Universidad de Valparaíso
CHILE

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

GRUPOS DE REFLEXIONES FINITOS.

Tesis presentada por **Roberto Medina Elgueta.**

Para optar al grado de Licenciado en Matemáticas.

Profesor Guía Dr. Daniel Jiménez Briones.

Valparaíso, Marzo de 2006.

Índice general

Introducción

Esta tesis tiene como objetivo principal, estudiar los Grupos de Reflexión Finitos y dar la clasificación de estos grupos, salvo isomorfismo. Este estudio lo llevaremos a cabo a través de la teoría de Grupos de Coxeter y los Grafos de Coxeter.

Primero que todo, un Grupo de Reflexión Finito es un grupo finito generado por reflexiones, donde una *reflexión* en un espacio vectorial V, es una transformación lineal que fija un hiperplano de V y envía un vector ortogonal al hiperplano en menos el, así podemos dar una definición preliminar, *un Grupo de Reflexiones, es un grupo finito W, generado por un conjunto de reflexiones en un espacio vectorial.* También podemos decir que W es un Grupo de Coxeter si y sólo si existe un subconjunto S del grupo W, tal que genera al grupo restringido a la relación $(ss')^{m(s,s')} = 1$, donde $m(s, s')$ es el orden del elemento ss', con $m(s, s) = 1$, además el par (W, S) se llama Sistema de Coxeter.

De acuerdo a lo anterior, este trabajo está dividido en tres capítulos, a continuación se dará una breve reseña de cada capítulo y su contenido.

El capítulo 1, se denomina *Grupos de Reflexión Finitos*; dentro del cual se establecen las definiciones y teoremas fundamentales para el desarrollo de toda la teoría de grupos de reflexión finitos.

La primera sección de este capítulo, explica con detalle qué es una reflexión y señala algunos ejemplos de tipos de grupos de reflexión finitos; posteriormente en la segunda sección, se incorporan las nociones de *raíces y sistemas de raíces*; en la tercera sección se define un orden total sobre un espacio vectorial V, el cual permite definir los *sistemas positivos, sistemas simples y raíces simples*; dentro de la cuarta sección, se habla de la conjugación de sistemas positivos y simples, enunciando un importante teorema el cual dice que, dados dos sistemas positivos en un sistema de raíces, éstos son conjugados bajo el grupo de reflexión finito W, asociado al sistema de raíces; es en la quinta sección, donde se muestra a través de un teorema, que el grupo de reflexión finito asociado a un sistema de raíces, está generado por las *reflexiones simples*; la sexta sección, desarrolla el concepto de función *largo*, el cual es fundamental para demostrar las condiciones de Cambio y de Cancelación de Matsumoto; se indica en la séptima sección, que la acción del grupo de reflexión finito W es fiel, además demuestra que existe sólo un elemento en W que tiene el mayor largo; en la octava sección se plantea que, un grupo de reflexión finito está generado por reflexiones simples sujeto sólo a las relaciones del tipo $(s_u s_v)^{m(u,v)} = 1$, además de entregar la definición de *Grupo de Coxeter*; la novena sección, define qué son los subgrupos parabólicos de W y los subconjuntos $\Phi_I \subset \Phi$, además de mostrar las condiciones que cumplen estos subgrupos; dentro de la décima sección, se desarrolla todo lo referido al polinomio de Poincaré, el cual nos explica cuántos elementos de igual largo hay en un grupo de reflexión y da un ejemplo de un grupo en particular; en la décimo primera sección se establece, un sistema de representantes para la acción de W en V; a continuación la décimo segunda sección señala con una proposición que, existe un isomorfismo entre los subconjuntos del conjunto de todas las reflexiones simples y los subgrupos parabólicos de la forma W_I; La décimo tercera sección consta de una proposición que, demuestra que toda reflexión en W es de la forma s_u con $u \in \Phi$; finalmente, en la última sección se construye una familia de subconjuntos del sistema de representantes llamada, *Complejo de Coxeter.*

El capítulo 2, se denomina *Clasificación de Sistemas de Coxeter y Grupos de Reflexión*, dentro del cual, se obtiene una clasificación de sistemas de Coxeter finitos y grupos de reflexión finitos y se determinan condiciones para que un grafo etiquetado sea un grafo de Coxeter, a través de condiciones para una forma bilineal. La clasificación finaliza cuando, queda probado que cada sistema de Coxeter se puede realizar a través de un grupo de reflexión finito.

La primera sección, introduce la notación de Grafo de Coxeter asociado a un grupo de reflexión finito, además de dar ejemplos de grafos de Coxeter para grupos específicos; la segunda sección estudia la matriz del producto interno asociado a un grupo de Coxeter y determina condiciones para que un grafo etiquetado sea un grafo de Coxeter, ya que la matriz debe ser positiva definida; en la tercera sección se establecen las condiciones que debe cumplir un grafo de Coxeter, entre las importantes se destaca que, un grafo de Coxeter es un árbol con a lo más un punto de ramificación; finalmente en la última sección se entrega un listado de los posibles grafos de Coxeter, según su tipo.

El capítulo 3, se denomina *Sistemas de Raíces Cristalográficos y Grupos de Weyl*, es aquí donde se entrega una clasificación de sistemas de raíces cristalográficos, para ello se establece una condición extra para un sistema de raíces, además de entregar las definiciones de Grupo de Weyl, Raíz del Reticulado, Co-raíz y Co-raíces del Reticulado y los Reticulados W-equivariantes, las cuales son necesarias para entregar dicha clasificación.

En la primera sección, se entrega la clasificación de Grupos de Weyl Irreducibles, salvo isomorfismo, lo que se hará es mejorar la clasificación de grupos de reflexión finitos, esenciales e irreducibles; dentro de la segunda sección, se construyen reticulados W-equivariantes asociados con un sistema de raíces cristalográfico Ψ; la tercera sección, muestra otro sistema de raíces cristalográfico, llamado sistema de co-raíces, el cual depende del sistema de raíces cristalográfico Ψ; en la cuarta sección se define el peso del reticulado y el peso simple con respecto a un sistema simple Δ, además se entrega una serie de ejemplos de sistemas de raíces con su sistema simple y pesos simples; en la quinta sección aparecen los reticulados W-equivariantes, además se demuestra que existe un sistema de raíces cristalográfico contenido en un reticulado W-equivariante; dentro de la sexta sección, se realiza una clasificación de los sistemas de raíces cristalográficos, usando principalmente la clasificación de grupos de Weyl, además se define un isomorfismo para sistemas de raíces, el que se puede extender a un isomorfismo de grupos de reflexión finito, paralelamente se define la matriz de Cartan, la cual es útil en la clasificación de sistemas de raíces cristalográficos, luego se analiza la relación entre las longitudes de los vectores y el ángulo entre ellos; en la séptima sección, se introduce el concepto de diagrama de Dynkin, el cual es una modificación del grafo de Coxeter; finalmente, en la última sección se entrega el diagrama de Dynkin de sistemas de raíces y se da un listado con los tipos de grupos usando dicho concepto.

Símbolos

V	:	Espacio vectorial.
B	:	Producto interno en V.
$O(V)$	:	Grupo Ortogonal.
s_u	:	Reflexión a lo largo de u.
W	:	Grupo de Reflexión Finito.
L_u	:	Espacio generado por u.
H_u	:	Hiperplano ortogonal a L_u.
Φ	:	Sistema de Raíces en V.
$\prec$	:	Relación de orden total.
Π	:	Sistema Positivo.
Δ	:	Sistema Simple.
S	:	Conjunto de todas las reflexiones simples en V.
$l(w)$	:	Largo de w.
$\Pi(w)$	:	$\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$.
$card(A)$	:	Cardinal del conjunto A.
$n(w)$	:	$card(\Pi(w))$.
$W(t)$	:	Polinomio de Poincaré.
$\ll$	:	Orden parcial en V.
D	:	Sistema de representantes para la acción de W en V.
(W,S)	:	Sistema de Coxeter.
X	:	Grafo de Coxeter.
$\mathcal{L}$	:	Reticulado W-equivariante.
Ω	:	Raíz del reticulado.
$\mathcal{P}$	:	Peso del reticulado.

CAPíTULO 1

Grupos de Reflexión Finitos.

Sea V un espacio vectorial euclidiano real, $B(u\,,v)$ la forma bilineal simétrica definida positiva. $O(V)$ el grupo ortogonal formado por todas las transformaciones lineales de V en V que preservan ésta forma bilineal.

$$O(V) = \{\tau \in End(V) \mid B(\tau u\,,\tau v) = B(u\,,v) \quad \forall\, u\,,v \in V\}.$$

1. Reflexiones

DEFINICIÓN 1. *Una reflexión s, es una transformación lineal en V, tal que, envía un vector no nulo u en $-u$ y fija a los elementos del hiperplano ortogonal al vector u, este hiperplano será denotado por H_u.*

La reflexión anterior la denotamos por s_u y está definida del siguiente modo.

$$s_u(v) = v - 2\frac{B(v\,,u)}{B(u\,,u)}u.$$

LEMA 1. *Para todo $u \in V \setminus \{0\}$ tenemos que $s_u \in O(V)$ y $(s_u)^2 = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $u\,,v \in V$, aplicando la fórmula de una reflexión, nos queda:

$$s_u(v) = v - cu \quad \text{donde} \quad c = 2\frac{B(v\,,u)}{B(u\,,u)}$$

luego:

$$\begin{aligned} s_u(s_u(v)) &= s_u(v - cu) \\ &= s_u(v) - s_u(cu) \\ &= v - cu - cs_u(u) \\ &= v - cu - c(-u) \\ &= v. \end{aligned} \tag{1}$$

Además

$$\begin{aligned} B(s_u(v), s_u(w)) &= B(v - cu, w - c'u) \\ &= B(v,w) - cB(v,u) - c'B(v,u) + cc'B(u,u) \\ &= B(v,w) - \tfrac{2B(v,u)B(u,w)}{B(u,u)} \\ &\quad - \tfrac{2B(w,u)B(v,u)}{B(u,u)} + \tfrac{4B(v,u)B(w,u)}{B(u,u)} \\ &= B(v,w). \end{aligned} \qquad \square$$

Los grupos que estudiaremos, serán precisamente los grupos finitos, generados por estas reflexiones, los que llamaremos **Grupos de Reflexión Finitos**.

Ahora veremos algunos ejemplos de grupos de reflexión finitos y daremos su tipo de grupo.

EJEMPLO 1. $(I_2(m)\,, m \geq 3)$. *Sea* $\mathbb{R}^2$ *el espacio euclidiano.*

Se define $\mathcal{D}_m$ *como el grupo Diedral de orden* $2m$*, que está formado por transformaciones ortogonales, que preservan un polígono de* m *lados centrado en el origen.*

Para otros ejemplos, miramos S_n como un subgrupo de $O(\mathbb{R}^n)$ del siguiente modo:

$$\begin{array}{lcll} S_n & \hookrightarrow & O(\mathbb{R}^n) & \\ \sigma & \mapsto & \sigma : \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n \\ & & \sum x_i e_i & \to \sum x_i e_{\sigma(i)}. \end{array}$$

De este modo, tenemos que la transposición (ij) envía $(e_i - e_j)$ en $-(e_i - e_j)$, es decir, $(ij)(e_i - e_j) = -(e_i - e_j) = e_j - e_i$. Además, $u = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ es un vector fijo por todas las permutaciones de S_n, de esta manera, S_n actúa en $V = < e_1 + e_2 + \ldots + e_n >^{\perp}$, es decir, V es S_n- estable.

DEFINICIÓN 2. *Sea* W *un grupo actuando en* V*, se dice que* W *es* **esencial** *en* V*, si el único vector en* V *que queda fijo por todos los elementos de* W*, es el vector nulo.*

EJEMPLO 2. $(A_{n-1}\,, n \geq 2)$. *Sea* $V = < e_1 + e_2 + \ldots + e_n >^{\perp}$ *. Ya que* S_n *es generado por las reflexiones del tipo* $(i \quad i+1)$*,* S_n *es un grupo de reflexiones y además,* V *no tiene vectores no nulos fijos por todos los elementos de* S_n*.*

De este modo, V *con ésta acción sirve como representante de los grupos de tipo* A_{n-1}*.*

EJEMPLO 3. $(B_n, n \geq 2)$. *Sea* $V = \mathbb{R}^n$*. Tenemos que* S_n *actúa sobre* V *como en el ejemplo anterior, otras reflexiones se pueden definir al mandar* e_i *en* $-e_i$ *y fijando los restantes* e_j*. Estas reflexiones generan un grupo de orden* 2^n *isomorfo a* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$*, el cual intersecta a* S_n *trivialmente y es normalizado por* S_n*. El producto semi directo de* S_n *y el grupo de reflexiones que cambian de signo, produce un grupo de reflexiones* $W = \mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$*, de orden* $2^n n!$*, además* W *es esencial en* V*.*

EJEMPLO 4. $(D_n, n \geq 4)$. *Podemos obtener otro grupo de reflexiones actuando en* $\mathbb{R}^n$*, el cual es un subgrupo de índice 2 en el grupo de tipo* B_n *recién descrito, es decir, si consideramos* *el homomorfismo*

$$T : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}$$

Definido por la suma de sus coordenadas.

Luego, $Ker(T) = \{x \in \mathbb{Z}_2^n \mid T(x) = 0\}$ *es un subgrupo normal de* S_n *en* $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$ *y está formado por las reflexiones que cambian un número par de signos que es también un grupo de reflexiones y es esencial. Con lo que tenemos el siguiente grupo:*

$$W = Ker(T) \rtimes S_n.$$

2. Raíces

Sea W un grupo de reflexiones finito actuando en el espacio euclidiano V. Para entender la estructura de W, debemos estudiar la forma en que W actúa en V. Cada reflexión s_u en W determina una recta $L_u =< u >$ (espacio generado por u) y un hiperplano H_u, ortogonal a L_u.

PROPOSICIÓN 2. *Si* $\tau \in O(V)$ *y* u *es cualquier vector en* V *distinto de cero entonces:*

$$\tau s_u \tau^{-1} = s_{\tau u}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
(\tau s_u \tau^{-1})(x) &= \tau s_u(\tau^{-1}(x)) \\
&= \tau\left(\tau^{-1}(x) - 2\frac{B(\tau^{-1}(x)\,,u)}{B(u\,,u)}u\right) \\
&= x - 2\frac{B(\tau^{-1}(x)\,,u)}{B(u\,,u)}\tau(u) \\
&= x - 2\frac{B(x\,,\tau(u))}{B(\tau(u)\,,\tau(u))}\tau(u) \\
&= s_{\tau(u)}(x).
\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 1. *Sea* $Y = \{L_u \leq V \mid s_u \in W\}$, *luego* W *actúa en* Y *por* $w(L_u) = L_{w(u)}$. *Entonces, por cada línea tomamos dos vectores* $\{u\,,-u\}$, *con los que formamos un conjunto* Φ.

DEFINICIÓN 3. *Sea* Φ *un conjunto finito de vectores no nulos en* V. *Se dice que* Φ *es un* **sistema de raíces** *si cumple con las siguientes condiciones:*

R1 : $\Phi \cap < u >= \{u, -u\} \quad \forall\, u \in \Phi.$
R2 : $s_u(\Phi) = \Phi \qquad \forall\, u \in \Phi.$

Se dice que W *es el* **grupo de reflexiones asociado** *a* Φ, *si y sólo si* W *está generado por todas las reflexiones* s_u *con* $u \in \Phi$. *Los elementos de* Φ *se llaman* **raíces**.

Observación 2. *Dado un sistema de raíces Φ y W el grupo de reflexiones asociado, se define Φ' como el conjunto de vectores unitarios proporcional a los vectores de Φ (vectores de Φ normalizados), Φ' es claramente un sistema de raíces, con W como el grupo de reflexiones asociado a Φ'.*

3. Sistemas Positivos y Simples

Dado un sistema de raíces Φ en el espacio euclidiano V y un grupo de reflexiones asociado W, lo que haremos ahora, es establecer un orden total en el espacio V, este orden total en V, se consigue al tomar una base ordenada arbitraria $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V y adoptando el orden lexicográfico que se define de la siguiente manera:

Sea $I_n = \{1, \ldots, n\}$

$$u \prec v \Leftrightarrow [(u = v) \vee (\exists\, k \in I_n)(a_k < b_k \wedge ((\forall\, i < k)(a_i = b_i)))].$$

Donde $u = \sum a_k v_k$ y $v = \sum b_k v_k$.

Sean $u, v, z \in V$, mostraremos que la relación entre estos vectores es una relación de orden total:

1. **Refleja.**

   Por definición, la relación es refleja.
2. **Antisimétrica.**

   Por demostrar que $(\forall u\, , v \in V)((u \prec v \wedge v \prec u) \Rightarrow u = v)$.

   Sean $u = \sum a_k v_k$ y $v = \sum b_k v_k$ distintos tales que

$$\begin{aligned} u \prec v \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\, k \in I_n)(a_k < b_k \wedge [(\forall\, i < k)(a_i = b_i)]) \\ v \prec u \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\, l \in I_n)\,(b_l < a_l \wedge [(\forall\, j < l)(b_j = a_j)]). \end{aligned}$$

   Sea $r = \min\{k, l\}$, luego si $r = k < l$, entonces $a_k < b_k$ y $b_l < a_l$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $k = l$, así, $u = v$.

   De esta manera, la relación es antisimétrica.
3. **Transitiva.**

   Por demostrar que $(\forall\, u\, , v\, , z \in V)([u \prec v \wedge v \prec z] \Rightarrow u \prec z)$.

   Sean $u = \sum a_k v_k,\ v = \sum b_k v_k,\ z = \sum c_k v_k$

$$\begin{aligned} u \prec v \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\, k \in I_n)(a_k < b_k \wedge [(\forall\, i < k)(a_i = b_i)]) \\ v \prec z \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\, l \in I_n)(b_l < c_l \wedge [(\forall\, j < l)(b_j = c_j)]). \end{aligned}$$

   Supongamos que $u \neq z$, entonces queremos demostrar que

$$(\exists\ t \in I_n)((a_t < c_t) \wedge (\forall h < t)(a_h < c_h)).$$

Nuevamente, si t es el mínimo entre $\{k, l\}$, tenemos que $a_t = c_t$, con lo que $u \prec z$, luego, la relación es transitiva.

Finalmente, para ser relación de orden total, se debe cumplir:

4. **Totalidad**.

$$(\forall\ u, v \in V)(u \prec v \quad \vee \quad v \prec u).$$

Además, se tiene que

5. **Respeta la suma**.

$$(\forall\ z \in V)(u \prec v \Rightarrow u + z \prec v + z).$$

6. **Respeta el producto**.

Sean $u \prec v$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \neq 0$, entonces:

$$(\forall\ c > 0)(cu \prec cv).$$

$$(\forall\ c < 0)(cv \prec cu).$$

Definición 4. *Sea Φ un sistema de raíces y Π un subconjunto de Φ. Entonces Π es un* **sistema positivo***, si y sólo si Π está formado por todas aquellas raíces que son positivas con respecto a algún orden total de V.*
Un subconjunto $-\Pi$ de Φ se llama **sistema negativo***, si y sólo si $-\Pi$ está formado por todas aquellas raíces que son negativas con respecto a algún orden total de V.*

Observación 3. *Como las raíces vienen en pares $\{u\,, -u\}$, una positiva y una negativa, según el orden lexicográfico, es claro que*

$$\Phi = \Pi \mathring{\cup} -\Pi.$$

Definición 5. *Sea Φ un sistema de raíces y sea Δ un subconjunto de Φ. Se dice que Δ es un* **sistema simple** *si y sólo si Δ cumple con:*

1. *Δ es linealmente independiente.*
2. *Todo elemento en Π se escribe en combinación lineal de elementos de Δ, con los escalares no negativos.*

Lema 3. *Sea Δ un sistema simple, entonces*

$$B(u\,, v) \leq 0 \quad \forall\ u\,, v \in \Delta \quad con \quad u \neq v. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un par $u\,,v \in \Delta\,,u \neq v$, tal que $B(u\,,v) > 0$, entonces la fórmula de una reflexión queda

$$s_u(v) = v - cu \quad \text{donde} \quad c = \frac{2B(v\,,u)}{B(u\,\,,u)} > 0.$$

Ya que $u \in \Pi \cup -\Pi$:

1. $s_u(v) \in \Pi$

$$\begin{aligned} s_u(v) &= \sum_{z\in\Delta} c_z z\,, \quad c_z \geq 0 \\ s_u(v) &= c_v v + \sum_{z\neq v} c_z z = v - cu \end{aligned}$$ son linealmente independientes, por lo tanto

$$(-1 + c_v)v + (c_u + c)u + \sum c_z z = 0$$

$$\Rightarrow c_u + c = 0.$$

Lo que es una contradicción, ya que $c_u \geq 0$ y $c > 0$.

2.

$$\begin{aligned} s_u(v) &\in -\Pi \\ s_u(v) &= \sum_{z\in\Delta} c_z z\,, \quad c_z \leq 0 \\ s_u(v) &= c_v v + \sum_{z\neq v} c_z z = v - cu \end{aligned}$$

son linealmente independientes, por lo tanto:

$$(-1 + c_v)v + (c_u + c)u + \sum c_z z = 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (-1 + c_v) &= 0. \\ \Rightarrow \quad c_v &= 1. \end{aligned}$$

Lo que es una contradicción, ya que $c_v \leq 0$.

Por lo tanto

$$\forall\, u\,,v \in \Delta,\ B(u\,,v) \leq 0.$$

$\square$

TEOREMA 4.

1. *Si Δ es un sistema simple en Φ, entonces hay un único sistema positivo Π en Φ, que contiene a Δ.*

2. *Todo sistema positivo* Π *en* Φ *contiene un único sistema simple. En particular, los sistemas simples existen.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Supongamos que Δ está contenido en un sistema positivo Π, entonces todas las raíces que son una combinación lineal no negativa de Δ deben estar también en Π (y su negativo no está en Π), así Π es caracterizado como el conjunto de todas aquellas raíces.
   Para tener seguridad de que este sistema positivo existe, se debe extender el conjunto linealmente independiente Δ, a una base ordenada de V y tomar Π como el conjunto de elementos positivos de Φ en el orden lexicográfico correspondiente. Evidentemente $\Delta \subset \Pi$.
2. Sea Π un sistema positivo, que viene de algún orden total de V y supongamos que contiene un sistema simple Δ, entonces, en una primera parte caracterizamos a Δ como el conjunto de todas las raíces $u \in \Pi$, tal que, no se pueden expresar como una combinación lineal con coeficientes estrictamente positivos de dos o más elementos de Π, así, Δ es el único sistema simple en Π.

Veremos que esta caracterización de Δ es válida:

(a) Supongamos que Δ existe y $u \in \Pi$ no se puede expresar en combinación lineal de dos ó más elementos de Π, entonces, como $u \in \Pi$ luego:

$$u = \sum_{\delta_i \in \Delta} c_i \delta_i \quad c_i \geq 0$$

Pero no puede ser expresado en combinación de dos ó más elementos de Π

$$\begin{aligned} \text{luego} \quad u &= c_i \delta_i \\ \Rightarrow \quad & c_i = 1 \\ \text{con lo cual} \quad & u \in \Delta. \end{aligned}$$

(b) Si $u \in \Delta$, entonces no se puede expresar en combinación lineal de dos ó más elementos de Π.

$$
\begin{aligned}
u \in \Delta \quad &\Rightarrow \quad u = \sum_{v_i \in \Pi} t_i v_i \quad \forall\ t_i > 0 \quad v_i \in \Pi \\
&\Rightarrow \quad v_i = \sum_{\delta_j \in \Delta} c_{ij} \delta_j \quad c_{ij} \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad u = \sum_i t_i (\sum_{\delta_j \in \Delta} c_{ij} \delta_j) = \sum_{\delta_j \in \Delta} (\sum_i t_i c_{ij}) \delta_j
\end{aligned}
$$

Luego, existe j_0 tal que

$$\sum t_i c_{ij_0} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j \neq j_0} t_i c_{ij} = 0.$$

Así, tenemos que $c_{ij} = 0 \quad \forall j \neq j_0 \quad v_i = c_{ij_0} \delta_{j_0}$. Por lo tanto u no se puede expresar en combinación lineal de dos ó más elementos de Π.

Para encontrar un sistema simple en Π, debemos escoger $\Delta \subset \Pi$ como el subconjunto más pequeño tal que $\Pi = \{u \in \Pi \mid u = \sum_{v \in \Delta} c_v v \text{ con } c_v \geq 0\}$.

Sea $\mathcal{C} = \{A \subset \Pi \mid x \in \Pi\,, x = \sum_{a_i \in A} c_i a_i \quad c_i \geq 0\}$. Sabemos que $\mathcal{C}$ es no vacío, ya que, por lo menos $\Pi \in \mathcal{C}$.

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una cadena tal que $A_{i+1} \subset A_i$ acotada inferiormente por $\bigcap_{i \in I} A_i = A_{i_0}$ ya que Π es finito. Luego por Lema Zorn, existe elemento minimal $\Delta \in \mathcal{C}$.

Nos falta mostrar que este conjunto Δ es linealmente independiente.

Supongamos que Δ es linealmente dependiente.

$$\sum_{u \in \Delta} a_u u = 0 \quad \text{no todos los} \quad a_u = 0$$

reescribiendo:

$$0 = \sum_{u \in \Delta} a_u u = \sum_{v \in A} b_v v - \sum_{z \in E} c_z z.$$

Luego,

$$\sum_{v \in A} b_v v = \sum_{z \in E} c_z z.$$

Donde la suma está tomada sobre subconjuntos disjuntos de Δ y los coeficientes b_v y c_z son estrictamente positivos.

$$\sigma = \sum_{v \in \Delta} b_v v = \sum_{z \in \Delta} c_z z.$$

Por el lema (2) se tiene que $B(z, v) \leq 0$ con $z, v \in \Delta$ distintos.

$$0 \leq B(\sigma\,, \sigma) = B\left(\sum_{v\in\Delta} b_v v\,, \sum_{z\in\Delta} c_z z\right) = \sum_{v,z\in\Delta} b_v c_z B(v\,, z) \leq 0.$$

Lo que fuerza a que $\sigma = 0$, contradiciendo el hecho de que los coeficientes b_v, c_z son estrictamente positivos. Así, Δ debe ser linealmente independiente. $\square$

DEFINICIÓN 6. *La dimensión del generado por Φ en V se llama el* **rango** *de W.*

4. Conjugación de Sistemas Simples y Positivos

Hasta el momento, tenemos que un sistema simple y un sistema positivo, se determinan el uno al otro. Aquí, examinaremos la relación entre distintos sistemas simples.

LEMA 5. *Si Π es un sistema positivo, entonces $w\Pi$ es un sistema positivo para todo $w \in W$, con un sistema simple $w\Delta$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \Pi$, entonces:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{x\in\Delta} d_x x \quad d_x > 0 \\ \Rightarrow w(u) &= w(\sum_{x\in\Delta} d_x x) \\ w(u) &= \sum_{x\in\Delta} d_x w(d) \quad w(d) > 0 \quad con\, d \neq u. \end{aligned}$$

Por lo tanto $w\Pi = \{w(u) \mid u \in \Pi\}$ es un sistema positivo, con $w\Delta$ como sistema simple. $\square$

PROPOSICIÓN 6. *Sea Δ un sistema simple contenido en un sistema positivo Π.*
Si $u \in \Delta$, entonces

$$s_u(\Pi - \{u\}) = \Pi - \{u\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \Delta\,, v \in \Pi$ tal que $v \neq u$, entonces:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{x\in\Delta} c_x x \quad c_x \geq 0 \\ s_u(v) &= \sum_{x\in\Delta} c_x s_u(x) \;\in\; \Phi \end{aligned}$$

pero $0 \prec s_u(x)$, ya que existe $x \in \Delta, x \neq u$ tal que $c_x > 0$

$$s_u(x) = x - 2\frac{B(x\,, u)}{B(u\,, u)}u.$$

Por el lema 2, es una combinación lineal no negativa de elementos en Δ, así tenemos que $0 \prec s_u(x)$.

Nos falta ver que $s_u(v) \neq u$. Supongamos que son iguales, entonces:

$$\begin{aligned} s_u(v) &= u \\ v &= s_u(u) \\ v &= -u, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción con $v \in \Pi$. Por lo tanto:

$$s_u(\Pi - \{u\}) = \Pi - \{u\}.$$

□

Además de ser un paso clave en la demostración del siguiente teorema, este resultado es útil para reconocer cuando una raíz es una raíz simple.

Teorema 7. *Cualquier par de sistemas positivos (respectivamente, simples) en Φ son conjugados bajo W.*

Demostración. Sean Π, Π' dos sistemas positivos, Δ y Δ' los respectivos sistemas simples, así cada sistema positivo posee la mitad de las raíces, según el orden que determina cada sistema.

Al aplicar inducción en $r = card(\Pi \cap -\Pi')$, obtenemos:

1. Si $r = 0$, entonces $\Pi = \Pi'$.
2. Si $r > 0$, entonces el sistema Δ no puede estar completamente contenido en Π'. Sea $u \in \Delta$ tal que $u \in (\Pi \cap -\Pi')$, luego $s_u(\Pi) = (\Pi \cup \{-u\}) - \{u\}$ por lo tanto $card(s_u(\Pi) \cap -\Pi') = r - 1$. Al aplicar inducción en los sistemas positivos $s_u(\Pi)$ y Π', obtendremos un elemento $w \in W$, para el cual: $w(s_u(\Pi)) = \Pi'$.

□

5. Generados por Reflexiones Simples

Definición 7. *Sean $v \in \Phi$, $v = \sum_{u \in \Delta} c_u u$ y la función:*

$$\begin{aligned} h : \Phi &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow \sum_{u \in \Delta} c_u \end{aligned}$$

La función h es la altura de v relativa a Δ.

En particular: Si $v \in \Delta$, entonces $h(v) = 1$.

TEOREMA 8. *Sea Δ un sistema simple fijo, entonces W es generado por las reflexiones s_u con $u \in \Delta$.*

$$W =< \{s_u \mid u \in \Delta\} > .$$

DEMOSTRACIÓN. Sea W' el subgrupo de W generado por las reflexiones s_u con $u \in \Delta$, es decir,

$$W' =< \{s_u \mid u \in \Delta\} >$$

queremos demostrar

$$W = W'.$$

Lo que haremos en los tres siguientes casos:

1. En primer lugar demostraremos que

$$(\forall\ v \in \Pi)(\exists\ u \in (W'v \cap \Pi))(u \in \Delta).$$

Si $v \in \Pi$, entonces el conjunto $(W'v \cap \Pi)$ es no vacío, ya que por lo menos $v \in (W'v \cap \Pi)$. Este conjunto está formado por raíces positivas, sea $z \in (W'v \cap \Pi)$ tal que z tiene la menor altura posible. Como $z \in \Pi$, entonces $z = \sum_{x \in \Delta} c_x x$. Además, note que:

$$0 < B(z\,, z) = \sum_{x \in \Delta} c_x B(z\,, x),$$

existe $u \in \Delta$ tal que $c_u > 0$ y $B(z\,, u) > 0$. Si $z \neq u$, consideremos la raíz $s_u(z)$, la cual, de acuerdo a la proposición 6, es positiva . Tenemos que $h(s_u z) < h(z)$, pero $s_u(z) \in W'v$ ya que $s_u \in W$, lo que contradice la elección de z. Por lo tanto $z \in \Delta$.

2. Ahora demostraremos que $\Phi = W'(\Delta)$.

Por definición sabemos que $\Delta \subset \Phi$, entonces $s_u(\Delta) \subset s_u(\Phi) = \Phi \quad \forall\ u \in \Delta$. Luego: $W'(\Delta) \subset \Phi$.

En la otra dirección $(\Phi \subset W'(\Delta))$.

(a) Sea $v \in \Pi$, por parte 1, existe $u \in (W'(v) \cap \Pi)$ tal que $u \in \Delta$, luego:

$$\begin{aligned} u &= w_1(v) \\ w_1^{-1}(u) &= v \in W'(u) \subset W'(\Delta) \\ \Pi &\subset W'v \\ \Pi &\subset W'\Delta. \end{aligned}$$

(b) Si v es negativo, $-v \in \Pi$, entonces podemos repetir el paso anterior para decir que $\Phi \subset W'(\Delta)$.

Por lo tanto:

$$W'(\Delta) = \Phi.$$

3. Finalmente, podemos tomar cualquier generador s_v de W y usar la parte 2 para escribir $v = w(u)$ con $w \in W'$ y $u \in \Delta$. Por la proposición 1 tenemos que:

$$s_v = ws_uw^{-1} \in W' \quad \text{luego} \quad W = W',$$

por lo tanto

$$W =< \{s_u \mid u \in \Delta\} > .$$

$\square$

Corolario 9. *Sea Δ un sistema simple en Φ, entonces, para todo $v \in \Phi$, existe $w \in W$ tal que $w(v) \in \Delta$.*

Como ya sabemos que W puede ser generado por reflexiones simples, podemos buscar una presentación eficiente de W como grupo abstracto, al usar estos generadores junto con relaciones convenientes, entre los s_u, dadas por:

$$(s_us_v)^{m(u\,,v)} = 1,$$

donde $m(u\,,v)$ es el orden de s_us_v.

6. Función Largo

Lo que haremos ahora, es estudiar de qué forma se puede escribir $w \in W$, como producto de reflexiones simples, es decir, $w = s_1s_2\cdots s_r$, donde $s_i = s_{u_i}$ para algún $u_i \in \Delta$.

Definición 8. *Sea l la función Largo de w dada por:*

$$\begin{array}{rccc} l: & W & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & w & \mapsto & l(w) = r \end{array}$$

donde r es la menor cantidad de reflexiones simples, para la cual, $w = s_1s_2\cdots s_r$.
Esta expresión se llama **reducida**.
Acordamos que $l(1) = 0$.

Lema 10. *Sea $w \in W$, entonces:*

1. *$l(w) = 1$ si y sólo si $w = s_u$ con $u \in \Delta$.*
2. *$l(w) = l(w^{-1})$.*
3. *$det(w) = (-1)^{l(w)}$.*

Demostración. Sea $w \in W$.

1. Por la definición de la función largo, es claro que si $u \in \Delta$ entonces $l(s_u) = l(w) = 1$.
   Ahora, si $l(w) = 1$, entonces $w = s_u$ para algún $u \in \Delta$.

2. Si $w = s_1 \cdots s_r$, entonces $w^{-1} = s_r s_{r-1} \cdots s_1$. Luego

$$l(w) \geq l(w^{-1})$$

y así obtenemos que

$$l(w) \geq l(w^{-1}) \geq l((w^{-1})^{-1}) = l(w)$$

con lo cual w y w^{-1} tienen el mismo largo.

3. Se tiene al recordar que cada reflexión tiene determinante -1 como operador lineal, luego:

$$\begin{aligned} \det(w) &= \det(s_1 \cdots s_r) \\ &= \det(s_1) \cdots \det(s_r) \\ &= (-1)^r = (-1)^{l(w)}. \end{aligned}$$

□

Definición 9. *Sea Δ un sistema simple en Φ y Π el sistema positivo asociado, el número de raíces positivas $u \in \Pi$ enviadas en su negativo $-u$ por la reflexión $w \in W$ es:*

$$n(w) = card(\Pi(w)),$$

donde

$$\Pi(w) = (\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)).$$

Lema 11. *Sea $u \in \Delta$, entonces $\Pi(s_u) = \{u\}$ y $n(s_u) = 1$.*

Demostración. Por proposición 6, tenemos que:
Si $u \in \Delta$, entonces s_u permuta a $(\Pi - \{u\})$.
Luego:

$$\Pi(s_u) = (\Pi \cap s_u^{-1}(-\Pi)) = s_u(s_u(\Pi) \cap (-\Pi)) = s_u\{-u\} = \{u\}.$$

□

Lema 12.
Sean $w \in W$ y $u \in \Delta$, entonces:

1. $u \in \Pi(w) \Leftrightarrow w(u) \prec 0$.
2. $u \in \Pi(ws_u) \Leftrightarrow w(u) \succ 0$.

Demostración. Para la primera equivalencia tenemos:

$$\begin{array}{cc} u \in \Pi(w) & \\ \exists\ v \in -\Pi & \text{tal que:} \\ w^{-1}(v) = u & \\ v = w(u) & \\ w(u) \prec 0. & \end{array}$$

En el otro sentido:

$$\begin{array}{cc} w(u) \prec 0 & \\ \exists\ v \in -\Pi & \text{tal que:} \\ v = w(u) & \\ w^{-1}(v) = u & \\ u \in \Pi(w). & \end{array}$$

Para la segunda propiedad, tenemos las equivalencias

$$\begin{array}{ccc} & u \in \Pi(ws_u) & \\ \Leftrightarrow & \exists\ v \in -\Pi & \text{tal que:} \\ & (ws_u)^{-1}(v) = u & \\ \Leftrightarrow & w^{-1}(v) = s_u(u) & \\ \Leftrightarrow & -v = w(u) & \\ \Leftrightarrow & w(u) \in \Pi. & \end{array}$$

□

Lema 13. *Sea $w \in W$ entonces $n(w) = n(w^{-1})$.*

Demostración. Debemos demostrar que los conjuntos $(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi))$ y $(\Pi \cap w(-\Pi))$ tienen la misma cardinalidad.

Es fácil obtener

$$(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)) = w^{-1}(w\Pi \cap -\Pi) = -w^{-1}(w(-\Pi) \cap \Pi)$$

y como $-w^{-1}$ es biyectiva tenemos la igualdad de sus cardinales y por lo tanto el lema se cumple. □

Lema 14. *Sean $u \in \Delta$ y $w \in W$, entonces*
a) Si $0 \prec w(u)$ entonces $n(ws_u) = n(w) + 1$,
b) Si $w(u) \prec 0$ entonces $n(ws_u) = n(w) - 1$,

Demostración. Como

$$\Pi(ws_u) = s_u(\Pi(w)) \mathring{\cup} \{u\}.$$

Entonces, sea $v \in \Pi(ws_u)$, luego

$$v = (ws_u)^{-1}(-z) = s_u w^{-1}(-z) \text{ con } v, z \in \Pi.$$

Si aplicamos s_u a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$s_u(v) = w^{-1}(-z).$$

Luego:

Caso 1.

Si $u \neq v$, entonces:

$$s_u(v) \in \Pi \wedge w^{-1}(-z) \in w^{-1}(-\Pi).$$

Luego:

$$(s_u(v) \in (\Pi \cap w^{-1}(-\Pi))) \Rightarrow (v \in s_u(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi))).$$

Caso 2.

Si $u = v$ está listo.

Para la otra contención tenemos:

Caso 3.

Por demostrar que $u \in \Pi(ws_u)$.

Sabemos que $u \in \Delta \subset \Pi$, además $w(u) \in \Pi$ implica que $w(-u) \in -\Pi$, luego

$$(ws_u)^{-1}(w(-u)) = (s_u w^{-1})(w(-u)) = s_u(-u) = u.$$

Por lo tanto

$$u \in (\Pi \cap (ws_u)^{-1}(-\Pi)) = \Pi(ws_u).$$

Caso 4.

Sea $v \in s_u(\Pi(w))$, entonces $v = s_u(z)$ y $z = w^{-1}(-x)$ con $z, x \in \Pi$.

Supongamos que $u = z$, entonces $w(u) = -x \prec 0$ lo que contradice el hecho que $0 \prec w(u)$. Por lo tanto $z \neq u$, así, $v \in \Pi$.

Entonces

$$v = s_u(z) = s_u(w^{-1}(-x)) = (ws_u)^{-1}(-x).$$

Luego:

$$v \in (\Pi \cap (ws_u)^{-1}(-\Pi)) = \Pi(ws_u).$$

□

Corolario 15. *Sean $u \in \Delta$ y $w \in W$,*

(a) *Si $0 \prec w^{-1}(u)$ entonces $n(s_u w) = n(w) + 1$.*

(b) *Si $w^{-1}(u) \prec 0$ entonces $n(s_u w) = n(w) - 1$.*

Demostración. La demostración de la parte (a) la obtenemos aplicando el lema 14 al elemento $w^{-1}(u)$, así obtenemos:

$$n(w^{-1}s_u) = n(w^{-1}) + 1,$$

por el lema 13, tenemos que

$$n(w^{-1}s_u) = n((w^{-1}s_u)^{-1}) = n(s_u w).$$

Entonces:

$$n(w^{-1}s_u) = n(s_u w) = n(w) + 1.$$

Para el caso (b), aplicamos nuevamente el lema 14 al elemento $w^{-1}(u)$.
Entonces:

$$n(w^{-1}s_u) = n(w) - 1.$$

Usando el lema 13 tenemos que $n(w^{-1}s_u) = n(s_u w)$. Por lo tanto:

$$n(w^{-1}) = n(w) - 1.$$

□

Lema 16. *Sea $w \in W$ y $u \in \Delta$, entonces $s_u(\Pi(w) - \{u\}) = \Pi(ws_u) - \{u\}$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que

$$s_u(\Pi(w) - \{u\}) \quad \subset \quad \Pi(ws_u) - \{u\}.$$

Ya que la otra contención la obtenemos reemplazando w por ws_u

$$s_u(\Pi(ws_u) - \{u\}) \subset \Pi(w) - \{u\},$$

entonces aplicando s_u a ambos lados obtenemos la otra inclusión, o sea,

$$(\Pi(ws_u) - \{u\}) \subset s_u(\Pi(ws_u) - \{u\}).$$

Ahora demostraremos la contención, para ello, sea $v \in (\Pi(w) - \{u\})$, así, $v \in (\Pi - \{u\})$ y $w(v) \in -\Pi$.

Por demostrar que $s_u(v) \in (\Pi(ws_u) - \{u\})$. Por lema 11 tenemos que s_u permuta $(\Pi - \{u\})$ y así, $s_u(v) \in (\Pi - \{u\})$.

Luego,

$$ws_u(s_u(v)) = w(v) \in -\Pi.$$

Así, ambos conjuntos tienen la misma cardinalidad. □

Proposición 17. *Sea $w \in W$, entonces $n(w) \leq l(w) = r$.*

Demostración. Aplicaremos inducción en $l(w)$.
Hipótesis: Sea $w = s_1 \cdots s_r$ de largo r, entonces por demostrar que $n(w) \leq l(w) = r$.
Probemos para $r = 1$.
Tenemos $w = s_1$, entonces por el lema 11 tenemos que $n(s_1) = 1 \leq 1$.
Por lo tanto para $r = 1$ se cumple.
Supongamos verdadera la condición para r, debemos demostrar que es válida para $r + 1$, es decir, dado $w = s_1 \cdots s_{r+1}$ por demostrar que $n(w) \leq l(w)$ con $l(w) = r + 1$.
Sea $u = ws_{r+1} = s_1 \cdots s_r$ luego $l(u) = r$, aplicando hipótesis de inducción tenemos que

$$n(u) \leq l(u).$$

Además tenemos que

$$n(us_{r+1}) = n(u) \pm 1,$$

reemplazando tenemos

$$n(us_{r+1}) = n(u) \pm 1 \leq n(u) + 1 \leq l(u) + 1,$$

entonces

$$n(w) \leq l(w).$$

□

Lema 18. *Sean $u_i \in \Delta$, $w = s_1 \cdots s_k$ una expresión cualquiera para $w \in W$, reducida o no, entonces para cada i entre 1 y k definimos*

$$v_i = (s_k s_{k-1} \cdots s_{i+1})(u_i)$$

Si $v_i = \pm v_j$ para $i < j$, entonces $w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_k$, donde la reflexión $\widehat{s}_i$ se remueve de la expresión.

Demostración. En esta demostración mantenemos la notación $s_{u_i} = s_i$ y reemplazando $v_i = \pm v_j$ tenemos:

$$(s_k s_{k-1} \cdots s_{i+1})(u_i) = \pm(s_k s_{k-1} \cdots s_{j+1})(u_j)$$

y si cancelamos, obtenemos la expresión:

$$(s_j s_{j-1} \cdots s_{i+1})(u_i) = \pm u_j,$$

es decir,

$$\pm u_j = (s_j s_{j-1} \cdots s_{i+1})(u_i) = \tau(u_i).$$

Usando la proposición 2, además del hecho que $s_u = s_{-u}$, tenemos:

$$\tau s_i \tau^{-1} = s_{\tau(i)} = s_{\pm j}$$

es decir,

$$(s_j \cdots s_{i+1}) s_i (s_{i+1} \cdots s_j) = s_j$$

lo que es igual a la expresión:

$$s_i \cdots s_{j-1} = s_{i+1} \cdots s_j$$

de aquí, obtenemos que:

$$\begin{aligned} s_1 \cdots s_k = \; &= s_1 \cdots s_{i-1}(s_i \cdots s_{j-1}) s_j s_{j+1} \cdots s_k \\ &= s_1 \cdots s_{i-1}(s_{i+1} \cdots s_j) s_j s_{j+1} \cdots s_k \\ &= s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_{j+1} \cdots s_k \\ &= s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_k. \end{aligned}$$

□

En particular, sigue del lema 18 que cuando tenemos una expresión reducida para $w = s_1 \cdots s_r$, los elementos $\{v_1, \ldots, v_r\}$ son todos distintos.

TEOREMA 19. *Sea $w \in W$ y $s_{u_i} = s_i$, con $u_i \in \Delta$. Si $w = s_1 \cdots s_r$ es una expresión reducida para w, entonces:*

$$\Pi(w) = \{u_r, s_r(u_{r-1}), \ldots, (s_r \cdots s_2)(u_1)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración la haremos por inducción en $l(w)$.

Para ello, sea $w = s_1 \cdots s_r$ una expresión reducida para $w \in W$. Si $l(w) = 1$ entonces por el lema 11 tenemos que

$$\Pi(s_1) = \{u_1\}.$$

Supongamos que la proposición es válida cuando el largo es $r-1$, escribamos $v = ws_r$, donde $v = s_1 \cdots s_{r-1}$ es una expresión reducida para v.

Por lo tanto

$$\Pi(v) = \{u_{r-1}, s_{r-1}(u_{r-2}), \ldots, (s_{r-1} \cdots s_2)(u_1)\}$$

definimos

$$w_i = (s_r s_{r-1} \cdots s_{i+1})(u_i) \quad \text{y} \quad v_i = (s_{r-1} s_{r-2} \cdots s_{i+1})(u_i).$$

Con lo cual tenemos que

$$w_i = s_r v_i \quad \text{y} \quad w w_i = v v_i$$

$$\Pi(v) = \{v_{r-1}, v_{r-2}, \ldots, v_1\}$$

es decir,

$$v_i \in \Pi \quad \text{y} \quad v(v_i) \in -\Pi.$$

De otro modo,

$$v_i \succ 0 \quad \text{y} \quad v(v_i) \prec 0. \tag{3}$$

Sabemos de ésta igualdad que $\{v_1, \ldots, v_{r-1}\} \subset \Pi$. Para terminar la demostración usaremos que como $w \in W$, entonces $\{v_1, \ldots, v_{r-1}\} \subset (\Pi - \{u_r\})$.

Si $v_i = u_r$, entonces aplicando s_r a ambos lados obtenemos $s_r(v_i) = -u_r$, por lo tanto $-u_r \in \Pi$, lo que es una contradicción.

Finalmente demostraremos $\{w_1, \ldots, w_r\} \subset \Pi(w)$.

Es decir, tenemos que probar que $0 \prec w_i$ y que $w(v_i) \prec 0$ para todo i.

Caso 1 Probemos que $0 \prec w_i$.

Si $i < r$ tenemos $0 \prec s_r(v_i) = w_i$, pues $v_i \in (\Pi - \{u_r\})$ y s_r permuta $(\Pi - \{u_r\})$.

Si $i = r$ entonces tenemos que $0 \prec u_r = w_r$.

Caso 2 Ahora veamos que $w(v_i) \prec 0$.

Sabemos que $u_r \notin \Pi(v) = \{v_1, \ldots, v_{r-1}\}$.

Para $i < r$, tenemos:

$$w(v_i) = v(v_i) \prec 0.$$

Ahora, para $i = r$

$$w(v_r) = vs_r(v_r) = -v(u_r) \prec 0.$$

□

Como el conjunto $\{v_1, \ldots, v_r\}$ está formado por elementos distintos, entonces tenemos que:

$$r \leq n(w) \leq l(w) \leq r,$$

luego:

Teorema 20. *Dado $w \in W$, entonces $l(w) = n(w)$.*

La demostración de éste teorema la tenemos usando el resultado anterior.

Proposición 21. *Sean $w \in W$ y $u \in \Delta$, entonces $l(ws_u) = l(w) \pm 1$. Además:*

1. $l(ws_u) = l(w) + 1 \Leftrightarrow w(u) \succ 0$.
2. $l(ws_u) = l(w) - 1 \Leftrightarrow w(u) \prec 0$.

Demostración. La demostración de esta proposición la tenemos gracias a que $l(w) = n(w)$ y al Corolario 15. □

Teorema 22. *Propiedad de Cancelación de Matsumoto.*
Dado $w \in W$, si $w = s_1 \cdots s_r$ y $l(w) < r$, entonces existen $1 \leq i \leq j < r$ tal que:

$$w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_{j+1} \cdots s_r.$$

Demostración. Sea $w \in W$, tal que $w = s_1 \cdots s_r$, donde $l(w) < r$, entonces, para al menos un valor $j \leq r - 1$, se tiene:

$$l(s_1 \cdots s_{j+1}) = l(s_1 \cdots s_r) - 1,$$

por el Lema 14, esta igualdad es lo mismo que tener

$$(s_1 \cdots s_j)(u_{j+1}) \prec 0$$

entonces, podemos escoger $i \leq j$ tal que:

$$(s_{i+1} \cdots s_j)(u_{j+1}) \succ 0$$

$$(s_i \cdots s_j)(u_{j+1}) \prec 0.$$

Ya que s_i permuta el conjunto $(\Pi - \{u_i\})$, debemos tener:

$$(s_{i+1} \cdots s_j)(u_{j+1}) = u_i$$

de donde obtenemos, por la proposición 2 que:

$$s_i = (s_{i+1} \cdots s_j)s_{j+1}(s_j \cdots s_{i+1})$$

lo que se puede reescribir como:

$$s_i s_{i+1} \cdots s_j = s_{i+1} \cdots s_{j+1}. \tag{4}$$

Esta igualdad nos permite escribir la expresión $w = s_1 \cdots s_r$ de la siguiente forma:

$$w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_{j+1} \cdots s_r.$$

□

COROLARIO 23. *Propiedad de Cambio de Matsumoto.*
Dado $w \in W$ tal que $w = s_1 \cdots s_r$ y $l(w) < r$, entonces existen $1 \leq i \leq j < r$ tal que:

$$s_i s_{i+1} \cdots s_j = s_{i+1} \cdots s_{j+1}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración la tenemos usando la ecuación (4) de la demostración anterior. □

7. Transitividad Fiel y el Elemento más Largo

Ya tenemos demostrado que W permuta los sistemas simples en una manera transitiva, y el Teorema 22 implica el siguiente resultado, que muestra que la acción de permutación de W es fielmente transitiva.

TEOREMA 24. *Sea Δ un sistema simple, Π el correspondiente sistema positivo, las siguientes condiciones sobre $w \in W$ son equivalentes:*

1. $w(\Pi) = \Pi$
2. $w(\Delta) = \Delta$
3. $n(w) = 0$
4. $l(w) = 0$

5. $w = 1$

DEMOSTRACIÓN. Todas las condiciones, salvo $(2 \Rightarrow 1)$, las tenemos gracias a los lemas y proposiciones anteriores, sólo mostraremos que

$(2 \Rightarrow 1)$.

Sea $v \in \Pi$, entonces:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{d\in\Delta} c_d d \\ w(v) &= w(\sum_{d\in\Delta} c_d d) \\ w(v) &= \sum_{d\in\Delta} c_d w(d) \end{aligned}$$

con $w(d) \in \Delta \subset \Pi$. Por lo tanto

$$w(v) = \sum_{d\in\Delta} c_d w(d) = \sum_{d\in\Delta} c_d d = v.$$

Así, $w(\Pi) = \Pi$. □

Es claro de la definición, que Π y $-\Pi$ pueden ser sistemas positivos para distintos ordenes. Así, por el teorema 7 debe existir un elemento $w_0 \in W$ que envía Π en $-\Pi$. Así tenemos que:

$$l(w_0) = n(w_0) = card(\Pi(w_0)),$$

es el mayor posible y no hay otro elemento en W que tenga el mismo largo que w_0. Ya que, supongamos que hay otro elemento $v \in W$ tal que $v(\Pi) = -\Pi$ con lo cual

$$v^{-1}w_0(\Pi) = v^{-1}(-\Pi) = \Pi.$$

Por teorema 7, tenemos que $v^{-1}w_0 = 1$, por lo tanto $w_0 = v$.

Además, $w_0^{-1} = w_0$, ya que w^{-1} es el único elemento que tiene el mismo largo que w_0, entonces podemos caracterizar a w_0 como el único $w \in W$ que satisface

$$l(ws_u) < l(w) \quad \forall\, u \in \Delta.$$

Sea $w = s_1 \cdots s_r$ una expresión reducida para w, podemos aplicar reflexiones simples a la derecha de w sucesivamente (haciendo crecer el largo en uno), siempre que se mantenga la desigualdad, así se obtiene w_0, luego $w_0 = ww_1$ con

$$l(w_0) = l(w) + l(w_1)$$

para algún $w_1 \in W$.

La condición se puede reformular de la manera siguiente:

$$l(w_0 w) = l(w_0) - l(w) \quad \forall\, w \in W. \tag{5}$$

Con lo cual hemos demostrado el siguiente corolario

COROLARIO 25. *Existe un único* $w_0 \in W$ *tal que* l *alcanza su valor máximo en* w_0*, es decir,*

$$l(w_0) = n(w_0) = card(\Pi).$$

8. Generadores y Relaciones

TEOREMA 26. *Sea* Δ *un sistema simple en* Φ*, entonces* W *está generado por el conjunto* $S = \{s_u \mid u \in \Delta\}$*. Sujeto, solamente, a las relaciones:*

$$(s_u s_v)^{m(u,v)} = 1 \quad (u, v \in \Delta)$$

DEMOSTRACIÓN. Cualquier relación en W es una ecuación entre dos palabras formadas con elementos de S, es decir, cualquier relación en W se puede anotar de la siguiente forma:

$$s_1 \cdots s_k \;=\; 1. \tag{6}$$

Más aún, cualquier relación del tipo (6), se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} s_2 s_3 \cdots s_k s_1 &= 1 \\ s_3 s_4 \cdots s_k s_1 s_2 &= 1 \\ s_4 s_5 \cdots s_k s_1 s_2 s_3 &= 1, \quad etc... \end{aligned} \tag{7}$$

Primero que todo, ya que $\det(s_1 \cdots s_k) = \det(s_1) \cdots \det(s_k) = (-1)^k$, debemos tener que $k = 2m$.

Supongamos que (6) no es consecuencia de las relaciones $(s_u s_v)^{m(u,v)} = 1$ y el valor $k = 2m$ es el menor posible, es decir, hemos aplicado las relaciones anteriores para reducir la palabra. Queremos que esta suposición en (6) nos lleve a una contradicción, para esto, es suficiente mostrar que:

$$\begin{aligned} s_1 = s_3 = \ldots &= s_{2m-1} \\ s_2 = s_4 = \ldots &= s_{2m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ya que así, la relación (6) se transformará en $(s_i s_j)^m$, pero como $m(i, j)$ es el orden del elemento, debemos tener que $m(i, j)$ divide a m. Así, la relación (6) se convierte en una de las relaciones dadas $\{(s_i s_j)^{m(i,j)} = 1\}$. Con lo que obtenemos nuestra contradicción.

Lo único que debemos mostrar de las ecuaciones en (8), es que $s_1 = s_3$. Ya que para probar el resto de las igualdades, podemos escribir la relación (6) como en la relación (7) y luego aplicamos el mismo argumento.

Lo cual obtenemos de las siguientes igualdades:

1. $s_1 s_2 \cdots s_m = s_2 s_3 \cdots s_{m+1}$
2. $s_3 s_2 \cdots s_m = s_2 s_3 \cdots s_{m+1}$

Es decir, igualando las ecuaciones y cancelando obtenemos $s_1 = s_3$.

Para demostrar la primera igualdad, la relación

$$s_1 \cdots s_{2m} = 1$$

se puede escribir como:

$$s_1 s_2 \cdots s_{m+1} \quad = \quad s_{2m} s_{2m-1} \cdots s_{m+2}. \tag{9}$$

Esta ecuación muestra que $l(s_1 \cdots s_{m+1}) < m+1$. Por la propiedad de cambio de Matsumoto, existen i, j con $1 \leq i < j \leq m$ tal que:

$$s_i s_{i+1} \cdots s_j \quad = \quad s_{i+1} \cdots s_{j+1}. \tag{10}$$

Si esta relación involucra una cantidad de reflexiones simples menor que $k = 2m$, entonces es deducible de las relaciones dadas $(s_i s_j)^{m(i,j)} = 1$. Así, la relación (10) se transforma en

$$s_1 \cdots s_m \quad = \quad s_2 \cdots s_{m+1} \tag{11}$$

Ahora, para la segunda igualdad, podemos escribir la relación (6) como:

$$s_2 \cdots s_{2m} s_1 = 1$$

y argumentamos como en la igualdad 1 para deducir que:

$$s_2 \cdots s_{m+1} = s_3 \cdots s_{m+2}.$$

Entonces reescribamos esta relación como:

$$(s_3 s_2 \cdots s_{m+1} s_{m+2}) s_{m+1} \cdots s_2 = 1$$

y volvemos a argumentar como en la igualdad 1 para obtener:

$$s_3 s_2 \cdots s_m = s_2 \cdots s_{m+1}.$$

Por lo tanto

$$s_1 = s_3.$$

□

DEFINICIÓN 10. *Sea W un grupo. Se dice que W es un* **Grupo de Coxeter** *si y sólo si existe $S \subset W$ tal que*

$$W = < s \in S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 > .$$

Donde $m(s,s) = 1$ y $m(s,s') \in \{2, 3 \ldots\} \cup \{\infty\}$. El par (W,S) se llama **Sistema de Coxeter**.

9. Subgrupos Parabólicos y Representante de Clase Minimal

DEFINICIÓN 11. *Sea Δ un sistema simple en Φ y sea S el conjunto de todas las reflexiones simples s_u con $u \in \Delta$. Para cualquier $I \subset S$, el subgrupo W_I de W es:*

$$W_I = < s_u \mid s_u \in I > .$$

Además, sea $\Delta_I = \{u \in \Delta \mid s_u \in I\}$.

Al reemplazar Δ por otro sistema simple $w\Delta$, tenemos que los subgrupos definidos anteriormente se obtienen conjugando los W_I, es decir son wW_Iw^{-1}.

Todos los subgrupos de W obtenidos de esta forma se llaman **subgrupos parabólicos.**

DEFINICIÓN 12. *Sean Δ un sistema simple en Φ, S el conjunto de todas las reflexiones simples s_u con $u \in \Delta$, $I \subset S$. Se define W^I por:*

$$W^I = \{w \in W \quad | \quad l(w) < l(ws)\}$$

OBSERVACIÓN 4. *Sea W un grupo de reflexiones y S un conjunto generador de W, entonces:*

$$W_\phi = \{1\} \quad y \quad W_S = < S > = W.$$

En la siguiente proposición, veremos que los subgrupos parabólicos también son grupos de reflexión.

PROPOSICIÓN 27. *Sea Φ un sistema de raíces en V, Δ un sistema simple en Φ, S el correspondiente conjunto de reflexiones simples, $I \subset S$ y $\Phi_I = < \Delta_I > \cap \Phi$, con $< \Delta_I >$ el espacio generado por Δ_I en V, entonces:*

1. *Φ_I es un sistema de raíces en V (respectivamente en $V_I = < \Delta_I >$), con un sistema simple Δ_I y un correspondiente grupo de reflexiones W_I (respectivamente W_I restringido a V_I.)*
2. *Si W_I es un grupo de reflexiones, con la función largo l_I relativa al sistema simple Δ_I, entonces tenemos que $l|_{W_I} = l_I$.*
3. *Si $w \in W$, entonces existe un único $u \in W^I$ y un único $v \in W_I$ tal que $w = uv$ y sus largos satisfacen $l(w) = l(u) + l(v)$. Además u es el único elemento de menor largo en la clase lateral wW_I.*

DEMOSTRACIÓN. Con las notaciones ya establecidas tenemos:

1. Es claro que W_I estabiliza a V_I y que la condición **R1** de un sistema de raíces se mantiene para Φ_I. Para la condición **R2** pues $s_u(\Phi_I) \subset \Phi_I$ pero tenemos que $s_u(\Phi_I) = \Phi_I$. Ya que,

   Sean $u, v \in \Phi_I = \Phi \cap < \Delta_I >$, entonces como $u, v \in \Delta_I$ y además $s_u(v) \in \Phi$ y $s_u(v) = v - \lambda u \in < \Delta_I >$ con lo cual, $s_u(v) \in \Phi_I$ luego, $s_u(\Phi_I) = \Phi_I$.

También queda claro que Δ_I es un sistema simple, ya que $\Delta_I \subset \Delta$, así, el grupo W_I actuando en V ó en V_I, es el correspondiente grupo de reflexión.

2. La función largo $l : W \longrightarrow \mathbb{N}$ está definida como el número de raíces positivas, enviadas en raíces negativas por w, análogamente para $l_I : W_I \longrightarrow \mathbb{N}$, donde las raíces positivas, relativas a Δ_I, son los elementos en $\Pi \cap \Phi_I$.

   Supongamos que $u \in (\Pi - \Phi_I)$ y $v \in \Delta_I$, entonces:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{x\in\Delta} c_x x \quad \text{con algún } x_0 \notin \Delta_I \\ s_v(u) &= \sum_{x\in\Delta} c_x s_v(x). \end{aligned}$$

   Luego, el coeficiente de $s_v(x_0)$ en $s_v(u)$ es positivo, es decir, $s_v(u) \succ 0$.

   Así, para todo $w \in W_I,\ w(u) \succ 0$.

   De esta forma, las raíces en Π enviadas en raíces negativas por $w \in W_I$, son precisamente las raíces en Π_I enviadas en raíces negativas por w, esto quiere decir que $l(w) = l_I(w)$.

3. Sean $w \in W$ y u un representante de la clase lateral wW_I tal que u tiene el menor largo posible. Escribamos $w = uv$ con $v \in W_I$. Ya que $ux \in wW_I\,, \forall\, x \in I$, es claro que $u \in W^I$. Ahora, si escribimos las expresiones reducidas para $u = s_1 \cdots s_q$ $(s_i \in S)$ y $v = t_1 \cdots t_r$ podemos suponer que $t_i \in I$, entonces $l(w) \leq l(u) + l(v) = q + r$, la igualdad se obtiene gracias a que las expresiones para u y v son reducidas lo que impide la cancelación de algunas reflexiones, de este modo, se tiene $l(w) = l(u) + l(v)$. ya que de no ser así, tenemos:

$$\begin{aligned} w &= (s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots s_q)(t_1 \cdots \widehat{t}_j \cdots t_r) \\ wt_r \cdots \widehat{t}_j \cdots t_1 &= s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots s_q. \end{aligned}$$

   Lo que contradice la elección de u como el representante de menor largo posible, pues $wt_r \cdots \widehat{t}_j \cdots t_1 \in wW^I$ y $l(wt_r \cdots \widehat{t}_j \cdots t_1) \leq q - 1$.

Tenemos demostrado que cualquier elemento $w \in wW_I$, se puede escribir de la forma $w = uv$, con $l(uv) = l(u) + l(v)$, donde u es el único representante de la clase wW_I que tiene el menor largo, lo que quiere decir que $u \in W^I$ pues, si suponemos que hay otro representante $u' \in W^I$ de esta clase con $u \neq u'$ que pertenece a la clase wW_I, podemos escribir $u' = uv$ con $l(v) = r > 0$. Digamos $v = s_1 \cdots s_r$ con $s_i \in I$. Pero entonces tendríamos que $l(u's_r) < l(u)$, lo que se contradice con $u' \in W^I$. Por lo tanto u es el único representante de esta clase. $\square$

Los representantes de las clases W^I en la parte 3 de la proposición son llamados **representantes de clase minimal**.

10. Polinomios de Poincaré

La tercera parte de la proposición 27 tiene una buena aplicación para el estudio de W relativa al conjunto generador S. Esto está medido por la sucesión

$$a_n = card(\{w \in W \mid l(w) = n\})$$

la cual define un polinomio en la variable t:

$$W(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n = \sum_{w\in W} t^{l(w)}.$$

Por ejemplo: Cuando $W = S_3$, $W(t) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$, cada coeficiente del polinomio está dado por la cantidad de elementos en S_3 que tienen igual largo, es decir:

$$\begin{array}{ccccc}
(1) & = & (1) & \Rightarrow & l(1) = 0. \\
(12) & = & (12) & \Rightarrow & l(12) = 1. \\
(23) & = & (23) & \Rightarrow & l(23) = 1. \\
(123) & = & (12)(23) & \Rightarrow & l(123) = 2. \\
(132) & = & (12)(13) & \Rightarrow & l(132) = 2. \\
(13) & = & (12)(23)(12) & \Rightarrow & l(13) = 3.
\end{array}$$

Llamamos a $W(t)$ el polinomio de Poincaré de W.

Más generalmente: Para cualquier $X \subset W$, podemos definir

$$X(t) = \sum_{w\in X} t^{l(w)}.$$

Observación 5. *Note que para $I \subset S$, $W_I(t)$ coincide con el polinomio de Poincaré del grupo de reflexiones W_I (ya que l concuerda con la función largo l_I.) Tenemos como consecuencia de la parte* 3 *de la proposición 27 que:*

Lema 28. *Sea $W(t)$ el polinomio de Poincaré de W, entonces:*

$$W(t) = W_I(t) W^I(t)$$

Esta fórmula puede ser usada en un algoritmo que permita calcular $W(t)$ por inducción en $card(S)$. Para más comodidad anotaremos $(-1)^I$ en lugar de $(-1)^{card(I)}$. Recuerde que W tiene un único elemento w_0 de largo máximo. Además, sea $N = card(\Pi)$.

Proposición 29.

$$\sum_{I\subset S} (-1)^I \frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I\subset S} (-1)^I W^I(t) = t^N$$

Demostración. La primera igualdad sigue del lema anterior.
Para la segunda igualdad, sean $w \in W$ y $K(w) = \{s \in S \mid l(w) < l(ws)\}$.
Si $I \subset K(w)$ entonces $w \in W^I$.
Ahora:

$$\begin{aligned}\sum_{I \subset S} (-1)^I W^I(t) &= \sum_{I \subset S} (-1)^I \sum_{w \in W^I} t^{l(w)} \\ &= \sum_{w \in W} \sum_{I \subset K(w)} (-1)^I t^{l(w)} \\ &= \sum_{w \in W} \left(\sum_{I \subset K(w)} (-1)^I \right) t^{l(w)}.\end{aligned}$$

Así, para w fijo, $t^{l(w)}$ aporta con coeficiente correspondiente en

$$\sum_{I \subset K(w)} (-1)^I,$$

esta suma es cero, pues:

$$(1 + (-1))^m = \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} 1^{m-i} (-1)^i = \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i = 0$$

donde $\binom{m}{i}$ es la cantidad de subconjuntos de cardinal i contenidos en un conjunto de cardinal $m \neq 0$. Si $K(w)$ es vacío, entonces $w = w_0$ y así, el coeficiente de t^N es 1. $\square$

Observación 6. *Sea X un subconjunto de W, note que*

$$X(t) = \sum_{w \in X} t^{l(w)}$$

cuando reemplazamos t por 1,

$$\begin{aligned}X(1) &= \sum_{w \in X} 1^{l(w)} \\ X(1) &= \sum_{w \in X} 1 = card(X)\end{aligned}$$

Así, la fórmula en la proposición 29 nos lleva a la identidad

$$\sum_{I \subset S} (-1)^I \frac{card(W)}{card(W_I)} = 1.$$

11. Sistema de Representantes

Sabemos que W actúa en V en forma natural, en esta sección describiremos un sistema de representantes para las órbitas y el respectivo grupo de isotropía o estabilizador.

DEFINICIÓN 13. *Sean Π un sistemas positivo, Δ el sistema simple correspondiente y $u \in \Delta$, entonces para cada hiperplano H_u tenemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned} A_u &= \{v \in V \mid B(v\,,u) > 0\}. \\ C &= \bigcap_{u\in\Delta} A_u. \\ D = \overline{C} &= \{v \in V \mid B(v\,,u) \geq 0 \quad \forall\, u \in \Delta\}. \end{aligned}$$

LEMA 30. *Según las notaciones de la definición anterior, tenemos:*

1. *A_u es un semiespacio abierto.*
2. *C es abierto y convexo y también es un cono cerrado (cerrado bajo multiplicación de escalares positivos).*
3. *D es la clausura de C y es un conjunto no vacío, ya que por lo menos contiene a v, además D es un cono convexo cerrado.*

Mostraremos que D es un sistema de representantes para la acción de W en V. Es decir,

LEMA 31. *Para cada $v \in V$ existe un único punto $d \in D$ tal que $v \in O_d$ (la órbita de d). Además, $d - v$ es una combinación lineal no negativa de Δ.*

DEMOSTRACIÓN. Sea V un espacio vectorial y definamos un orden parcial en V dado por:

$$v \ll d \Leftrightarrow d - v = \sum_{u\in\Delta} c_u u \quad c_u \geq 0.$$

Además, sea

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{w(v) \quad | \quad v \ll w(v) \quad w \in W\}. \\ &= \{z \in O_v \mid v \ll z\}. \end{aligned}$$

Este es un conjunto finito y distinto de vacío, ya que por lo menos contiene a v, luego podemos escoger un elemento maximal $d \in \Lambda$.

Demostraremos que $d \in D$, para ello, supongamos que existe $u \in \Delta$ tal que $B(d, u) < 0$, entonces:

$$s_u(d) = s_u(w(v)) = s_u w(v) \in O_v.$$

Además:

$$-2\frac{B(d,u)}{B(u,u)} > 0.$$

Luego

$$d - 2\frac{B(d,u)}{B(u,u)}u$$

es una combinación lineal no negativa de elementos de Δ. Así, $d \ll s_u(d)$, además $v \ll d \ll s_u(d)$. Lo que es una contradicción ya que d es maximal, luego $B(d,u) \geq 0$ para todo $u \in \Delta$. Por lo tanto $d \in D$. □

Teorema 32. *Sean Δ el sistema simple contenido en un sistema positivo Π y*

$$D = \{v \in V \mid B(v\,,u) \geq 0 \quad \forall\, u \in \Delta\}.$$

Entonces:

1. *Si $w(v) = u$ para $u\,, v \in D$, entonces $u = v$ y w es un producto de reflexiones simples que fijan a v. En particular, si $v \in C$, entonces el grupo de isotropía (estabilizador) de v es trivial.*
2. *D es un sistema de representantes para la acción de W en V.*
3. *Si $v \in V$, el grupo de isotropía de v es generado por aquellas reflexiones s_u con $u \in \Phi$ que están contenidas en él.*
4. *Si $U \subset V$, entonces el subgrupo de W que fija a U punto a punto, es generado por aquellas reflexiones s_u que están contenidas en este subgrupo.*

Demostración.

1. Si procedemos por inducción en $l(w) = n(w)$, entonces $n(w) = 0$ implica que $w = 1$, luego $u = v$.

   Sea $n(w) > 0$, luego $w\Pi \cap -\Pi \neq \phi$, es decir, existe $x \in \Delta$ tal que $w(x) \prec 0$, luego

   $$0 \geq B(u, w(x)) = B(v, x) \geq 0.$$

   Por lo tanto:

   $$B(v,x) = 0,$$

   así:

   $$s_x(v) = v.$$

   Como $w(x) \prec 0$, tenemos

   $$n(ws_x) = n(w) - 1.$$

   Sabemos que $ws_x(v) = u$, así por hipótesis de inducción ws_x es producto de reflexiones simples que fijan a v, con lo cual w es producto de reflexiones simples que fijan a v.

2. Está demostrado gracias a la parte 1 y al lema 31.
3. Dado $v \in V$, usemos el lema 31 para encontrar un elemento $w \in W$, para el cual $w(v) = u \in D$. Por la parte 1, el grupo de isotropía W' de u, está generado por las reflexiones simples que están contenidas en él. Además $w^{-1}W'w$ es el grupo de isotropía de v pues, dado $w' \in W'$ tenemos que

$$w^{-1}w'w(v) = v$$

y además $w' = s_1 \cdots s_r$, por lo tanto:

$$w^{-1}w'w = s_{w^{-1}u_1} \cdots s_{wu_r}.$$

Así tenemos que $w^{-1}W'w$ está generado por las reflexiones s_u con $u \in \Phi$ contenidas en el.
4. El subgrupo W^0 que fija punto a punto a U ó a una base $\{v_1, \ldots, v_t\}$ de U.

Procederemos por inducción en la dimensión de U.

Si $t = 1$, entonces $U =< v_1 >$ por el punto anterior, tenemos que W^0 está generado por s_u con $u \in \Phi$, pertenecientes a W^0.

Si $t > 1$ entonces sea W' el grupo que estabiliza a v_1 y

$$\Phi' = \{u \in \Phi \quad | \quad s_u(v_1) = v_1\}.$$

Sabemos que $s_u = s_{-u}$ luego si $u \in \Phi'$, entonces $-u \in \Phi'$. Con ello, tenemos que $W'(\Phi') \subseteq \Phi'$. Así, W' es un grupo de reflexión con sistema de raíces Φ'.

Aplicando hipótesis de inducción a W' y $U' =< v_2, \ldots, v_t >$, tenemos que el subgrupo W^1 que fija punto a punto a U' está generado por s_u, tal que $s_u \in W^1$, así

$$W^1 =< \{s_u \quad | \quad s_u \in W^1, u \in \Phi'\} \leq W',$$

y por lo tanto:

$$W^0 =< \{s_u \quad | \quad s_u \in W^1, u \in \Phi'\} \leq W.$$

□

Ahora, para cada sistema simple, tenemos asociado un cono convexo C en V, donde todos sus puntos tienen grupo de isotropía trivial en W.

Si reemplazamos Δ por $w\Delta$, sólo debemos reemplazar C por wC. Así la acción fiel de W en los sistemas simples se traslada a una acción fiel en esta familia de conjuntos abiertos, las que llamaremos **cámaras**. Las cámaras son caracterizadas topológicamente, como las componentes conexas del complemento de $\bigcup_u H_u$ en V.

DEFINICIÓN 14. *Sean C una cámara asociada a un sistema simple Δ y $u \in \Delta$, entonces las* **paredes** *son los hiperplanos H_u. Cada pared tiene un lado positivo y un lado negativo, con C en el lado positivo.*

Las raíces en Δ pueden ser caracterizadas como aquellas raíces que son ortogonales a alguna pared de la cámara C. Note además que el ángulo entre dos paredes de una cámara, es un ángulo de la forma $\frac{\pi}{k}$ para un entero positivo $k \geq 2$.

12. El Reticulado de Subgrupos Parabólicos

DEFINICIÓN 15. *Sea S el conjunto de todas las reflexiones simples de cardinal l. Un reticulado $\mathcal{L}$ de rango l es un $\mathbb{Z}-$módulo libre, es decir, $\mathcal{L} \simeq \mathbb{Z}^l$. En otras palabras, es el conjunto formado por todas las combinaciones lineales enteras de elementos en Δ.*

DEFINICIÓN 16. *Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ dos reticulados y $h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ una función de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}'$. Se dice que h es un isomorfismo de reticulados si y sólo si h preserva la estructura de $\mathbb{Z}-$módulo.*

PROPOSICIÓN 33. *Sea S el conjunto de todas las reflexiones simples, la correspondencia de los subconjuntos I de S en los subgrupos parabólicos de la forma W_I, dada por $I \mapsto W_I$, es un isomorfismo de reticulados. Además cumple con*

1. $W_{I\cup J} = < W_I \cup W_J >$.
2. $W_{I\cap J} = W_I \cap W_J$.

DEMOSTRACIÓN. La función $I \mapsto W_I$ es biyectiva, para ello veremos que:
(i) $W_{I\cup J} = < W_I \cup W_J >$.
Lo cual es claro, ya que $W_I \subset W_{I\cup J}$ y $W_J \subset W_{I\cup J}$, además todo elemento de $W_{I\cup J}$ es producto de elementos en $W_I \cup W_J$.
(ii) $W_{I\cap J} = W_I \cap W_J$.
La primera contención la tenemos ya que $W_{I\cap J} \subset W_I$ y $W_{I\cap J} \subset W_J$. Por lo tanto:

$$W_{I\cap J} \subset W_I \cap W_J.$$

Para la otra contención, tenemos los espacios V_I y V_J definidos en la proposición 27, a partir de ellos, es fácil ver que:

$$V_I \cap V_J = V_{I\cap J}, \quad < \Delta_I > \cap < \Delta_J > = < \Delta_{I\cap J} >,$$

ya que $I, J \subset S$. Sabemos que dados $U_1, U_2 \leq V$ tenemos que

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp,$$

por lo tanto:

$$V_{I\cap J}^\perp = (V_I \cap V_J)^\perp = V_I^\perp + V_J^\perp.$$

Ahora, sea $w \in W_I \cap W_J$, luego w fija a cada vector de $V_I^{\perp} + V_J^{\perp}$ y por el teorema 32, w es producto de reflexiones simples que fijan punto a punto al espacio $V_{I\cap J}^{\perp}$, luego $u \in V_{I\cap J} \cap \Phi$. $\square$

13. Reflexiones en W

Proposición 34. *Toda reflexión en W es de la forma s_u para algún $u \in \Phi$.*

Demostración. Sea s una reflexión en W con un hiperplano reflexivo H_s que queda fijo punto a punto por s. Así s pertenece al Estabilizador ó grupo de isotropía de H_s, que es no trivial. Luego, gracias al teorema 32, está generado por algunas reflexiones s_u con $u \in \Phi$, pero s_u fija punto a punto a este hiperplano si y sólo si $H_s = H_u$. En ese caso tenemos que $s = s_u$. $\square$

14. El Complejo de Coxeter

Definición 17. *Sea D un sistema de representantes, Δ un sistema simple y S el conjunto de reflexiones simples, entonces para cada $I \subset S$ se tiene:*

$$C_I = \{z \in D \mid [(\forall\, x \in \Delta_I)\ (B(z\,,x) = 0)\ \wedge\ (\forall\, x \in \Delta \setminus \Delta_I)\ (B(z\,,x) > 0)]\}.$$

Observación 7. *Sean $I, J \subset S$, $w, w' \in W$ entonces, los conjuntos wC_I y $w'C_J$ son disjuntos a menos que w y w' pertenezcan a la misma clase lateral en W/W_I, en ese caso, w y w' son iguales. Si I y J son distintos, todos los conjuntos wC_I y $w'C_J$ son disjuntos teorema 32.*

La colección

$$\mathcal{C} = \{wC_I \mid w \in W,\ I \subset S\}.$$

es una partición de V.

Definición 18. *La colección $\mathcal{C}$ se llama el* **Complejo de Coxeter** *de W. Cualquier conjunto wC_I se llama un lado de tipo I.*

Más precisamente, para cada conjunto $I \subset S$,

Lema 35. *C_I es la intersección de algunos hiperplanos H_u y algunos semiespacios abiertos A_u, además C_I particiona a D. Con $C_\phi = C = \bigcap_{u\in\Delta} A_u$ y $C_S = \{0\}$. Por otra parte, el espacio generado por C_I tiene dimensión $n - card(I)$, donde $n = dim(V)$.*

Proposición 36. *Sea $I \subset S$, el grupo de isotropía del lado C_I de C es precisamente W_I. Así, los subgrupos parabólicos de W, son los grupos de isotropía de los elementos de C.*

Demostración. Por la definición de C_I, es claro que W_I lo fija punto a punto. Ahora, sea $w \in W$, perteneciente al subgrupo de isotropía W_I, luego $w(C_I) = C_I$, por la parte 1 del teorema 32 tenemos que w fija punto a punto ya que $C_I \subset D$, por el corolario 15 y si usamos la parte 3 de la proposición 27 para escribir $w = uv$, donde $v \in W_I$ y u satisface $l(u) < l(us_x)$

para todo $x \in I$, tenemos que $u\Delta_I \subset \Pi$, si $u \neq 1$, entonces existe $z \in \Delta$ tal que $u(z) \prec 0$, luego $z \notin \Delta_I$ ya que si $z \in \Delta_I \subset C_I$ entonces:

$$\begin{aligned} w(z) &= uv(z) \\ z &= u(z) \succ 0 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción, por lo tanto:

$$B(y,z) > 0 \quad \forall\, y \in C_I. \tag{12}$$

Además, si $y \in C_I$ tenemos que

$$\begin{aligned} w(y) &= uv(y) \\ y &= u(y) \end{aligned} \tag{13}$$

Luego, usando ambas condiciones tenemos que:

$$0 < B(y,z) = B(u(y),u(z)) = B(y,u(z)) \leq 0,$$

lo que es una contradicción.

$\square$

OBSERVACIÓN 8. *La caracterización de los subgrupos parabólicos como grupos de isotropía, nos lleva a una interpretación de $\mathcal{C}$ como un complejo simplicial abstracto. Los vértices son las clases laterales wC_I, donde I es maximal en S. (I se obtiene al quitar una reflexión simple del conjunto S.) Un conjunto finito de vértices determina un 'simplex' si los vértices tienen intersección no vacía. La dimensión del complejo $\mathcal{C}$ es $n-1$.*

CAPíTULO 2

Clasificación de Sistemas de Coxeter y Grupos de Reflexión.

En el capítulo anterior ya mostramos que cada grupo de reflexión tiene un sistema de Coxeter y un producto interno asociado. En este capítulo vamos a obtener una clasificación de sistemas de Coxeter finitos y grupos de reflexión finitos, nos enfocaremos en determinar condiciones necesarias asociadas a este producto interno, $B : V \times V \to \mathbb{R}$, de un sistema de Coxeter finito (W, S). Tenemos importantes restricciones en las posibilidades para sistemas de Coxeter finitos, la clasificación finaliza luego de probar que cada posibilidad para un sistema de Coxeter se puede realizar a través de un grupo de reflexión finito.

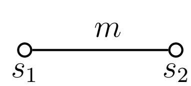
1. Grafo Asociado

Definición 19. *Sean* (W, S) *un sistema de Coxeter y* $s, s' \in S$*, entonces un* **Grafo de Coxeter** X*, es un grafo donde:*

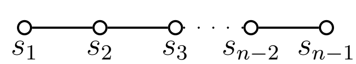
1. S *es el conjunto de vértices de* X.
2. *Si* $m(s, s') = 2$ *entonces no hay arista entre* s *y* s'.
3. *Si* $m(s, s') = 3$*, entonces la arista entre* s *y* s' *no tiene etiqueta.*
4. *Si* $m(s, s') > 3$*, entonces la arista entre* s *y* s' *es etiquetado con* $m(s, s')$.

Esta asignación establece una correspondencia inyectiva entre los sistemas de Coxeter y los grafos de Coxeter.

Por ejemplo el grafo de Coxeter del grupo $\mathcal{D}_m$ es:



Mientras, el grafo de Coxeter del grupo S_n tiene $n-1$ vértices unidos con aristas sin etiqueta.



Proposición 37. *Sea W_i con $i = 1, 2$ un grupo de reflexión finito actuando en V_i, tal que W_i es esencial en V_i, si además W_1 y W_2 tienen el mismo grafo de Coxeter, entonces existe una isometría de V_1 en V_2 que induce un isomorfismo de W_1 en W_2.*

En particular: Si $V_1 = V_2$ entonces los subgrupos W_1 y W_2 son conjugados en $O(V)$.

Demostración. Sea Δ_i un sistema simple para W_i, como Δ_i es base de V_i, podemos suponer que todas las raíces simples son unitarias.

Sea $w : \Delta_1 \to \Delta_2$ tal que $w(\Delta_1) = \Delta_2$ en una manera compatible con los grafos de Coxeter y extendamos w a un isomorfismo de espacios vectoriales $w : V_1 \to V_2$.

Si $u, v \in \Delta_1$ con $u \neq v$, entonces el ángulo entre u y v es $\theta = \pi - \frac{\pi}{m(u,v)}$, como las raíces son vectores unitarios, tenemos que:

$$B(u, v) = \cos(\theta) = -\cos\left(\frac{\pi}{m(u, v)}\right).$$

El mismo cálculo se hace con el producto interno de las raíces en Δ_2 correspondientes a u y v, como w preserva ángulo tenemos que $m(u, v) = m(w(u), w(v))$, así, w es una isometría, la cual, claramente induce un isomorfismo entre W_1 y W_2. □

Definición 20. *Decimos que un sistema de Coxeter (W, S) es* **irreducible** *si el grafo de Coxeter X es conexo, en este caso también decimos que Φ es irreducible.*

Note en general que, si $X_1, X_2, \dots X_r$ son las componentes conexas de X, Δ_i el sistema simple, S_i el conjunto de reflexiones simples, $u \in \Delta_i$ y $v \in \Delta_j$ con $i \neq j$, entonces tenemos que $m(u, v) = 2$, es decir, $s_u s_v = s_v s_u$. La siguiente proposición muestra que el estudio de grupos de reflexión puede ser reducido al caso en que X es conexo.

Proposición 38. *Sean (W, S) un sistema de Coxeter, X el grafo de Coxeter correspondiente, $X_1, X_2, \dots X_r$ las componentes conexas de X y $S_1, S_2, \dots, S_r$ los correspondientes subconjuntos de S. Entonces W es el producto directo de los subgrupos parabólicos $W_1, W_2, \dots, W_r$ donde W_i es el subgrupo parabólico generado por el conjunto S_i y cada sistema de Coxeter (W_i, S_i) es irreducible.*

$$W = W_1 \times W_2 \times W_3 \times \cdots \times W_r.$$

Demostración. Ya que los elementos de S_i conmutan con los elementos de S_j cuando $i \neq j$, el subgrupo parabólico W_i centraliza a W_j y vice versa, así que cada uno es normal en W, además, S está contenido en el producto de estos grupos, por lo tanto, este producto debe ser todo W. Por inducción en r, cada grupo $W_{S \setminus S_i}$ es el producto directo de los otros W_j y la proposición 33 implica que W_i lo intersecta trivialmente, así, el producto es directo. □

2. Matriz Asociada

En esta sección, estudiaremos la matriz del producto interno asociado a un grafo de Coxeter X y a partir de ella veremos cuando un grafo etiquetado es un grafo de Coxeter.

Sean (W, S) un sistema de Coxeter actuando en V, denotemos por B el producto interno, $S = \{s_1, \dots, s_l\}$ el conjunto de reflexiones simples y $\{e_1, \dots, e_l\}$ una base de V tal que s_i es la reflexión asociada al elemento e_i. La matriz asociada al producto interno B en la base $\{e_1, \dots, e_l\}$ está formada por los coeficientes

$$q_{ij} = B(e_i\,, e_j) = -\cos\left(\frac{\Pi}{m_{ij}}\right).$$

Luego, $[q_{ij}]$ es una matriz definida positiva.

Ahora, en el otro sentido, sea $\{x_1, \dots, x_l\}$ el conjunto de vértices del grafo etiquetado X, la etiqueta de la arista (x_i, x_j) es $m_{ij} \in \mathbb{N}$, con $m_{ij} < \infty$ y sea V un espacio vectorial, tal que $\{x_1, \dots, x_l\}$ es una base de V y construimos la forma bilineal simétrica dada por

$$\begin{aligned} q_{ij} &= B(e_i\,, e_j) = -\cos\left(\frac{\Pi}{m_{ij}}\right) \quad i \neq j. \\ q_{ii} &= B(e_i, e_i) = 1. \end{aligned}$$

tal que

$$B(x\,, y) = \sum_{i,j}^{l} q_{ij} x_i y_j. \tag{14}$$

Luego, para que X sea un grafo de Coxeter, la matriz $[q_{ij}]$ debe ser positiva definida.

Finalmente si $[q_{ij}]$ es positiva definida, construimos de manera natural el grupo de reflexión, para el cual, X es su grafo de Coxeter.

3. Propiedades de los Grafos de Coxeter

En esta sección, veremos que la condición anterior, entrega una serie de propiedades sobre los grafos de Coxeter.

3.1. Árbol.

Definición 21. *Un* **árbol** *es un grafo que no tiene circuitos.*

Lema 39. *El grafo de Coxeter X es un árbol.*

Demostración. Supongamos que $(s_1, \dots, s_k)$ es un circuito en X, con $3 \leq k \leq l$, consideremos el elemento $x = e_1 + \ldots + e_k \in V$, mostraremos que $q(x) \leq 0$ contradiciendo que q es positiva definida.

Ya que $q_{ii} = 1$ y $q_{ij} = q_{ji}$, si reemplazamos en (14) tenemos:

$$q(x) = k + 2\sum_{i<j}^{k} q_{ij} \tag{15}$$

Todos los enteros $m_{1,2}, \ldots, m_{k-1,k}, m_{k,1}$ son ≥ 3, esto es equivalente a tener la existencia de una arista entre s_1 y s_2 y entre s_2 y s_3, etc. Por lo tanto, la definición de

$$q_{ij} = B(e_i\,, e_j) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)$$

obliga que los números

$$q_{12}, q_{23}, \ldots, q_{k-1k}, q_{k1} \leq \tfrac{-1}{2}. \tag{16}$$

Combinando (15) y (16), tenemos que $q(x) \leq k - k = 0$. Con lo que llegamos a la contradicción que queríamos. Por lo tanto, el grafo de Coxeter X no posee circuitos. □

Ahora usaremos trigonometría para obtener una importante restricción.

Lema 40. *Si fijamos i entre 1 y l, entonces:*

$$\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{l} (q_{ij})^2 < 1 \tag{17}$$

Demostración. Sean $\{e_1, \ldots, e_l\}$ una base de vectores unitarios de V,

$J = \{j \mid 1 \leq j \leq l,\ j \neq i,\ q_{ij} \neq 0\}$ con i fijo y $U = \bigoplus_{j\in J} < e_j >$, a continuación demostraremos que el conjunto $\{e_j\}_{j\in J}$ es una base ortonormal de U.

Como $q_{jj} = 1$ es suficiente mostrar que $q_{jk} = 0$ para todo $k \in J$ tal que $k \neq j$. Supongamos que $q_{jk} \neq 0$, entonces existe una arista entre s_j y s_k en el grafo X. Ya que $q_{ij} \neq 0$ y $q_{ik} \neq 0$, tenemos la existencia de una arista entre s_i y s_j y también una arista entre s_i y s_k, el circuito que resulta de esto contradice el Lema 39. Por lo tanto $\{e_j\}_{j\in J}$ es una base ortonormal para U.

Sean d la distancia desde e_i hasta U con $i \neq j$ y el vector $\overline{e_i}$ la proyección de e_i en U.Tenemos que la proyección ortogonal está dada por los coeficientes:

$$\overline{e_i} = \sum_{j\in J} q_{ij} e_j. \tag{18}$$

Esta igualdad está basada en el hecho que si $i \neq j$, entonces $q_{ij} = 0$. Además tenemos la identidad

$$d^2 + ||\overline{e_i}||^2 = ||e_i||^2.$$

Si reemplazamos (18) en esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} d^2 + \sum_{i \neq j} (q_{ij})^2 &= 1 \quad \text{o sea} \\ \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}} (q_{ij})^2 &= 1 - d^2 \; < \; 1. \end{aligned}$$

□

Podemos usar el lema 40 para obtener una serie de importantes restricciones en el grafo X.

LEMA 41. *Sea X un grafo de Coxeter, entonces el grafo cumple las siguientes condiciones:*

1. *Un vértice pertenece a lo más a tres aristas.*
2. *Un vértice pertenece a tres aristas sólo si todas las aristas tienen etiqueta igual a* 3.
3. *Un vértice pertenece a lo más a una arista de etiqueta mayor ó igual a* 4.
4. *Existe una arista de etiqueta mayor ó igual a* 6 *sólo si X tiene dos vértices.*

DEMOSTRACIÓN. Para todas las restricciones, usaremos la desigualdad

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{l} (q_{ij})^2 < 1$$

del lema 40 y los valores para q_{ij}.

La primera afirmación la obtenemos al considerar i fijo, supongamos que existe una arista entre s_i y s_j, luego $m_{ij} \geq 3$, con lo cual tenemos que

$$q_{ij} = B(e_i\,, e_j) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)$$

luego

$$q_{ij}^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) \geq \frac{1}{4}$$

reemplazando en la desigualdad 17 del lema 40 tenemos que la suma no puede tener más de tres sumandos no nulos, por lo tanto un vértice pertenece a lo más a tres aristas.

Los Casos 2,3 y 4 los obtenemos al considerar las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} m_{ij} = 3 \;&\Leftrightarrow\; q_{ij} = \frac{-1}{2} \\ m_{ij} = 4 \;&\Leftrightarrow\; q_{ij} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ m_{ij} = 6 \;&\Leftrightarrow\; q_{ij} = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

□

3.2. Ramificación.

Definición 22. *Sea X un árbol, un vértice es un punto de* **ramificación** *si pertenece a más de dos aristas. Una* **cadena** *es un árbol sin puntos de ramificación.*

Proposición 42. *Resultado de Reducción. Si X es un grafo de Coxeter, podemos colapsar cualquier arista de etiqueta igual a 3, es decir, eliminar la arista del grafo e identificar los vértices unidos por esta arista, entonces obtenemos un nuevo grafo de Coxeter.*

Demostración. Sea X un grafo de Coxeter y sea $I = \{1, \ldots, l\}$ el conjunto de índices de los vértices $\{s_1, \ldots, s_l\}$ de X. Además s_k y s_n los vértices tal que $m_{kn} = 3$.

Consideremos qué pasaría si dado un tercer vértice s_i tal que las aristas desde s_i hasta s_k y desde s_i hasta s_n tuvieran etiquetas distintas. Entonces, cuando identificamos s_k con s_n no es claro cual es la etiqueta de la arista que une a s_i con este nuevo vértice, sin embargo, este problema no se presenta ya que $m_{kn} = 3$ quiere decir que existe una arista entre s_k y s_n, si las otras dos aristas existieran, entonces tendríamos un circuito, contradiciendo el lema 39.

Sea $I' = (I - \{k\,, n\}) \cup \{\rho\}$ el conjunto de índices de los vértices de X'. Aquí ρ es el índice del nuevo vértice obtenido al identificar s_k con s_n con etiqueta $m_{\rho n}$ o $m_{\rho k}$.

Lo que queremos hacer, es comparar las formas cuadráticas asociadas a los grafos X y X'.

$$q : V \to \mathbb{R} \quad q(x) = \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j$$

$$q' : V' \to \mathbb{R} \quad q'(x) = \sum_{i,j} q'_{ij} x'_i x'_j.$$

Tenemos que $dim(V') = dim(V) - 1$, luego mostraremos que existe una inclusión canónica de V' en V, tal que $q' = q|_{V'}$. Así, como q es definida positiva, obliga a que q' sea definida positiva. Podemos incluir V' en V usando la siguiente condición:

$$V' \text{ el subespacio donde } x_k = x_n.$$

En otras palabras, sean

$$x_i = x'_i \quad \text{si} \quad i \neq k, n.$$

$$x_k = x_n = x'_\rho.$$

Si reemplazamos estos valores en $q(x)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} q|_{V'} &= \sum_{i,j \in I - \{k,n\}} q_{ij} x'_i x'_j + 2 \sum_{i \neq k,n} (q_{ik} + q_{in}) x'_i x'_\rho + 2q_{kn}(x'_\rho)^2 + 2(x'_\rho)^2. \\ &= \sum_{i,j \in I - \{k,n\}} q'_{ij} x'_i x'_j + (2q_{kn} + 1)(x'_\rho)^2 \\ &= q'(x) + (2q_{kn} + 1)(x'_\rho)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

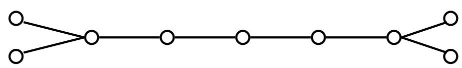
La segunda identidad de (19) está basada en el hecho que:

$$\begin{aligned} q'_{ij} &= q_{ij} \quad \text{si} \quad i,j \in I - \{k,n\} \\ q'_{i\rho} &= q_{ik} + q_{in} \quad \text{si} \quad i \notin I - \{k,n\}. \end{aligned}$$

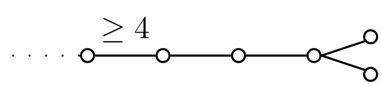
Aquí, estamos usando el hecho que no pueden haber aristas en X desde s_i hasta s_k y desde s_i hasta s_n al mismo tiempo, así, $m_{ik} = 2$ ó $m_{in} = 2$ lo que implica que $q_{ik} = 0$ ó $q_{in} = 0$. Finalmente, podemos eliminar el término $(2q_{kn} + 1)(x'_\rho)^2$ de la expresión (19), ya que $m_{kn} = 3$, implica que $q_{kn} = \frac{-1}{2}$. Luego obtenemos lo que queríamos, que era $q|_{V'} = q'$. □

Si en las tres siguientes opciones:

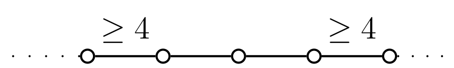
1. Dos puntos de ramificación separados por aristas de etiqueta igual a 3.



2. Un punto de ramificación y una arista de etiqueta mayor ó igual a 4 separados por aristas de etiqueta igual a 3.



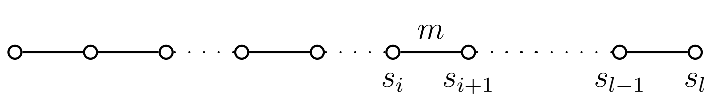
3. Dos aristas de etiqueta mayor ó igual a 4 separados por aristas de etiquetas igual a 3.



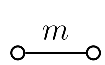
usamos iteradamente el resultado de reducción para colapsar las aristas de etiqueta igual a 3, el grafo que resulta contradice el lema 41. Por lo tanto ninguna de las posibilidades anteriores puede ocurrir en un grafo de Coxeter.

Más adelante estudiaremos los tipos de ramificación.

3.3. Cadena. En esta sección consideraremos grafos de la forma



Si $l = 2$ entonces no hay restricciones sobre m. Para $m \geq 3$, el grafo



es el grafo del grupo Diedral $\mathcal{D}_m$. Sólo para $l \geq 3$ las restricciones en X del lema 41 serán posibles, así, sólo se permite que $m \leq 5$. Por lo que consideraremos $m = 3, 4, 5$.

Lema 43. *Sean $s_1, \ldots, s_k$ los vértices de X, tal que s_i y s_{i+1}, con $1 \leq i \leq k-1$, están unidos por una arista de etiqueta igual a 3 y $v = e_1 + 2e_2 + \ldots + ke_k$. Entonces:*

$$||v||^2 = \frac{1}{2}k(k+1).$$

Demostración. Tenemos:

$$\begin{aligned} B(e_i, e_i) &= 1 \\ B(e_i, e_{i+1}) &= \frac{-1}{2} \\ B(e_i, e_j) &= 0 \quad \text{si } j \neq i \pm 1. \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} B(v, v) &= \sum_{i=1}^{k} i^2 - 2\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} i(i+1) \\ &= k^2 - \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

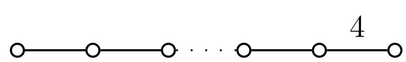
$\square$

Proposición 44. *Sean $l \geq 3$ y $3 \leq m \leq 5$, entonces X es uno de los siguientes:*

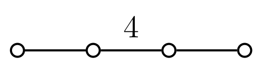
1. $m = 3$

(A_l)

2. $m = 4$

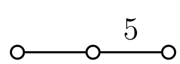


(B_l)

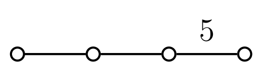


(F_4)

3. $m = 5$



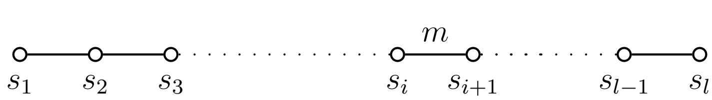
(H_3)



(H_4)

Demostración. Sólo necesitamos demostrar los casos 2 y 3.

Caso 2. Tenemos que $m = 4$, supongamos entonces que la arista de etiqueta igual a m está en el interior del grafo X. Es decir,



tenemos $i \geq 2$ y $j = l - i \geq 2$. Sean

$$\begin{aligned} v &= e_1 + 2e_2 + \ldots + ie_i \\ w &= e_l + 2e_{l-1} + \ldots + je_{i+1}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$||v||^2 = \frac{i(i+1)}{2} \quad \text{y} \quad ||w||^2 = \frac{j(j+1)}{2}$$

luego:

$$B(v,w) = ijB(e_i, e_{i+1}) = -ij\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{ij}{\sqrt{2}}.$$

Si usamos la identidad trigonométrica:

$$(B(v,w))^2 = ||v||^2||w||^2\cos^2(\theta)$$

donde θ es el ángulo entre v y w, tenemos que $\cos^2(\theta) < 1$,
así, $(B(v,w))^2 < ||v||^2||w||^2$. Sustituyendo estas igualdades, obtenemos

$$\frac{i^2j^2}{2} < \frac{ij(i+1)(j+1)}{4}$$

y por lo tanto:

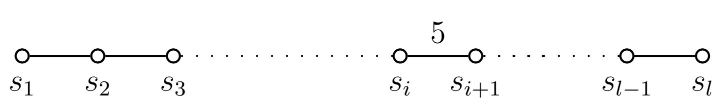
$$\begin{aligned} 2ij &< (i+1)(j+1) \\ ij &< i+j+1 \\ j &< \frac{i+1}{i-1} \end{aligned}$$

pero $i, j \geq 2$, luego

$$2 \leq j < \frac{i+1}{i-1}$$

por lo tanto $i = j = 2$. Así, X es el grafo F_4.

Caso 3. Supongamos que $m = 5$, entonces tenemos el grafo:



Nuestro argumento es similar al caso anterior, es decir, sean:

$$\begin{aligned} j &= l - i \\ v &= e_1 + 2e_2 + \ldots + ie_i \\ w &= e_l + 2e_{l-1} + \ldots + je_{i+1}. \end{aligned}$$

La inecuación $B(v,w)^2 < ||v||^2||w||^2$ nos entrega que:

$$i^2j^2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{ij(i+1)(j+1)}{4}.$$

Así:

$$ij\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad < \quad \frac{ij(i+1)(j+1)}{4}. \tag{20}$$

Como $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, tenemos:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad = \quad \frac{3+\sqrt{5}}{8} > \frac{5}{8}. \tag{21}$$

Ahora, si usamos (20) y (21), obtenemos

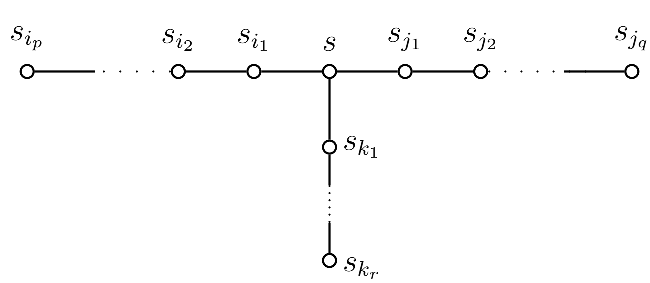
$$\begin{aligned} \frac{5}{2}ij &< (i+1)(j+1) \\ \frac{3}{2}ij &< i+j+1 \\ j &< \frac{i+1}{\frac{3}{2}i-1} \end{aligned} \tag{22}$$

pero $i,j \geq 2$, luego

$$\begin{aligned} 2 &< \frac{i+1}{\frac{3}{2}i-1} \\ i &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

luego $i = 1$ y si reemplazamos en (22) obtenemos que $j < 4$, por lo tanto $j = 2$ ó $j = 3$. Así, X es el grafo H_3 ó H_4. $\square$

3.4. Tipos de Ramificación. En esta sección, estudiaremos el caso donde existe un único punto de ramificación y todas las aristas son de orden 3. Supongamos que X es un grafo de la forma:



donde $r \leq q \leq p$.

Lema 45. *Sean $r \leq q \leq p$. Entonces:*

$$\beta = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos este lema usando trigonometría. Sean:

$$\begin{aligned} u &= e_{i_p} + 2e_{i_{p-1}} + \ldots + pe_{i_1} \\ v &= e_{j_q} + 2e_{j_{q-1}} + \ldots + qe_{j_1} \\ w &= e_{k_r} + 2e_{k_{r-1}} + \ldots + re_{k_1}. \end{aligned}$$

Como los vértices de u, v y w vienen de tres ramas distintas del árbol X, tenemos que:

$$B(u, v) = B(u, w) = B(v, w) = 0.$$

Además, el conjunto $\{x, y, z\}$ es ortogonal, donde $x = \frac{u}{||u||}, y = \frac{v}{||v||}, z = \frac{w}{||w||}$.

Sean $U =< x > \oplus < y > \oplus < z >$ el espacio vectorial de dimensión 3, generado por estos vectores y $e = e_s$ el vector correspondiente al punto de ramificación s del grafo anterior, d la distancia desde U hasta e y $\overline{e}$ el vector proyección de e en U. Entonces, tenemos la siguiente igualdad:

$$||\overline{e}||^2 + d^2 = ||e||^2 = 1. \tag{23}$$

Ahora, si reescribimos $\overline{e}$ como:

$$\overline{e} = B(e, x)x + B(e, y)y + B(e, z)z.$$

Tenemos

$$||\overline{e}||^2 = \frac{(B(e, u))^2}{||u||^2} + \frac{(B(e, v))^2}{||v||^2} + \frac{(B(e, w))^2}{||w||^2}.$$

Sigue del lema 43 que:

$$||u||^2 = \frac{1}{2}p(p + 1), \quad ||v||^2 = \frac{1}{2}q(q + 1), \quad ||w||^2 = \frac{1}{2}r(r + 1)$$

ya que e es ortogonal a todos los vértices, excepto a e_{i_1}, e_{j_1} y e_{k_1}, tenemos que:

$$B(e, u) = \frac{-1}{2}p\,, B(e, v) = \frac{-1}{2}q\,, B(e, w) = \frac{-1}{2}r.$$

Combinando todo esto, tenemos que:

$$\alpha = ||\overline{e}||^2 = \frac{1}{2}\frac{p}{p + 1} + \frac{1}{2}\frac{q}{q + 1} + \frac{1}{2}\frac{r}{r + 1}. \tag{24}$$

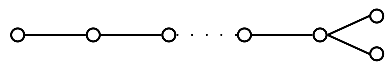
Si reemplazamos α en la condición (23) tenemos :

$$1 - \alpha = d^2 > 0.$$

Si a esto agregamos la condición $2\alpha + \beta = 3$, llegamos a la inecuación $\beta > 1$. □

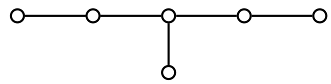
Proposición 46. *Sean X un grafo de Coxeter y $r \leq q \leq p$, entonces X es uno de los siguientes:*

1. *p arbitrario, $q = r = 1$*

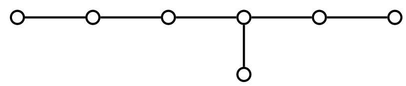


(D_l)

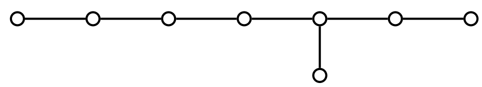
2. *$p = 2, 3, 4\,, q = 2\,, r = 1$.*



(E_6)



(E_7)



(E_8)

Demostración. Consideremos las notaciones del grafo en **3.4.**, por el lema 45 y la condición $r \leq q \leq p$ nos dicen que $\frac{3}{r+1} > 1$, tenemos que $r = 1$. Al reemplazar $r = 1$ en la inecuación del lema 45 obtenemos que

$$\frac{2}{q+1} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow q < 3.$$

Consideraremos por separado cada caso para q.

i) Si $q = 1$, entonces p es arbitrario, ya que por el lema 45 tenemos:
$$\frac{1}{p+1} > 0,$$
lo que no impone condiciones sobre p.

ii) Si $q = 2$, entonces reemplazando en el lema 45 tenemos
$$\frac{1}{p+1} > \frac{1}{6} \Longleftrightarrow p < 5.$$

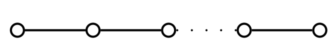
$\square$

4. Clasificación de Grupos Finitos

En esta sección daremos un resumen de los posibles grafos de Coxeter, según el tipo de grupo que corresponda.

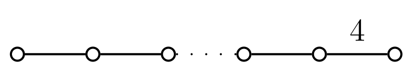
Si $(W\,, S)$ es un sistema de Coxeter irreducible, entonces su grafo de Coxeter es uno de los siguientes:

(A_l)

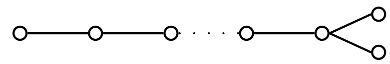


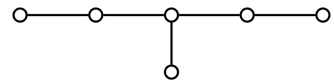
$(l \geq 1)$

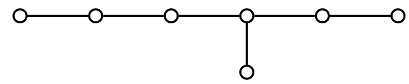
$(B_l$ ó $C_l)$

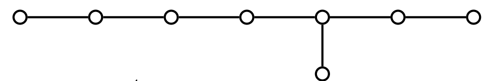


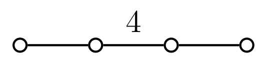
$(l \geq 2)$

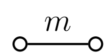
(D_l)  $(l \geq 4)$

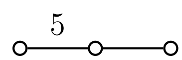
(E_6) 

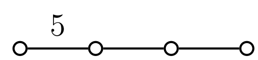
(E_7) 

(E_8) 

(F_4) 

$(G_2(m))$ 

(H_3) 

(H_4) 

OBSERVACIÓN 9. *Los sistemas de Coxeter representados por los grafos de Coxeter* $A_l, B_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4, (G_2(m)), (H_3), (H_4)$*, se presentan desde un grupo de reflexión finito.*

CAPíTULO 3

Sistemas Cristalográficos y Grupos de Weyl

DEFINICIÓN 23. *Sea Φ un sistema de raíces. Se dice que Φ es un sistema de raíces cristalográfico, si además de las condiciones* **R1** *y* **R2** *ya establecidas en el capítulo 1 sobre Φ, tenemos que:*

$$\frac{2B(u,v)}{B(v,v)} \in \mathbb{Z}.$$

Sea W el grupo de reflexiones generado por $S = \{s_u \mid u \in \Phi\}$, además tenemos V el espacio generado por el sistema simple $\Delta = \{u_1, \ldots, u_l\}$.

Si $\mathcal{L} = \mathbb{Z}u_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}u_l$ es el $\mathbb{Z}$-módulo contenido en V, entonces W actúa en $\mathcal{L}$, del siguiente modo, para todo $w \in W$, $w : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ es $\mathbb{Z}-$lineal, en otras palabras, $\mathcal{L}$ es W-equivariante.

DEFINICIÓN 24. *Un grupo de Weyl es un grupo de reflexión finito $W \subset O(V)$ que admite un reticulado $\mathcal{L} \subset V, W-$equivariante, tal que $V = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.*

Así, la acción de W en V está determinada por la acción de W en $\mathcal{L}$.

DEFINICIÓN 25. *Se dice que un grupo de Weyl W es reducible ó irreducible, si es reducible ó irreducible como grupo de reflexión finito.*

1. Preliminares

En esta sección, lo que queremos hacer es, para cada grupo de reflexión finito $W \subset O(V)$, determinar salvo isomorfismo, todos los posibles reticulados $\mathcal{L} \subset V$ que son $W-$equivariantes, tal que:

$$V = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Es posible que un grupo de reflexiones no contenga reticulados $W-$equivariantes, es decir, W no sea un grupo de Weyl. También es posible que W contenga muchos reticulados $W-$equivariantes, o sea, W es un grupo de Weyl en más de una manera.

Este hecho es paralelo al hecho que subgrupos de $GL_l(\mathbb{Z})$, que no son conjugados en $GL_l(\mathbb{Z})$, pueden ser conjugados en $GL_l(\mathbb{R})$.

EJEMPLO 5. *Considere el grupo $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y sea $t \neq 1$ la reflexión que genera a W.*
El grupo de reflexión $W \subset GL_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admite dos reticulados $W-$equivariantes distintos, es decir, no isomorfos, si escribimos $\mathcal{L} = \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y$, las diferentes acciones de t en $\mathcal{L}$, están dadas por:

$$t(x) = -x \quad y \quad t(y) = y$$

y por:

$$t(x) = y \quad y \quad t(y) = x$$

Cuando pasamos a $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, las dos acciones son equivalentes y cada una produce el grupo de reflexión $W \subset GL_2(\mathbb{R})$. Así, estas acciones son dos formas de presentar el mismo grupo W. Pero en el primer caso t es diagonalizable y en el segundo caso no lo es. Así, el segundo caso es uno de los difíciles, o sea, no se puede descomponer como una suma directa.

Así, tenemos que considerar dos casos con respecto a los grupos de Weyl.

i) Debemos determinar cuales grupos de reflexiones $W \subset O(V)$ admiten un reticulado $\mathcal{L}$, $W-$equivariante, tal que

$$V = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

ii) Para cada grupo de reflexiones W, debemos determinar todos los reticulados $W-$equivariantes $\mathcal{L} \subset V$ distinto, es decir, no isomorfos.

Discutiremos estos dos casos, estudiando la relación entre grupos de Weyl y sistemas de raíces cristalográficos.

Lo que queremos demostrar es que un grupo de reflexiones es un grupo de Weyl si y sólo si posee un sistema de raíces cristalográfico $\Delta \subset V$.

Note que los sistemas de raíces cristalográficos, dan lugar, en una manera canónica, a reticulados $\mathcal{L} \subset V$ que son $W-$equivariantes.

En nuestro estudio de grupos de Weyl, sólo trataremos con el caso en que los grupos de reflexión y los sistemas de raíces son esenciales.

Notación 10. *Sean $x, y \in V$, entonces:*

$$\langle x, y \rangle = \frac{2B(x,y)}{B(x,x)}.$$

Esta notación la usaremos para el estudio de los grupos de Weyl y los sistemas de raíces cristalográficos.

Recordemos que la condición dada por

$$(\forall\ u, v \in \Delta)(\langle u, v \rangle \in \mathbb{Z})$$

es la propiedad principal que tienen los sistemas de raíces cristalográficos, además con esta notación la reflexión s_u se puede escribir como

$$s_u(v) = v - \langle u, v\rangle u.$$

2. La Raíz del Reticulado

Sea $\Psi \subset V$ un sistema de raíces cristalográfico, las tres siguientes secciones están dedicadas a construir reticulados $W-$equivariantes canónicos, asociados con Ψ.

Definición 26. *Sea Ψ un sistema de raíces cristalográfico, entonces el conjunto Ω formado por todas las combinaciones lineales enteras de elementos de Ψ se llama la* **raíz del reticulado** *y está dada por:*

$$\Omega = \Omega(\Psi).$$

Proposición 47. *Sea Ψ un sistema de raíces cristalográfico y $\Delta = \{u_1, \dots, u_l\}$ un sistema simple en Ψ, entonces Ω cumple con:*

(i) $\Omega = \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \mathbb{Z}_{u_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{u_l}$.
(ii) Ω *es $W-$equivariante.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} = \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \mathbb{Z}_{u_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{u_l} \subset \Omega$.
(i) Primero que todo, $\mathcal{L}$ es $W-$equivariante ya que $\{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ genera a W.
Además, $s_i(u_j) = u_j - \langle u_i, u_j\rangle u_i$, donde $\langle u_i, u_j\rangle \in \mathbb{Z}$.
(ii) Ya sabemos que todo $x \in \Psi$ es de la forma $x = w(u)$, con $w \in W$ y $u \in \Delta$.
Así, $x \in \mathcal{L}$ para todo $x \in \Omega$. Por lo tanto $\mathcal{L} = \Omega$. □

Observación 11. *El hecho que Ψ es esencial es equivalente a afirmar que $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$. Veremos más adelante que la raíz del reticulado no es el único reticulado $W-$equivariante $\mathcal{L} \subset V$ tal que $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$.*

3. Co-raíz y Co-raíces del Reticulado.

Definición 27. *Sea $\Psi = \{u_1, \dots, u_t\}$ un sistema de raíces cristalográfico esencial. Para cada $u_i \in \Psi$, la co-raíz de u_i es:*

$$u_i^\nu = \frac{2u_i}{B(u_i, u_i)}$$

Proposición 48. *Las co-raíces $\Psi^\nu = \{u_1^\nu, \dots, u_t^\nu\}$ forman un sistema de raíces cristalográfico.*

Demostración. Para demostrar que Ψ^ν es un sistema de raíces cristalográfico veamos que cumple con las tres condiciones.

1. Sea $u^\nu \in \Psi^\nu$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $au^\nu \in \Psi^\nu$ si y sólo si $a = \pm 1$.

2. Debemos mostrar que $(\forall\ u^\nu,\ v^\nu\ \in\ \Psi^\nu)(s_{u^\nu}(v^\nu) \in \Psi^\nu)$.

   Pero note que $s_u = s_{u^\nu}$ para todo $u \in \Psi$, esto viene del hecho que $s_u = s_{au}$ para todo $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Así, tenemos que $W = W^\nu$ como grupo de reflexiones. Para terminar la demostración de la segunda propiedad, mostraremos que las co-raíces Ψ^ν son permutadas por W, es decir:

$$w(u^\nu) = w\left(\frac{2u}{B(u,u)}\right) = \frac{2w(u)}{B(u,u)} = \frac{2w(u)}{B(w(u),w(u))} = (w(u))^\nu.$$

3. Nos falta mostrar que $(\forall\ u^\nu,\ v^\nu\ \in\ \Psi^\nu)(\langle u^\nu, v^\nu\rangle\ \in \mathbb{Z})$.

   Si reemplazamos u^ν por $\frac{2u}{B(u,u)}$ y v^ν por $\frac{2v}{B(v,v)}$ en

$$\langle u^\nu, v^\nu\rangle = \frac{2B(u^\nu, v^\nu)}{B(u^\nu, u^\nu)} = \frac{2B\left(\frac{2u}{B(u,u)}, \frac{2v}{B(v,v)}\right)}{B\left(\frac{2u}{B(u,u)}, \frac{2u}{B(u,u)}\right)} = \frac{\frac{2B(u,v)}{B(u,u)B(v,v)}}{\frac{B(u,u)}{B(u,u)B(u,u)}} = \frac{2B(u,v)}{B(v,v)} = \langle v, u\rangle$$

   así, $\langle u^\nu, v^\nu\rangle = \langle v, u\rangle\ \in \mathbb{Z}$.

□

Proposición 49. *Sean Ψ un sistema de raíces cristalográfico y $\Delta = \{u_1, \ldots, u_l\}$ un sistema simple en Ψ, entonces $\Delta^\nu = \{u_1^\nu, \ldots, u_l^\nu\}$ es un sistema simple en Ψ^ν.*

Demostración. Necesitamos demostrar que todo elemento en Ψ^ν, puede ser escrito en combinación lineal de elementos en Δ^ν, con todos los coeficientes no negativos o no positivos. Pero como Δ es un sistema simple en Ψ, tenemos que para todo $x \in \Psi$ podemos escribir:

$$x = \sum_{u_i \in \Delta} a_i u_i.$$

Usando las identidades $x^\nu = \frac{2x}{B(x,x)}$ y $u_i^\nu = \frac{2u_i}{B(u_i,u_i)}$, tenemos:

$$x^\nu = \sum_i \frac{B(u_i,u_i)}{B(x,x)} a_i u_i^\nu = \sum_{u_i^\nu \in \Delta^\nu} b_i u_i^\nu.$$

Lo único que hemos hecho es alterar los coeficientes a_i por múltiplos positivos. □

Ejemplo 6. *Considere los sistemas de raíces de tipo B_l y de tipo C_l con las notaciones de los ejemplos dados en el capítulo 1. Sea $\{e_1, \ldots, e_l\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^l$, entonces el sistema de raíces de tipo B_l está dado por:*

$$\Psi = \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{\pm e_i\}$$

Además

$$\Psi^\nu = \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{\pm 2e_i\}$$

Que es igual al sistema de raíces de tipo C_l. Así, tenemos que

$$B_l^\nu = C_l \quad y \quad C_l^\nu = B_l.$$

Para la mayoría de los sistemas cristalográficos, tenemos que $\Psi = \Psi^\nu$.

Cuando realicemos el estudio de sistemas cristalográfico irreducibles, veremos que estos sistemas son distintos sólo en el caso del ejemplo anterior.

4. Pesos Simples y el Peso del Reticulado.

Definición 28. *Sea $\mathcal{L} \subset V$ un reticulado, tal que $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$. entonces el dual de este reticulado es:*

$$\mathcal{L}^\perp = \{x \in V \mid B(x,y) \ \in \mathbb{Z} \ \forall \ y \in \mathcal{L}\}.$$

Lema 50. *Si $\mathcal{L} = \mathbb{Z}_{u_1} \oplus \mathbb{Z}_{u_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{u_l}$, entonces $\mathcal{L}^\perp = \mathbb{Z}_{v_1} \oplus \mathbb{Z}_{v_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{v_l}$, donde $B(u_i, v_j) = \delta_{ij}$.*

Sea $\Psi \subset V$ un sistema de raíces cristalográfico esencial, así, $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$ y $\Omega^\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$, donde Ω y Ω^ν son la raíz y la co-raíz del reticulado de Ψ respectivamente.

Definición 29. *Sea $\mathcal{L}$ un reticulado en Ψ entonces el reticulado dual de $\mathcal{L}$ es*

$$\mathcal{L}^\perp = \{x \in V \mid (\forall \ y \in \mathcal{L})(B(x,y) \in \mathbb{Z})\}.$$

Definición 30. *Sean Ψ un sistema de raíces cristalográfico y Ω la raíz del reticulado, entonces $\mathcal{P}$ es el* **peso del reticulado** *en Ψ, donde $\mathcal{P}$ es el reticulado dual de Ω^ν. Usando la identidad $\langle u, x\rangle = B(u^\nu, x)$ tenemos que $\mathcal{P}$ está dado por:*

$$\mathcal{P} = \{x \in V \mid \langle u, x\rangle \ \in \mathbb{Z} \quad \forall \ u \in \Psi\}.$$

Note que la condición cristalográfica de Ψ fuerza a que

$$\Omega \subset \mathcal{P}.$$

Definición 31. *Sea $\Delta = \{u_1, \ldots, u_l\}$ un sistema simple en Ψ y $\Delta^\nu = \{u_1^\nu, \ldots, u_l^\nu\}$ un sistema simple en Ψ^ν, entonces $\{w_1, \ldots, w_l\}$ son los* **pesos simples** *con respecto a Δ, donde $B(u_i^\nu, w_j) = \delta_{ij}$.*

Ya que $\Omega^\nu = \mathbb{Z}_{v_1^\nu} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{v_l^\nu}$ tenemos:

$$\mathcal{P} = \mathbb{Z}_{w_1} \oplus \mathbb{Z}_{w_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{w_l}.$$

Como el producto interno B y el reticulado Ω^ν son invariantes bajo W, tenemos que $\mathcal{P}$ es invariante bajo W. Es decir, dado $x \in \mathcal{P}$ y $w \in W$, entonces para cualquier $y \in \Omega^\nu$, tenemos:

$$B(w(x), y) = B(x, w^{-1}(y)) \in \mathbb{Z}.$$

Así,

$$w(x) \in \mathcal{P}.$$

EJEMPLO 7. *Tomemos el sistema de raíces de tipo A_l.*
Tenemos $\Psi \subset V$, $\{e_1, \ldots, e_l\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^{l+1}$ y

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{l+1} c_i e_i \quad | \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad \sum c_i = 0 \right\}$$

$$\Psi = \{e_i - e_j \quad | \quad i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq l\}.$$

Un sistema simple para Ψ es:

$$\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_l - e_{l+1}\}.$$

Así, $\Psi = \Psi^\nu$, $\Delta = \Delta^\nu$ y los pesos simples con respecto a Δ son $\{w_1, \ldots, w_l\}$, donde:

$$w_k \quad = \quad e_1 + \cdots + e_k - \frac{k}{l+1}(e_1 + \cdots + e_{l+1}) \in V. \tag{25}$$

Note que la raíz $e_i - e_{i+1}$ y los elementos de la forma $e_1 + \ldots + e_k$ son duales entre si, es decir:

$$B\left(e_i - e_{i+1}, e_1 + \ldots + e_k\right) \quad = \quad B\left(e_i, \sum_{j=i}^{k} e_j\right) - B\left(e_{i+1}, \sum_{j=i}^{k} e_j\right) = \delta_{ik},$$

donde el elemento $e_1 + \cdots + e_k$ se opera de manera trivial con todas las raíces.

Las combinaciones lineales de estos w_k en (25), son escogidas para satisfacer la condición del subespacio $V \subset \mathbb{R}^{l+1}$.

EJEMPLO 8. *Tomemos el sistema de raíces de tipo B_l :*
Sea $\{e_1, \ldots, e_l\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^l$, entonces el sistema de tipo B_l está dado por

$$\Psi = \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{\pm e_i\}.$$

Como ya vimos anteriormente, las co-raíces

$$\Psi^\nu = \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{\pm 2e_i\}.$$

forman un sistema de raíces de tipo C_l.
Dado un sistema simple

$$\Delta = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{l-1} - e_l, e_l\}$$

de Ψ entonces

$$\Delta^\nu = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{l-1} - e_l, 2e_l\}.$$

Así, los pesos simples con respecto a Δ son:

$$w_k = e_1 + \cdots + e_k \quad \textit{para} \ \ 1 \leq k < l.$$

Además

$$w_l = \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_l).$$

EJEMPLO 9. *Consideremos el sistema de raíces de tipo C_l, tenemos:*

$$\Psi = \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{2e_i\}$$

con un sistema simple

$$\Delta = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{l-1} - e_l, 2e_l\}.$$

Luego:

$$\Delta^{\nu} = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{l-1} - e_l, e_l\}$$

y los pesos simples con respecto a Δ son:

$$w_k = e_1 + \cdots + e_k \quad \textit{para} \ \ 1 \leq k \leq l.$$

EJEMPLO 10. *Para el sistema de raíces de tipo D_l.*
Si $\{e_1, \ldots, e_l\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^l$, entonces tenemos que:

$$\Psi = \{\pm e_i \pm e_j\}$$

con un sistema simple

$$\Delta = \{e_1 - e_2, \ldots, e_{l-1} - e_l, e_{l-1} + e_l\}.$$

Tenemos $\Psi^{\nu} = \Psi$ y $\Delta^{\nu} = \Delta$, así, los pesos simples son:

$$\begin{aligned} w_k &= e_1 + \cdots + e_k \quad \textit{para} \quad 1 \leq k \leq l-2. \\ w_{l-1} &= \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_{l-1} - e_l) \\ w_l &= \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_{l-1} + e_l). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 12. *Terminaremos esta sección, describiendo con detalle la inclusión $\Omega \subset \mathcal{P}$.*

Ya que ambos reticulados tienen el mismo rango, Ω tiene índice finito en $\mathcal{P}$, la matriz de Cartan $(B(u_i^{\nu}, u_j))_{l \times l}$ nos dice como extender $\{u_1, \ldots, u_l\}$ en términos de $\{w_1, \ldots, w_l\}$.

Así, el determinante de la matriz de Cartan nos entrega el índice de Ω en $\mathcal{P}$, es decir, nos entrega el orden del grupo cuociente $\mathcal{P}/\Omega$.

5. Reticulados Equivariantes

En esta sección, explicaremos como determinar todos los reticulados $W-$equivariantes distintos $\mathcal{L} \subset V$ tal que $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$. Demostraremos que todos estos reticulados vienen de sistemas de raíces cristalográficos. Existe un sistema de raíces cristalográfico Ψ, tal que $W = W(\Psi)$ y todos los posibles reticulados $W-$equivariantes están dados por los reticulados $\Omega \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}$, donde Ω y $\mathcal{P}$ son la raíz y el peso del reticulado de Ψ respectivamente.

En particular, note que $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$ obliga a que $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$. Empezamos observando que los reticulados $\Omega \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ son automáticamente W-equivariantes.

LEMA 51. *Sea Ψ un sistema de raíces cristalográfico esencial con raíz del reticulado Ω y peso del reticulado $\mathcal{P}$, entonces todo reticulado $\Omega \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ es W-equivariante.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente mostrar que todo elemento de W actúa como la identidad en el grupo $\mathcal{P}/\Omega$. Además, ya que el grupo W es generado por reflexiones, nos podemos concentrar en mirar las reflexiones de W.

Sea $x \in \mathcal{P}$ y s_u una reflexión en W, entonces:

$$s_u(x) = x - \langle u, x\rangle u.$$

Como $x \in \mathcal{P}$, sabemos, por definición, que $\langle u, x\rangle \in \mathbb{Z}$. Así, $\langle u, x\rangle u \in \Omega$ por lo tanto:

$$s_u(x) \equiv x (mod\ \Omega).$$

Luego, todo elemento de W actúa como la identidad en el grupo $\mathcal{P}/\Omega$. □

PROPOSICIÓN 52. *Sean W un grupo de reflexiones finito esencial y $\mathcal{L}$ un reticulado W-equivariante, donde $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$, entonces existe un sistema de raíces cristalográfico esencial $\Psi \subset \mathcal{L}$, donde:*

i) $W = W(\Psi)$

ii) $\Omega \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}$, con Ω y $\mathcal{P}$ la raíz y el peso del reticulado de Ψ.

DEMOSTRACIÓN. Primero que todo, debemos encontrar el conjunto $\Psi \subset \mathcal{L}$. Además, para cada reflexión $s \in W$, definamos $\mathcal{L}_s \subset \mathcal{L}$ por:

$$\mathcal{L}_s = \{x \in \mathcal{L} \mid s(x) = -x\}.$$

Las únicas posibilidades para $\mathcal{L}_s$ son: $\mathcal{L}_s = 0$ ó $\mathcal{L}_s \cong \mathbb{Z}$, nosotros debemos tener que

$$\mathcal{L}_s \cong \mathbb{Z}.$$

Es suficiente mostrar que $\mathcal{L}_s \neq 0$. Como $s(s-1) = 1 - s$, tenemos que

$$Im(s-1) \subset \mathcal{L}_s = Ker(s+1),$$

luego es suficiente verificar que $Im(s-1) \neq 0$.

Sea $x \in \mathcal{L}$, entonces $s(x) \neq x$, la contención $W \subset O(V)$ implica que cada elemento de W actúa de forma no trivial en V. Ya que $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$, cada elemento de W también actúa de forma no trivial en $\mathcal{L}$, entonces $y = s(x) - x \neq 0$.

Note además, que $\mathcal{L}_s$ es sumando directo de $\mathcal{L}$. Equivalentemente $\mathcal{L}/\mathcal{L}_s$ es libre de torsión, es decir, si $nx \in \mathcal{L}_s$ entonces $x \in \mathcal{L}_s$. Finalmente, escojamos el conjunto

$$\Psi = \{\pm u_s \mid s \in W\}.$$

Donde $s \in W$ es una reflexión y $\pm u_s$ son los dos generadores de $\mathcal{L}_s$ para la reflexión $s \in W$. $\square$

Lema 53. *Sean $\mathcal{L}_s$ definido como antes, $\pm u_s$ los dos generadores de $\mathcal{L}_s$, entonces la colección $\Psi = \{\pm u_s \mid s \in W\}$ es un sistema de raíces cristalográfico esencial.*

Demostración. Debemos verificar las tres propiedades de sistema de raíces más la condición de ser esencial.

i) **R1**. Si $u \in \Psi$, entonces $au \in \Psi$ si y sólo si $a = \pm 1$. Esta propiedad viene de la construcción de Ψ.

ii) **R2**. Veremos que Ψ es invariante bajo W. Sean $u \in \Psi$ y $w \in W$, tenemos que $u \in \mathcal{L}_s$ para alguna reflexión $s \in W$. Como s es una reflexión, sigue de la proposición 2 que wsw^{-1} es también una reflexión.

Además, w induce un isomorfismo de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}$, ya que, dado $x \in \mathcal{L}_s$, $w(x)$ satisface

$$((wsw^{-1})(w(x)) = -w(x),$$

así, $w(x) \in \mathcal{L}_{wsw^{-1}}$.

Luego tenemos el isomorfismo

$$w : \mathcal{L}_s \longrightarrow \mathcal{L}_{wsw^{-1}}.$$

En el otro sentido, el isomorfismo $w^{-1} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ induce la función inversa dada por $w^{-1} : \mathcal{L}_{wsw^{-1}} \to \mathcal{L}_s$.

Finalmente, como u es un generador de $\mathcal{L}_s \cong \mathbb{Z}$, sigue que $w(u)$ debe ser un generador de $\mathcal{L}_{wsw^{-1}}$. Así, $w(u) \in \Psi$. Por lo tanto Ψ es invariante bajo W.

iii) **R3**. Ahora, veamos que Ψ es un sistema de raíces cristalográfico. Sean $u, v \in \Psi$, entonces por la propiedad **R2** tenemos que

$$s_u(v) = v - \langle u, v\rangle u \in \Psi \subset \mathcal{L}.$$

Ya que $v \in \mathcal{L}$, debemos tener que $\langle u, v\rangle u \in \mathcal{L}$ pero como u genera al sumando directo $\mathcal{L}_s$ de $\mathcal{L}$ y $\langle u, v\rangle u$ es un múltiplo de u, tenemos que $\langle u, v\rangle \in \mathbb{Z}$.

De esta manera, Ψ es un sistema de raíces cristalográfico.

iv) Veamos que Ψ es esencial. Como $W \subset O(V)$ es un grupo de reflexiones esencial, sabemos que cualquier sistema de raíces asociado a W es esencial.

Con esto tenemos que Ψ es un sistema de raíces cristalográfico esencial.

$\square$

Lema 54. *Sean Ψ un sistema de raíces y $\mathcal{L}$ un reticulado de Ψ, entonces $\Omega \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}$. Donde Ω y $\mathcal{P}$ son la raíz y el peso del reticulado de Ψ respectivamente.*

Demostración. Como $\Psi \subset \mathcal{L}$, tenemos que $\Omega \subset \mathcal{L}$. Para ver que $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$, usaremos un argumento similar al de la tercera parte del lema anterior.

Sean $u \in \Psi$ y $x \in \mathcal{L}$, lo que queremos mostrar es que $\langle u, x\rangle \in \mathbb{Z}$. Como $\mathcal{L}$ es invariante bajo W implica que

$$s_u(x) = x - \langle u, x\rangle u \in \mathcal{L}.$$

Si procedemos como en la tercera parte del lema anterior, podemos mostrar que sólo es posible si $\langle u, v\rangle \in \mathbb{Z}$, con $u, v \in \Psi$. $\square$

Con estos dos lemas tenemos demostrada la proposición 52. Sólo falta mostrar que Ψ es el único sistema de raíces contenido en $\mathcal{L}$. En la siguiente sección nos encargaremos de definir que quiere decir que dos sistemas de raíces sean isomorfos, así el sistema de raíces Ψ será único, salvo isomorfismo.

Observación 13. *Si miramos la definición de grupo de Weyl reducible, que dice que se puede descomponer como $W = W_1 \times W_2$ como producto de grupos de reflexión, vemos que en esta descomposición, W_1 y W_2 deben ser grupos de Weyl. Esto sigue del hecho que un grupo de Weyl $W \subset O(V)$ tiene un sistema de raíces cristalográfico asociado.*

Además: Si $W = W(\Psi)$, entonces existe una descomposición ortogonal $\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2$, donde $W_1 = W(\Psi_1)$ y $W_2 = W(\Psi_2)$. Si Ψ es cristalográfico, entonces Ψ_1 y Ψ_2 deben ser cristalográficos. Por lo tanto, W_1 y W_2 son grupos de Weyl.

6. Clasificación de Sistemas de Raíces Cristalográficos.

En esta sección haremos una clasificación de sistemas de raíces cristalográficos, usando los resultados obtenidos hasta aquí en el estudio de grupos de reflexión. En particular, la clasificación de sistemas de raíces cristalográficos y de grupos de Weyl son una mejor versión de la clasificación de grupos de reflexión.

6.1. Isomorfismo de Sistema de Raíces. El propósito es clasificar sistemas de raíces cristalográficos esenciales, usando una apropiada definición de isomorfismo de sistemas de raíces. En la sección anterior establecimos una relación entre sistemas de raíces cristalográficos y grupos de Weyl, la definición de isomorfismo de sistemas de raíces debe ser compatible, bajo esta relación, con la definición de isomorfismo de grupos de Weyl.

Definición 32. *Sean V y V' dos espacios vectoriales, entonces dos sistemas de raíces $\Psi \subset V$ y $\Psi' \subset V'$ son isomorfos, si existe un isomorfismo lineal $f : V \to V'$, donde*

a) $f(\Psi) = \Psi'$
b) $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in \Psi$.

La condición b) de esta definición, tiene varias reformulaciones, en el resto de esta sección estableceremos y discutiremos estas reformulaciones.

Proposición 55. *Sean $\Psi \subset V$ y $\Psi' \subset V'$ sistemas de raíces esenciales y $f : V \to V'$ un isomorfismo lineal tal que $f(\Psi) = \Psi'$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in \Psi$.

(ii) *Para todo* $u \in \Psi$, *tenemos un diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s_u"'] & V' \arrow[d, "s_{f(u)}"] \\ V \arrow[r, "f"'] & V' \end{tikzcd}$$

(iii) *f preserva el ángulo entre vectores y la razón de longitudes $\frac{||u||}{||v||}$ para todos los elementos $u, v \in \Psi$.*

Demostración. Sea $u \in \Psi$ y consideremos el diagrama de la proposición, como Ψ genera al espacio vectorial V, tenemos que el diagrama conmuta para todo $x \in V$.

Además

$$\begin{aligned} s_{f(u)}(f(v)) &= f((s_u(v))) \quad \forall\ u, v \in V. \qquad (26) \\ f(v) - \langle f(u), f(v)\rangle f(u) &= f(v) - \langle u, v\rangle f(u). \\ \langle f(u), f(v)\rangle f(u) &= \langle u, v\rangle f(u). \end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Por (26) tenemos que (i) y (ii) son equivalentes.

Ahora veremos la equivalencia de (i) y (iii), sabemos que

$$B(u, v) = ||u||\ ||v|| \cos(\theta)$$

que da lugar a las identidades

D1:

$$\langle u, v\rangle = \frac{2B(u, v)}{B(u, u)} = 2\frac{||u||\ ||v||}{||u||\ ||u||}\cos(\theta) = 2\frac{||v||}{||u||}\cos(\theta)$$

D2:

$$\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle = 4\cos^2(\theta).$$

De la condición **D1** tenemos que (iii) implica (i).

Para ver que (i) implica (iii), supongamos (i), es decir, $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle \forall\ u, v \in \Psi$, luego tenemos por **D2** que:

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle\langle v, u\rangle &= 4\cos^2(\theta) \\ \langle f(u), f(v)\rangle\langle f(v), f(u)\rangle &= 4\cos^2(\theta'). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\cos(\theta) = \pm\cos(\theta')$ que por **D1** tienen el mismo signo, así, $\cos(\theta) = \cos(\theta')$. Además el ángulo es positivo y menor que π, de lo cual obtenemos que $\theta = \theta'$.

También f preserva la razón, ya que

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \langle f(u), f(v)\rangle \\ \frac{2||v||}{||u||}\cos(\theta) &= \frac{2||f(v)||}{||f(u)||}\cos(\theta') \\ \frac{||v||}{||u||} &= \frac{||f(v)||}{||f(u)||}. \end{aligned}$$

□

Observación 14. *La condición (iii) de esta proposición es clave para la clasificación de sistemas de raíces cristalográficos, ya que demuestra que los isomorfismos de sistemas de raíces, se reducen a información geométrica acerca de los sistemas de raíces. Esta información geométrica, impone restricciones significativas a las posibilidades para sistemas cristalográficos. El estudio entre vectores raíz y la razón de sus longitudes, será una parte importante en el argumento que usaremos para la clasificación en las siguientes secciones.*

De esto, tenemos que podemos reducir la clasificación de grupos de Weyl esenciales, salvo isomorfismo, a los sistemas de raíces cristalográficos esenciales, salvo isomorfismo. Como ya lo hicimos anteriormente, nos acercaremos a los grupos de Weyl en términos de los reticulados equivariantes.

Primero que todo, tenemos demostrado que cada sistema de raíz cristalográfico Ψ da lugar a un número de reticulados W-equivariantes $\Omega \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}$. Con esto tenemos que los sistemas de raíces isomorfos, dan lugar a una colecciones de reticulados equivariantes.

En el otro sentido, también tenemos demostrado que todo grupo de Weyl debe presentarse de un sistema de raíces cristalográfico, consecuencia de esto, es que grupos de Weyl isomorfos deben provenir de sistemas de raíces isomorfos.

Dado un grupo de Weyl $W \subset O(V)$ con un reticulado equivariante $\mathcal{L}$, encontramos un sistema de raíces $\Psi \subset \mathcal{L}$, escogiendo para cada reflexión $s \in W$, los dos generadores $\pm u_s$ del subespacio $Im(s-1) \cong \mathbb{Z}$, siendo $\Psi = \{\pm u_s\}$.

Supongamos que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son dos reticulados equivariantes para el grupo de reflexiones $W \subset O(V)$ y que $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ es un isomorfismo lineal W-equivariante, entonces dado $s \in W$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & \mathcal{L}' \arrow[d, "s'"] \\ \mathcal{L} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{L}' \end{tikzcd}$$

conmuta, donde s' denota s cuando está actuando en $\mathcal{L}'$. Como f es un isomorfismo, induce un isomorfismo $f : Im(s-1) \to Im(s'-1)$. En particular, si s es una reflexión y $\pm u$ son los dos generadores de $Im(s-1)$, entonces s' es una reflexión y $\pm f(u)$ son los generadores de $Im(s'-1)$, así, tenemos que $f(\Psi) = \Psi'$, luego f satisface las dos condiciones para isomorfismo de sistemas de raíces.

6.2. Matrices de Cartan. En esta sección, debemos demostrar que para determinar las clases de isomorfismos de sistemas de raíces cristalográficos esenciales, nos podemos reducir a cualquiera de sus sistemas simples. Esta reducción se hace a través de la matriz de Cartan.

Definición 33. *Sean Ψ un sistema de raíces cristalográfico esencial y $\Delta = \{u_1, \ldots, u_l\}$ un sistema simple en Ψ, entonces la* **matriz de Cartan** *de Ψ es $(\langle u_i, u_j \rangle)_{l\times l}$.*

La matriz de Cartan requiere la elección de un sistema simple Δ y un orden de este sistema, esta matriz está determinada por el orden impuesto en el sistema simple Δ y está bien definida como permutaciones de filas y columnas, estas permutaciones se obtienen al alterar el orden de los elementos en Δ. Identificaremos dos matrices relacionadas por estas permutaciones. La matriz de Cartan es independiente de la elección del sistema simple Δ, ya que dos opciones de sistema simple, están ligadas por un elemento $w \in W$ y $\langle w(u_i), w(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle$ para todo $1 \leq i,\, j \leq l$.

Teorema 56. *La matriz de Cartan de Ψ determina a Ψ salvo isomorfismo.*

Demostración. Supongamos que $\Psi \subset V$ y $\Psi' \subset V'$ son dos sistemas de raíces, con sistemas simples $\Delta = \{u_1, \ldots, u_l\}$ y $\Delta' = \{u'_1, \ldots, u'_l\}$ respectivamente, tal que

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle u'_i, u'_j \rangle \quad \forall\, 1 \leq i,\ j \leq l.$$

Podemos definir el isomorfismo lineal

$$\begin{aligned} f : V &\to V' \\ u_i &\mapsto f(u_i) = u'_i. \end{aligned}$$

Para probar el teorema, debemos tener que:

i) $f(\Psi) = \Psi'$.

ii) $\langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle$ para todo $u, v \in \Psi$.

Note que no sabemos si f preserva el producto interno, si no, la condición ii) sería trivial.

Primero que todo, por la proposición 2, tenemos que:

(a) $f s_i f^{-1} = s'_i$, donde $s_i = s_{u_i}$ y $s'_i = s_{u'_i}$.

Usando que f es lineal y que la identidad $\langle u_i, u_j \rangle = \langle u'_i, u'_j \rangle$ es lineal en la segunda coordenada, tenemos que para todo $x \in V$

$$\langle u_i, x \rangle = \langle u'_i, f(x) \rangle \quad \forall\ i,\ 1 \leq i \leq l.$$

Sigue entonces que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s_i"'] & V' \arrow[d, "s'_j"] \\ V \arrow[r, "f"'] & V' \end{tikzcd}$$

conmuta para $i = 1, \ldots, l$ usamos el hecho que $s_{u_i}(x) = x - \langle u_i, x \rangle u_i$.

Podemos extender (a) de la siguiente forma:

(b) La función $f : w \to fwf^{-1}$, induce un isomorfismo entre $W(\Psi)$ y $W(\Psi')$. Esto sigue de la parte (a) y del hecho que $\{s_i\}$ genera a $W(\Psi)$ y $\{s_{i'}\}$ genera a $W(\Psi')$.

Demostremos la condición i).

En primer lugar, tenemos que $f(\Psi) \subset \Psi'$, ya que:

Si $u \in \Psi$, entonces por la parte 3 del teorema 8 existen $u_i \in \Delta$ y $w \in W$ tales que

$$w(u_i) = u.$$

Sea $w' = fwf^{-1}$, por la parte (b), $w' \in W(\Psi')$ y tenemos que:

$$f(u) = f(w(u_i) = w'(f(u_i)) = w'(u'_i).$$

Así, $f(u) \in \Psi'$.

En segundo lugar, $f(\Psi) = \Psi'$.

Sea $u' \in \Psi'$, usando la tercera parte del teorema 8 existen $u'_i \in \Delta'$ y $w' \in W(\Psi')$ tales que:

$$w'(u'_i) = u'.$$

Ahora, tomemos $u_i \in \Psi$ y $w \in W$, donde

$$\begin{aligned} f(u_i) &= u'_i \\ fwf^{-1} &= w'. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se puede escribir como $fw = w'f$. Si tomamos $u = w(u_i)$, debemos tener:

$$f(u) = f(w(u_i)) = w'f(u_i) = w'(u'_i) = u'.$$

Ahora, demostremos la condición ii).

Comencemos mostrando que en $W(\Psi')$ tenemos la identidad

$$fs_uf^{-1} = s_{f(u)}. \tag{27}$$

Si tomamos $u_i \in \Delta$ y $w \in W(\Psi)$ tal que $w(u_i) = u$, entonces por la proposición 2, tenemos que:

$$ws_iw^{-1} = s_u, \qquad \text{donde} \quad s_i = s_{u_i}$$

Sean $w' = fwf^{-1} \in W(\Psi')$ y $u_i' = f(u_i)$, entonces tenemos:

$$fs_uf^{-1} = fws_iw^{-1}f^{-1} = w'fs_if^{-1}w'^{-1} = w's_{i'}w'^{-1} = s_{w'(u_i')}.$$

Las igualdades las tenemos gracias a la parte a) y a la proposición 2.

La identidad (27) se tiene, ya que usando las identidades que están al final de la demostración de la pate i), implican que:

$$f(u) = w'(u_i').$$

Dado $x \in V$, si aplicamos ambos lados de la igualdad en 27 al elemento $f(x)$, obtenemos: Por una parte:

$$(fs_uf^{-1})(f(x)) = f(s_u(x)) = f(x - \langle u, x\rangle u) = f(x) - \langle u, x\rangle f(u).$$

Por otra parte

$$s_{f(u)}(f(x)) = f(x) - \langle f(u), f(x)\rangle f(u).$$

Como $(fs_uf^{-1}) = s_{f(u)}$, entonces queda demostrado que:

$$\langle u, x\rangle = \langle f(u), f(x)\rangle \qquad \forall\ x \in V.$$

□

6.3. Ángulos y Razón Entre Raíces. En la sección anterior, miramos los enteros $\langle u_i, u_j\rangle$ para la clasificación de sistemas de raíces cristalográficos, donde $\{u_1, \ldots, u_l\}$ es un sistema simple en un sistema de raíces, además tenemos la identidad

$$\langle u, v\rangle = 2\frac{||v||}{||u||}\cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre u y v. Así, el entero $\langle u_i, u_j\rangle$ está determinado por los posibles ángulos entre los vectores, así como por la razón de sus longitudes.

$< u, v >$	$< v, u >$	θ	$\|\|u\|\|^2/\|\|v\|\|^2$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	-
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
. 1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

Tabla 1: Relación entre raíces.

Fijaremos el estudio en estos ángulos y razones entre las longitudes. Antes de concentrarnos en sistemas simples, consideremos raíces arbitrarias $u, v \in \Psi$. Como antes, podemos usar las igualdades

D1 : $\langle u, v\rangle = 2\frac{||v||}{||u||}\cos(\theta)$.

D2 : $\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle = 4\cos^2(\theta)$.

Donde θ es el ángulo entre u y v. Como $\langle u, v\rangle \in \mathbb{Z}$ y $\langle v, u\rangle \in \mathbb{Z}$, podemos concluir de la igualdad **D2** que

$$\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle = 0, 1, 2, 3, 4$$

son las únicas posibilidades.

Caso 1: $\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle = 4$.

Por la igualdad **D2** debemos tener $\cos(\theta) = \pm 1$, así por la igualdad **D1**, $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$ y $u = \pm v$.

Caso 2: $\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle = 0, 1, 2, 3$.

Este es el caso donde $u \neq \pm v$, la Tabla 1, muestra todas las posibilidades. Asumamos que $||v|| \leq ||u||$, de la igualdad **D1** obtenemos que $|\langle u, v\rangle| \leq |\langle v, u\rangle|$.

Si suponemos ahora que $u, v \in \Delta$, entonces las posibilidades para u y v son aún más restringidas, ya que debemos tener $B(u, v) \leq 0$ y $B(v, u) \leq 0$ para todo $u \neq v$. En consecuencia: $\langle u, v\rangle < 0$ y $\langle v, u\rangle < 0$.

$\langle u, v\rangle$	$\langle v, u\rangle$	θ	$\lVert u\rVert^2/\lVert v\rVert^2$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	-
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

Tabla 2: Relación entre raíces simples.

7. Grafos de Coxeter y Diagramas de Dynkin

Con el fin de determinar Ψ, salvo isomorfismo, debemos estudiar el conjunto de los enteros $\{\langle u, v\rangle\}$, donde $u, v \in \Delta$, sólo es suficiente estudiar el ángulo entre u y v así como la razón entre sus longitudes $\frac{||u||^2}{||v||^2}$, con esto, podemos modificar el grafo de Coxeter para describir esta información. El resultado de esta modificación es lo que llamaremos diagrama de Dynkin.

En el caso de grafos de Coxeter, estamos trabajando sobre $\mathbb{R}$, recopilando información de grupos de reflexión, en el caso de diagramas de Dynkin, trabajaremos sobre $\mathbb{Z}$, recopilando información acerca de grupos de Weyl.

7.1. El grafo de Coxeter. El grafo de Coxeter recopila información acerca del ángulo entre dos raíces. Para introducir los diagramas de Dynkin, debemos alterar la notación de grafos de Coxeter, usando aristas extras entre los vértices, en vez de etiquetar aristas con enteros, asignamos un grafo X a un sistema de raíces Ψ, respetando las siguientes reglas:

1. $\Delta =$ los vértices de X.
2. Dados $u, v \in \Delta$, tal que $u \neq v$, asignamos 0,1,2 ó 3 aristas entre u y v, es decir:

Sin aristas	○ ○	$\theta = \frac{\pi}{2}$
Una arista	○—○	$\theta = \frac{2\pi}{3}$
Dos aristas	○═○	$\theta = \frac{3\pi}{4}$
Tres aristas	○≡○	$\theta = \frac{5\pi}{6}$

Este es equivalente al grafo de Coxeter de Ψ, ya que reemplazamos

○—○ ○═○ y ○≡○

por las aristas etiquetadas con los enteros 3,4 y 6 respectivamente.

7.2. El Diagrama de Dynkin. Lo que queremos es mantener la razón de las longitudes de las raíces u y v.

LEMA 57. *Sea Ψ un sistema de raíces, si Ψ es irreducible, entonces al menos dos raíces de distinto largo están en Ψ.*

DEMOSTRACIÓN. Considere el grafo de Coxeter de Ψ, si existe sólo una arista entre dos vértices $u, v \in \Delta$, entonces por la Tabla 2, u y v tienen el mismo largo, pero por el resultado de clasificación, tenemos que existe sólo una arista ó no hay arista entre los vértices, con una posible excepción. También, el grafo de Coxeter es conexo, este hecho restringe los largos de raíces, como se quería mostrar. $\square$

En el caso donde dos largos de raíz aparecen, llamamos raíces corta y larga, podemos notar que todos los vectores raíz del mismo largo están en la misma órbita bajo la acción de W. Así, Δ se divide en, a lo más, dos órbitas bajo la acción de W.

Dadas raíces de distinto largo, podemos usar flechas en el grafo de Coxeter, para aclarar la relación entre sus largos, en el caso de tener dos o tres aristas entre dos raíces (vértices), agregamos una flecha apuntando hacia la raíz más corta. luego, si $||u|| > ||v||$ tenemos

$$\underset{u}{\circ}\Rrightarrow\underset{v}{\circ}$$

Estas flechas introducidas en el grafo de Coxeter nos ayudan a diferenciar la raíz más corta de la más larga.

DEFINICIÓN 34. *Un grafo de Coxeter con estas flechas se llama un* **diagrama de Dynkin.**

8. Clasificación de Sistemas de Raíces

En esta sección veremos tres pasos para clasificar sistemas de raíces cristalográficos esenciales irreducibles.

Paso 1. Listamos las posibilidades para sistemas de raíces cristalográficos esenciales irreducibles. Esta lista se logra usando el resultado de clasificación, escogiendo todos los grafos de Coxeter donde las aristas son etiquetados por 3, 4 ó 6. Estos resultados eliminan los grafos de Coxeter de tipo H_3, H_4 y $G_2(m)$ excepto por $G_2 = G_2(6)$.

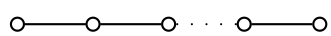
Paso 2. Para cada uno de los grafos escogidos en el *paso* 1, determine todas las formas distintas de formar un diagrama de Dynkin, es decir, introduciendo flechas en el grafo de Coxeter. Sólo en el caso del grafo de tipo B_l, podemos introducir flechas en dos direcciones diferentes.

Paso 3. Finalmente, mostremos que todas las posibilidades obtenidas en el *paso* 2, se pueden realizar a través de sistemas de raíces cristalográficos. Para completar el paso 3 de la clasificación, tenemos que mostrar también que:

TEOREMA 58. *Existe un sistema de raíces cristalográfico que tiene a cada uno de los tipos* $A_l, B_l, \ldots, F_4, G_2$ *como diagrama de Dynkin.*

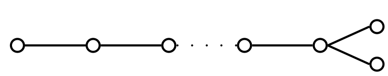
TEOREMA 59. *Si* Ψ *es un sistema de raíces cristalográfico esencial irreducible, entonces su diagrama de Dynkin debe estar en la lista más abajo.*

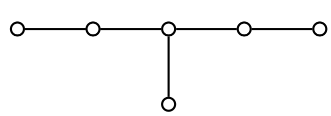
A continuación, daremos una lista de los grafos de Coxeter usando la notación de diagrama de Dynkin.

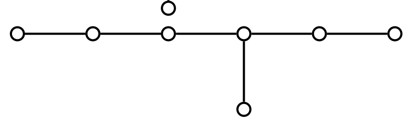
(A_l)  $(l \geq 1)$

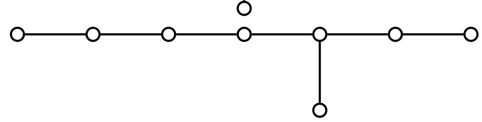
(B_l)  $(l \geq 2)$

(C_l)  $(l \geq 2)$

(D_l)  $(l \geq 4)$

(E_6) 

(E_7) 

(E_8) 

(F_4) 

(G_2) 

Diagrama de Dynkin para sistemas de raíces cristalográficos esenciales.

Bibliografía

[1] R. Kane, 2001. Reflection Groups and Invariant Theory. Springer Verlag New York.

[2] J.E. Humphreys, 1994. Reflection Groups and Coxeter Groups. Cambridge.