathrm{Res}_B\hat{\mu}$, con lo cual $(\nu, \mathrm{Res}_B\hat{\mu}) \neq 0$ y luego por el Teorema de reciprocidad de Frobenius se tiene que $(\hat{\nu}, \hat{\mu}) \neq 0$.

2. Supongamos que $\nu = \mu_w$, entonces $\mu \neq \mu_w$ y $\nu \neq \nu_w$. Luego por el Lema 28 obtenemos que $\hat{\mu}$ y $\hat{\nu}$ son irreducibles, además de (1) tenemos que $(\hat{\mu}, \hat{\nu}) \neq 0$ y por lo tanto $\hat{\mu} = \hat{\nu}$.

La otra implicación de la demostración es directa de (1). □

Teorema 30. *Sean $\mu$ y $\nu$ dos caracteres de $B$ y sea $\hat{\mu} = \mathrm{Ind}_B^G\mu$, entonces*

1. $\dim\hat{\mu} = q + 1$,
2. *$\hat{\mu}$ tiene a lo más dos componentes irreducibles,*
3. *$\hat{\mu}$ es irreducible si, y sólo si, $\mu \neq \mu_w$,*
4. *Si $\hat{\mu}$ es reducible, $\hat{\mu}$ se descompone en la suma directa de dos representaciones de dimensión 1 y $q$ respectivamente,*

5. *$\hat{\nu} = \hat{\mu}$ si, y sólo si, $\nu = \mu$ o $\nu = \mu_w$*

DEMOSTRACIÓN. La obtenemos de los resultados anteriores, del Corolario 24 y los Lemas 25,28,29. □

A continuación veremos cuantas representaciones irreducibles no isomorfas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ hemos contruido, para ello, sea $\mu$ un carácter de $B$, luego por el Teorema 17 sabemos que

$$\mu = \mu_1 \cdot \mu_2,$$

donde $\mu_1, \mu_2$ son caracteres de $\mathbb{K}^\times$.

Luego tenemos las siguientes posibilidades:

1. $\mu = \mu_w$, es decir, $\mu_1 = \mu_2$,
2. $\mu \neq \mu_w$, es decir, $\mu_1 \neq \mu_2$.

En el primer caso $\hat{\mu}$ es la suma directa de una representación de dimensión 1 que denotaremos por $\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}$ y una representación irreducible de dimensión $q$ denotada por $\rho_{(\mu_1,\mu_1)}$. Por lo tanto como $\mathbb{K}^\times$ tiene $q-1$ caracteres, obtenemos de este modo $q-1$ caracteres de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ y $q-1$ representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ de dimensión $q$.

En el segundo caso tenemos que $\hat{\mu}$ es una representación irreducible de dimensión $q+1$, la que denotaremos por $\rho_{(\mu_1,\mu_2)}$. El número de éstos $\mu$ es igual al número de caracteres de $B$ menos los caracteres del primer caso, es decir, $(q-1)(q-2)$. Ahora bien como $\mu$ y $\mu_w$ inducen la misma representación obtenemos de esta forma $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ de dimensión $q+1$ no isomorfas.

Así obtenemos la siguiente propiedad:

TEOREMA 31. *Las representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ que son componentes de representaciones inducidas de la forma $\mathrm{Ind}_B^G\mu$, siendo $\mu$ un carácter de $B$, se dividen en las siguientes clases:*

*i)* $q-1$ *representaciones de dimensión* $1$, $\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}$;
*ii)* $q-1$ *representaciones de dimensión* $q$, $\rho_{(\mu_1,\mu_1)}$;
*iii)* $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ *representaciones de dimensión* $q+1$, $\rho_{(\mu_1,\mu_2)}$.

Observemos que si $\chi$ es un carácter de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, entonces $\mathrm{Res}_B^G\chi$ es un carácter de $B$ y $(\mathrm{Res}_B^G\chi, \mathrm{Res}_B^G\chi) = (\chi, \mathrm{Ind}_B^G(\mathrm{Res}_B^G\chi)) \neq 0$. Luego tenemos que $\chi$ es uno de los caracteres encontrados anteriormente. Sabemos que el número de caracteres de

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ es igual al índice de $G$ en $G'$. $[G : G'] = q-1$ y $G' \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, luego $G' = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$, ya que $G/\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^\times$. Tenemos así el siguiente corolario:

COROLARIO 32. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ *es el subgrupo conmutador de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

### 5.1. Dimensión del Álgebra de Schur de $\mathrm{Ind}_B^G\mu$.

TEOREMA 33. *Sea $\mu$ un carácter de $B$ y sea $\hat{\mu} = \mathrm{Ind}_B^G\mu$. Entonces*

*i)* $(\hat{\mu}, \hat{\mu}) = 1$*, en este caso $\hat{\mu}$ es irreducible.*

*ii)* $(\hat{\mu}, \hat{\mu}) = 2$*, en este caso $\hat{\mu}$ se descompone en la suma directa de dos representaciones no isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mu$ un carácter de $B$ y sea $\hat{\mu} = \mathrm{Ind}_B^G\mu$. De la descomposición de Bruhat del grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tenemos que $|B\backslash G/B| = 2$. Además, por el Corolario 12, se tiene que $(\hat{\mu}, \hat{\mu}) \leq 2$, pero $(\hat{\mu}, \hat{\mu}) \geq 1$ luego tenemos dos posibilidades $(\hat{\mu}, \hat{\mu}) = 1$ o $(\hat{\mu}, \hat{\mu}) = 2$. Si $(\hat{\mu}, \hat{\mu}) = 1$ entonces $\hat{\mu}$ es irreducible. En el caso que $(\hat{\mu}, \hat{\mu}) = 2$, notemos que si $\hat{\mu} = \bigoplus_{i=1}^r n_i\rho_i$ es la descomposición canónica de $\hat{\mu}$ entonces $(\hat{\mu}, \hat{\mu}) = \sum\limits_{i=1}^r {n_i}^2$, pero la única forma de escribir 2 como una suma de cuadrados es en la forma $2 = 1^2 + 1^2$, lo cual implica que $\hat{\mu}$ se descompone en la suma directa de dos representaciones no isomorfas. □

## 6. Dimensión de Representaciones Cuspidales

Ahora nos dedicaremos a encontrar todas las otras representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ que no aparecen en la descomposición de $\mathrm{Ind}_B^G\mu$.

DEFINICIÓN 10. Sea $\rho$ una representación irreducible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. Se dice que $\rho$ es una representación *cuspidal* si, y sólo si, $\rho$ no es una componente de $\mathrm{Ind}_B^G\mu$, con $\mu$ un carácter de $B$, es decir,

$$(\forall \mu = (\mu_1, \mu_2) \in \widehat{\mathbb{K}^\times} \times \widehat{\mathbb{K}^\times})((\mathrm{Ind}_B^G\mu, \rho) = 0)$$

OBSERVACIÓN 5. De acuerdo al Corolario 23, una representación irreducible $\rho$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ es cuspidal si, y sólo si, $J(V_\rho) = 0$.

El número de representaciones irreducibles no cuspidales de acuerdo al Teorema 31 es:

$$(q-1) + (q-1) + \frac{1}{2}(q-1)(q-2) = \frac{1}{2}(q-1)(q+2).$$

Además por el Teorema 4, sabemos que el número de representaciones irreducibles del grupo es igual a la cantidad de clases de conjugación, y de acuerdo a la Proposición 14, tenemos que nos falta construir el mismo número de clases $C_4(\alpha)$.

PROPOSICIÓN 16. *El número de representaciones cuspidales de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ *es*

$$\frac{1}{2}(q^2 - q).$$

En lo que sigue de esta sección demostraremos que toda representación cuspidal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tiene dimensión $q-1$.

LEMA 34. *Sea* $\rho$ *una representación cuspidal de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. *Entonces* $\mathrm{Res}_P^G\rho = n\pi$, *para algún* $n \in \mathbb{N}$. *En particular* $\dim(\rho) = n(q-1)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\rho$ una representación cuspidal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, entonces $\mathrm{Res}_P^G\rho$ es un $P-$espacio estable, por lo cual tenemos que

$$\mathrm{Res}_P^G\rho = \bigoplus n_i\rho_i,$$

donde $\rho_i$ son representaciones irreducibles de $P$, las cuales tienen dimensión 1 ó $q-1$.

Supongamos que $\mathrm{Res}_P^G\rho$ contiene una componente $\rho_i = \chi$ de dimensión 1, luego existe $v \in V_\rho - \{0\}$ tal que

$$\rho_g(v) = \chi_g(v), \quad \forall g \in P.$$

En particular obtenemos que $\rho_u(v) = v$ para todo $u \in U$, de donde se tiene que $v \in J(V_\rho)$, es decir, $J(V_\rho) \neq 0$ lo cual es imposible pues $\rho$ es cuspidal.

Así se tiene que

$$\mathrm{Res}_P^G\rho = n\pi,$$

luego

$$\dim\rho = n(q-1).$$

□

PROPOSICIÓN 17. *Sea* $\rho$ *una representación de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

1. *Si* $\rho$ *es cuspidal, entonces* $\mathrm{Res}_P\rho = \pi$ *y* $\dim\rho = q-1$.
2. *Si* $\mathrm{Res}_P\rho = \pi$, *entonces* $\rho$ *es cuspidal.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sabemos que $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})| = \sum(\dim\sigma)^2$, donde la sumatoria se hace sobre sobre todas las representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, además tenemos del Teorema 30 que:

$$(q-1)^2 q(q+1) = \frac{1}{2}(q-1)^3(q+3)q + \sum_{\sigma\in\mathcal{C}}(\dim\sigma)^2,$$

donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las representaciones cuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, pero por el Lema 34, existe para cada $\sigma \in \mathcal{C}$ un $n_\sigma \in \mathbb{N}$ tal que $\dim\sigma = n_\sigma(q-1)$, así obtenemos

$$\frac{1}{2}q(q-1) = \sum_{\sigma\in\mathcal{C}} n_\sigma^2.$$

Además, por la Proposición 16, tenemos que

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{C}} n_\sigma \geq \frac{1}{2}q(q-1)$$

de lo cual tenemos que $n_\sigma = 1$.

2. Como $\pi$ es irreducible, también lo es $\rho$. Luego si $\mu$ es un carácter de $B$, se tiene por el Teorema 30 que las componentes de $\hat{\mu}$ tienen dimensión igual a $1, q$ ó $q+1$. Sin embargo $\dim\rho = \dim\pi = q-1$, luego $\rho$ no es igual a ninguna de las anteriores, es decir, $\rho$ es cuspidal. $\square$

Otra posible demostración de la Proposición anterior es usando el Teorema de reciprocidad de Frobenius y las siguiente propiedad:

Proposición 18. $\mathrm{Ind}_U^G\psi$, *se descompone con multiplicidad uno o de otro modo sin multiplicidad.*

Observación 6. *Supongamos que* $\mathrm{Ind}_U^G\psi$ *no tiene multiplicidad y que* $\rho$ *es una representación cuspidal, luego*

$$(\mathrm{Res}_P^G\rho, \pi) = n_\rho \text{ y } \dim(\rho) = n_\rho(q-1),$$

*por el Teorema de reciprocidad de Frobenius obtenemos que:*

$$\begin{aligned} (\mathrm{Res}_P^G\rho, \pi) &= (\rho, \mathrm{Ind}_P^G\pi) \\ &= (\rho, \mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Ind}_U^P\psi)) \\ &= (\rho, \mathrm{Ind}_U^G\psi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

*Así tenemos que* $dim\rho = q-1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\hat{\pi} = \mathrm{Ind}_B^G \pi = \mathrm{Ind}_U^G \psi$. Luego por el Lema 10, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]} V_{\hat{\pi}}$ es isomorfo al álgebra $\mathcal{A}$ de todas las funciones $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$F(u_1 g u_2) = \psi(u_1, u_2) F(g) \text{ para todo } u_1, u_2 \in U \text{ y } g \in G,$$

y donde la multiplicación de funciones $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$ está dada por la fórmula

$$(F_1 * F_2)(g) = \frac{1}{[G : U]} \sum_{s \in G} F_1(gs^{-1}) F_2(s).$$

Demostraremos que $\mathcal{A}$ es abeliano, para ello primero definamos en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ la siguiente involución:

Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, definimos $g' = wg^t w = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$, donde $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Claramente obtenemos que dado $g, h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$

$$(gh)' = h'g' \text{ y } (g^{-1})' = (g')^{-1}.$$

En particular $u = u'$ para todo $u \in U$. Luego para $F \in \mathcal{A}$ definimos la función

$$\begin{array}{rccl} F' : & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & g & \longmapsto & F'(g) = F(g'), \end{array}$$

entonces claramente $F' \in \mathcal{A}$.

Sea $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, luego

$$\begin{aligned} (F_1 * F_2)(g') &= \frac{1}{[G : U]} \sum_{s \in G} F_1(g's^{-1}) F_2(s) \\ &= \frac{1}{[G : U]} \sum_{r \in G} F_1(r') F_2((r')^{-1} g'), \quad \text{con } r' = g's^{-1} \\ &= \frac{1}{[G : U]} \sum_{r \in G} F_1'(r) F_2((gr^{-1})') \\ &= \frac{1}{[G : U]} \sum_{r \in G} F_2'(gr^{-1}) F_1'(r) \\ &= (F_2' * F_1')(g). \end{aligned}$$

Así hemos demostrado que $(F_1 * F_2)' = F_2' * F_1'$.

Ahora bien, para demostrar que $F = F'$ basta demostrar que ambas funciones coinciden en los representantes de las dobles clases $U \diagdown G \diagup U$. De hecho, por la descompocición de Bruhat $G = B \dot{\cup} BwU$ y la igualdad $B = UD$, tenemos que dichos representantes son de la forma

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{o de la forma} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Es claro que $F$ y $F'$ coinciden en las matrices de la forma $(a)$ y en las de la forma $(b)$ en el caso $a = d$, basta entonces verificar que $F$ y $F'$ coinciden en el caso $a \neq d$, lo cual se tiene pues $F$ y $F'$ son nulas en esos elementos. De hecho, si aplicamos $F$ en ambos lados de la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}db \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos que

$$\psi(b)F\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\psi(a^{-1}db).$$

Si $F\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \neq 0$, entonces $\psi(b) = \psi(a^{-1}db)$, es decir, $\psi(b(1-a^{-1}d)) = 1$ para todo $b \in \mathbb{K}$. Se tiene entonces que $\psi$ es un carácter unidad en $\mathbb{K}^+$, lo cual es una contradicción. Luego $F\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0$ y en consecuencia $\mathcal{A}$ es abeliano pues

$$\begin{aligned} (F_1 * F_2)' &= F_2' * F_1' \\ F_1 * F_2 &= F_2 * F_1. \end{aligned}$$

□

## 7. Presentación de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$

Sean

$$w' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } s = w'z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

luego tenemos las siguientes relaciones entre $w'$ y los elementos de $B$ :

*i)* $w'\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}w'^{-1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$,

*ii)* $w'^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$,

*iii)* $s^3 = \mathrm{Id}$.

PROPOSICIÓN 19. *$GL_2(\mathbb{K})$ es el grupo libre generado por $B$ y $w'$ con las relaciones $i), ii)$ y $iii)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{G}$ el grupo libre generado por $B, w'$ y las relaciones $i), ii)$ y $iii)$. Claramente $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ satisface las relaciones mencionadas, luego por el Teorema de Van Dick's [3] existe un único epimorfismo $\theta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tal que $\theta|_B = \mathrm{Id}$ y $\theta(w') = w'$. Se quiere demostrar que $\ker(\theta) = \{\mathrm{Id}\}$ para eso notemos lo siguiente:

Para todo $\mathbf{b} \in B - D$ existen $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2} \in B$ tales que $w'\mathbf{b}w' = \mathbf{b_1}w'\mathbf{b_2}$. para ello sea $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in B - D$, de un cálculo directo se tiene que $\mathbf{b} = \mathbf{d}'z\mathbf{d}''$, donde

$$\mathbf{d}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & cb^{-1} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{d}'' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Además de $iii)$ se tiene que $w'zw'zw'z = \mathrm{Id}$, es decir,

$$w'zw' = z^{-1}(w')^{-1}z^{-1} = z^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} w'z^{-1} = z^{-1}(-\mathrm{Id})w'z^{-1}.$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} w'\mathbf{b}w' &= (w'\mathbf{d}'(w')^{-1})w'zw'((w')^{-1}\mathbf{d}''w') \\ &= [(w'\mathbf{d}'(w')^{-1})z^{-1}(-\mathrm{Id})]w'[z^{-1}((w')^{-1}\mathbf{d}''w')] \\ &= \mathbf{b_1}w'\mathbf{b_2}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $\mathbf{d} \in D$ entonces $w'\mathbf{d}w' = (w'\mathbf{d}(w')^{-1})(w')^2 \in B$ por $i)$ y $ii)$.

Supongamos que existe $1 \neq g \in \ker(\theta)$. Entonces $g \notin B$, luego $g$ se puede escribir (por ejemplo) como $g = w'\mathbf{b_1}w'\mathbf{b_2}\cdots w'\mathbf{b_r}$, donde $\mathbf{b_i} \in B$. Si $r \geq 2$ entonces $w'\mathbf{b_1}w' = \mathbf{b_2'} \in B$, si $\mathbf{b_1} \in D$ o $w'\mathbf{b_1}w' = \mathbf{b_1'}w'\mathbf{b_2'}$ con $\mathbf{b_1'}, \mathbf{b_2'} \in D$ si $\mathbf{b_1} \in B - D$. En cualquier caso podemos reescribir $g$ como $g = \mathbf{b_2''}w'\cdots w'\mathbf{b_r}$. Repitiendo el mismo procedimiento obtenemos que $g \in Bw'B$, es decir,

$$g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} w' \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Luego aplicando $\theta$ a (19) tenemos que

$$\theta(g) = \begin{pmatrix} * & * \\ -d'a & -d'b \end{pmatrix}$$

y como $g \in \ker(\theta)$, se tiene que $d'a = 0$, lo cual es una contradicción pues $\theta(g) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ y en consecuencia $\ker(\theta) = \{\mathrm{Id}\}$. □

## 8. Caracteres no Descomponibles de $\mathbb{L}^\times$

Recordemos que $\mathbb{L}$ denota la única extensión cuadrática del cuerpo $\mathbb{K}$, la cual tiene exactamente $q^2$ elementos. Si $\alpha \in \mathbb{L}$ entonces $\overline{\alpha}$ denota el único conjugado sobre $\mathbb{K}$. Luego la función $N : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$ se conoce como norma y es multiplicativa, esto es $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

Lema 35. *$N$ es epiyectiva.*

Demostración. El grupo de Galois de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{K}$ esta generado por los automorfismos de Frobenius $\alpha \longrightarrow \alpha^q$. Luego $\overline{\alpha} = \alpha^q$ y entonces $N(\alpha) = \alpha^{q+1}$. Ahora bien, como la restricción de $N$ a $\mathbb{L}^\times$ es un homomorfismo en $\mathbb{K}^\times$, se sigue que $E$ igual al $\ker(N)$ tiene cardinal $q+1$, con lo cual la imagen tiene $\dfrac{|\mathbb{L}^\times|}{|E|} = q-1 = |\mathbb{K}^\times|$, es decir, $N$ es epiyectiva. □

Corolario 36 (Hilbert's Satz 90). *Si $\beta$ es un elemento de $\mathbb{L}^\times$ tal que $N(\beta) = 1$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{L}$ tal que $\alpha\overline{\alpha}^{-1} = \beta$.*

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{array}{rcccl} h & : & \mathbb{L}^\times & \longrightarrow & E \\ & & \alpha & \longmapsto & \alpha\overline{\alpha}^{-1}, \end{array}$$

luego basta demostrar que $h$ es epiyectiva. Es claro que $h$ es un homomorfismo y que $\ker(h) = \mathbb{K}^\times$, así la imagen de $h$ tiene $(q^2-1)(q-1)^{-1}$ elementos y como $|E| = (q^2-1)(q-1)^{-1}$ obtenemos que $h$ es epiyectiva. □

Definición 11. Sea $\chi$ un carácter de $\mathbb{K}^\times$. Consideremos la compuesta

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\chi} : & \mathbb{L}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & \alpha & \longmapsto & \widetilde{\chi}(\alpha) = \chi(N(\alpha)). \end{array}$$

El carácter obtenido $\widetilde{\chi}$ es llamado *descomponible.*

Observación 7. Si $\nu$ es un carácter cualquiera de $\mathbb{L}^\times$, entonces $\overline{\nu}$ denota el carácter conjugado de $\nu$ sobre $\mathbb{L}$, es decir, $\overline{\nu}(\alpha) = \nu(\overline{\alpha})$, para todo $\alpha \in \mathbb{L}^\times$.

Lema 37. *Un carácter $\nu$ de $\mathbb{L}^\times$ es descomponible si, y sólo si, $\nu = \overline{\nu}$.*

Demostración. Supongamos que $\nu = \overline{\nu}$. Ahora bien dado $t \in \mathbb{K}^\times$, existe $\alpha \in \mathbb{L}^\times$ tal que $N(\alpha) = t$, definamos

$$\chi(t) = \nu(\alpha) = \chi(N(\alpha)),$$

para ver que esta función esta bien definida, sea $\beta \in \mathbb{L}$ tal que $N(\alpha) = N(\beta)$, entonces por el Corolario 36 existe $\gamma \in \mathbb{L}^\times$ tal que $\alpha\beta^{-1} = \gamma\overline{\gamma}^{-1}$ y así $\nu(\alpha) = \nu(\beta)$ y entonces $\chi$ está bien definida, de lo cual obtenemos que $\chi$ es un carácter de $\mathbb{K}^\times$ y $\nu$ es descomponible.

Recíprocamente, si existe $\chi$ carácter de $\mathbb{K}^\times$ tal que $\nu = \widetilde{\chi}$, entonces se tiene que $\overline{\nu}(\alpha) = \nu(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}^\times$. □

Lema 38. *Si $\nu$ es un carácter no descomponible de $\mathbb{L}^\times$, entonces $\sum_{N(x)=\alpha} \nu(x) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}^\times$.*

Demostración. De la demostración del Lema 37 existe $\lambda \in \mathbb{L}^\times$ tal que $N(\lambda) = 1$ y $\nu(\lambda) \neq 1$, luego

$$\sum_{N(x)=\alpha} \nu(x) = \sum_{N(\lambda x)=\alpha} \nu(\lambda x) = \nu(\lambda) \sum_{N(x)=\alpha} \nu(x),$$

de donde

$$(1 - \nu(\lambda)) \sum_{N(x)=\alpha} \nu(x) = 0$$

y como $\nu(\lambda) \neq 1$, concluimos la demostración. □

Lema 39. *$Tr$ es epiyectiva*

Demostración. La función $Tr : \mathbb{L}^+ \longrightarrow \mathbb{K}^+$ definida por $Tr(x) = x + \overline{x}$ es un homomorfismo de $\mathbb{K}-$espacio vectorial, cuyo kernel es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{L}$ tal que $x + x^q = 0$. Luego tenemos que $|\ker(Tr)| = q$ y como $|\mathbb{L}| = q^2$, se tiene que la función $Tr$ es epiyectiva. □

Corolario 40. *Si $\alpha \in \mathbb{L}^\times$, entonces para todo $\beta \in \mathbb{K}$ existe $x \in \mathbb{L}$ tal que $\alpha x + \overline{\alpha x} = \beta$.*

## 9. Representaciones Cuspidales de Caracteres no Descomponibles

En esta sección construiremos las representaciones cuspidales, para ello tenemos la Proposición 19, que nos entrega una presentación del grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, dada por el conjunto $B \cup \{w\}$, además por la Proposición 17, sabemos que la dimensión de la representación cuspidal es $q-1$.

Sea $\nu$ un carácter no descomponible y $V$ el espacio de las funciones de $\mathbb{K}^\times$ en $\mathbb{C}$. Por la Proposición 17 sabemos que la restricción de una representación cuspidal a $P$ es $\pi$, esto motiva a definir la representación $\rho = \rho_\nu$ en $P$ del siguiente modo:

$$\left(\rho_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} f\right)(x) \;=\; \psi(bx)f(ax). \tag{20}$$

Más aún queremos definir $\rho$ de modo tal que coincida con $\nu$ en $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}))$, es decir

$$\left(\rho_{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}} f\right)(x) \;=\; \nu(c)f(x). \tag{21}$$

Observemos que $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ac^{-1} & bc^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, lo cual nos lleva a definir $\rho$ en $B$ del siguiente modo:

$$\left(\rho_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}} f\right)(x) \;=\; \nu(c)\psi(bc^{-1}x)f(ac^{-1}x). \tag{22}$$

Así hemos construido una representación del grupo $B$, ahora nos dedicaremos a extender esta representación a todo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, para ello es necesario definirla en $w'$.

Para lo anterior debemos probar algunos lemas técnicos que permiten demostrar las relaciones $i), ii)$ y $iii)$ dadas en la Sección 7.

Para cálculos posteriores adoptaremos las siguiente notación:

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Lema 41. *La función $j : \mathbb{K}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por*

$$j(u) = -\frac{1}{q}\sum_{\substack{N(t)=u \\ t\in\mathbb{L}^\times}} \psi(t+\bar{t})\nu(t),$$

*satisface las siguientes igualdades:*

1.
$$\sum_{v\in\mathbb{K}^\times} j(uv)j(v)\nu(v^{-1}) = \begin{cases} \nu(-1) & si \quad u=1 \\ 0 & si \quad u\neq 1 \end{cases},$$

2.
$$\sum_{v\in\mathbb{K}^\times} j(xv)j(yv)\nu(v^{-1})\psi(v) = \nu(-1)\psi(-x-y)j(xy).$$

Demostración. Sea $u\in\mathbb{K}^\times$,

1.
$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in\mathbb{K}^\times} j(uv)j(v)\nu(v^{-1}) \\
=& \sum_{v\in\mathbb{K}^\times}\left[\frac{1}{q}\sum_{N(t)=uv}\psi(t+\overline{t})\nu(t)\right]\left[\frac{1}{q}\sum_{N(s)=v}\psi(s+\overline{s})\nu(s)\right]\nu(v^{-1}) \\
=& \frac{1}{q^2}\sum_{v\in\mathbb{K}^\times}\sum_{\substack{N(t)=uv\\ N(s)=v}}\psi(t+\overline{t}+s+\overline{s})\nu(tsv^{-1}) \\
=& \frac{1}{q^2}\sum_{s\in\mathbb{L}^\times}\sum_{N(t)=uN(s)}\psi(t+\overline{t}+s+\overline{s})\nu(t\overline{s}^{-1}),
\end{aligned}$$

reemplazando $\lambda=t\overline{s}^{-1}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in\mathbb{K}^\times} j(uv)j(v)\nu(v^{-1}) &= \frac{1}{q^2}\sum_{s\in\mathbb{L}^\times}\sum_{N(\lambda)=u}\psi(s(1+\overline{\lambda})+\overline{s}(1+\lambda))\nu(\lambda) \\
&= \frac{1}{q^2}\sum_{N(\lambda)=u}\nu(\lambda)\sum_{s\in\mathbb{L}^\times}\psi(s(1+\overline{\lambda})+\overline{s}(1+\lambda)). \qquad (23)
\end{aligned}$$

Para terminar la suma necesitamos calcular

$$\begin{aligned}
B(s,\lambda) &= \sum_{s\in\mathbb{L}^\times}\psi(s(1+\overline{\lambda})+\overline{s}(1+\lambda)) \\
&= \sum_{s\in\mathbb{L}^\times}\psi(Tr(s(1+\overline{\lambda})).
\end{aligned}$$

Si $\lambda=-1$ entonces

$$\sum_{s\in\mathbb{L}^\times}\psi(s(1+\overline{\lambda})+\overline{s}(1+\lambda)) = q^2-1.$$

Si $\lambda \neq 1$ entonces usando el cambio de variable $x = s(1+\overline{\lambda})$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{s\in\mathbb{L}^\times} \psi(Tr(s(1+\overline{\lambda})) &= \sum_{s\in\mathbb{L}^\times} \psi(Tr(x)) \\ &= -1,\end{aligned}$$

ya que la traza es epiyectiva, $\psi$ es un carácter aditivo no trivial.

Si $u \neq 1$, entonces

$$\frac{1}{q^2}\sum_{N(\lambda)=u} \nu(\lambda) \sum_{s\in\mathbb{L}^\times} \psi(s(1+\overline{\lambda})+\overline{s}(1+\lambda)) = -\frac{1}{q^2}\sum_{N(\lambda)=\mu} \nu(\lambda) = 0,$$

por el Lema 38.

Si $u = 1$, entonces

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q^2}\sum_{N(\lambda)=u} \nu(\lambda) \sum_{s\in\mathbb{L}^\times} \psi(s(1+\overline{\lambda})+\overline{s}(1+\lambda)) \\ = \;& \frac{1}{q^2}\left[\sum_{\substack{N(\lambda)=1\\ \lambda\neq -1}} \nu(\lambda)B(s,\lambda) + \nu(-1)B(s,-1)\right] \\ = \;& \frac{1}{q^2}\left[-\sum_{\substack{N(\lambda)=1\\ \lambda\neq -1}} \nu(\lambda) + \nu(-1)(q^2-1)\right] \\ = \;& \frac{1}{q^2}[\nu(-1)+\nu(-1)(q^2-1)] \\ = \;& \nu(-1).\end{aligned}$$

2. Sean $x, y \in \mathbb{K}^\times$, entonces:

$$\begin{aligned}&\sum_{v\in\mathbb{K}^\times} j(xv)j(yv)\nu(v^{-1})\psi(v) \\ = \;& \sum_{v\in\mathbb{K}^\times}\left[\frac{1}{q}\sum_{N(t)=xv}\psi(t+\overline{t})\nu(t)\right]\left[\frac{1}{q}\sum_{N(s)=yv}\psi(s+\overline{s})\nu(s)\right]\nu(v^{-1})\psi(v) \\ = \;& \frac{1}{q^2}\sum_{v\in\mathbb{K}^\times}\sum_{\substack{N(t)=xv\\ N(s)=yv}} \psi(t+\overline{t}+s+\overline{s}+v)\nu(tsv^{-1}). \qquad (24)\end{aligned}$$

Notemos que $N(s) = yv$ implica que $tsv^{-1} = yt\overline{s}^{-1}$, luego haciendo $\lambda = tsv^{-1}$ y la condición $N(t) = xv$, se obtiene que $N(\lambda) = xy$. Además, teniendo presente que $y \in \mathbb{K}^\times, t = \lambda s y^{-1}$, es fácil comprobar la igualdad:

$$t + \overline{t} + s + \overline{s} + v \quad = \quad y^{-1}(s + y + \lambda)\overline{(s + y + \lambda)} - y(1 + y^{-1}\lambda)\overline{(1 + y^{-1}\lambda)},$$

reemplazando en (24) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{q^2} \sum_{v \in \mathbb{K}^\times} \sum_{\substack{N(t)=xv \\ N(s)=yv}} \psi(t + \overline{t} + s + \overline{s} + v)\nu(tsv^{-1}) \\
= \; & \frac{1}{q^2} \sum_{v \in \mathbb{K}^\times} \sum_{\substack{N(s)=yv \\ N(\lambda)=xy}} \psi(y^{-1}(s + y + \lambda)(\overline{s + y + \lambda}) - y(1 + y^{-1}\lambda)(\overline{1 + y^{-1}\lambda}))\nu(\lambda) \\
= \; & \frac{1}{q^2} \sum_{s \in \mathbb{L}^\times} \sum_{N(\lambda)=xy} \psi(y^{-1}(s + y + \lambda)(\overline{s + y + \lambda}) - y(1 + y^{-1}\lambda)(\overline{1 + y^{-1}\lambda}))\nu(\lambda) \\
= \; & \frac{1}{q^2} \sum_{N(\lambda)=xy} \psi(-y(1 + y^{-1}\lambda)(\overline{1 + y^{-1}\lambda}))\nu(\lambda) \sum_{s \in \mathbb{L}^\times} \psi(y^{-1}(s + y + \lambda)(\overline{s + y + \lambda})).
\end{aligned}$$

Para simplificar el cálculo, desarrollemos primero la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in \mathbb{L}^\times} \psi(y^{-1}(s + y + \lambda)(\overline{s + y + \lambda})) \quad &= \quad \sum_{\substack{r \in \mathbb{L} \\ r \neq y + \lambda}} \psi(y^{-1}r\overline{r}) \\
&= \quad \sum_{r \in \mathbb{L}} \psi(y^{-1}r\overline{r}) - \psi(y^{-1}(y + \lambda)(\overline{y + \lambda})).
\end{aligned}$$

Ahora bien, del hecho que $|\ker(N)| = q + 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{s \in \mathbb{L}^\times} \psi(y^{-1}(s + y + \lambda)(\overline{s + y + \lambda})) \\
= \quad & (q + 1) \left[ \sum_{u \in \mathbb{K}^\times} \psi(y^{-1}u) \right] + 1 - \psi(y^{-1}(y + \lambda)(y + \overline{\lambda})) \\
= \quad & -(q + 1) + 1 - \psi(y^{-1}(y + \lambda)(y + \overline{\lambda})) \\
= \quad & -q - \psi(y^{-1}(y + \lambda)(y + \overline{\lambda})).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
y^{-1}(y + \lambda)(y + \overline{\lambda}) \quad &= \quad y^{-1}y(1 + y^{-1}\lambda)y(1 + \overline{y^{-1}\lambda}) \\
&= \quad y(1 + y^{-1}\lambda)(\overline{1 + y^{-1}\lambda}),
\end{aligned}$$

luego

$$\sum_{s\in\mathbb{L}^\times}\psi(y^{-1}(s+y+\lambda)(\overline{s+y+\lambda})) \;=\; -q-\psi(y(1+y^{-1}\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda})).$$

Reemplazando obtenemos que:

$$\frac{1}{q^2}\sum_{N(\lambda)=xy}\psi(-y(1+y^{-1}\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda}))\nu(\lambda)\sum_{s\in\mathbb{L}^\times}\psi(y^{-1}(s+y+\lambda)(\overline{s+y+\lambda}))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{q^2}\sum_{N(\lambda)=xy}\psi(-y(1+y^{-1}\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda}))\nu(\lambda)[-q-\psi(y(1+y^{-1}\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda}))]\\
&= -\frac{1}{q}\sum_{N(\lambda)=xy}\psi(-y(1+y^{-1}\lambda)(\overline{1+y^{-1}\lambda}))\nu(\lambda)-\frac{1}{q^2}\sum_{N(\lambda)=xy}\nu(\lambda)\\
&= -\frac{1}{q}\sum_{N(\lambda)=xy}\psi(-x-y-\lambda-\overline{\lambda})\nu(\lambda)\\
&= -\frac{1}{q}\psi(-x-y)\nu(-1)\sum_{N(\epsilon)=xy}\psi(\epsilon+\overline{\epsilon})\nu(\epsilon), \qquad (\text{con } \epsilon=-\lambda)\\
&= \nu(-1)\psi(-x-y)j(xy).
\end{aligned}$$

□

Concluida la demostración del Lema 41, definimos la representación $\rho$ en el elemento $w'$, con $f\in V$, por:

$$(\rho_{w'}f)(y) \;=\; \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(x^{-1})j(yx)f(x). \tag{25}$$

Ahora nuestra tarea consiste en demostrar que esta definición de $\rho_{w'}$ junto con (22) es compatible con las identidades $i)$ $ii)$ y $iii)$ de la Sección 7.

Para ello, reescribiendo la condición $i)$ de la Sección 7 del siguiente modo:

$$w'\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & c\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} c & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}w'. \tag{26}$$

De un cálculo directo se muestra que los dos automorfismos obtenidos por la acción de $\rho$ en ambos lados de la ecuación (26) operan de la misma manera en todo elemento $f\in V$, en efecto:

$$\begin{aligned}\left(\rho_{w'}\left(\rho_{M(a,0,c)}f\right)\right)(z) &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(x^{-1})j(zx)\left(\rho_{M(a,0,c)}f\right)(x)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(x^{-1})j(zx)\nu(c)f(ac^{-1}x)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(x^{-1}c)j(zx)f(ac^{-1}x), \end{aligned}\tag{27}$$

si hacemos $u = ac^{-1}x$ y reemplazamos en (27) tenemos que:

$$\begin{aligned}\left(\rho_{w'}\left(\rho_{M(a,0,c)}f\right)\right)(z) &= \sum_{u\in\mathbb{K}^\times}\nu(u^{-1}a)j(zca^{-1}u)f(u)\\ &= \nu(a)\sum_{u\in\mathbb{K}^\times}\nu(u^{-1})j(zca^{-1}u)f(u)\\ &= \nu(a)(\rho_{w'}f)(ca^{-1}z)\\ &= \left(\rho_{M(c,0,a)}(\rho_{w'}f)\right)(z).\end{aligned}$$

Para ver que $\rho$ preserva la identidad de $ii)$ de la Sección 7 dada por:

$$w'^2 = -\mathrm{Id}.$$

Para ello sea $f \in V$, luego

$$\begin{aligned}(\rho_{w'}(\rho_{w'}f))(z) &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(x^{-1})j(zx)(\rho_{w'}f)(x)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(x^{-1})j(zx)\sum_{y\in\mathbb{K}^\times}\nu(y^{-1})j(xy)f(y)\\ &= \sum_{y\in\mathbb{K}^\times}\nu(y^{-1})f(y)\sum_{x\in\mathbb{K}^\times}j(xy)j(zx)\nu(x^{-1}),\end{aligned}$$

sustituyendo $zx = v$ y $xy = uv$ tenemos que

$$\begin{aligned}(\rho_{w'}(\rho_{w'}f))(z) &= \sum_{u\in\mathbb{K}^\times}\nu(u^{-1})f(uz)\sum_{v\in\mathbb{K}^\times}j(uv)j(v)\nu(v^{-1})\\ &= \nu(-1)f(z)\\ &= (\rho_{(-\mathrm{Id})}f)(z)\end{aligned}$$

por definición de $\rho$ sobre el centro (22) y por Lema 41 parte 1.

Finalmente demostramos que $\rho$ preserva la relación *iii*) de la Sección 7

$$\left[w'\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^3 = \mathrm{Id}$$

reescribiendo la relación como

$$w'\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}w' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}w'\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Para demostrar esta igualdad, evaluaremos por separado y compararemos. En el lado izquierdo de la relación obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\rho_{w'}\left(\rho_{M(1,1,1)}(\rho_{w'}f)\right)\right)(z) &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times} \nu(x^{-1})j(zx)\left(\rho_{M(1,1,1)}(\rho_{w'}f)\right)(x) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times} \nu(x^{-1})j(zx)\nu(1)\psi(x)(\rho_{w'}f)(x) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times} \nu(x^{-1})j(zx)\nu(1)\psi(x)\sum_{y\in\mathbb{K}^\times} \nu(y^{-1})j(xy)f(y) \\
&= \sum_{y\in\mathbb{K}^\times} \nu(y^{-1})f(y)\sum_{x\in\mathbb{K}^\times} \nu(x^{-1})j(xy)j(zx)\psi(x).
\end{aligned}$$

Por la segunda parte del Lema 41 obtenemos

$$= \sum_{y\in\mathbb{K}^\times} \nu(y^{-1})f(y)\nu(-1)\psi(-y-z)j(yz). \tag{29}$$

Por otro lado desarrollando el lado derecho de la relación (28), resulta:

$$\begin{aligned}
\left(\rho_{M(-1,1,-1)}\left(\rho_{w'}\left(\rho_{M(1,-1,1)}f\right)\right)\right)(z) &= \nu(-1)\psi(-z)\left(\rho_{w'}\left(\rho_{M(1,-1,1)}f\right)\right)(z) \\
&= \nu(-1)\psi(-z)\sum_{y\in\mathbb{K}^\times} \nu(y^{-1})j(zy)\left(\rho_{M(1,-1,1)}f\right)(y) \\
&= \nu(-1)\psi(-z)\sum_{y\in\mathbb{K}^\times} \nu(y^{-1})j(yz)\nu(1)\psi(-y)f(y) \\
&= \sum_{y\in\mathbb{K}^\times} \nu(y^{-1})f(y)\nu(-1)\psi(-y-z)j(yz) \qquad (30)
\end{aligned}$$

Luego como (29) y (30) coinciden, tenemos que $\rho$ preserva la relación *iii*) de la Sección 7.

Así tenemos que a partir de un carácter no descomponible $\nu$ de $\mathbb{L}^\times$, existe una representación $\rho = \rho_\nu$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ que actúa en $B$ del siguiente modo:

$$\left(\rho_{M(a,b,c)}f\right)(x) = \nu(c)\psi(bc^{-1}x)f(ac^{-1}x)$$

y en $w'$ como

$$(\rho_{w'}f)(y) = \sum_{x\in\mathbb{K}^\times} \nu(x^{-1})j(yx)f(x).$$

Usando las relaciones anteriores describiremos ahora la acción de $\rho$ en un elemento

$$g \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{31}$$

de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, como $c \neq 0$ entonces podemos escribir $g$ del siguiente modo:

$$g = \begin{pmatrix} b - ac^{-1}d & -a \\ 0 & -c \end{pmatrix} w' \begin{pmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego aplicamos (22) y (25) para calcular la acción de $\rho_g$ en una función $f : \mathbb{K}^\times \to \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}
(\rho_g f)(y) &= \nu(-c)\psi(ac^{-1}y)\left[\rho_{w'M(1,c^{-1}d,1)}f\right]((ac^{-1}d-b)c^{-1}y) \\
&= \nu(-c)\psi(ac^{-1}y)\sum_{x\in\mathbb{K}^\times} \nu(x^{-1})j(ac^{-2}dxy - bc^{-1}xy)\left[\rho_{M(1,c^{-1}d,1)}f\right](x) \\
&= \nu(-c)\psi(ac^{-1}y)\sum_{x\in\mathbb{K}^\times} \nu(x^{-1})j(c^{-2}xy\det(g))\nu(1)\psi(c^{-1}dx)f(x) \\
&= \nu(-c)\psi(ac^{-1}y)\sum_{x\in\mathbb{K}^\times} \nu(x^{-1})\left(\frac{-1}{q}\right)\sum_{\substack{N(t)=c^{-2}xy\det(g)\\ t\in\mathbb{L}^\times}} \psi(t+\overline{t})\nu(t)\psi(c^{-1}dx)f(x)
\end{aligned}$$

Ahora si hacemos $z = -x^{-1}ct$, y reordenamos, obtenemos que:

$$(\rho_g f)(y) \;=\; \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\left[-\frac{1}{q}\psi\left(\frac{ay+dx}{c}\right)\sum_{\substack{N(z)=yx^{-1}\det(g)\\ z\in\mathbb{L}^\times}} \psi\left(-\frac{x}{c}(z+\overline{z})\right)\nu(z)\right] f(x)$$

Luego tenemos para un elemento $g$ como en (31) que:

$$(\rho_g f)(y) \;=\; \sum_{x\in\mathbb{K}^\times} k(x,y;g)f(x),$$

donde

$$k(x,y;g) \;=\; -\frac{1}{q}\psi\left(\frac{ay+dx}{c}\right)\sum_{\substack{N(z)=yx^{-1}\det(g)\\ z\in\mathbb{L}^\times}}\psi\left(-\frac{x}{c}(z+\overline{z})\right)\nu(z). \qquad (32)$$

## 10. Correspondencia entre $\nu$ y $\rho_\nu$

Proposición 20.

1. *Si $\nu$ es un carácter no descomponible de $\mathbb{L}^\times$, entonces la representación $\rho_\nu$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ definida en la Sección 9 es cuspidal.*
2. *Si $\nu$ y $\nu'$ son caracteres no descomponibles de $\mathbb{L}^\times$, entonces $\rho_\nu$ es isomorfa a $\rho_{\nu'}$, si y sólo si $\nu$ es conjugado con $\nu'$ sobre $\mathbb{L}$.*

Demostración.

1. Sea $\nu$ es un carácter no descomponible de $\mathbb{L}^\times$. Como $\rho_\nu$ está definido de modo tal que su restricción a $P$ es igual a $\pi$, tenemos por la Proposición 17 que $\rho_\nu$ es cuspidal.

2. Sean $\rho_\nu = \rho, \rho_{\nu'} = \rho', j_\nu = j$ y $j_{\nu'} = j'$. Si $\nu'$ es conjugado a $\nu$, entonces se sigue de la función $j : \mathbb{K}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ definida en el Lema 41 de la Seccción 9 que $j = j'$ y así $\rho = \rho'$.

Recíprocamente, supongamos que $\rho$ es isomorfo a $\rho'$. Entonces existe un automorfismo $\theta$ de $V$ (espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{K}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$) tal que:

$$\rho'_g \;=\; \theta\rho_g\theta^{-1}, \quad \forall g\in G. \qquad (33)$$

En particular (33) vale para todo $g \in P$. Sin embargo $\mathrm{Res}_P\rho = \pi = \mathrm{Res_P}\rho'$, y $\pi$ es irreducible. Por el Lema de Schur, $\theta$ es una multiplicación por escalar, en particular $\theta$ conmuta con todos los automorfismos de $V$. Luego (33) implica que $\rho_g = \rho'_g$ para todo $g \in G$.

Así tenemos que para todo $\delta, y \in \mathbb{K}^\times$ y todo $f \in V$

$$\nu'(\delta)f(\delta^{-1}y) = \left(\rho'_{M(1,0,\delta)}f\right)(y) = \left(\rho_{M(1,0,\delta)}f\right)(y) = \nu(\delta)f(\delta^{-1}y). \qquad (34)$$

De donde resulta:

$$\nu'(\delta) = \nu(\delta), \quad \forall\delta\in\mathbb{K}^\times. \qquad (35)$$

Más aún, se tiene que para todo $y \in \mathbb{K}^\times$ y todo $f \in V$, $\rho'(w') = \rho(w')$, de donde

$$\sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu'(x^{-1})j(yx)f(x) = \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(x^{-1})j'(yx)f(x)$$

Ahora bien si aplicamos (35) en la igualdad anterior, obtenemos que $j(u) = j'(u)$ para toda $u \in \mathbb{K}$, lo cual significa que:

$$\sum_{N(t)=u} \psi(t+\bar{t})\nu'(t) = \sum_{N(t)=u} \psi(t+\bar{t})\nu(t). \tag{36}$$

Si cambiamos $t$ por $\delta t$ en (36), con $\delta \in \mathbb{K}^\times$ y usamos (35), obtenemos que

$$\sum_{N(t)=v} \psi(\delta(t+\bar{t}))\nu'(t) = \sum_{N(t)=v} \psi(\delta(t+\bar{t}))\nu(t), \tag{37}$$

para todo $v, \delta \in \mathbb{K}^\times$. Esta última igualdad la podemos reescribir del siguiente modo

$$\sum_{N(t)=v} (\nu'(t) + \nu'(\bar{t}) - \nu(t) - \nu(\bar{t}))\psi(\delta(t+\bar{t})) \quad = \quad 0 \tag{38}$$

Dado $x \in \mathbb{K}$, entonces existe $t \in \mathbb{L}^\times$ tal que $Tr(t) = x$ y $N(t) = v$, este elemento $t$ es solución de la ecuación cuadrática

$$y^2 - xy + v = 0.$$

La otra solución es $\bar{t}$.

Así $f(x) = \nu'(t) + \nu'(\bar{t}) - \nu(t) - \nu(\bar{t})$, con $x = Tr(t)$ está entonces bien definida, y (38) se puede escribir como

$$\sum_{N(t)=v} f(x)\psi(\delta x) = 0, \quad \forall \delta \in \mathbb{K}^\times,$$

de lo cual

$$\sum_{x\in\mathbb{K}} f(x)\psi_x(\delta) = 0.$$

Como $\{\psi_x\}$, son todos los caracteres de $\mathbb{K}^+$ como se vio en la Sección 3 y por la Proposición 4 tenemos que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{K}$.

Esto significa que:

$$\nu'(t) + \nu'(\bar{t}) = \nu(t) + \nu(\bar{t}) \qquad t \in \mathbb{L}^\times,$$

además por (35),

$$\nu'(t)\nu'(\bar{t}) = \nu(t)\nu(\bar{t}) \qquad t \in \mathbb{L}^\times$$

Luego $\nu'(t), \nu'(\bar{t})$ y $\nu(t), \nu(\bar{t})$ son soluciones de la misma ecuación cuadrática sobre $\mathbb{K}$, así

$$\{\nu'(t), \nu'(\bar{t})\} \quad = \quad \{\nu(t), \nu(\bar{t})\}, \qquad t \in \mathbb{L}^\times \tag{39}$$

En particular esta última igualdad vale para un generador $t_0$ del grupo cíclico $\mathbb{L}^\times$. Supongamos que $\nu(t_0) = \nu'(t_0)$ (por ejemplo). Entonces $\nu(t) = \nu'(t)$ para todo $t \in \mathbb{L}^\times$. Si $\nu'(t_0) = \nu(\overline{t_0})$, entonces $\nu' = \overline{\nu}$ y así tenemos que $\nu'$ es conjugado con $\nu$ sobre $\mathbb{L}$. $\square$

La siguiente tabla resume todas las representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

Tabla: 1

| Elementos de $\mathbb{L}^\times$ | Clases de Conjugación | Caracteres de $\mathbb{L}^\times, \mathbb{K}^\times$ | Representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ | Dimensión | Cantidad |
|---|---|---|---|---|---|
| $a \in \mathbb{K}^\times$ | $C_1(a)$ | $\mu_1 \in \widehat{\mathbb{K}^\times}$ | $\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}$ | $1$ | $q-1$ |
| | $C_2(a)$ | | $\rho_{(\mu_1,\mu_1)}$ | $q$ | $q-1$ |
| $a, b \in \mathbb{K}^\times$, $a \neq b$ | $C_3(a,b)$ | $\mu_1, \mu_2 \in \widehat{\mathbb{K}^\times}$, $\mu_1 \neq \mu_2$ | $\rho_{(\mu_1,\mu_2)}$ | $q+1$ | $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ |
| $\lambda \in \mathbb{L}^\times - \mathbb{K}^\times$ | $C_4(\lambda)$ | $\nu \in \widehat{\mathbb{L}^\times} - \widehat{\mathbb{K}^\times}$ | $\rho_\nu$ | $q-1$ | $\frac{1}{2}(q^2-q)$ |

La cantidad de elementos de cada clase de conjugación, fue determinado en la Sección 2, en el Teorema 31 se determino la cantidad de representaciones irreducibles no cuspidales de cada tipo y finalmente en la última Sección las representaciones irreducibles cuspidales.

## 11. Caracteres de las Representaciones Irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$

A continuación se realiza el cálculo de caracteres para todas las representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. Como primer paso, se trabajará en las representaciones dadas en el Teorema 31 y, en segundo lugar, en las representaciones de la serie cuspidal.

**11.1. Caracteres que provienen de $B$.** Recordemos que un sistema de representantes para las clases laterales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ módulo $B$, está dado por:

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{K} \right\}.$$

Además las clases de conjugación de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ son:

$$C_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; C_2(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$C_3(a,b)=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \text{ y } C_4(\alpha)=\begin{pmatrix} 0 & -N(\alpha)\\ 1 & Tr(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Luego de acuerdo al Teorema 8, nos interesa determinar los elementos de $\mathcal{R}$ que verifican la relación

$$r^{-1}gr\in B. \tag{40}$$

De un cálculo directo obtenemos que los elementos en cada caso que verifican la relación (40) son:

1. Para $g\in C_1(a)$, todo $r\in\mathcal{R}$.
2. Para $g\in C_2(a)$, sólo la identidad.
3. Para $g\in C_3(a,b)$, sólo la identidad y $w$.
4. En el caso $g\in C_4(\alpha)$, ningún elemento de $\mathcal{R}$.

De acuerdo a lo anterior y denotando por $\hat{\mu}=\mathrm{Ind}_B^G(\mu_1,\mu_2)$, las representaciones de dimensión $q+1$ tenemos:

1.
$$\begin{aligned}\chi_{\hat{\mu}}^{q+1}(C_1(a)) &= \sum_{r\in\mathcal{R}}\mu\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\\ &= (q+1)\mu_1(a)\mu_2(b).\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\chi_{\hat{\mu}}^{q+1}(C_2(a)) &= \mu\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\\ &= \mu_1(a)\mu_2(b).\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\chi_{\hat{\mu}}^{q+1}(C_3(a,b)) &= \mu\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\\ &= \mu_1(b)\mu_2(a)+\mu_1(a)\mu_2(b)\end{aligned}$$

4.
$$\chi_{\hat{\mu}}^{q+1}(C_4(\alpha)) = 0.$$

Si $\mu_1\neq\mu_2$ entonces $\hat{\mu}$ es irreducible y hemos calculado su carácter.

Si $\mu_1=\mu_2$, entonces tenemos que:

$$\hat{\mu}=\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}\oplus\rho_{(\mu_1,\mu_1)},$$

donde $\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}(g)=\mu_1(\det(g))$, para todo $g\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

De este modo se obtiene que:

1. $\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}(C_1(a))=\mu_1(a)^2$.
2. $\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}(C_2(a))=\mu_1(a)^2$.
3. $\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}(C_3(a,b))=\mu_1(ab)$.
4. $\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}(C_4(\alpha))=\mu_1(\alpha\overline{\alpha})$.

Aplicando la Proposición 7 parte 2, tenemos que para todo $g\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$:

$$\chi_{\rho_{(\mu_1,\mu_1)}}(g)=\chi_{\hat{\mu}}(g)-\chi_{\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}}(g),$$

por lo tanto

1. $$\chi^q_{\rho_{(\mu_1,\mu_1)}}(C_1(a)) \quad = \quad q\mu_1(a)^2.$$
2. $$\chi^q_{\rho_{(\mu_1,\mu_1)}}(C_2(a)) \quad = \quad 0.$$
3. $$\chi^q_{\rho_{(\mu_1,\mu_1)}}(C_3(a,b)) \quad = \quad \mu_1(ab).$$
4. $$\chi^q_{\rho_{(\mu_1,\mu_1)}}(C_4(\alpha)) \quad = \quad -\mu_1(\alpha\overline{\alpha}).$$

Los resultados que hemos obtenido hasta el momento son:

| Carácter | $C_1(a)$ | $C_2(a)$ | $C_3(a,b)$ | $C_4(\alpha)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\chi^1_{\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}}$ | $\mu_1(a)^2$ | $\mu_1(a)^2$ | $\mu_1(ab)$ | $\mu_1(\alpha\overline{\alpha})$ |
| $\chi^q_{\rho_{(\mu_1,\mu_1)}}$ | $q\mu_1(a)^2$ | $0$ | $\mu_1(ab)$ | $-\mu_1(\alpha\overline{\alpha})$ |
| $\chi^{q+1}_{\hat{\mu}}$ | $(q+1)\mu_1(a)\mu_2(a)$ | $\mu_1(a)\mu_2(a)$ | $\mu_1(b)\mu_2(a)+\mu_1(a)\mu_2(b)$ | $0$ |

Tabla: 2

**11.2. Caracteres de la serie cuspidal.** Recordemos que las representaciones cuspidales $\rho=\rho_\nu$, donde $\nu\in\widehat{\mathbb{L}^\times}$ y $g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ estan definidas por:

Si $c=0$, entonces

$$(\rho_g f)(x) \quad = \quad \nu(d)\psi(bd^{-1}x)f(ad^{-1}x).$$

Si $c \neq 0$, entonces

$$(\rho_g f)(y) = \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\left[-\frac{1}{q}\psi\left(\frac{ay+dx}{c}\right)\sum_{\substack{N(z)=yx^{-1}\det(g)\\ z\in\mathbb{L}^\times}}\psi\left(-\frac{x}{c}(z+\overline{z})\right)\nu(z)\right]f(x),$$

donde $f$ pertenece al conjunto de funciones de $\mathbb{K}^\times$ en $\mathbb{C}$.

Observación 8. *Sea $x\in\mathbb{K}^\times$, luego el conjunto de funciones $\{\delta_x\}$ tales que*

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y = x \\ 0 & \text{si} \quad y \neq x, \end{cases}$$

*es una base para el conjunto de funciones de $\mathbb{K}^\times$ en $\mathbb{C}$.*

Con esta base se tiene que:

$$\chi_\rho(g) = Tr(\rho_g) = \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}(\rho_g\delta_x)(x). \tag{41}$$

Ahora bien, de acuerdo a (41) basta realizar el cálculo de caracteres del siguiente modo:

1.

$$\begin{aligned}\chi_\rho(C_1(a)) &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\left[\rho_{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}}\delta_x\right](x)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(a)\\ &= (q-1)\nu(a).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\chi_\rho(C_2(a)) &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\left[\rho_{\begin{pmatrix} a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}}\delta_x\right](x)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(a)\psi(a^{-1}x)\\ &= -\nu(a).\end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
\chi_\rho(C_3(a,b)) &= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\left[\rho_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}}\delta_x\right](x) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\nu(b)\delta_x(ab^{-1}x) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pues $a \neq b$.

4.

$$
\begin{aligned}
\chi_\rho(C_4(\alpha)) &= \sum_{y\in\mathbb{K}^\times}\left[\rho_{\begin{pmatrix} 0 & -N(\alpha) \\ 1 & \mathrm{Tr}(\alpha)\end{pmatrix}}\delta_y\right](y) \\
&= \sum_{y\in\mathbb{K}^\times}\sum_{x\in\mathbb{K}^\times}\left[-\frac{1}{q}\psi(x(\alpha+\overline{\alpha}))\sum_{\substack{N(z)=N(\alpha)\\ z\in\mathbb{L}^\times}}\psi(-x(z+\overline{z})\nu(z))\right]\delta_y(x) \\
&= -\frac{1}{q}\sum_{y\in\mathbb{K}^\times}\sum_{\substack{N(z)=N(\alpha)\\ z\in\mathbb{L}^\times}}\psi(y(\alpha+\overline{\alpha}-z-\overline{z}))\nu(z) \\
&= -\frac{1}{q}\sum_{\substack{N(z)=N(\alpha)\\ z\in\mathbb{L}^\times}}\left[\sum_{y\in\mathbb{K}^\times}\psi_{\alpha+\overline{\alpha}-z-\overline{z}}(y)\right]\nu(z) \\
&= -\frac{1}{q}\left[(q-1)\nu(\alpha)+(q-1)\nu(\overline{\alpha})-\sum_{\substack{N(z)=N(\alpha)\\ z\in\mathbb{L}^\times\\ z\neq\alpha,\overline{\alpha}}}\nu(z)\right] \\
&= -\nu(\alpha)-\nu(\overline{\alpha})+\frac{1}{q}\sum_{\substack{N(z)=N(\alpha)\\ z\in\mathbb{L}^\times}}\nu(z) \\
&= -\nu(\alpha)-\nu(\overline{\alpha}).
\end{aligned}
$$

Finalmente la tabla de caracteres del grupo es:

| Carácter | $C_1(a)$ | $C_2(a)$ | $C_3(a,b)$ | $C_4(\alpha)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\chi^1_{\rho'_{(\mu_1,\mu_1)}}$ | $\mu_1(a)^2$ | $\mu_1(a)^2$ | $\mu_1(ab)$ | $\mu_1(\alpha\overline{\alpha})$ |
| $\chi^q_{\rho_{(\mu_1,\mu_1)}}$ | $q\mu_1(a)^2$ | $0$ | $\mu_1(ab)$ | $-\mu_1(\alpha\overline{\alpha})$ |
| $\chi^{q+1}_{\hat{\mu}}$ | $(q+1)\mu_1(a)\mu_2(a)$ | $\mu_1(a)\mu_2(a)$ | $\mu_1(b)\mu_2(a)+\mu_1(a)\mu_2(b)$ | $0$ |
| $\chi^{q-1}_{\rho_\nu}$ | $(q-1)\nu(a)$ | $-\nu(a)$ | $0$ | $-\nu(\alpha)-\nu(\overline{\alpha})$ |

Con $\nu$ carácter no descomponible de $\mathbb{L}^\times$, $\mu_1, \mu_2$ caracteres de $\mathbb{K}^\times$ distintos.

# Bibliografía

[1] Llya Piatetski-Shapiro, *Complex Representation of GL(2,K) for finite fields K*, American Mathematical Society, 1983.

[2] Jean-Pierre Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer, Nueva York, 1977.

[3] Tomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, 1974.