UNIVERSIDAD DE VALPARAISO

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

ALGUNOS MODELOS IRREDUCIBLES DEL GRUPO LINEAL GENERAL

Tesis presentada por: **Felipe Tauler Cortez**
para optar al grado de Licenciado en Matemáticas
por la Universidad de Valparaíso.

Porfesor Guía Dr: Daniel Jiménez Briones.

Valparaíso, Marzo de 2004

Índice general

Introducción

La presente tesis esta sobre las bases de la teoría de representaciones de grupos finitos.

A continuación entregaremos un resumen de cada capítulo del trabajo hecho. K representa un cuerpo finito con q elementos (q potencia de un número primo).

En el primer capítulo entregamos las herramientas generales y necesarias para poder desarrollar los problemas planteados en los capítulos posteriores.

En el *capítulo 2*, tratamos de dar una respuesta al problema de encontrar modelos para algunas representaciones irreducibles del grupo $G = GL_2(K)$ que aparecen al descomponer la representación natural de G, asociada al conjunto $X = G/H$, donde H es el subgrupo de matrices diagonales de G. La tarea será descomponer la representación natural asociada a X, desde un punto de vista geométrico, esto es encontrando las G-órbitas en X^2 con el fin de obtener alguna parametrización de los operadores de entrelazamiento asociados a $L^2(X)$, necesarios para descomponer dicha representación, en forma coherente.

Un hecho importante de hacer notar, es el siguiente:

Sea

$$X = \{(\langle u \rangle, \langle v \rangle) \mid \{u, v\} \textit{linealmente independiente}\}$$

G actúa por coordenadas sobre X. Como esta acción es **transitiva** y el estabilizador del punto $(\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle)$ es

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid ab \neq 0 \right\},$$

nuestro conjunto $X = G/H$ lo podemos pensar y ver como el conjunto de pares de rectas distintas, lo cual es un gran aporte para el trabajo de encontrar las G-órbitas en X^2. Esto último será entregado en general en el final del capítulo 4.

Un elemento notable es el número llamado razón exterior (anarmonica), asignado a los elementos (l_1, l_2, l_3, l_4) en $X \times X$, tal que $|\{l_1, l_2, l_3, l_4\}| = 4$. Este número, como veremos, parametriza a las G-órbitas en X^2 más complicadas. *Ver teorema 26.*

En el *capítulo 3*, vía trabajo de caracteres, encontramos una descomposición en irreducibles de la representación natural, asociada al conjunto cociente X, del grupo G. Para obtener esta descomposición con las respectivas multiplicidades, usamos la tabla de caracteres irreducibles del grupo G y también el carácter de la natural asociada a X. Este capítulo es complementario al segundo, pues entrega todas las representaciones irreducibles de G que aparecen al descomponer la representación natural asociada a X, así como su multiplicidad, y en particular de las cuales no se encontro un modelo en el capítulo 2. *Ver Teorema 36*.

El *capítulo 4* y final tiene dos partes. La primera de ellas, de igual modo como en capítulo 3 esta amparado por la teoría de caracteres. Este trata sobre la decomposición de la representación natural de $G = GL_3(K)$, asociada al conjunto cuociente $X = G/H$, donde H es el subgrupo de matrices diagonales de G. Veremos cuales son las representaciones irreducibles del grupo G, y sus respectivas multiplicidades, que aparecen en dicha descomposición.

Una herramienta importante de uso para nuestro objetivo serán, en este capítulo tal como en el capítulo 3, las respectivas tablas de caracteres irreducibles, es decir, los caracteres asociadas a cada representación irreducible de grupo $GL_2(K)$ y $GL_3(K)$ respectivamente.

La segunda parte de este capítulo final, será entregar una fórmula para el valor del carácter asociado a la representación natural del grupo $G_n = GL_n(K)$, asociada al conjunto cociente $X_n = G_n/T_n$, donde T_n es el subgrupo de matrices diagonales de G_n. Como veremos este valor es distinto de cero, sólo en los elementos diagonalizables de G_n, y será calculado en los representantes de las clases de conjugación de G_n. *Ver Teorema 42*.

Un resultado final, que por su simpleza no pierde su fuerza ni tampoco su belleza, es la entrega de una fórmula que permite calcular la dimensión del álgebra de entrelazamiento de la representación natural ρ del grupo G_n, asociada al conjunto cociente T_n. *Ver Teorema 43*.

CAPíTULO 1

Preliminares

1. Acción de Grupo

Sean G un grupo finito y X un conjunto. Se dice que G actúa sobre X o que X es un G-espacio si y sólo si existe una función.

$$\begin{array}{rlcl} \cdot : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (\sigma, x) & \longmapsto & \sigma \cdot x, \end{array}$$

donde $\sigma \in G, x \in X$, y además cumple las siguientes propiedades:

1. $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.
2. $e \cdot x = x$.

Observación 1. *Notemos que una acción define una relación de equivalencia en X dada por:*

$$x \sim y \leftrightarrow (\exists g \in G)(g \cdot x = y) \tag{1}$$

Teniendo presente esta relación, entregamos las siguientes definiciones:

Definición 1. *Orbitas o Clases de un elemento $x \in X$:*

$$O_x \;=\; \{y \in X \mid (\exists g \in G)(g \cdot x = y)\} = \{g \cdot x \mid g \in G\} = \;[\; x \;].$$

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre el conjunto X. Un subconjunto S de X es un sistema de representantes para $\sim$ si y sólo si cumple con.

1. $s \nsim r \quad \forall\, s,\; r \in S$.
2. $(\forall\, x \in X)(\exists\, s \in S)(x \sim s)$.

Observación 2. *Dado un sistema de representantes I para la relación de equivalencia (1) tenemos.*

$$X = \dot{\bigcup_{x \in I}} O_x.$$

Definición 2. *Sea G un grupo y X un conjunto donde G actúa, el estabilizador de un punto $x \in X$ es:*

$$Stab_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

Proposición 1. *Sea G un grupo y X un G-espacio tenemos:*

a)

$$Stab_x \leq G$$

b)

$$\begin{array}{rccl} \phi : & G/Stab_x & \longrightarrow & O_x \\ & [\ g\ ] & \longmapsto & \phi([\ g\ ]) := g \cdot x. \end{array}$$

ϕ es una funcion biyectiva

c) Si G es finito entonces.

$$|G| = |O_x||Stab_x|.$$

Definición 3. *Sea G un grupo y X un G-espacio. G actúa transitivamente en X o la acción es transitiva si y sólo si existe una sola órbita, o de otro modo:*

$$(\forall x, y \in X)(\exists g \in G)(g \cdot x = y)$$

2. Espacios Vectoriales

Definición 4. *Sea X un conjunto no vacío definimos el siguiente conjunto.*

$$\mathbb{C}^X = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \textit{ es función } \}.$$

Proposición 2. *Sea X un conjunto no vacío.*

1. *$\mathbb{C}^X$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.*
2. *Si X es un conjunto finito entonces una base para $\mathbb{C}^X$ es $\{\delta_x\}_{x \in X}$ formada por los siguientes elementos.*

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1 & si\ x = y \\ 0 & si\ x \neq y \end{cases}$$

Además la dimensión de $\mathbb{C}^X$ es igual a $|X|$.

Observación 3. *Dado G un grupo y X un conjunto donde actúa G, podemos transportar la acción al espacio vectorial $\mathbb{C}^X$, es decir, $\mathbb{C}^X$ es un G-espacio, del siguiente modo:*

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & G \times \mathbb{C}^X & \longrightarrow & \mathbb{C}^X \\ & (g, f) & \longmapsto & g \cdot f \end{array}$$

donde $g \cdot f$ esta definido por:

$$\begin{array}{rccl} g \cdot f : & X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & (g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) \end{array}$$

Proposición 3. *La función definida por:*

$$\begin{array}{rccc} \rho_g: & \mathbb{C}^X & \longrightarrow & \mathbb{C}^X \\ & f & \longmapsto & \rho_g(f) = g \cdot f \end{array}$$

es una transformación lineal biyetiva

Proposición 4. *Sea X un conjunto finito entonces*

$$\mathbb{C}^X \simeq \mathbb{C}^{|X|}$$

donde el isomorfismo esta dado por:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{C}^X & \longrightarrow & \mathbb{C}^{|X|} \\ & f & \longmapsto & (f(i))_{i \in X} \end{array}$$

Observación 4. *El isomorfismo anterior nos permite considerar el siguiente Producto Interno sobre $\mathbb{C}^X$. Considerese para este efecto X un conjunto finito, con lo cual el Producto Interno esta dado por.*

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle & : \mathbb{C}^X \times \mathbb{C}^X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \longmapsto & \langle (f,g) \rangle = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)\overline{g(x)}. \end{array}$$

$\mathbb{C}^X$ *con* $\langle\ ,\ \rangle$ *se denota por* $L^2(X)$ *o bien* $L^2(X) = (\mathbb{C}^X\ , \langle\ ,\ \rangle)$.

3. Representaciones

Definición 5. *Sea G un grupo y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, se dice que (V,ρ) es una representación (lineal compleja) de G si y sólo si .*

$$\rho : G \longrightarrow Aut(V),$$

es un homomorfismo de grupos

Si no hay lugar a confución, aludiremos a la representación de un grupo G sólo mencionando el espacio vectorial V en cuetión o al homomorfismo ρ.

Además diremos que el grado de la representación (V,ρ) es la dimensión del espacio V.

Definición 6. *Sea G un grupo y (V,ρ), (W,σ) dos representaciones de G. Diremos que $\rho \sim \sigma$ (***son isomorfas***) si y sólo si existe un ϕ un $\mathbb{C}$-isomorfismo de espacios vectoriales de V en W que cumple con lo siguiente:*

$$(\forall g \in G)(\sigma_g \circ \phi = \phi \circ \rho_g)$$

3.1. Construcciones Genéricas. Sean (V,ρ) y (W,σ) dos representaciones del grupo G. Definiremos las siguientes representaciones de G.

1. **Representación suma directa**

$$\begin{array}{rccc} \rho\oplus\sigma: & G & \longrightarrow & Aut(V\oplus W) \\ & g & \longmapsto & (\rho\oplus\sigma)_g \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} (\rho\oplus\sigma)_g: & V\oplus W & \longrightarrow & V\oplus W \\ & v\ +\ w & \longmapsto & (\rho\oplus\sigma)_g(v\ +\ w) \end{array}$$

de donde $(\rho\oplus\sigma)_g(v\ +\ w) := \rho_g(v)\ +\ \sigma_g(w)$

2. **Representación producto tensorial**.

$$\begin{array}{rccc} \rho\otimes\sigma: & G & \longrightarrow & Aut(V\otimes W) \\ & g & \longmapsto & (\rho\otimes\sigma)_g \end{array}$$

La definiremos en los generadores de $V\otimes W$.

$$\begin{array}{rccc} (\rho\otimes\sigma)_g: & V\otimes W & \longrightarrow & V\otimes W \\ & v\ \otimes\ w & \longmapsto & (\rho\otimes\sigma)_g(v\ \otimes\ w) \end{array}$$

de donde $(\rho\otimes\sigma)_g(v\ \otimes\ w) := \rho_g(v)\ \otimes\ \sigma_g(w)$

3.2. Representación Natural. Sea G un grupo y X un G-espacio. Recordemos que $L^2(X)$ es también un G-espacio.

Definición 7. *Sea $g\in G$, definimos la siguiente función.*

$$\begin{array}{rccc} \rho_g: & \mathbb{C}^X & \longrightarrow & \mathbb{C}^X \\ & f & \longmapsto & \rho_g(f) = g\cdot f \end{array}$$

con,

$$\begin{array}{rccc} g\cdot f: & X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & (g\cdot f)(x) = f(g^{-1}\cdot x). \end{array}$$

Proposición 5. *Sea ρ la función definida del siguiente modo.*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & G & \longrightarrow & Aut(L^2(X)) \\ & g & \longmapsto & \rho_g, \end{array}$$

entonces ρ es un homomorfismo de grupos.

$(L^2(X)\ ,\ \rho)$ se llama **Representación Natural** de G, asociada al G-espacio X.

Observación 5. *Recordando observación 3, la acción transportada corresponde a la representación natural.*

3.3. Representaciones de un grupo cíclico.

PROPOSICIÓN 6. *Toda representación irreducible de un grupo finito abeliano es 1-dimensional. Más aún si G es un grupo cíclico generado por a, de orden n, entonces para toda α representación irreducible de G se tiene que $\alpha(a) = r$, donde r es una raíz n-esima de la unidad.*

3.4. Subrepresentación.

DEFINICIÓN 8. *Sea (V, ρ) una representación del grupo G. Se dice que (W, ρ) es una subrepresentación de (V, ρ) si y sólo si :*

1. $W \leq V$
2. $\rho_g(W) \subseteq W, \forall g \in G$.

OBSERVACIÓN 6. *Si (W, ρ) es una subrepresentación de (V, ρ) entonces tenemos que (W, ρ) es una representación del grupo G.*

DEFINICIÓN 9. *Se dice que (W, ρ) es una representación irreducible de G si y sólo si , no existe subrepresentación propia de (W, ρ), en caso contrario se dice que la representación es reducible.*
También definimos $\widehat{G}$ como el conjunto que esta formado por todas las representaciones irreducibles de G.

4. Producto Interno Invariante

DEFINICIÓN 10. *Sea (V, ρ) una representación de un grupo G y $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno sobre V, se dice que este producto interno es invariante por la acción de G si y sólo si ocurre lo siguiente:*

$$\langle\ \rho_g(u), \rho_g(v)\ \rangle = \langle\ u, v\ \rangle\ \ \forall u, v \in V, \forall g \in G.$$

PROPOSICIÓN 7. *Sea (V, ρ) una representación (con producto interno invariante) del grupo G y (U, ρ) una subrepresentación de (V, ρ), entonces $(U^{\perp}, \rho)$ es una subrepresentación de (V, ρ).*

OBSERVACIÓN 7. *Sea (V, ρ) una representación de un grupo G y (U, ρ) una subrepresentación de (V, ρ). La proposición anterior nos entrega una manera de construir una nueva subrepresentación es decir, encontrar el subespacio ortogonal de U, mediante un producto interno invariante por la acción de G.*

PROPOSICIÓN 8. *El producto interno de la representacion natural $L^2(X)$ del grupo G finito dado por.*

$$\begin{array}{rcl} \langle\ ,\ \rangle\ : \mathbb{C}^X \times \mathbb{C}^X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f, g) & \longmapsto & \langle f, g\rangle = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)\overline{g(x)}. \end{array}$$

es G-invariante.

5. Operadores de Entrelazamiento

Sean (V, ρ), (W, σ) dos representaciones del grupo G y $\phi : V \longrightarrow W$ un endomorfismo. Se dice que ϕ es un operador de entrelazamiento de ρ con σ si y sólo si

$$(\forall g \in G)(\sigma_g \circ \phi = \phi \circ \rho_g)$$

NOTACIÓN 1. *$Hom_G(V, W) = \{\phi : V \longrightarrow W \mid \phi$ es un operador de entrelazamiento $\}$. Si $V = W$, $Hom_G(V, W) = End_G(V)$.*

OBSERVACIÓN 8. *$Hom_G(V, W)$ tiene una estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial.*

PROPOSICIÓN 9. *Sea (V, ρ) una representación de G, $\phi \in End_G(V)$ y W el espacio propio asociado al autovalor λ del operador ϕ entonces.*

$$\rho_g(W) \subseteq W, \quad \forall g \in G,$$

es decir, (W, ρ) es una subrepresentación de (V, ρ)

PROPOSICIÓN 10. *Si ϕ_1, $\phi_2 \in End_G(L^2(X))$ tenemos que $\phi_1 \circ \phi_2 \in End_G(L^2(X))$*

DEFINICIÓN 11. *Sea $\phi \in End(L^2(X))$, y $[\phi]_B = (a_{i,j})$ la matriz asociada a ϕ respecto de B, donde $B = \{\delta_x \mid x \in X\}$. Se define la siguiente función.*

$$\begin{array}{rccl} K: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (i,j) & \longmapsto & K(i,j) := a_{i,j}, \end{array}$$

llamada función de coeficientes matriciales, que es única para cada ϕ.

DEFINICIÓN 12. *Sea X un conjunto donde actúa G, se define el conjunto de los núcleos como.*

$$N(X, G) = \{K : X \times X \longrightarrow \mathbb{C} \mid (\forall x, y \in X)(\forall g \in G)[K(g \cdot x, g \cdot y) = K(x, y)]\},$$

OBSERVACIÓN 9. *N(X,G) tiene una estructura de $\mathbb{C}$-álgebra, dada por:*

$$\begin{array}{rlcl} i) & (K + L)(x, y) & = & K(x, y) + L(x, y). \\ ii) & (\alpha K)(x, y) & = & \alpha(L(x, y)). \\ iii) & (K * L)(x, y) & = & \sum_{z \in X} K(x, z)L(z, y). \end{array}$$

Con $K, L \in N(X, G)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

PROPOSICIÓN 11. *Sea X un conjunto donde el grupo G actúa. Dado I un sistema de representantes para la acción de G en $X \times X$. Entonces una base para $N(X, G)$ es la formada por los siguientes elementos.*

$$\begin{array}{rccl} K_z: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, y) & \longmapsto & K_z(x, y) := \begin{cases} 1 & si\ (x, y) \in O_z \\ 0 & si\ (x, y) \notin O_z, \end{cases} \end{array}$$

donde $z \in I$.

PROPOSICIÓN 12. *Sean* G *un grupo y* X *un conjunto donde actúa* G*. Además* $\phi \in End(L^2(X))$ *y* K_ϕ *la función de coeficientes matriciales asociada a* ϕ *entonces.*

$$\phi \in End_G(L^2(X)) \text{ si y sólo si } K_\phi \in N(X,G).$$

donde $\phi(\delta_x) = \sum_{y \in X} K_\phi(y,x)\delta_y$

PROPOSICIÓN 13. *Sean* G *un grupo y* X *un conjunto donde actúa* G*, entonces*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & N(X,G) & \longrightarrow & End_G(L^2(X)) \\ & K & \longmapsto & \psi(K) := \phi_K. \end{array}$$

donde $\psi_K(\delta_x) = \sum_{y \in X} K(y,x)\delta_y$*, es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

OBSERVACIÓN 10. *Los dos Lemas más importantes de la Teoría de Representaciones de Grupo son los siguientes:*

1. *Lema de* **Schur**.
2. *Lema de* **Maschke**.

LEMA 1. *(***Schur***) Sean* G *un grupo y* (V,ρ)*,* (W,σ) *dos representaciones irreducibles de* G*. Entonces*

1. $V \simeq W \Leftrightarrow Hom_G(V,W) \simeq \mathbb{C}$.
2. $V \not\simeq W \Leftrightarrow Hom_G(V,W) = \{0\}$

Enunciaremos dos teoremas antes de dar a conocer al lema de Maschke

TEOREMA 14. *Sea* G *un grupo finito, y* (V,ρ) *una representación de* G *entonces existe un producto escalar* $\langle\ ,\ \rangle$ *sobre* V *que es* G*-invariante, es decir:*

$$\langle\ \rho_g(u), \rho_g(v)\ \rangle = \langle\ u, v\ \rangle \ \ \forall u,v \in V, \forall g \in G.$$

TEOREMA 15. *Sea* G *un grupo,* (V,ρ) *una representación de dimensión finita de* G *y* (W,ρ) *una subrepresentación de* (V,ρ) *entonces existe* $(W^\perp,\rho)$ *subrepresentación de* (V,ρ) *tal que:*

$$V = W \oplus W^\perp.$$

LEMA 2. *(***Maschke***) Sea* G *un grupo entonces toda representación de* G *es suma directa de representaciones irreducibles.*

TEOREMA 16. *Sea* G *un grupo y* (V,ρ) *una representación de* G*, tal que*

$$V = m_1W_1 \oplus m_2W_2 \cdots \oplus m_rW_r,$$

$W_i \not\simeq W_j$ *y* W_i *irreducible* $\forall\ i,\ j \in \{1,2,\cdots,r\}$*, entonces*

$$dim_{\mathbb{C}}\ Hom_G(V,V) = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_r^2.$$

6. Caracteres

Definición 13. *Sea G un grupo y (V,ρ) una representación de G de grado finito. El carácter χ_ρ de la representación (V,ρ) es función definida por:*

$$\begin{array}{rccl} \chi_\rho : & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & g & \longmapsto & \chi_\rho(g) := Tr(\rho_g). \end{array}$$

Observación 11. *Sea G un grupo y $C(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(gxg^{-1}) = f(x)\}$. Tenemos que $C(G)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y hereda el producto escalar de $L^2(G)$.*

Observación 12. *Sea G un grupo. Una base para $C(G)$ es la formada por los siguientes elementos.*

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 1 & si\ x \in C \\ 0 & si\ x \notin C. \end{cases}$$

donde C es una clase de conjugación de G.

Observación 13. *El carácter asociado a una representación de un grupo es una función de clase, es decir, es constante sobre las clases de conjugación del grupo.*

Teorema 17. *Sea G un grupo. Los caracteres asociados a cada representación irreducible de G forman una base ortonormal de $C(G)$. Así, la dimensión de $C(G)$ es la cantidad de representaciones irreducibles en G o el cardinal de $\widehat{G}$.*

Corolario 1. *Sea G un grupo y (V,ρ) una representación de G entonces.*

$$(V,\rho) \text{ es irreducible} \Leftrightarrow \langle\ \chi_\rho\ ,\ \chi_\rho\ \rangle\ =\ 1$$

Corolario 2. *Sea G un grupo, (V,ρ) una representación de G tal que*

$$V = m_1W_1 \oplus m_2W_2 \cdot\cdot \oplus m_{\sigma_1}W_{\sigma_1} \oplus m_{\sigma_2}W_{\sigma_2} \cdot\cdot \oplus m_{\sigma_r}W_{\sigma_r},$$

donde $W_i \not\simeq W_j$ y W_i irreducible $\forall\ i,\ j \in \{1,2,\cdots,r\}$.

$$\langle\ \chi_{\sigma_1}\ ,\ \chi_\rho\rangle = m_{\sigma_1}$$

Corolario 3. *Sea G un grupo y (V,ρ) una representación de G tal que,*

$$V = m_1W_1 \oplus m_2W_2 \cdots \oplus m_rW_r$$

donde $W_i \not\simeq W_j$ y W_i irreducible $\forall\ i,\ j \in \{1,2,\cdots,r\}$ entonces,

$$\langle\ \chi_\rho\ ,\ \chi_\rho\ \rangle\ =\ m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_r^2.$$

Corolario 4. *Sea G un grupo y (V,ρ), (W,σ) dos representaciones de G entonces*

$$\rho\ \sim\ \sigma\ \Leftrightarrow\ \chi_\rho\ =\ \chi_\sigma$$

Observación 14. *Sean G un grupo y (V,ρ),(W,σ) dos representaciones irreducibles de G con χ_ρ y χ_σ los caracteres asociados a cada representación respectivamente. Por el teorema 17 tenemos lo siguiente.*

$$\langle \chi_\rho \ , \ \chi_\sigma \rangle = \begin{cases} 1 & si \ \ V \simeq W \ (\rho \sim \sigma) \\ 0 & si \ \ V \not\simeq W \ (\rho \not\sim \sigma) \end{cases}$$

Proposición 18. *Sea G un grupo y X un G-espacio. Consideremos la representación natural $(L^2(X), \rho)$ de G, entonces,*

$$\chi_\rho(g) \ = |\{x \in X \mid \ g \cdot x \ = \ x\}|.$$

CAPíTULO 2

Modelos de Representaciones de $GL_2(K)$

1. Preliminares

En esta primera etapa consideraremos $G = GL_2(K)$, (K es un cuerpo finito con q elementos, donde q es potencia de un primo) y sea H es el grupo de matrices diagonales.
Nuestro objetivo será descomponer la representación natural asociada a G, tomando $X = G/H$.

Como primer paso, encontraremos un sistema de representantes para el conjunto cuociente X.

Sabemos que $G = GL_2(K)$ se escribe del siguiente modo.

(2) $$G = \ B\ W\ B,$$

donde

$$W = \{\ E_\sigma\ \mid\ \sigma \in S_2\ \}$$

es el grupo de **Weyl**, y E_σ la siguiente transformación

$$\begin{array}{cccl} E_\sigma : & K^2 & \longrightarrow & K^2 \\ & \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 & \longmapsto & E_\sigma(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) := \alpha_1 e_{\sigma(1)}\ +\ \alpha_2 e_{\sigma(2)} \end{array}$$

Ademaś B es el grupo definido por.

$$B = \{A \in GL_2(K)\ \mid\ \text{A es triangular superior}\}$$

llamado grupo de **Borel**. Así tenemos que.

$$G = B\ E_{(1)}\ B\ \cup\ B\ E_{(12)}\ B.$$

Consideraremos a E_σ como la matriz asociada a la base canónica, con lo cual tenemos la siguiente identificación.

1. $E_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $E_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Con la notación recientemente dada realicemos algunos cálculos para dar solución a nuestro primer objetivo, encontrar un sistema de representantes para X.

Consideremos $g \in G$, con lo cual existen $b, b^{'} \in B$, de este modo g se puede escribir de la siguiente forma.

$$g = b\ E_{(1)}\ b^{'} \quad o \quad g = b\ E_{(12)}\ b^{'}.$$

Analicemos los casos anteriores.
Sea
$b = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ y $b^{'} = \begin{pmatrix} x^{'} & y^{'} \\ 0 & z^{'} \end{pmatrix}$, con lo cual tenemos que.

$$b\ E_{(1)}\ b^{'} = \begin{pmatrix} xx^{'} & xy^{'} + yz^{'} \\ 0 & zz^{'} \end{pmatrix},$$

donde $xx^{'}, zz^{'} \in K^*$, pues $b, b^{'} \in B$. Por lo tanto.

$$BE_{(1)}B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ \mid \ ac \neq 0 \right\} = B.$$

Además tenemos que.

$$b\ E_{(12)}\ b^{'} = \begin{pmatrix} x^{'}y & yy^{'} + xz^{'} \\ zx^{'} & zy^{'} \end{pmatrix},$$

con $zx^{'} \in K^*$, pues $b, b^{'} \in B$. Lo cuál podemos re-escribir, pensando en las restricciones como sigue.

$$\begin{pmatrix} a & s \\ r & b \end{pmatrix},$$

donde $a, s, b \in K$ y $r \in K^*$. Simplificando un poco más la escritura anterior, con el fin de presentar un sistema de representantes para G/H, tenemos.

i) $\begin{pmatrix} a & s \\ r & b \end{pmatrix}$, con $a, b \in K$ y $rs \in K^*$

ii) $\begin{pmatrix} p & 0 \\ r & s \end{pmatrix}$, con $r, ps \in K^*$.

Así proponemos el siguiente sistema de representantes o tipos de clase para G/H.

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ \mid \ t \neq 0,\ ab \neq 1,\ c \neq 0 \right\}$$

NOTACIÓN 2. *Denotaremos por:*

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathcal{B}(a,b) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}, \ \mathcal{C}(i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

los respectivos tipos de clases. Además tenga presente que las clases las estamos anotando con parentesís cuadradados.

A continuación verificaremos que realmente el conjunto dado anteriormente es un sistema de representantes para G/H.

Es fácil notar que ningún tipo de clase esta relacionado entre si (es decir, del tipo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$), debido a la decomposición 2. En segundo lugar tenemos lo siguiente.

i) $\mathcal{A}(t) \sim \mathcal{A}(t^{'})$ si y sólo si $t = t^{'}$,

ii) $\mathcal{B}(a,b) \sim \mathcal{B}(c,d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$,

iii) $\mathcal{C}(i) \sim \mathcal{C}(j)$ si y sólo si $i = j$.

Lo último que nos queda por hacer notar es que $|G/H| = |\mathcal{J}|$. Para ello observemos los siguientes puntos.

i) El número de clases distintas del tipo $\mathcal{A}(t)$ es igual a q.

ii) El número de clases distintas del tipo $\mathcal{C}(i)$ es igual a $(q-1)$.

iii) El número de clases distintas del tipo $\mathcal{B}(a,b)$ es igual a $(q-1)(q-1)+q$.

Así tenemos.

$$q + (q-1)(q-1) + q + (q-1) = q + q^2.$$

Lo cual nos prueba que el conjunto $\mathcal{J}$ es un sistema de representantes para G/H.

2. El G-espacio asociado

Como segundo paso, asociaremos al conjunto cuociente G/H un G-espacio. Para ello entregaremos a continuación algunas proposiciones y observaciones.

Al considerar un elemento $g \in M_2(K)$ lo miraremos formado por sus vectores columnas, pues tenemos la siguiente correspondencia.

$$\begin{array}{rccc} T_{(e_1,e_2)}: & M_2(K) & \longrightarrow & K^2 \times K^2 \\ & g & \longmapsto & T_{(e_1,e_2)}(g) := (g\ e_1, g\ e_2). \end{array}$$

Teniendo esto presente, usaremos la siguiente notación: Dado $g \in M_2(K)$; $g = (v\ w)$, donde v es el primer vector columna y w es el segundo vector columna que forman g, inversamente dados dos elementos en $K^2 - \{0\}$ podemos agruparlos en una matriz, mirandolos como las columnas de dicha matriz.

Observar que el hecho de considerar una matriz formada por sus vectores columnas no es inherente solo a matrices 2×2, sino a matrices cuadradas $n \times n$, en general.

Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de rectas vectoriales, el cual lo podemos presentar del modo siguiente.

$$\{\langle x \rangle \mid x \in K^n - \{0\}\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Por esta razón usaremos la notación l_x para dar a conocer un elemento de $\mathcal{L}$, entendiendo que $l_x = \langle x \rangle$, con $x \in K^n - \{0\}$.

Proposición 19. *Sean $l_u = \langle u \rangle$ y $l_v = \langle v \rangle$, donde $u, v \in K^2 - \{0\}$, entonces*

$$l_u \;=\; l_v \text{ si y sólo si } \{u, v\} \text{ es un conjunto linealmente dependiente.}$$

Proposición 20. *Sea $g \in M_n(K)$, con K cuerpo finito, luego $g \in GL_n(K)$ si y sólo si los vectores columna(fila) que forman g son linealmente independientes.*

Observación 15. *Sea $G = GL_2(K)$ y H es el grupo de matrices diagonales. Consideremos el conjunto*

$$Y = \{(l, l^{'}) \in (\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \mid l \neq l^{'}\} = \{(l, l^{'}) \mid l \neq l^{'}\}$$

Sabemos que G actúa transitivamente sobre $\mathcal{L}$ del siguiente modo.

$$\begin{array}{ccl} G \times \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ (g\ ,\ l_x) & \longmapsto & g \cdot l_x \ = l_{g \cdot x} :=\ \langle gx \rangle. \end{array}$$

Con esta información G actúa sobre Y.

$$g \cdot (l\ ,\ l^{'}) \ :=\ (g \cdot l\ ,\ g \cdot l^{'}).$$

Observemos que la acción anteriormente citada es también transitiva, pues dado $(\langle x \rangle, \langle y \rangle) \in Y$ existe $g = (x\ y) \in GL_2(K)$ tal que

$$g \cdot (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle) = (\langle x \rangle, \langle y \rangle),$$

en otros términos existe una única órbita y esa es $O_{(\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle)}$.
Calculemos de inmediato el estabilizador del punto en cuestión, para ello analicemos la siguiente igualdad.

Sea $g = (x\ y) \in GL_2(K)$, tal que

$$g \cdot (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle) = (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle).$$

De la cual obtenemos.
i) $\langle x \rangle = \langle e_1 \rangle$
ii) $\langle y \rangle = \langle e_2 \rangle$,
por lo tanto $x = \lambda e_1$, $y = \mu e_2$, con $\lambda, \mu \in K^*$. Así

$$Stab_{(\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle)} \ =\ H.$$

Considerando la observación anterior y la proposición 1 trasladamos nuestro $X = G/H$ original al nuevo $Y \ =\ O_{(\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle)}$ geométrico. Así construimos la siguiente correspondencia.

$$\begin{array}{lcc} Y & \longleftrightarrow & X \\ O_{\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle} & \longleftrightarrow & G/Stab_{\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle} \\ (\langle e_1\rangle, \langle t(e_1)+e_2\rangle) & \leftrightarrow & \mathcal{A}(t) \\ (\langle a(e_1)+e_2\rangle, \langle (e_1)+b(e_2)\rangle) & \leftrightarrow & \mathcal{B}(a,b) \\ (\langle i(e_1)+e_2\rangle, \langle e_2\rangle) & \leftrightarrow & \mathcal{C}(i) \end{array}$$

Observemos que en general tenemos la siguiente identificación. Sea $g = (x\ y)$, donde $[\ g\ ]$ representa la clase del elemento g.

$$\begin{array}{ccc} O_{\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle} & \longleftrightarrow & G/Stab_{\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle} \\ (\langle x\rangle, \langle y\rangle) & \leftrightarrow & [\ g\ ] \end{array} \tag{3}$$

Nuestra tarea ahora es encontrar las G-órbitas Y^2, pues con esta información, podemos empezar la construcción de los operadores de entrelazamiento asociado a cada doble órbita, para luego poder descomponer la representación natural.

3. Dobles clases

A continuación daremos a conocer las G-órbitas en Y^2, además de sus estabilizadores y respectivos cardinales. Para llevar a cabo esta nueva tarea ocúparemos con mayor fuerza la proposición 19 y la idea de ver a una matriz formada por sus vectores columnas.

Desarrollaremos el estudio de las dobles clases ocupando la notación que dimos para los tipos de clases en G/H, pero estaremos pensando, via la correspondencia 3, en su respectivo par de rectas.

Para efecto de no saturar con demasiados parentesís los cálculos ocúparemos el siguiente hecho. Sea I conjunto no vacío.

$$\begin{array}{rccl} T: & I^2 \times I^2 & \longrightarrow & I^4 \\ & [(x,y),(z,w)] & \longmapsto & T((x,y),(z,w)) := (x,y,z,w), \end{array}$$

es una función biyectiva.

1. Órbita y estabilizador asociada al par $(\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(0))$,

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(0))} = \{\ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(0))\ \mid\ g \in G\ \}.$$

Sea $g = (v\ w) \in G$. Así tenemos lo siguiente:

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(0))} = \{\ g \cdot ((\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle), (\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle))\ \mid\ g \in G\}.$$

Usando la proposición 20 podemos re-escribir lo anterior.

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(0))} = \{\ (\langle v\rangle, \langle w\rangle, \langle v\rangle, \langle w\rangle)\ \mid\ \{v,w\} \text{ linealmente independiente }\}.$$

Y ahora por proposición 19 tenemos lo siguiente.

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(0))} = \{\ (l_1, l_2, l_1, l_2)\ \mid\ l_1 \neq l_2\ \}.$$

Calculemos ahora el estabilizador de $(\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(0))$.

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(0))} \;=\; \{\ g \in G \mid g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(0)) \;=\; (\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(0))\ \}$$

Analicemos que matrices cumplen la proposición que define el estabilizador. Para ello sea $g = (v\ w)$ tal que,

$$g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(0)) \;=\; (\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(0)).$$

De donde,

$$(\langle v \rangle, \langle w \rangle) = (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle).$$

Por lo tanto $v = \lambda e_1$ y $w = \mu e_2$, con $\lambda, \mu \in K - \{0\}$. Con lo cual.

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(0))} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda\mu \neq 0 \right\}$$

Además.

$$\mid O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(0))} \mid \;=\; q(q+1).$$

2. Órbita y estabilizador asociada al par $(\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(0,0))$,

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,0))} = \{\ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(0,0)) \mid g \in G\ \}.$$

Sea $g = (v\ w) \in G$. Así tenemos lo siguiente:

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,0))} \;=\; \{\ (\langle v \rangle, \langle w \rangle, \langle w \rangle, \langle v \rangle) \mid \{v, w\} \text{ linealmente independiente }\}.$$

De lo cual obtenemos.

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,0))} = \{\ (l_1, l_2, l_2, l_1) \mid \ l_1 \neq \ l_2\ \}.$$

Ahora calculemos el estabilizador de $(\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(0,0))$.

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,0))} \;=\; \{\ g = (v\ w) \in G \mid g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(0,0)) \;=\; (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(0,0))\ \}$$

Analicemos la igualdad que determina el estabilizador, y encontremos las matrices que la satisfacen, es decir

$$g \cdot \mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0)\ ;\ g \cdot \mathcal{B}(0,0) = \mathcal{B}(0,0).$$

De la primera igualdad tenemos.

$$(\langle w \rangle, \langle v \rangle) = (\langle e_2 \rangle, \langle e_1 \rangle).$$

De donde $v = \lambda e_1$ y $w = \mu e_2$, con $\lambda, \mu \in K - \{0\}$. Por lo tanto

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,0))} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda\mu \neq 0 \right\}$$

Por consiguiente,

$$\mid O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,0))} \mid = q(q+1).$$

3. Órbita y estabilizador asociada al par $(\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(1))$,

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(1)} = \{ \ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(1) \ \mid \ g \in G \ \}.$$

Sea $g = (v \ w) \in G$. Así tenemos lo siguiente:

$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(1)} = \{ \ (\langle v\rangle, \langle w\rangle, \langle v\rangle, \langle v + w\rangle) \mid \{v, w\}$ linealmente independiente $\}$.

Observemos lo siguiente.

i) $\{v, v + w\}$ es un conjunto linealmente independiente, lo cual ya era claro pues $g \cdot \mathcal{A}(1) \in X$.

ii) Además tenemos que $\langle w\rangle \neq \langle v + w\rangle$.

Ahora ocupando la proposición 19 y los items anteriores tenemos lo siguiente.

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(1))} = \{ \ (l_1, l_2, l_1, l_3) \mid \#\{l_1, l_2, l_3\} = 3\}.$$

Calculemos el estabilizador de $(\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(1))$.

$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(1))} = \{ \ g \in G \mid g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(1)) = (\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(1)) \ \}$

Analicemos la siguiente igualdad.

$$(\langle v\rangle, \langle w\rangle, \langle v\rangle, \langle v + w\rangle) = (\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_1\rangle, \langle e_1 + e_2\rangle).$$

De donde obtenemos.

i) $v = \lambda e_1$ y $w = \mu e_2$, con $\lambda, \mu \in K^*$.

ii) $\langle v + w\rangle = \langle e_1 + e_2\rangle$, de donde deducimos que $\lambda = \mu$.

Por lo tanto,

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(1))} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \neq 0 \right\}.$$

Así,

$$\mid O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{A}(1))} \mid = q(q+1)(q-1).$$

Observación 16. *Para los cálculos de los casos* 4, 5, 6, *se resuelven de manera análoga a los usados para el caso* 3.

4. Órbita y estabilizador asociada al par $(\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(0,1))$,

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,1)} = \{ \ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(0,1) \ | \ g \in G \ \}.$$

Sea $g = (v \ w) \in G$. Así tenemos lo siguiente:

$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,1)} \ = \ \{ \ (\langle v \rangle, \langle w \rangle, \langle w \rangle, \langle v \ + \ w \rangle) \ | \ \{v, w\}$ linealmente independiente $\}$.
De lo cual tenemos,

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,1))} = \{ \ (l_1, l_2, l_2, l_3) \ | \ \#\{l_1, l_2, l_3\} = 3\}.$$

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,1))} \ = \ \{ \ g \in G \ | \ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(0,1)) \ = \ (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(0,1)) \ \}.$$

De donde,

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,1))} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ | \ \lambda \neq 0 \right\}.$$

Así,

$$| \ O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,1))} \ | \ = \ q(q+1)(q-1).$$

5. Órbita asociada al par $(\mathcal{A}(0), \mathcal{C}(1))$,

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{C}(1)} = \{ \ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{C}(1) \ | \ g \in G \ \}.$$

Sea $g = (v \ w) \in G$. Así tenemos lo siguiente:

$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{C}(1)} \ = \ \{ \ (\langle v \rangle, \langle w \rangle, \langle v \ + \ w \rangle, \langle w \rangle) \ | \ \{v, w\}$ linealmente independiente $\}$.
De lo cual,

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{C}(1)} = \{ \ (l_1, l_2, l_3, l_2) \ | \ \#\{l_1, l_2, l_3\} = 3\}.$$

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{C}(1))} \ = \ \{ \ g \in G \ | \ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{C}(1)) \ = \ (\mathcal{A}(0), \mathcal{C}(1)) \ \}.$$

Así,

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{C}(1))} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ | \ \lambda \neq 0 \right\}.$$

Con lo cual,

$$| \ O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{C}(1))} \ | \ = \ q(q+1)(q-1).$$

6. Órbita asociada al par $(\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1,0))$,

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,0)} = \{ \ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1,0) \ | \ g \in G \ \}.$$

Sea $g = (v \ w) \in G$. Así tenemos lo siguiente:

$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,0)} \ = \ \{ \ (\langle v \rangle, \langle w \rangle, \langle v \ + \ w \rangle, \langle v \rangle) \ | \ \{v, w\}$ linealmente independiente $\}$.

Del mismo modo obtenemos,

$$O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,0)} = \{ \ (l_1, l_2, l_3, l_1) \ | \ \#\{l_1, l_2, l_3\} = 3\}.$$

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,0))} \ = \ \{ \ g \in G \ | \ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1,0)) \ = \ (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1,0)) \ \}$$

De donde tenemos,

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,0))} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ | \ \lambda \neq 0 \right\}.$$

Así,

$$| \ O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,0))} \ | \ = \ q(q+1)(q-1).$$

7. Estudiaremos los tipos de órbitas O_t asociadas al par $(\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1,t))$,

$$O_t = \{ \ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1,t)) \ | \ g \in G\}, \quad t \in K; \ t \neq o \ , \ t \neq 1$$

Observación 17. *Si $t = 0$ tenemos la órbita $O_t = O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,0)}$, previamente estudiada. Además si $t = 1$ no hay clase, pues nuestro conjunto X esta formado por pares de rectas distintas.*

Calculemos el cardinal de O_t.

Sea $g = (v \ w) \in G$. Así tenemos lo siguiente:

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,t))} \ = \ \{ \ g \in G \ | \ g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1,t)) \ = \ (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1,t)) \ \}.$$

Re-escribiendo tenemos,

$$Stab_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,t))} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ | \ \lambda \neq 0 \right\}.$$

Con lo cual,

$$| \ O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,t))} \ | \ = \ q(q+1)(q-1).$$

Proposición 21. *Sea* $t_1,\ t_2 \in K - \{0,1\}$ *entonces.*

$$t_1 \ = \ t_2 \Longleftrightarrow O_{t_1} \ = \ O_{t_2}.$$

Demostración. La demostración en un sentido es inmediata. Para la otra dirección tenemos.
Sea $O_{t_1} \ = \ O_{t_2}$, por lo tanto $\exists\ g = (v\ w) \in G$ tal que ocurre lo siguiente:

$$g \cdot (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1, t_1)) = (\mathcal{A}(0), \mathcal{B}(1, t_2))$$

es decir.
i) $g \cdot (\mathcal{A}(0)) = \mathcal{A}(0)$
ii) $g \cdot (\mathcal{B}(1, t_1)) = (\mathcal{B}(1, t_2)$.
De otro modo,
i) $(\langle v\rangle, \langle w\rangle) \ = \ (\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle)$ y
ii) $(\langle v \ + \ w\rangle, \langle v \ + \ t_1 w\rangle) \ = \ (\langle e_1 \ + \ e_2\rangle, \langle e_1 \ + \ t_2 e_2\rangle)$.
De la primera ecuación tenemos,
$v \ = \ \mu_1 e_1$ y $w \ = \ \mu_2 e_2$, con $\mu_1\ ,\ \mu_2 \in K^*$.
Y por último ocupando la segunda igualdad obtenemos, $\mu_1 \ = \ \mu_2$ y que $t_1 \ = \ t_2$. $\square$

Observación 18. *Si* $g \in GL_2(K)$ *y consideramos un elemento* $(r, s) \in K^2 \times K^2$ *tenemos la siguiente propiedad sobre el determinante*

$$|(gr\ gs)| = |g||(r\ s)|.$$

Denotaremos por $|(gr\ gs)| = |gr\ gs|$.

Definición 14. *Dado el par* $r \ = \ (l_u\ ,\ l_v\ ,\ l_z\ ,\ l_w)$ *en* X^2, *con* $\#\{l_u\ ,\ l_v\ ,\ l_z\ ,\ l_w\} = 4$, *se define la* **Razón Exterior Anármonica** Υ_r *del elemento* r *como el siguiente cociente.*

$$\Upsilon_r \ = \ \frac{|v\ z|\ |u\ w|}{|u\ z|\ |v\ w|}$$

Notemos que la razón exterior no depende del generador.

Proposición 22. *Sea* $r \ = \ ((l_u, l_v), (l_z, l_w)) \in X \times X$ *con razón* Υ_r *entonces,*

$$\Upsilon_r \in K - \{0, 1\}.$$

Demostración. Claramente la Razón Exterior es un elemento en K, solamente falta ver que no puede tomar los valores 0 y 1.
Supongamos que $\Upsilon_r = 0$, por proposición 19, concluimos que $\{v, z\}$ o $\{u, w\}$ son conjuntos

linealmente dependientes lo que es una contradicción.
Para $\Upsilon_r = 1$, sea

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}.$$

luego tenemos la siguiente igualdad.

$$(u_0z_1 - z_0u_1)(v_0w_1 - v_1w_0) = (v_0z_1 - v_1z_0)(u_0w_1 - u_1w_0).$$

Simplificando tenemos.

$$v_1u_0 = u_1v_0.$$

luego,

$$\begin{vmatrix} v_0 & u_0 \\ v_1 & u_1 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente dependiente, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\Upsilon_r \neq 1$. □

Proposición 23. *Dado $g \in G$ y el elemento $r = ((l_u, l_v), (l_z, l_w)) \in X \times X$ con razón Υ_r entonces*

$$\Upsilon_{g \cdot r} = \Upsilon_r \quad \forall g \in G.$$

Demostración. Sea $r = (\langle u\rangle, \langle v\rangle, \langle z\rangle, \langle w\rangle)$ y $s = g \cdot r$, con $g \in G$. Luego.

$$\Upsilon_s = \frac{|gv\ gz|\ |gu\ gw|}{|gu\ gz|\ |gv\ gw|} = \frac{|g||v\ z|\ |g||u\ w|}{|g||u\ z|\ |g||v\ w|} = \Upsilon_r.$$

□

Proposición 24. *Sea $r = (l_u, l_v, l_z, l_w) \in X \times X$, entonces*

$$r = (\langle u\rangle, \langle v\rangle, \langle z\rangle, \langle w\rangle) \in O_t \Longrightarrow t = \Upsilon_r.$$

Demostración. Como $(\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_1 + e_2\rangle, \langle e_1 + te_2\rangle) \in O_t$ y usando la proposición 23 basta cálcular.

$$\frac{|e_2\ e_1 + e_2|\ |e_1\ e_1 + te_2|}{|e_1\ e_1 + e_2|\ |e_2\ e_1 + te_2|} = t$$

por lo tanto.

$$t = \frac{|v\ z|\ |u\ w|}{|u\ z|\ |v\ w|} = \Upsilon_r.$$

□

Proposición 25. *Sea $r = (\langle u\rangle, \langle v\rangle, \langle z\rangle, \langle w\rangle) \in X \times X$ con razón $\Upsilon_r = t$, entonces $(\langle u\rangle, \langle v\rangle, \langle z\rangle, \langle w\rangle) \in O_t$.*

Demostración. La demostración la realizaremos encontrando en forma explícita el elemento $g \in G$.
Sea $g \in G$, luego.

$$g \cdot (\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_1 \ + \ e_2\rangle, \langle e_1 \ + \ te_2\rangle) \ = \ (\langle u\rangle, \langle v\rangle, \langle z\rangle, \langle w\rangle),$$

que es equivalente al sistema.
i) $g \cdot (\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle) \ = \ (\langle u\rangle, \langle v\rangle)$
ii) $g \cdot (\langle e_1 \ + \ e_2\rangle, \langle e_1 \ + \ te_2\rangle) \ = \ (\langle z\rangle, \langle w\rangle)$.
De otro modo tenemos.
i) $g = (\lambda_0 u \ \lambda_1 v)$, donde $\lambda_0, \lambda_1 \in K^*$
ii) $g \cdot (\langle e_1 \ + \ e_2\rangle, \langle e_1 \ + \ te_2\rangle) \ = \ (\langle z\rangle, \langle w\rangle)$.
Así obtenemos como primer resultado un valor para los elementos λ_0 y λ_1, pues satisfacen la igualdad $\langle \lambda_0 u \ + \ \lambda_1 v\rangle \ = \ \langle z\rangle$. Una solución es obtenida del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$(u \ v)\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = z.$$

Como $(u \ v) \in GL_2(K)$ y ocupando Cramer tenemos que.

$$\lambda_0 \ = \ \frac{|z \ v|}{|u \ v|}$$

y también,

$$\lambda_1 \ = \ \frac{|u \ z|}{|u \ v|}.$$

observar que g esta únicamente determinada (salvo escalar).
Es claro que $g \cdot \langle e_1\rangle = \langle u\rangle$ y $g \cdot \langle e_2\rangle = \langle v\rangle$, y claramente tenemos que $g \cdot \langle e_1 \ + \ e_2\rangle = \langle z\rangle$, pues esta fue la igualdad que nos permitio encontrar g explícitamente.

A continuación observemos lo siguiente.

$$\begin{array}{rcl} g \cdot (e_1 + te_2) & = & \lambda_0 u + t\lambda_1 v \\ & = & \frac{|z \ v|}{|u \ v|}u + t\frac{|u \ z|}{|u \ v|}v \\ & = & \frac{|z \ v|}{|u \ v|}u + \frac{|v \ z|}{|u \ z|}\frac{|u \ w|}{|v \ w|}\frac{|u \ z|}{|u \ v|}v \\ & = & \frac{|z \ v|}{|u \ v|}u + \frac{|v \ z|}{|u \ v|}\frac{|u \ w|}{|v \ w|}v \\ & = & \frac{|z \ v|}{|u \ v|}[u - \frac{|u \ w|}{|v \ w|}v] \\ & = & \frac{|z \ v|}{|u \ v||v \ w|}[|v \ w|u - |u \ w|v] \\ & = & -\frac{|z \ v|}{|v \ w|}[\frac{|w \ v|}{|u \ v|}u + \frac{|u \ w|}{|u \ v|}v] \end{array}$$

Paremos en este punto para resolver el siguiente sistema. Sean $\alpha, \beta \in K^*$ tal que,

$$\alpha u \ + \ \beta v \ = \ w.$$

que es equivalente.

$$(u\ v)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=w.$$

Como $(u\ v)\in GL_2(K)$ tenemos, por Cramer.

$$\alpha \;=\; \frac{|w\ v|}{|u\ v|}$$

y

$$\beta \;=\; \frac{|u\ w|}{|u\ v|},$$

Con lo cual.

$$\begin{aligned} g\cdot(e_1+te_2) &= -\tfrac{|z\ v|}{|v\ w|}[\tfrac{|w\ v|}{|u\ v|}u+\tfrac{|u\ w|}{|u\ v|}v] \\ &= -\tfrac{|z\ v|}{|v\ w|}[w] \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g\cdot\langle(e_1+te_2)\rangle=\langle w\rangle$. □

Observemos que con las proposiciones 24 y 25 hemos demostrado el siguiente bello teorema.

TEOREMA 26. *Sean $t\in K-\{0,1\}$ y $r=(l_u,l_v,l_z,l_w)\in X\times X$, tal que $\#\ \{l_u,l_v,l_z,l_w\}=4$, entonces, r es un elemento de la órbita O_t si y sólo si su razón exterior es igual a t.*

COROLARIO 5. *Dado $(\langle u\rangle,\langle v\rangle,\langle z\rangle,\langle w\rangle)$ un elemento en la órbita O_t, con $t\in K-\{0,1\}$ entonces el elemento $\langle w\rangle\in\mathcal{L}$ esta únicamente determinado por las tres primeras rectas y el elemento t.*

A continuación construieremos los operadores de entrelazamientos asociados a cada doble clase para poder encontrar subrepresentaciones del grupo G, mediante la descomposición en subespacios propios en $L^2(X)$.

Usaremos el conjunto X formado por pares de rectas distintas para así poder escribir de una mejor forma los núcleos, y con esto los operadores asociados a cada doble órbita.

4. Operadores de entrelazamiento

Para empezar daremos algunas proposiciones extraidas del álgebra lineal, necesarias para nuestros cálculos.

PROPOSICIÓN 27. *Sea T un operador sobre un espacio vectorial V de dimensión finita entonces*

1. *El polinomio característico y el polinomio minimal de T tienen las mismas raices, salvo multiplicidades.*
2. *Un polinomio que anule a T es múltiplo del polinomio minimal de T.*

COROLARIO 6. *Si el polinomio que anula al operador lineal T, tiene n raices distintas entonces la cantidad de valores propios es a lo más n.*

OBSERVACIÓN 19. *Recordar que la manera de decidir si una raíz de un polinomio anulador es un valor propio es: Encontrar por lo menos un vector no nulo, que tenga la condición de ser un vector propio.*

A continuación construiremos los operadores de entrelazamiento a medida que avanzamos en la descomposición de la representación natural $L^2(X)$.

Por la proposición 12 tenemos que cada $\phi_i \in End_G(L^2(X))$.

1. Sea ϕ_1 y κ_1, el operador y núcleo respectivamente, asociado la órbita $O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,1)}$. Así.
$$\begin{aligned}(\phi_1 f)(l_1,l_2) &= \sum_{(L,L')\in X} \kappa_1(L,L',l_1,l_2)f(L,L') \qquad f\in L^2(X),\ (l_1,l_2)\in X.\\ (\phi_1 f)(l_1,l_2) &= \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}\\ L\neq l_2}} f(L,l_1).\end{aligned}$$
2. Sea ϕ_2 y κ_2, el operador y núcleo respectivamente, asociado a la órbita $O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,0))}$, con lo cual tenemos.
$$\begin{aligned}(\phi_2 f)(l_1,l_2) &= \sum_{(L,L')\in X} \kappa_2(L,L',l_1,l_2)f(L,L') \qquad f\in L^2(X),\ (l_1,l_2)\in X.\\ (\phi_2 f)(l_1,l_2) &= f(l_2,l_1).\end{aligned}$$

Con 1) y 2) construimos el operador de entrelazamiento $\Omega := \phi_1 + \phi_2$. Evaluando en $(l_1,l_2)\in X$ tenemos.

$$(\Omega(f))(l_1,l_2) = \sum_{L\in\mathcal{L}} f(L,l_1) \qquad (l_1,l_2)\in X,\ f\in L^2(X).$$

Hallaremos los espacios propios asociados a Ω, para lo cual encontraremos un polinomio que anule al operador.

Primero encontraremos Ω^2.

Sea $f\in L^2(X)$ y $(l_1,l_2)\in X$, así tenemos que.

$$\begin{aligned}(\Omega^2(f))(l_1,l_2) &= (\Omega(\Omega f))(l_1,l_2)\\ &= \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}\\ L\neq l_1}} (\Omega f)(L,l_1)\\ &= \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}\\ L\neq l_1}} \sum_{L'\in\mathcal{L}} f(L',L).\end{aligned}$$

Sea $f\in L^2(X)$ y $(l_1,l_2)\in X$, definamos el operador suma total, que denotaremos por $\sum\limits_{Total}$,

$$(\sum_{Total} f)(l_1,l_2) = \sum_{(L,L')\in X} f(L,L'),$$

de otro modo tenemos.

$$(\sum_{Total} f)(l_1,l_2) \;=\; \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}\\ L\neq l_1}} \sum_{L^{'}\in\mathcal{L}} f(L^{'},L) \;+\; \sum_{L\in\mathcal{L}} f(L,l_1)$$

de lo cual obtenemos.

$$\Omega^2 \quad = \quad \sum_{Total} \;-\; \Omega. \tag{4}$$

Calculemos ahora Ω^3.

Sea $f \in L^2(X)$ y $(l_1,l_2)\in X$, así tenemos que.

$$\begin{aligned}
(\Omega^3(f))(l_1,l_2) &= (\Omega(\Omega^2 f))(l_1,l_2)\\
&= \sum_{L\in\mathcal{L}} (\Omega^2 f)(L,l_1)\\
&= \sum_{L\in\mathcal{L}} ((\sum_{Total} f)(L,l_1) \;-\; (\Omega f)(L,l_1))\\
&= q(\sum_{Total} f)(l_1,l_2) \;-\; \sum_{L\in\mathcal{L}} (\Omega f)(L,l_1)\\
&= q(\sum_{Total} f)(l_1,l_2) \;-\; (\Omega^2 f)(l_1,l_2)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Omega^3 = q\sum_{Total} \;+\; \Omega^2. \tag{5}$$

Así con las formulas (4) y (5) obtenemos el siguiente resultado.

$$\Omega^3 = (q-1)\Omega^2 \;+\; q\Omega.$$

Con lo cual encontramos que un polinomio que anula a Ω es: $x^3 \;-\; (q-1)x^2 \;-\; qx$. Ahora ocupando el corolario 6 tenemos que, los posibles valores propios asociados al operador Ω son las raices de este polinomio, es decir: 0, q, -1.

5. Estructura de los espacios

A continuación verificaremos que las raices del polinomio anteriormente son, 0, -1, y q, son valores propios, es decir, falta sólo ver que los respectivos espacios asociados son no nulos. Para ello daremos a conocer la estructura de los espacios propios asociados a las respectivas raices.

1. Sea W_q el espacio asociado al valor q, es decir.

$$W_q = \{f\in L^2(X) \quad | \quad \Omega f = qf\} = \{f\in L^2(X) \quad | \quad \sum_{L\in\mathcal{L}} f(L,l) = qf(l,l^{'})\}.$$

Proposición 28. *Si $h\in W_q$ entonces $h(l,l^{'}) = h(l,l^{''}) \quad \forall l,l^{'},l^{''}\in\mathcal{L}$.*

Demostración.

$$qh(l,l^{'}) = (\Omega h)(l,l^{'}) = \sum_{r\in\mathcal{L}} h(r,l) == (\Omega h)(l,l^{''}) = qh(l,l^{''}), \quad (l,l^{'}),(l,l^{''}) \in X.$$

Luego.

$$qh(l,l^{'}) = qh(l,l^{''})$$

□

Proposición 29.

$$W_q = \{f \in L^2(X) \quad | \quad f = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Demostración. Si $f \in \{f \in L^2(X) \quad | \quad f = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ es inmediato concluir que $f \in W_q$.
Ahora sea $f \in W_q$ debemos demostrar que $f \in \{f \in L^2(X) \quad | \quad f = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Supongamos que f no es una función constante, así tenemos que existen $(l,l^{'})$ y $(l^{''},l^{'''}) \in X$ tal que $f(l,l^{'}) \neq f(l^{''},l^{'''})$. Por estar $f \in W_q$ tenemos que $f(l,l^{'}) = f(l,l^{''})$ y además $f(l^{''},l^{'''}) = f(l^{''},l)$, con lo cual $f(l,l^{''}) \neq f(l^{''},l)$.
Por otra parte tenemos.

$$a) \quad q\ f(l,l^{''}) = \sum_{r\in\mathcal{L}} f(r,l) \quad \text{ y } \quad b) \quad q\ f(l^{''},l) = \sum_{r\in\mathcal{L}} f(r,l^{''}).$$

Podemos escribir de una manera mas conveniente a).

$$q\ f(l,l^{''}) = f(l^{''},l) + \sum_{\substack{r\in\mathcal{L} \\ r\neq l^{''}}} f(r,l).$$

Ahora reescribamos b)

$$q\ f(l^{''},l) = f(l,l^{''}) + \sum_{\substack{r\in\mathcal{L} \\ r\neq l}} f(r,l^{''}).$$

Como la suma $\sum_{\substack{r\in\mathcal{L} \\ r\neq l^{''}}} f(r,l)$ es igual a $\sum_{\substack{r\in\mathcal{L} \\ r\neq l}} f(r,l^{''})$ pues, usando la proposición 28, tenemos lo siguiente.

$$\sum_{\substack{r\in\mathcal{L} \\ r\neq l^{''} \\ (r\neq l)}} f(r,l) = \sum_{\substack{r\in\mathcal{L} \\ r\neq l^{''} \\ (r\neq l)}} f(r,l^{''}) = \sum_{\substack{r\in\mathcal{L} \\ r\neq l}} f(r,l^{''}).$$

Con lo cual obtenemos la siguiente igualdad.

$$qf(l,l^{''}) - qf(l^{''},l) = f(l^{''},l) - f(l,l^{''})$$

Así obtenemos

$$(q+1)[f(l,l^{''}) \ - \ f(l^{''},l)] \ = \ 0,$$

por lo tanto $(q+1) = 0$, pues $f(l,l^{''}) \neq f(l^{''},l)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f \in \{f \in L^2(X) \quad | \quad f = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$. $\square$

Anotaremos $W_q = \{f = cte\}$.

Observar que también hemos verificado que q *es un valor propio, pues el espacio que engendra tiene dimensión* 1.

2. Sea W_0 el espacio asociado al valor 0, donde

$$W_0 = \{f \in L^2(X) \quad | \quad \Omega f = 0\} = Ker\Omega.$$

Un hecho importante de descubrir es la dimensión del espacio W_0, pues así verificamos que 0 también es un valor propio.

Recordar que $\Omega \in End_G(L^2(X))$ con lo cual,

$$dim(W_0) \quad = \quad dim(L^2(X)) - dim(Im\Omega),$$

así sólo basta hallar una base de la imagen del operador Ω. Sabemos por proposición 2 que una base para $L^2(X)$ es la formada por los siguientes elementos.

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

donde $x \in X$, y la dimensión de $L^2(X) = |X| = q(q+1)$.

Usando proposición 12 y dado $(l,l^{'}) \in X$, tenemos.

$$\Omega(\delta_{(l,l^{'})}) = \sum_{L \in \mathcal{L}} \delta_{(L,l)}.$$

De lo anterior concluimos que

$$\Omega(\delta_{(l,l^{'})}) = \Omega(\delta_{(l,l^{''})}), \quad \forall \quad l, l^{'}, l^{''} \in \mathcal{L}$$

Por lo cual una base para la imagen del operador Ω es la siguiente.

$$\{\Delta_l = \Omega(\delta_{(l,L)}) \quad | \quad l \in \mathcal{L}\},$$

donde $L \in \mathcal{L}$, es decir, $dim(Im\Omega) = (q+1)$. Por lo tanto la dimensión de W_0 es (q^2-1).

3. Sea W_{-1} el espacio asociado al valor -1.

Como ya conocemos las dimensiones de W_q y de W_0 tenemos que la posible dimensión para W_{-1} es q. Verifiquemoslo.

Proposición 30. *Si* $f \in W_{-1}$ *entonces* $f(l,l^{'}) = f(l,l^{''}) \quad \forall\ (l,l^{'}),(l,l^{''}) \in X$ *y la suma total de* f *sobre* X *es cero, es decir,*

$$\sum_{Total} f = 0.$$

Demostración. Sobre $W_{-1} = \{f \in L^2(X) \quad | \quad \Omega f = -f\}$ tenemos la siguiente propiedad. Si $f \in W_{-1}$ obtenemos que

$$f(l,l^{'}) = f(l,l^{''})\ \forall l,l^{'},l^{''} \in \mathcal{L}, \tag{6}$$

pues

$$-f(l,l^{'})(\Omega f)(l,l^{'}) = \sum_{r\in\mathcal{L}} f(r,l) = \Omega(f(l,l^{''})) = -f(l,l^{''}), \quad (l,l^{'}),(l,l^{''}) \in X.$$

También tenemos que.

$$\sum_{r\in\mathcal{L}} f(r,l) = -f(l,z(l)) \quad z(l) \in \mathcal{L};\ z(l) \neq l. \tag{7}$$

Ocupando las formulas (6) y (7) anteriormente dadas, tenemos lo siguiente.

$$\sum_X f = \sum_{l\in\mathcal{L}} - f(l,z(l)) = -[(\sum_{\substack{l\in\mathcal{L}\\ l\neq z_0}} f(l,z_0)) + f(z_0,z_1)] = -[-f(z_0,z_1) + f(z_0,z_1)] = 0,$$

para algún $(z_0,z_1) \in X$. □

A continuación encontremos una base para W_{-1}, ya esta información, igual que en los casos anteriores, nos permite verificar que -1 es un valor propio, para lo cual ocuparemos las propiedades del espacio en cuestión como guía.

Definición 15. *Se define la siguiente función en* $L^2(X)$.

$$\mathcal{F}_L(l,l^{'}) := \begin{cases} 1 & si\ l = L \\ 0 & si\ l \neq L. \end{cases}$$

Con $L \in \mathcal{L}$ *y* $(l,l^{'}) \in X$.

Notemos que las funciones $\mathcal{F}_L$ cumplen con la igualdad (6). Ahora observemos que las funciones $\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta \quad L,\ \Theta(\mathbf{fijo}) \in \mathcal{L}, con\ L \neq \Theta$, satisfacen la propiedad antes citada y también tienen suma total nula.

Así el hecho de tener algunas condiciones sobre W_{-1} nos permiten encontrar elementos que podrían formar una base del espacio.

De ahora en adelante la letra $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{L}$ denotara un elemento fijo.

Proposición 31. *Sea $\Theta \in \mathcal{L}$. El conjunto $\{\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta \quad | \quad L \in \mathcal{L};\ L \neq \Theta\}$ es una base para el espacio W_{-1}.*

Demostración. Primero notemos que $|\{\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta \quad | \quad L \in \mathcal{L};\ L \neq \Theta\}| = q$, pues $|\mathcal{L}| = q+1$. A continuación verifiquemos que este conjunto esta contenido en W_{-1}. Para ello realicemos los siguientes cálculos.
Sean $L \in \mathcal{L}$ y $(l, l^{'}) \in X$, con $l \neq L$, tenemos que.

$$\begin{aligned} (\Omega\mathcal{F}_L)(l,l^{'}) &= \sum_{r\in\mathcal{L}} \mathcal{F}_L(r,l) \\ &= \mathcal{F}_L(L,l) \ + \sum_{\substack{r\in\mathcal{L}\\ r\neq L}} \mathcal{F}_L(r,l) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ahora si $L = l$ tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} (\Omega\mathcal{F}_L)(L,l^{'}) &= \sum_{\substack{r\in\mathcal{L}\\ r\neq L}} \mathcal{F}_L(r,L) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agrupando la información reciente deducimos que, si $L, \Theta \in \mathcal{L}$ con $L \neq \Theta$ y $(l, l^{'}) \in X$ tenemos.

$$(\Omega\mathcal{F}_L)(l,l^{'}) := \begin{cases} 1 & \text{si } l \neq L \\ 0 & \text{si } l = L. \end{cases}$$

También.

$$(\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta)(l,l^{'}) := \begin{cases} 1 & \text{si } l = L \\ -1 & \text{si } l = \Theta \\ 0 & E.O.C \end{cases}$$

Y por último.

$$(\Omega(\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta))(l,l^{'}) := \begin{cases} -1 & \text{si } l = L \\ 1 & \text{si } l = \Theta \\ 0 & E.O.C \end{cases}$$

Por lo tanto $(\Omega(\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta)) \ = \ -(\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta)$, es decir $\{\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta \quad | \quad L \in \mathcal{L};\ L \neq \Theta\} \subset W_{-1}$.

En segunda instancia verifiquemos que el conjunto anterior es linealmente independiente. Supongamos que

$$\sum_{\substack{j\in\mathcal{L}\\ j\neq\Theta}} m_j(\mathcal{F}_j - \mathcal{F}_\Theta) = 0$$

Evaluando en $(j, \Theta) \in X$ obtenemos que $m_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{L}$.
Por lo tanto la dimensión del espacio W_{-1} es q. $\square$

Hasta ahora hemos encontardo 3 subrepresentaciones de $L^2(X)$, que son las aportadas por el operador de entrelazamiento Ω, cuyos espacios asociados son los anteriormente estudiados. Notar también que ya encontramos el primer modelo para las representaciones irreducibles de G de grado q.

Hasta el momento tenemos.

$$L^2(X) = \{f = cte\} \ \oplus \ W_{-1} \ \oplus \ W_0.$$

A continuación analizaremos el siguiente operador de interes, útil para nuestra descomposición, pues nos aportara la otra subrepresentación de grado q, isomorfa a la anteriormente encontrada.
Igual que para la construcción anterior, ocuparemos la proposición 12.

1. Sea γ y κ_1, el operador y núcleo respectivamente, asociado la órbita $O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(1,0)}$. Así.

$$\begin{array}{rcl}(\gamma f)(l_1,l_2) & = & \sum\limits_{(L,L')\in X} \kappa_1(L,L',l_1,l_2)f(L,L') \qquad f\in L^2(X),\ (l_1,l_2)\in X. \\ (\gamma f)(l_1,l_2) & = & \sum\limits_{\substack{L\in\mathcal{L}\\ L\neq l_1}} f(l_2,L).\end{array}$$

2. Sea Ξ y κ_2, el operador y nucleo respectivamente, asociado a la órbita $O_{(\mathcal{A}(0),\mathcal{B}(0,0)}$. Hemos dado mayor elegancia a este operador pues el será crucial algunos pasos mas adelante.

$$\begin{array}{rcl}(\Xi f)(l_1,l_2) & = & \sum\limits_{(L,L')\in X} \kappa_2(L,L',l_1,l_2)f(L,L') \qquad f\in L^2(X),\ (l_1,l_2)\in X. \\ (\Xi f)(l_1,l_2) & = & f(l_2,l_1).\end{array}$$

Con 1) y 2) construimos el operador de entrelazamiento $\Delta \ = \ \gamma \ + \ \Xi$. Así tenemos.

$$(\Delta(f))(l_1,l_2) = \sum_{L\in\mathcal{L}} f(l_2,L) \qquad (l_1,l_2)\in X,\ f\in L^2(X).$$

Lo que haremos enseguida será buscar un polinomio que lo anule. Este paso es análogo al encuentro del polinomio que anula al operador Ω.
Encontremos Δ^2, para ello, sea $f\in L^2(X)$ y $(l_1,l_2)\in X$.

$$\begin{array}{rcl}(\Delta^2(f))(l_1,l_2) & = & (\Delta(\Delta f))(l_1,l_2) \\ & = & \sum\limits_{\substack{L\in\mathcal{L}\\ L\neq l_2}} (\Delta f)(l_2,L) \\ & = & \sum\limits_{\substack{L\in\mathcal{L}\\ L\neq l_2}} \sum\limits_{L'\in\mathcal{L}} f(L,L').\end{array}$$

A continuación completamos esta suma para transformarla en el operador suma total.

$$\sum_{Total} \ = \ \sum_{\substack{L\in\mathcal{L}\\ L\neq l_2}} \sum_{L'\in\mathcal{L}} f(L,L') \ + \ \sum_{L\in\mathcal{L}} f(l_2,L)$$

Con lo cual tenemos.

$$\Delta^2 \quad = \quad \sum_{Total} - \ \Delta.$$

Y además, realizando el cálculo para encontrar Δ^3 tenemos

$$\Delta^3 = q \sum_{Total} \ + \ \Delta^2.$$

Por lo tanto el polinomio que anúla al operador Δ es $x^3 \ - \ (q-1)x^2 \ - \ qx$. De donde los posibles valores propios asociados al operador Δ pueden ser las raices de este polinomio, es decir, 0, q, -1, que por cálculos análogos para el operador Ω obtenemos que son todos los valores propios aportados por el operador Δ, por lo tanto las representaciones de G aportadas por este operador son los respectivos espacios propios.

Veremos enseguida que las representaciones de G aportadas por el operador Δ y Ω son isomorfas.

Sean V_0, V_q, V_{-1} los espacios propios asociados a los valores propios $0, q, -1$ respectivamente. Donde.

$$\begin{aligned}
V_0 &= \{f \in L^2(X) \ \mid \ \sum_{L \in \mathcal{L}} f(l, L) = 0; \ l \in \mathcal{L}\}. \\
V_q &= \{f \in L^2(X) \ \mid \ \sum_{L \in \mathcal{L}} f(l', L) = q f(l, l'); \ l, l' \in \mathcal{L}\}. \\
V_{-1} &= \{f \in L^2(X) \ \mid \ \sum_{L \in \mathcal{L}} f(l', L) = -f(l, l'); \ l, l' \in \mathcal{L}\}.
\end{aligned}$$

Como ya mencionamos nosotros tenemos el operador de entrelazamiento Ξ dado por.

$$(\Xi f)(l, l') = f(l', l).$$

Sea $s \in \{0, -1, q\}$. Observemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\Xi : \ W_s &\longrightarrow V_s \\
f &\longmapsto \Xi f,
\end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales, pues.

i) $\Xi \in End L^2(X)$.

ii) $\Xi^{-1} = \Xi$.

Sin perder de vista que $\Xi \in End_G(L^2(X))$ tenemos que.

$$W_s \simeq V_s \qquad s \in \{0, -1, q\},$$

como representaciones de grupo.

Notar que hasta este punto hemos encontrado las dos representaciones irreducibles isomorfas de grado q del grupo $G = GL_2(K)$ que aparecen al descomponer la representación natural.

Continuaremos nuestra descomposición de la representación natural asociada a G, construyendo con la información recopilada hasta este momento, una nueva subrepresentación de $L^2(X)$, obtenida de la suma de representaciones. Ella es.

$$V = \{f = cte\} \oplus V_{-1} \oplus W_{-1},$$

de grado $(2q+1)$.

Nuestra tarea posterior será encontrar el espacio ortogonal a la nueva subrepresentación V de $L^2(X)$, la cual, por 1a proposición 7, es también una subrepresentación de $L^2(X)$ de grado $(q^2 - q - 1)$.

El siguiente resultado será util para poder presentar las condiciones que definen al espacio ortogonal a V.

$$V^{\perp} = \{f \in L^2(X) \quad | \quad \langle f, f_j \rangle = 0,\ \{f_j\}_j \text{ base de } V\}.$$

Lo que nos queda por hallar es una base para al espacio V.

Conocemos una base para $\{f = cte\}$. Además tenemos una base para W_{-1} y recordando el isomrfismo Ξ, también tenemos una base para V_{-1}. Con lo cual.

$$\{1\} \cup \{\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta,\ \mathcal{C}_L - \mathcal{C}_\Theta \quad | \quad \Theta \neq L;\ L \in \mathcal{L}\},\ \Theta \in \mathcal{L},$$

es una base para V, donde $\mathcal{C}_L = \Xi\mathcal{F}_L$, $L \in \mathcal{L}$. Es decir

$$\mathcal{C}_L(l, l^{'}) := \begin{cases} 1 & \text{si } l^{'} = L \\ 0 & \text{si } l^{'} \neq L. \end{cases}$$

Con $(l, l^{'}) \in X$.

Proposición 32.

$$V^{\perp} = \{f \in L^2(X) \quad | \quad (\sum_{L\in\mathcal{L}} f(l, L) = 0,\ \forall\ l \in \mathcal{L}) \wedge (\sum_{L\in\mathcal{L}} f(L, l) = 0,\ \forall\ l \in \mathcal{L})\}.$$

Demostración. Usaremos para el desarrollo de la demostración la base anteriormente dada para el espacio V.

Sea $f \in V^{\perp}$.

1. $\langle f, 1 \rangle = \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x)\overline{1(x)} = 0$, por lo tanto tenemos.

$$\sum_{Total} f = 0. \tag{8}$$

2. Consideremos un elemento de la base del espacio V_{-1}.

Sea $L, \Theta \in \mathcal{L}$ y $f \in V^{\perp}$.

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta \rangle &= \tfrac{1}{|X|} \sum_{(l,l') \in X} f(l,l') \overline{(\mathcal{F}_L - \mathcal{F}_\Theta)(l,l')} = 0 \\
&= \tfrac{1}{|X|} [\sum_{(l,l') \in X} f(l,l') \overline{\mathcal{F}_L(l,l')} - \sum_{(l,l') \in X} f(l,l') \overline{\mathcal{F}_\Theta(l,l')}] = 0 \\
&= \tfrac{1}{|X|} [\sum_{r \in \mathcal{L}} f(L,r) - \sum_{r \in \mathcal{L}} f(\Theta, r)] = 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual.

$$\sum_{r \in \mathcal{L}} f(L,r) = \sum_{r \in \mathcal{L}} f(\Theta, r), \quad \forall (\Theta \neq) L \in \mathcal{L}.$$

Por lo tanto.

$$\sum_{r \in \mathcal{L}} f(L,r) = \sum_{r \in \mathcal{L}} f(L', r), \quad \forall L', L \in \mathcal{L}. \tag{9}$$

A continuación integraremos los resultados (8) y (9).

$$\begin{aligned}
\sum_{(l,l') \in X} f(l,l') &= \sum_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ \Theta \neq l}} \sum_{l' \in \mathcal{L}} f(l,l') + \sum_{l' \in \mathcal{L}} f(\Theta, l') = 0 \\
&= \sum_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ \Theta \neq l}} \sum_{l' \in \mathcal{L}} f(\Theta,l') + \sum_{l' \in \mathcal{L}} f(\Theta, l') = 0 \\
&= (q+1) \sum_{l' \in \mathcal{L}} f(\Theta, l') = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\sum_{r \in \mathcal{L}} f(r, L) = 0, \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

3. Por último consideremos un elemento de la base del espacio W_{-1}. Este caso es análogo al anteriormente estudiado.

Sea $L, \Theta \in \mathcal{L}$ y $f \in V^\perp$.

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathcal{C}_L - \mathcal{C}_\Theta \rangle &= \tfrac{1}{|X|} \sum_{(l,l') \in X} f(l,l') \overline{(\mathcal{C}_L - \mathcal{C}_\Theta)(l,l')} = 0 \\
&= \tfrac{1}{|X|} [\sum_{(l,l') \in X} f(l,l') \overline{\mathcal{C}_L(l,l')} - \sum_{(l,l') \in X} f(l,l') \overline{\mathcal{C}_\Theta(l,l')}] = 0 \\
&= \tfrac{1}{|X|} [\sum_{l \in \mathcal{L}} f(l,L) - \sum_{l \in \mathcal{L}} f(l, \Theta)] = 0.
\end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos.

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} f(l,L) = \sum_{l \in \mathcal{L}} f(l, L'), \quad \forall L', L \in \mathcal{L}. \tag{10}$$

Agrupando los resultados (8) y (10), tenemos.

$$\sum_{l \in \mathcal{L}} f(l, L) = 0, \quad \forall L \in \mathcal{L}.$$

$\square$

A continuación construiremos otro operador de interes, el cual operaremos sobre el espacio $V^{\perp}$, para poder seguir descomponiendo la representación natural y así encontrar los demás modelos para las representaciones irreducibles de G.

6. Operador asociado a la razón exterior

Sea ϕ_t, κ_t, con $t \in K - \{0,1\}$, el operador y núcleo respectivamente, asociado a la órbita O_t. Anotemos antes de proseguir, el conjunto $K - \{0,1\}$ como $\overline{K}$.

Definición 16. *Sea $\mathcal{X} \in End_G(L^2(X))$, definido del siguiente modo.*

$$\mathcal{X} = \sum_{t \in \overline{K}} \phi_t.$$

Donde $(\phi_t f)(l, l') = \sum\limits_{(L,L') \in X} \kappa_t(L, L', l, l') f(L, L'), \quad$ *con* $(l, l') \in X,\ f \in L^2(X)$.

Simplificaremos a continuación el operador $\mathcal{X}$.
Sea $f \in V^{\perp}$ y $(l, l') \in X$.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{X} f)(l, l') &= \sum_{t \in \overline{K}} (\phi_t f)(l, l') \\
&= \sum_{t \in \overline{K}} \sum_{(L,L') \in X} \kappa_t(L, L', l, l') f(L, L') \\
&= \sum_{L \in X} \sum_{t \in \overline{K}} \sum_{\substack{L' \in X \\ L' \neq L}} \kappa_t(L, L', l, l') f(L, L')
\end{aligned}$$

Nosotros, por teorema 26, tenemos la siguiente equivalencia.

$$(L, L', l, l') \in O_t \Longleftrightarrow (l, l', L, L') \in O_t.$$

De esta forma tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{X} f)(l, l') &= \sum_{x \in X} \sum_{t \in \overline{K}} \sum_{\substack{L' \in X \\ L' \neq L}} \kappa_t(L, L', l, l') f(L, L') \\
&= \sum_{L \in X} \sum_{t \in \overline{K}} \sum_{\substack{L' \in X \\ L' \neq L}} \kappa_t(l, l', L, L') f(L, L')
\end{aligned}$$

Analicemos la siguiente suma.

$$\sum_{\substack{L' \in X \\ L' \neq L}} \kappa_t(l, l', L, L') f(L, L').$$

i) Sabemos por corolario 5 que si $(l,l^{'},L,L^{'}) \in O_t$ entonces la cuarta recta, en este caso $L^{'}$, esta únicamente determinada por las otras tres rectas y el elemento t, es decir, tenemos.

$$\sum_{\substack{L^{'}\in X \\ L^{'}\neq L}} \kappa_t(l,l^{'},L,L^{'})f(L,L^{'}) = f(L,a(L,t)).$$

Donde el elemento $a(L,t)$ es tal que $(l,l^{'},L,a(L,t)) \in O_t$. Anotamos de esta forma a la cuarta recta, pues en la suma anterior los elementos l, $l^{'}$ estan fijos.

ii) Como $(l,l^{'},L,a(L,t)) \in O_t$, el elemento $a(L,t) \in \mathcal{L} - \{l,l^{'}\}$. Es claro también que $a(L,t) \neq L$.

Con lo cual.

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}f)(l,l^{'}) &= \sum_{L\in X}\sum_{t\in\overline{K}}\sum_{\substack{L^{'}\in X \\ L^{'}\neq L}} \kappa_t(l,l^{'},L,L^{'})f(L,L^{'}) \\ &= \sum_{L\in X}\sum_{t\in\overline{K}} f(L,a(L,t)).\end{aligned}$$

Observación 20. *Tenemos la siguiente equivalencia gracias a la proposición 21*

$$t_1 = t_2 \text{ si y sólo sí } a(L,t_1) = a(L,t_2).$$

Considerando $f \in V^{\perp}$ y usando observación anterior tenemos que.

$$\sum_{t\in\overline{K}} f(L,a(L,t)) = -f(L,l) - f(L,l^{'}).$$

Por lo tanto.

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}f)(l,l^{'}) &= \sum_{L\in X} -f(L,l) - f(L,l^{'}) \\ &= -\sum_{L\in X} f(L,l) - \sum_{L\in X} f(L,l^{'})\end{aligned}$$

Como $f \in V^{\perp}$ luego.

$$\sum_{L\in\mathcal{L}} f(L,l) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{\substack{L\in\mathcal{L} \\ L\neq l^{'}}} f(L,l) = -f(l^{'},l).$$

Por lo tanto.

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}f)(l,l^{'}) &= -\sum_{L\in X} f(L,l) - \sum_{L\in X} f(L,l^{'}) \\ &= f(l^{'},l) + f(l,l^{'}).\end{aligned}$$

Definición 17. *Sean $f \in L^2(X)$ y (l_1,l_2), se define f^T del modo siguiente.*

$$f^T := \Xi f,$$

donde Ξ fue definido por: $(\Xi f)(l_1,l_2) = (l_2,l_1)$.

De este modo podemos reescribir el operador $\mathcal{X}$.

$$\mathcal{X}f = f + f^T. \tag{11}$$

Nuestro siguiente paso será encontrar un polinomio que anule al operador $\mathcal{X}$. Lo primero que haremos es calcular $\mathcal{X}^2$, ocupando formula (11).

Sea $f \in V^{\perp}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^2 f &= \mathcal{X}(\mathcal{X}f) \\ &= \mathcal{X}f \ + \ \mathcal{X}f^T \\ &= 2(f \ + \ f^T) \\ &= 2\ \mathcal{X}f. \end{aligned}$$

Así el polinomio que anula al operador $\mathcal{X}$ es: $x^2 - 2x$.
Por corolario 6, los posibles valores propios asociados a este operador son 0 y 2. Para verificar que son todos los valores propios, solo basta verificar que el espacio asociado a cada valor es no nulo.

Obsevemos lo siguiente. Sea $f \in V^{\perp}$.

i) $\mathcal{X}(f \ + \ f^T) \ = \ 2(f \ + \ f^T)$

ii) $\mathcal{X}(f \ - \ f^T) \ = \ 0 = \ 0(f \ - \ f^T)$.

Con lo cual los valores 0 y 2 son valores propios, pues los espacios asociados son no nulos, para ello considere la siguiente función, $\mathcal{G}_{(l,l')} \in L^2(X)$, con (l, l') elemento fijo en X, y $l, l' \notin \{l_{e_1}, l_{e_2}\}$, definida por.

$$\mathcal{G}_{(l,l')}(L, L') = \begin{cases} 1 & (L, L') \in \{(l_{e_1}, l_{e_2})\ ,\ (l, l')\} \\ -1 & (L, L') \in \{(l, l_{e_2})\ ,\ (l_{e_1}, l')\} \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

Esta función pertenece a $V^{\perp}$ pues tenemos lo siguiente.

Sea $y \in \mathcal{L}$.

$$\sum_{R \in \mathcal{L}} \mathcal{G}_{(l,l')}(R, y) = \mathcal{G}_{(l,l')}(l_{e_1}, y) + \mathcal{G}_{(l,l')}(l, y) = 0$$

Y además

$$\sum_{R \in \mathcal{L}} \mathcal{G}_{(l,l')}(y, R) = \mathcal{G}_{(l,l')}(y, l_{e_2}) + \mathcal{G}_{(l,l')}(y, l') = 0$$

Sean $\mathcal{V}_2$ y $\mathcal{V}_0$ los espacios propios asociados a los valores propios 2 y 0 respectivamente.

Recordando las condiciones que definen al espacio ortogonal $V^{\perp}$, daremos una base para dicho espacio con el fin de hallar el grado de las representaciones aportadas por el operador $\mathcal{X}$.

Observación 21. *Sea V un $K-$espacio vectorial de dimensión finita y $\phi \in End(V)$.*

1. *Si ϕ es un proyector entonces la dimensión de la imagen de ϕ es igual a la traza asociada al proyector ϕ.*

2. *La traza asociada a ϕ no depende de la base del espacio V.*

Teniendo presente el polinomio minimal asociado a $\mathcal{X}$, tenemos que $\frac{1}{2}\mathcal{X}$ es un proyector. Por lo tanto, ocupando la parte 1) *de la observación anterior, obtenemos lo siguiente.*

$$dim_{\mathbb{C}}\ Im(\mathcal{X}) \ = \ \frac{1}{2}\, Tr(\mathcal{X}).$$

A continuación definiremos una base para el espacio ortogonal. No olvidar que en las definiciones y comentarios posteriores, los elementos l_1 y l_2 representan dos rectas fijas que no pertenecen al conjunto $\{l_{e_1}, l_{e_2}\}$, y además distintas entre si.

Definiremos de los elementos de la base $\mathcal{B}$ del espacio ortogonal, del siguiente modo, sea $(x, y) \in X$.

i) Elementos del tipo (1).

$$\mathcal{G}^{(1)}_{(l,l')}\ (x,y) := \begin{cases} 1 & (x,y) \in \{(l,l'), (l_{e_1}, l_{e_2})\} \\ -1 & (x,y) \in \{(l,l_{e_2}), (l_{e_1}, l')\} \\ 0 & E.O.C \end{cases}$$

Donde $l, l' \notin \{l_{e_1}, l_{e_2}\}$ y por supuesto por definición del conjunto X, tenemos que $l \neq l'$.

ii) Elementos del tipo (2) o elementos fila.

$$\mathcal{G}^{(2)}_{(l_1,l)}\ (x,y) := \begin{cases} 1 & (x,y) \in \{(l_{e_2}, l_{e_1}), (l_1, l)\} \\ -1 & (x,y) \in \{(l_1,l_{e_1}), (l_{e_2}, l)\} \\ 0 & E.O.C \end{cases}$$

Donde $l \notin \{l_{e_1}, l_{e_2}\}$ y por definición del conjunto X, $l \neq l_1$.

iii) Elementos del tipo (3) o elementos columna.

$$\mathcal{G}^{(3)}_{(l,l_1)}\ (x,y) := \begin{cases} 1 & (x,y) \in \{(l_{e_2}, l_{e_1}), (l, l_1)\} \\ -1 & (x,y) \in \{(l_{e_2},l_1), (l, l_{e_1})\} \\ 0 & E.O.C \end{cases}$$

Donde $l \notin \{l_{e_1}, l_{e_2}\}$ y por definición del conjunto X, $l \neq l_1$.

iv) Último elemento definido del siguiente modo.

$$\mathcal{D}(x,y) := \begin{cases} 1 & (x,y) \in \{(l_{e_2}, l_1), (l_{e_1}, l_2)\} \\ -1 & (x,y) \in \{(l_{e_1}, l_1), (l_{e_2}, l_2)\} \\ 0 & E.O.C \end{cases}$$

Es fácil notar que cada elemento definido anteriormente pertenece al espacio ortogonal $V^{\perp}$.

Para verificar que es una base, solo basta mostrar que el cardinal de dicho conjunto es igual a la dimensión del espacio $V^{\perp}$, y que además es un conjunto linealmente independiente, lo cual se realiza evaluando en ciertos elementos notables de X, lo que mostraremos en un ejemplo. Sea,

$$\mathcal{H} \;=\; \sum_{L,L'} \lambda_{(L,L')}\; \mathcal{A}^{(1)}_{(L,L')} \;+\; \sum_{L} \gamma_{(l_1,L)}\; \mathcal{A}^{(2)}_{(l_1,L)} \;+\; \sum_{L} \beta_{(L,l_1)}\; \mathcal{A}^{(3)}_{(L,l_1)} \;+\; \delta\mathcal{D} \;=\; 0. \tag{12}$$

En la igualdad 12 evaluamos en el elemento $(l, l^{'}) \in X$, con $l, l^{'} \notin \{l_{e_1}, l_{e_2}, l_1\}$ tenemos lo siguiente.

$$H(l, l^{'}) \;=\; \lambda_{(l,l')} \;=\; 0$$

Teniendo presente la posterior igualdad y algunas obsevaciones pertinentes, podemos calcular el valor de traza asociada a $\mathcal{X}$.

Observación 22. *No debemos olvidar los siguientes comentarios.*

1. *Para toda elemento en $V^{\perp}$ tenemos la propiedad 11*
2. *Cometeremos un abuso con el fin de no saturar la notación. Los escalares que aparecen en la combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$, de la imagen de un elemento en dicha base, se entenderan distintos para cada evaluación que hagamos.*
3. *Se subentiende que la imagen del elemento basal $\mathcal{D}$, aunque no este reflejada en la escritura posterior, esta siendo contemplada.*

$$\mathcal{X}(\mathcal{A}^{(j)}_{(l,l')}) \;=\; \sum_{L,L'} \lambda_{(L,L')}\; \mathcal{A}^{(1)}_{(L,L')} \;+\; \sum_{L} \gamma_{(l_1,L)}\; \mathcal{A}^{(2)}_{(l_1,L)} \;+\; \sum_{L} \beta_{(L,l_1)}\; \mathcal{A}^{(3)}_{(L,l_1)} \;+\; \delta\mathcal{D}. \tag{13}$$

El valor de la traza resulta de la suma de los coeficientes que acompañan al elemento basal en el cual se esta evaluando. A continuacion mostraremos un ejemplo de lo anteriormente acotado.

Considerando la igualdad 13 y el elemento basal $\mathcal{A}^{(2)}_{(l_1,l_2)}$, nuestra tarea será encontrar el coeficiente $\gamma_{(l_1,l_2)}$.

i) Evaluando en el elemento $(l_1, l) \in X$, tenemos lo siguiente.

$$\mathcal{X}(\mathcal{A}^{(2)}_{(l_1,l_2)})(l_1,l) \;=\; \lambda_{(l_1,l)} + \gamma_{(l_1,l)} \;=\; \begin{cases} 1 & l = l_2 \\ 0 & l \neq l_2 \end{cases} \tag{14}$$

ii) Evaluando en el elemento $(l_1, l_{e_2}) \in X$, tenemos lo siguiente.

$$\mathcal{X}(\mathcal{A}^{(2)}_{(l_1,l_2)})(l_1,l_{e_2}) \;=\; \sum_L(-\lambda_{(l_1,L)}) \;=\; 0. \tag{15}$$

iii) Evaluando en el elemento (l_{e_2}, l), con $l \neq l_2$, tenemos lo siguiente

$$\mathcal{X}(\mathcal{A}^{(2)}_{(l_1,l_2)})(l_{e_2},l) \;=\; -\gamma_{(l_1,l)} \;=\; 0. \tag{16}$$

Ocupando las ecuaciones 14 y 16 obtenemos que,

$$\lambda_{(l_1,l)} \;=\; 0, \qquad l \neq l_2.$$

Con lo anterior y la ecuación 15 tenemos que,

$$\lambda_{(l_1,l_2)} \;=\; 0.$$

Y por último, ocupando nuevamente la ecuación 14 tenemos que,

$$\gamma_{(l_1,l_2)} \;=\; 1.$$

Un proceso similar, al ejemplo anterior, nos entrega todos los coeficientes que componen la traza del operador de entrelazamiento $\mathcal{X}$. Con lo cual tenemos el siguiente resultado.

$$Im(\mathcal{X}) \;=\; \mathcal{V}_2\;; \qquad Ker(\mathcal{X}) \;=\; \mathcal{V}_0.$$

Además,

$$dim_{\mathbb{C}}\; Im(\mathcal{X}) \;=\; \frac{1}{2}(q-2)(q+1)\;; \qquad dim_{\mathbb{C}}\; Ker(\mathcal{X}) \;=\; \frac{1}{2}(q)(q-1).$$

Observar que hemos logrado una descomposición para la representación de G, asociada al espacio ortogonal en cuestión.

Proposición 33. *Tenemos, la siguiente descomposición para la representación natural.*

$$L^2(X) = \{f = cte\} \;\oplus\; V_{-1} \;\oplus\; W_{-1} \;\oplus\; \mathcal{V}_0 \;\oplus\; \mathcal{V}_2.$$

Donde

$$\begin{aligned} W_{-1} &= \{f \in L^2(X) \quad | \quad \sum_{L \in \mathcal{L}} f(L,l) = -f(l,l^{'});\ l,l^{'} \in \mathcal{L}\} \\ V_{-1} &= \{f \in L^2(X) \quad | \quad \sum_{L \in \mathcal{L}} f(l^{'},L) = -f(l,l^{'});\ l,l^{'} \in \mathcal{L}\}, \end{aligned}$$

son representaciones irreducibles de G, de grado q, isomorfas.

CAPíTULO 3

Descomposición para una Representación Natural ρ de $GL_2(K)$

1. Carácter asociado a la Representación Natural de $GL_2(K)$

Este capítulo es complementario al capítulo 2. Descompondremos la representación natural de $G = GL_2(K)$ ($|K| = q$, q número primo), asociada al G-conjunto X definido por pares de rectas distintas. Recordar que el conjunto X fue descrito ampliamente en el capítulo anterior. Nos interesara saber cuales son las representaciones, y su respectiva multiplicidad, que aparecen al descomponer dicha representación natural de $G = GL_2(K)$. Para ello acudiremos a la teoría de caracteres y a la tabla de caracteres irreducibles de G.

Como primer paso calcularemos el valor del carácter asociado a la representación natural de G, anteriormente citada, en un representante de cada clase de conjugación de G.

Sea $(L^2(X), \rho)$ la representación natural de G, donde $X = \{(l, l') \mid l \neq l'; \quad l, l' \in \mathcal{L}\}$ y χ_ρ su carácter.

NOTACIÓN 3. *Denotaremos del siguiente modo las clases de conjugación de G.*

$$\mathcal{A}_t = \left\{ g \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}, \qquad \mathcal{B}_t = \left\{ g \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}$$

$$\mathcal{C}_{(r,s)} = \left\{ g \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}, \quad \mathcal{E}_z = \left\{ g \begin{pmatrix} 0 & -N(z) \\ 1 & Tr(z) \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}.$$

Donde $t, r, s (r \neq s) \in K^*, \quad z \in K_2 - K$.

Además tenemos la siguiente tabla.

Tabla: **Clases de Conjugacion**

Tipo de clase	Estabilizador	Orbita	cantidad de clases
$\mathcal{A}_t$	$\|G\|$	1	$q-1$
$\mathcal{B}_t$	$q(q-1)$	q^2-1	$q-1$
$\mathcal{C}_{(r,s)}$	$(q-1)^2$	$q(q+1)$	$1/2(q-1)(q-2)$
$\mathcal{E}_z$	q^2-1	q^2-q	$1/2(q^2-q)$

Ahora usando la proposición 18 podemos completar la tabla anterior con el cálculo de $\chi_\rho(\mathcal{C})$ para todo $\mathcal{C}$ clase de conjugación de G. Anotemos el conjunto X de una forma mas conveniente para los cálculos, representando las rectas por sus pendientes.

NOTACIÓN 4. *Sea* $\mathcal{P} = \{\lambda \mid \lambda \in K\} \bigcup \{\infty\}$ *el conjunto de pendientes. De esta forma* l^p *con* $p \in \mathcal{P} - \{\infty\}$ *es la recta vectorial de pendiente* p*. Además,* $l^\infty = \langle e_2 \rangle$*.*

1. $\mathcal{A}_t$ deja fijas todas las rectas, pues

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle,$$

y

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Con lo cual

$$\chi_\rho(\mathcal{A}_t) = q(q+1).$$

2. $\mathcal{B}_t$ no deja fija a la recta l^∞, pues

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \rangle,$$

Además fija solamente a la recta l^0, ya que

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Y de la siguiente ecuación.

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle,$$

obtenemos el sistema siguiente.

i) $t + p = \lambda$

ii) $tp = \lambda p$.

De donde deducimos necesariamente que $p = 0$. Por lo tanto

$$\chi_\rho(\mathcal{B}_t) = 0.$$

3. $\mathcal{C}_{(r,s)}$ fija a las rectas l^∞ y l^0 pues

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

y

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Revicemos si esta clase fija a las rectas del tipo l^p, con $p \neq 0$. Para ello anlicemos la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle,$$

que es equivalente a.

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ r^{-1}sp \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle,$$

así tenemos, igualando pendientes, que $r = s$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto no existe una recta l^p $(p \neq 0)$ fijada por la clase estudiada. Con lo cual

$$\chi_\rho(\mathcal{C}_{(r,s)}) = 2.$$

4. $\mathcal{E}_z$ no fija a las rectas l^∞ y l^0.

A continuación analicemos si esta clase fija alguna recta de la forma l^p, con $p \neq 0$. Para ello analizamos la igualdad siguiente.

$$\begin{pmatrix} 0 & -N(z) \\ 1 & Tr(z) \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle,$$

que es equivalente a.

$$\langle \begin{pmatrix} -N(z)p \\ 1 + Tr(z)p \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \rangle,$$

de donde, igualando pendientes, tenemos la ecuación.

$$(*) \quad p^2N(z) + pTr(z) + 1 = 0.$$

Es decir, $p \in K^*$ es solución del polinomio

$$x^2N(z) \ + \ Tr(z)x \ + \ 1,$$

cuyas raices son:

$$\frac{-Tr(z) + \Theta}{2}, \quad \frac{-Tr(z) - \Theta}{2},$$

donde Θ es solución de $x^2 = (z - \bar{z})^2$. De otro modo

$$\Theta = (z - \bar{z}) \ \vee \ \Theta = (\bar{z} - z),$$

que en ambos casos no es un elemento de K. Demostremos lo dicho anteriormente.

Supongamos que $(z - \bar{z}) \in K$. Sabemos también que $Tr(z) \in K$, por lo tanto.

$$(z - \bar{z}) \ + \ Tr(z) = 2\ z \quad \in K,$$

lo cual es una contradicción, pues $z \in K_2 - K$. El otro caso es análogo.

Como ya sabemos que $\Theta \notin K$, obtenemos que (*) no tiene soluciones en K. Así

$$\chi_\rho(E_z) = 0.$$

2. Dimensión del álgebra de entrelazamiento

Con la información anterior ampliamos la información para la tabla de clases de conjugación de G.

Tabla: **Clases de Conjugacion**

Tipo de clase	Estabilizador	Orbita	cantidad de clases	χ_ρ
$\mathcal{A}_t$	$\lvert G\rvert$	1	$q-1$	$q(q+1)$
$\mathcal{B}_t$	$q(q-1)$	q^2-1	$q-1$	0
$\mathcal{C}_{(r,s)}$	$(q-1)^2$	$q(q+1)$	$1/2(q-1)(q-2)$	2
$\mathcal{E}_z$	q^2-1	q^2-q	$1/2(q^2-q)$	0

La tabla anteriormente indicada nos permitira cálcular la dimensión del álgebra entrelazamiento, para lo cual ocuparemos el corolario 3.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\overline{\chi_\rho(g)} \\
&= \tfrac{1}{|G|}\{\sum_{g\in G}\chi_\rho^2(g)\} \\
&= \tfrac{1}{|G|}\{(q)^2(q+1)^2(q-1) + 2(q-1)(q-2)(q)(q+1)\} \\
&= \tfrac{(q)(q^2-1)}{|G|}\{(q)(q+1) + 2(q-2)\} \\
&= q+4
\end{aligned}$$

Así, con lo anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 34. *La dimensión del álgebra de entrelazamiento es* $(q+4)$.

3. Multiplicidades

A continuación obtendremos las representaciones irreducibles del grupo $G = GL_2(K)$, que aparecen en la descomposición de la representación natural asociada a X. Además podremos cálcular las multiplicidades de cada representación irreducible de G que aparecen en la descomposición de la representación natural ya mencionada, usando para ello, el corolario 2.

Como primer paso recordaremos la tabla de caracteres irreducibles para $G = GL_2(K)$.

El supraíndice indica el grado de la representación y el subíndice es usado para distiguir entre dos representaciones no isomorfas de un mismo grado.

Tabla: **Caracteres**

Tipo de clase	χ^1_α	χ^q_α	$\chi^{q+1}_{\alpha,\beta}$	χ^{q-1}_Δ
$\mathcal{A}_t$	$\alpha^2(t)$	$q\alpha^2(t)$	$(q+1)\alpha\beta(t)$	$(q-1)\Delta(t)$
$\mathcal{B}_t$	$\alpha^2(t)$	0	$\alpha\beta(t)$	$-\Delta(t)$
$\mathcal{C}_{(r,s)}$	$\alpha(rs)$	$\alpha(rs)$	$\alpha(r)\beta(s)+\alpha(s)\beta(r)$	0
$\mathcal{E}_\ddagger$	$\alpha(Nz)$	$-\alpha(Nz)$	0	$-(\Delta(z)+\Delta(z))$

Con α, $\beta \in \widehat{K^*}$ y $\Delta \in \widehat{K^*_2}$, donde $\Delta \neq \Delta^q$.

Como segundo paso daremos a conocer una proposición necesaria para empezar a cálcular.

PROPOSICIÓN 35. *Sea G un grupo de cardinal finito y $\alpha \in Hom(G, \mathbb{C}^*)$ entonces*

$$\sum_{a\in G}\alpha(a) = \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1 \\ |G| & \alpha = 1. \end{cases}$$

COROLARIO 7. *Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo de cardinal q y $\alpha \in \widehat{\mathcal{F}^*}$ entonces*

$$\sum_{a\in \mathcal{F}^*}\alpha(a) = \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1 \\ q-1 & \alpha = 1. \end{cases}$$

A continuación desarrollaremos los cálculos pertinentes para encontrar las ya mencionadas multiplicidades.

1. Sea $\alpha \in \widehat{K^*}$. Estudiemos χ^1_α.

$$\begin{aligned}
\langle \chi^1_\alpha, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^1_\alpha(g)\overline{\chi_\rho(g)} \\
&= \tfrac{1}{|G|}\{\sum_{t\in K^*}\chi^1_\alpha(\mathcal{A}_t)\chi_\rho(\mathcal{A}_t) + \tfrac{q(q+1)}{2}\sum_{\substack{r,s\in K^*\\ r\neq s}}\chi^1_\alpha(\mathcal{C}_{(r,s)})\chi_\rho(\mathcal{C}_{(r,s)})\} \\
&= \tfrac{q(q+1)}{|G|}\{\sum_{t\in K^*}\alpha^2(t) + \sum_{\substack{r,s\in K^*\\ r\neq s}}\alpha(rs)\} \\
&= \tfrac{1}{(q-1)^2}\{\sum_{r,s\in K^*}\alpha(rs)\}.
\end{aligned}$$

Ahora por corolario 7 tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\langle \chi^1_\alpha, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^2}\{\sum_{r,s\in K^*}\alpha(rs)\} \\
&= \tfrac{1}{(q-1)^2}\sum_{r\in K^*}\sum_{s\in K^*}\alpha(rs) \\
&= \tfrac{q-1}{(q-1)^2}\sum_{a\in K^*}\alpha(a)
\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos.

$$\langle \chi^1_\alpha, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1 \\ 1 & \alpha = 1. \end{cases}$$

La cantidad de representaciones irreducibles de este tipo, es solamente 1. A saber la representación irreducible asociada al carácter χ^1_α, con $\alpha = 1$.

2. Sea $\alpha \in \widehat{K^*}$. Estudiemos χ^q_α.

$$\begin{aligned}
\langle \chi^q_\alpha, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^q_\alpha(g) \overline{\chi_\rho(g)} \\
&= \tfrac{1}{|G|} \{ \sum_{t \in K^*} \chi^q_\alpha(\mathcal{A}_t) \chi_\rho(\mathcal{A}_t) + \tfrac{q(q+1)}{2} \sum_{\substack{r,s \in K^* \\ r \neq s}} \chi^q_\alpha(\mathcal{C}_{(r,s)}) \chi_\rho(\mathcal{C}_{(r,s)}) \} \\
&= \tfrac{1}{|G|} \{ q^2(q+1) \sum_{t \in K^*} \alpha^2(t) + q(q+1) \sum_{\substack{r,s \in K^* \\ r \neq s}} \alpha(rs) \} \\
&= \tfrac{1}{(q-1)^2} \{ q \sum_{t \in K^*} \alpha^2(t) + \sum_{\substack{r,s \in K^* \\ r \neq s}} \alpha(rs) \} \\
&= \tfrac{1}{(q-1)^2} \{ (q-1) \sum_{t \in K^*} \alpha^2(t) + \sum_{r,s \in K^*} \alpha(rs) \} \\
&= \tfrac{1}{(q-1)} \{ \sum_{t \in K^*} \alpha^2(t) + \sum_{a \in K^*} \alpha(a) \}
\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\langle \chi^q_\alpha, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 2 & \alpha = 1 \\ 1 & \alpha^2 = 1 \ ; \ \alpha \neq 1 \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

De lo cual la representación irreducible asociada al cararter χ^q_α, con $\alpha = 1$ tiene mutiplicidad 2. Y la representación irreducible asociada al carácter χ^q_α, donde α cumple con $\alpha^2 = 1$ y $\alpha \neq 1$, es decir, α es tal que al generador de K^* lo envia en -1 o $\alpha = -1$, tiene multiplicidad 1.

3. Sea $\alpha \in \widehat{K^*}$. Estudiemos $\chi^{(q+1)}_{\alpha,\beta}$.

$$\begin{aligned}
\langle \chi^{(q+1)}_{\alpha,\beta}, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(q+1)}_{\alpha,\beta}(g) \overline{\chi_\rho(g)} \\
&= \tfrac{1}{|G|} \{ \sum_{t \in K^*} \chi^{(q+1)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{A}_t) \chi_\rho(\mathcal{A}_t) + \tfrac{q(q+1)}{2} \sum_{\substack{r,s \in K^* \\ r \neq s}} \chi^{(q+1)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{C}_{(r,s)}) \chi_\rho(\mathcal{C}_{(r,s)}) \} \\
&= \tfrac{1}{|G|} \{ q(q+1)^2 \sum_{t \in K^*} (\alpha\beta)(t) + q(q+1) \sum_{\substack{r,s \in K^* \\ r \neq s}} \alpha(r)\beta(s) + \alpha(s)\beta(r) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\chi^{(q+1)}_{\alpha,\beta},\chi_\rho\rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^2}\{(q+1)\sum_{t\in K^*}(\alpha\beta)(t)+\sum_{\substack{r,s\in K^*\\ r\neq s}}\alpha(r)\beta(s)+\alpha(s)\beta(r)\}\\ &= \tfrac{1}{(q-1)^2}\{(q+1)\sum_{t\in K^*}(\alpha\beta)(t)+2\sum_{\substack{r,s\in K^*\\ r\neq s}}\alpha(r)\beta(s)\}\\ &= \tfrac{1}{(q-1)^2}\{(q-1)\sum_{t\in K^*}(\alpha\beta)(t)+2\sum_{r,s\in K^*}\alpha(r)\beta(s)\}\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir lo siguiente.

$$\langle\chi^{(q+1)}_{\alpha,\beta},\chi_\rho\rangle=\begin{cases}1 & \alpha\beta=1\\ 0 & E.O.C\end{cases}$$

Las únicas representaciones que aparecen al descomponer la representación natural son las asociadas a los caracteres $\chi^{q+1}_{\alpha,\beta}$, donde $\alpha\beta=1$ y cuya multiplicidad es 1. Nos queda saber cuántas representaciones de esta dimensión aparecen, para ello analizamos la condición (*) $\alpha\beta=1$. Recordemos que $\widehat{K^*}\simeq K^*$, así la condición (*) se transforma en $\beta=\alpha^{-1}$. También tenemos que $\alpha\neq\beta$, con lo cual la cantidad de representaciones de este tipo es,

$$\frac{|\{\alpha^2=1\}^{\mathbf{C}}|}{2}=\frac{q-3}{2}.$$

Pues (α,β) y (β,α) parametrizan a la misma representación.

4. Sea $\Delta\in\widehat{K_2^*}$. Estudiemos $\chi^{(q-1)}_\Delta$.

$$\begin{aligned}\langle\chi^{(q-1)}_{\Delta},\chi_\rho\rangle &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{(q-1)}_\Delta(g)\overline{\chi_\rho(g)}\\ &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{t\in K^*}\chi^{(q-1)}_\Delta(\mathcal{A}_t)\chi_\rho(\mathcal{A}_t)\\ &= \tfrac{1}{q-1}\sum_{t\in K^*}\Delta(t)\end{aligned}$$

Para poder cálcular la suma anterior daremos algunos pasos antes.
Sabemos que la función norma dada por:

$$\begin{aligned} N:\ K_2^* &\longrightarrow K^*\\ z &\longmapsto N(z):=z\bar{z}.\end{aligned}$$

es un epimorfismo. Con lo cual tenemos que:

$$K_2^*/Ker(N)\simeq K^*,$$

donde $Ker(N)=\{z\in K_2^*\quad|\quad N(z)=1\}$ y $|Ker(N)|=(q+1)$. Así la cantidad de preimagenes de un elemento en K^* es $(q+1)$, pues tenemos los siguientes resultados.
i) Como N es una función epiyectiva, para cada $a\in K^*$ existe un elemento $z\in K_2^*$ tal que $N(z)=a$. Tener presente que si $a\neq a'$ entonces $z\neq z'$ por ser N función, con $N(z')=a'$.
ii) Sea $u\in Ker(N)$, con lo cual $N(z)=N(uz)$ con $z\in K_2^*$. Y por último

iii) $\quad u\ z = u^{'}\ z$ si y sólo si $u = u^{'}$. Con $u, u^{'} \in Ker(N)$ y $z \in K_2^*$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl} \langle \chi_\Delta^{(q-1)}, \chi_\rho \rangle & = & \frac{1}{q-1} \sum\limits_{a \in K^*} \Delta(a) \\ & = & \frac{1}{(q-1)(q+1)} \sum\limits_{a \in K^*} \sum\limits_{\substack{z \in K_2^* \\ N(z)=a}} \Delta(N(z)) \\ & = & \frac{1}{(q-1)(q+1)} \sum\limits_{z \in K_2^*} \Delta(N(z)). \end{array}$$

Donde $\Delta \circ N \in \widehat{K_2^*}$.

Con lo cual.

$$\langle \chi_\Delta^{q-1}, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1 & \Delta \circ N = 1 \\ 0 & \Delta \circ N \neq 1 \end{cases}$$

Observar que $\Delta(N(z)) = \Delta(z\bar{z}) = \Delta(zz^q) = \Delta^{q+1}(z)$, con $z \in K_2^*$. De donde,

$$\langle \chi_\Delta^{q-1}, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1 & \Delta^{q+1} = 1 \\ 0 & \Delta^{q+1} \neq 1 \end{cases}$$

Recordar que $\Delta^q \neq \Delta$. Ahora calculemos la cantidad de representaciones irreducibles asociadas al carácter χ_Δ^{q-1} donde Δ tiene la condición $\Delta^{q+1} = 1$. Lo que ya sabemos es que cada una tiene multiplicidad 1. Por proposición 6 tenemos que $|U| = |\{x \in \mathbb{C} \quad | \quad x^{q+1} = 1\}| = q + 1$. Con lo cual $|\{x \in U \quad | \quad x^q = x\}| = 2$ por lo tanto $|\overline{U}| = |\{x \in U \quad | \quad x^q \neq x\}| = q - 1$. Así la cantidad de caracteres asociados a $\Delta \in \overline{U}$ es $q - 1$. Pero sabemos que la cantidad de representaciones es $\frac{1}{2}(q-1)$, pues Δ^q y Δ parametrizan a la misma representación.

Verifiquemos a continuación que las mutiplicidades anteriormente calculadas satisfacen el corolario 3.

$$\begin{array}{rcl} \langle\ \chi_\rho, \chi_\rho\ \rangle & = & 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2\frac{1}{2}(q-3) + 1^2\frac{1}{2}(q-1) \\ \langle\ \chi_\rho, \chi_\rho\ \rangle & = & q + 4. \end{array}$$

Con todo lo hecho anteriormente y el lema 2, hemos obtenido el siguiente resultado.

Teorema 36. *La representación natural ρ se descompone del siguiente modo.*

$$L^2(X) \ = \ V_1^1 \bigoplus 2\ V_1^q \bigoplus V_{-1}^q \bigoplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \widehat{K^*} \\ \alpha^2 \neq 1}} V_{\alpha,\alpha^{-1}}^{q+1} \bigoplus \bigoplus_{\Delta^{q+1}=1} V_\Delta^{q-1}.$$

CAPíTULO 4

Descomposición para una Representación Natural ρ de $GL_3(K)$

1. Clases de conjugación de $GL_3(K)$

En este capítulo consideraremos $G = GL_3(K)$, con K un cuerpo finito de cardinal q, donde q es la potencia de un número primo.

Consideremos H el grupo de matrices diagonales y $X = G/H$. Nuestro objetivo será descomponer la representación natural asociada a X, del grupo G. Usaremos para ello la Teoría de Caracteres. Además de las tablas de clases de conjugación y caracteres irreducibles asociados al grupo G, con su respectivo valor en cada clase de conjugación.

Como una primera etapa estudiaremos las clases de conjugación de G. Esta parte será util para encontrar el valor del carácter de la representación natural asociada al conjunto X.

Observación 23. *Como el* $|GL_3(K)| = (q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)$ *y* $|H| = (q-1)^3$, *tenemos que*

$$|G/H| = (q^2+q+1)(q^2+q)(q^2).$$

También sabemos que la cantidad de rectas del espacio esta dada por el siguiente cuociente:

$$\frac{q^3-1}{q-1} = q^2+q+1,$$

donde (q^3-1) *es la cantidad de vectores en el espacio que generan una recta y* $(q-1)$ *es la cantidad de vectores en el espacio que engendran la misma recta.*

Notación 5. *Denotaremos del siguiente modo los tipos de clases de conjugación en* G.

$$\mathcal{C}_1(a) = \left\{ g \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}, \quad \mathcal{C}_2(a) = \left\{ g \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}$$

$$\mathcal{C}_3(a) = \left\{ g \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}, \quad \mathcal{C}_4(a,b) = \left\{ g \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}$$

$$\mathcal{C}_5(a,b) = \left\{ g \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}, \quad \mathcal{C}_6(a,b,c) = \left\{ g \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in G \right\}$$

$$\mathcal{C}_7(a,x)=\left\{ g \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^q \end{pmatrix} g^{-1} \mid g\in G \right\},\quad \mathcal{C}_8(z)=\left\{ g \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z^q & 0 \\ 0 & 0 & z^{q^2} \end{pmatrix} g^{-1} \mid g\in G \right\}.$$

Donde $a,b,c \in K^*$ de a dos distintos, y $x\in K_2-K,\ z\in K_3-K.$

Notemos, antes de proseguir, que los elementos elegidos como representantes para los tipos de clases de conjugación $\mathcal{C}_7$ y $\mathcal{C}_8$ es un abuso de notación, pues dichos elementos no pertenecen al grupo $GL_3(K)$. Pero dichos representantes tienen que ver con las raices del polinomio caracteristico. Daremos a continuación una explicación para el representante correcto de las clases en juego.

i) Clase del tipo C_7. Observemos la siguiente matriz.

$$\mathcal{R}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N(s) \\ 0 & 1 & Tr(s) \end{pmatrix},$$

con $a\in K^*$, $s\in K_2-K$, así $N(s)=s\ s^q$ y $Tr(s)=s\ +\ s^q$.

Notemos que la matriz $\mathcal{R}$ pertenece a $GL_3(K)$ y además su polinomio característico es.

$$-(x\ -\ a)(x^2\ -\ xTr(s)\ +\ N(s)),$$

cuya parte cuadratica tiene como raices a s y s^q. Es decir la matriz $\mathcal{R}$ es diagonalizable en K_2. De donde obtenemos.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N(s) \\ 0 & 1 & Tr(s) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s^q \end{pmatrix}.$$

ii) Clase del tipo C_8.

Consideremos la siguiente Transformación lineal, mirando K_3 como K_3-espacio vectorial.

$$\begin{array}{rccl} h_\alpha: & K_3 & \longrightarrow & K_3 \\ & r & \longmapsto & h_\alpha(r):=\alpha\ r, \end{array}$$

con $\alpha\in K_3-K$.

Consideremos a continuación K_3 como K-espacio vectorial. Sabemos que para este espacio tenemos la siguiente base.

$$\{1,\ \alpha,\ \alpha^2\}.$$

Luego la transformación h_α queda definida en un elemento como sigue.

$$\begin{array}{rccl} h_\alpha: & (K_3)_K & \longrightarrow & (K_3)_K \\ & r=x1\ +\ y\alpha\ +\ z\alpha^2 & \longmapsto & h_\alpha(r)=x\alpha\ +\ y\alpha^2\ +\ z\alpha^3, \end{array}$$

donde $x,y,z\in K$.

Recordemos que α es raíz de P_A, polinomio caracteristico de una matriz $A \in GL_3(K)$. Dicho polinomio caracteristico se factoriza integramente en K_3.

$$P_A(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^q)(x - \alpha^{q^2}) = x^3 - Tr(\alpha)x^2 + B(\alpha)x - N(\alpha)$$

De donde.

$$\alpha^3 = N(\alpha)1 + (-B(\alpha))\alpha + Tr(\alpha)\alpha^2.$$

con

$$\begin{array}{lcl} N(\alpha) & = & \alpha\ \alpha^q\ \alpha^{q^2}, \\ B(\alpha) & = & \alpha\ \alpha^q + (\alpha + \alpha^q)\alpha^{q^2}, \\ Tr(\alpha) & = & \alpha + \alpha^q + \alpha^{q^2}. \end{array}$$

De otro modo tenemos.

$$\begin{array}{rccl} h_\alpha : & K^3 & \longrightarrow & K^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & h_\alpha(x,y,z) = (zN(\alpha), x - zB(\alpha), y + zTr(\alpha)) \end{array}$$

Pues $(K_3)_K \simeq K^3$, K^3 como K-espacio vectorial. Teniendo presente el isomorfismo anterior tenemos la siguiente correspondencia.

$$\begin{array}{lcl} (K_3)_K & \longleftrightarrow & K^3 \\ 1 & \leftrightarrow & e_1 \\ \alpha & \leftrightarrow & e_2 \\ \alpha^2 & \leftrightarrow & e_3 \end{array}$$

Así la matriz asociada a h_α es la siguiente.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & N(\alpha) \\ 1 & 0 & -B(\alpha) \\ 0 & 1 & Tr(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Notemos que esta matriz pertenece a $GL_3(K)$ y su polinomio caracteristico

$$-(x^3 - Tr(\alpha)x^2 + B(\alpha)x - N(\alpha)),$$

no tiene raices en K, en otras palabras no es diagonalizable en dicho cuerpo, pues sus raices estan en K_3. Pero h_α la podemos transportar a $(K_3)^3$ pensado como K_3-espacio vectorial.

$$\begin{array}{rccl} h_\alpha : & (K_3)^3 & \longrightarrow & (K_3)^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & h_\alpha(x,y,z) = (zN(\alpha), x - zB(\alpha), y + zTr(\alpha)), \end{array}$$

y considerando la base canonica para este espacio obtenemos.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & N(\alpha) \\ 1 & 0 & -B(\alpha) \\ 0 & 1 & Tr(\alpha) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^q & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{q^2} \end{pmatrix}.$$

Pues el polinomios caracteristico asociado a h_α se descompone completamente en K_3.

2. Carácter asociado a la Representación Natural ρ de $GL_3(K)$

Para cálcular el valor del carácter de la representación natural, que anotaremos por χ_ρ, de G ya mencionada, ocuparemos algunos hechos importantes.

Recordando el capítulo 2. Sea

$$Y = \{(l_v, l_w, l_z) \quad | \quad \{v, w, z\} \textbf{ linealmente independiente } \}, \text{ con } \quad l_x = \langle x \rangle.$$

Observar que si tenemos 3 vectores linealmente independientes en un espacio cuya dimensión 3, ellos forman una base del espacio en cuestión, con lo cual podemos precisar un poco más los elementos del conjunto Y.

Cada trío de rectas esta en Y si y sólo si dada la primera recta en el trío, la segunda recta es distinta de ella y la tercera recta del trío no esta en el plano formado por las dos rectas anteriores.

También tenemos que Y es un G-espacio, definida la acción del siguiente modo.

$$g \cdot (l_u,\ l_v,\ l_w) \ := \ (l_{g \cdot v}\ ,\ l_{g \cdot v},\ l_{g \cdot w}).$$

Notemos que esta acción es transitiva, pues dado $(\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle w \rangle) \in Y$ existe
$g = (u\ v\ w) \in GL_3(K)$ tal que

$$g \cdot (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle) = (\langle u \rangle, \langle v \rangle \langle w \rangle).$$

Además

$$Stab_{(\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle)} \ = \ H,$$

donde H es el grupo de las matrices diagonales.

Así ocupando la proposición 1 podemos transportar nuestro $X = G/H$, y mirarlo como el nuevo $Y \ = \ O_{(e_1, e_2, e_3)}$ geométrico.

Otro hecho importante de resaltar es la siguiente observación, que nos permitira cálcular los valores del carácter asociado a la representación natural χ_ρ.

Observación 24. *Los tipos de recta en el espacio son:*

1. *Tipo 1:* $\{m_1 = \langle e_1 \rangle\}$.
2. *Tipo 2:* $\{l_{[t]} \ = \ \langle te_1 + e_2 \rangle \quad | \quad t \in K\}$.
3. *Tipo 3:* $\{l_{[r,s]} \ = \ \langle re_1 + se_2 + e_3 \rangle \quad | \quad t, r \in K\}$.

Claramente si sumamos el cardinal de cada conjunto nos da la cantidad de rectas en el espacio. Y dichos conjuntos son todos distintos, con lo cual la partición anterior es correcta.

Ahora calcularemos χ_ρ en cada clase de conjugación de G. Para ello ocuparemos la proposición 18.

Usaremos el nombre de cada clase como un representante de dicha clase de conjugación.

1. Tipos de rectas que son fijadas por el tipo de clase C_1.

$$C_1 \cdot m_1 = m_1, \quad C_1 \cdot l_{[t]} = l_{[t]}, \quad C_1 \cdot l_{[r,s]} = l_{[r,s]}.$$

Con lo cual

$$\chi_\rho(C_1) = |X|$$

2. Tipos de rectas fijas por el tipo de clase C_2.

Vemos claramente que $C_2 \cdot m_1 = m_1$.

A continuación escojamos una recta del tipo 2. Sea $t \in K$. Nos preguntamos que condiciones sobre t rigen sobre la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

Haciendo actúar el representante de la clase sobre la recta obtenemos el sistema siguiente:

i) $at + 1 = \alpha t$

ii) $a = \alpha$,

para algún $\alpha \in K^*$. Vemos claramenta que ningun t satisface el sistema anterior. Por lo tanto este tipo de rectas no es fijadas por el tipo de clase C_2.

Escojamos ahora una recta del tipo 3. Sea $r, s \in K$. Revisemos la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

de donde tenemos.

$$\langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} ar + s \\ as \\ a \end{pmatrix} \rangle,$$

Desarrollando la igualdad anterior concluimos que ella sólo se cumple cuando $s = 0$. Es decir, las rectas fijas del tipo 2 son $l_{[r,0]}$ con $r \in K$.

Por lo tanto si existe un elemento fijo de X por el tipo de clase C_2 el esta constituido por m_1 y dos rectas del tipo $l_{[r,0]}$ con $r \in K$. Este trío de rectas para que pertenezca a X debe cumplir.

$$\{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$

con $r_1 \neq r_2$ debe ser linealmente independiente. Lo cual no se cumple pues.

$$z = (r_2 - r_1)x \; + \; (1)y$$

Por lo tanto

$$\chi_\rho(C_2) = 0$$

3. Tipos de rectas que son fijadas por el tipo de clase C_3.

Vemos facilmente que $C_3 \cdot m_1 = m_1$. Revisemos que sucede con las demas rectas.

Escojamos un recta del tipo 2.

Sea $t \in K$. Desarrollemos la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

Así obtenemos el sistema siguiente:

i) $at + 1 = \alpha t$

ii) $a = \alpha$,

para algún $\alpha \in K^*$. Lo cual nos dice, que para toda recta de este tipo, ella no es fijada por el tipo de clase C_3.

Ahora escojamos una recta del tipo 3.

Sea $r, s \in K$ y hagamos actuar C_3 sobre la recta $l_{[r,s]}$. Al realizar este acto obtenemos.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

Con lo cual tenemos el siguiente sistema.

i) $\alpha s + s = \alpha r$

ii) $\alpha s + 1 = \alpha s$,

para algún $\alpha \in K^*$. Con lo cual.

$$\chi_\rho(C_3) = 0$$

4. Tipos de rectas que son fijadas por el tipo de clase C_4.

Vemos facilmente que $C_4 \cdot m_1 = m_1$ y $C_4 \cdot l_{[t]} = l_{[t]}$ para todo $t \in K$.

Ahora escojamos un recta del tipo 3. Sea $r, s \in K$.
Desarrollemos la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

De lo anterior obtenemos:

$$\langle \begin{pmatrix} ar \\ as \\ b \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

de donde tenemos el siguiente sistema.
i) $ar = \alpha r$
ii) $as = \alpha s$
iii) $b = \alpha$,
para algún $\alpha \in K^*$. Así,

$$(r \neq 0 \vee s \neq 0) \Longrightarrow a \ = \ b.$$

Como sabemos que $a \neq b$ tenemos que la única recta fijada es $l_{[0,0]} = \langle e_3 \rangle$. Por lo tanto las rectas fijas por este tipo de clase son

$$m_1 \ , \ \{ \ l_{[t]} \ \} \ , \ l_{[0,0]}.$$

Sólo nos queda encontar cuantos elementos de X podemos formar con la información obtenida. Como el conjunto $\{e_1 \ , \ te_1 + e_2 \ , \ e_3\}$, con $t \in K$ es linealmente independiente, así la cantidad de tríos en X, de esta forma, que podemos formar son $6q$.
También sabemos que $\{t_1 e_1 + e_2 \ , \ t_2 e_1 + e_2 \ , \ e_3\}$, con $t_1, \ t_2 \in K$ distintos, es linealmente independiente. Con lo cual la cantidad de elementos X, de esta forma, que podemos formar son: $\frac{6}{2}(q)(q-1)$. Observar que el conjunto $\{e_1 \ , \ t_1 e_1 + e_2 \ , \ t_2 e_1 + e_2\}$ es linealmente dependiente, pues.

$$t_1 e_1 + e_2 \ = \ (t_1 - t_2)e_1 + t_2 e_1 + e_2.$$

Por lo tanto.

$$\chi_\rho(C_4) \ = \ 6q \ + \ \frac{6}{2}(q)(q-1) \ = \ 3q(q+1).$$

5. Tipos de rectas que son fijadas por el tipo de clase C_5.

Vemos que este tipo de clase fija a la recta m_1. Revisemos si fija a alguna recta del tipo 2. Consideremos la recta $l_{[t]}$ con $t \in K$ y analicemos la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

con lo cual tenemos esta otra igualdad:

$$\langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} at+1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Pero esta igualdad no se cumple, pues si se cumpliera $1 = 0$. Así la clase C_5 no fija a ninguna recta del tipo 2. Revisemos el tercer tipo de rectas. Ahora consideremos la recta $l_{[r,s]}$ con $r, s \in K$ perteneciente al tercer tipo. Haciendo actúar el representante de la clase C_5 sobre la recta $l_{[r,s]}$ e igualando a la recta $l_{[r,s]}$ obtenemos lo siguiente.

$$\langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} ar+s \\ as \\ b \end{pmatrix} \rangle.$$

Con lo cual obtenemos el siguiente sistema.
i) $ar + s = br$
ii) $as = bs$.
De donde si $s \neq 0$ se tiene que $a = b$, lo cual no es posible. Ahora si $s = 0$, sólo nos queda la ecuación $ar = br$, por lo tanto r tampoco puede ser distinto de cero. Así los valores de r y s son simultaneamente ceros. En otras palabras la única recta del tipo 3 que es fijada por esta clase es $l_{[0,0]}$.
Por lo tanto

$$\chi_\rho(c_5) = 0$$

6. Tipos de rectas que son fijadas por el tipo de clase C_6.
Esta clase fija a la recta m_1.
Veamos si deja fija a otra recta. Consideremos la recta $l_{[t]}$ del tipo 2 donde $t \in K$. Revisemos la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

con lo cual tenemos la siguiente igualdad.

$$\langle \begin{pmatrix} at \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Así obtenemos.
i) $bt = at$. De donde $t \neq 0$, pues de otro modo, $a = b$. Por lo tanto la única recta fija por este tipo de clase es $l_{[0]}$.
Sólo nos queda revisar que pasa con las rectas del tipo 3.
Sea la recta $l_{[r,s]}$ con $r, s \in K$. Analicemos la igualdad a continuación.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

la cual provoca el hecho siguiente.

$$\langle \begin{pmatrix} ar \\ bs \\ c \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

De donde obtenemos el sistema siguiente.
i) $ar = cr$
ii) $bs = cs$.
Así la única recta fija por este tipo de clase es $l_{[0,0]}$.
Por lo tanto

$$\chi_\rho(C_6) = 6.$$

7. Tipos de rectas que son fijadas por el tipo de clase C_7.
Este tipo de clase fija a la recta m_1, pues

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N(\alpha) \\ 0 & 1 & Tr(\alpha) \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

Consideremos ahora una recta del tipo 2. Para ello sea $t \in K$. Revisemos la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N(\alpha) \\ 0 & 1 & Tr(\alpha) \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

la cual provoca el hecho siguiente.

$$\langle \begin{pmatrix} at \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Que claramente son distintas para todo $t \in K$. Es decir el tipo 2 de rectas no son fijas por esta clase.

El último caso es considerar una recta del tipo 3. Para ello sea $r, s \in K$. Analicemos la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N(\alpha) \\ 0 & 1 & Tr(\alpha) \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

De lo anterior obtenemos.

$$\langle \begin{pmatrix} ar \\ -N(\alpha) \\ s + Tr(\alpha) \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Con lo cual tenemos el siguiente sistema.
i) $ar = \beta r$
ii) $-N(\alpha) = \beta s$
iii) $s + Tr(\alpha) = \beta$, con $\beta \in K^*$.
De ii) iii) obtenemos la ecuación siguiente.

$$\beta^2 \;-\; Tr(\alpha)\beta \;+\; N(\alpha) = 0.$$

Es decir $\beta \in K^*$, es una solución del polinomio,

$$x^2 \;-\; Tr(\alpha)x \;+\; N(\alpha).$$

Pero las raices del polinomio anterior son.

$$\frac{-Tr(\alpha) + \Theta}{2}, \quad \frac{-Tr(\alpha) - \Theta}{2},$$

donde Θ es solución de $x^2 = (\alpha \,-\, \widehat{\alpha})^2$, es decir $\Theta \notin K$, por lo tanto el polinomio anteriormente citado no tiene sus soluciones en K. Así obtenemos que el tipo 3 de rectas no es fijado por la clase C_7.

Por lo tanto.

$$\chi_\rho(C_7) = 0.$$

8. Tipos de rectas que son fijadas por el tipo de clase C_8.

Observemos lo siguiente. Si $\chi_\rho(C_8) \neq 0$, de donde tenemos que existe $x \in X$ tal que

$$C_8 \cdot x = x.$$

Por lo tanto existe $l_v \in (L)$, tal que

$$g \cdot l_v = l_v.$$

Es decir, existe $\beta \in K^*$ tal que

$$g \cdot v \ = \ \beta v.$$

De donde obtenemos que β es un valor propio de C_8, lo cual es una contradicción. Por lo tanto.

$$\chi_\rho(C_8) = 0.$$

Con toda esta información generamos la tabla siguiente útil para descomponer la representación natural.

Clase de Conjugación para G			
Tipo de clase	Cardinal	Orden	χ_ρ
C_1	$q-1$	1	$\|X\|$
C_2	$q-1$	$(q^3-1)(q+1)$	0
C_3	$q-1$	$(q^3-1)(q^3-q)$	0
C_4	$(q-1)(q-2)$	$(q^2+q+1)(q^2)$	$(3q)(q+1)$
C_5	$(q-1)(q-2)$	$(q^3-1)(q+1)(q^2)$	0
C_6	$\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$	$(q^2+q+1)(q^4+q^3)$	6
C_7	$\frac{1}{2}(q-1)(q^2-q)$	$(q^3)(q^3-1)$	0
C_8	$\frac{1}{3}(q^3-q)$	$(q^3-q^2)(q^3-q)$	0

El paso siguiente será cálcular la dimensión del entrelazamiento, para luego proseguir con el cálculo de las multiplicidades de cada representación irreducible de G, que aparecen al descomponer la representación natural.

3. Dimensión del álgebra de entrelazamiento de ρ

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_\rho(g)\overline{\chi_\rho(g)} \\
&= \tfrac{1}{|G|}\{\sum_{g\in G} \chi_\rho^2\} \\
&= \tfrac{1}{|G|}\{(q-1)(q^2+q+1)^2(q^2+q)^2(q^2)^2 + 9(q^4)(q-1)(q-2)(q^2+q+1)(q+1)^2 ... \\
&\quad ... + 6(q-1)(q-2)(q-3)(q^2+q+1)(q^3)(q+1)\} \\
&= \tfrac{1}{|G|}\{(q^3-1)(q^2+q+1)(q+1)^2(q^6) + 9(q^4)(q^3-1)(q-2)(q+1)^2 + ... \\
&\quad ... + 6(q^3-1)(q-2)(q-3)(q^3)(q+1)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \chi_\rho, \chi_\rho\rangle &= \tfrac{(q^3-1)(q+1)(q^3)}{|G|}\{(q^2+q+1)(q+1)(q^3)+9(q)(q-2)(q+1)+6(q-2)(q-3)\}\\ &= \tfrac{1}{(q-1)^2}\{q^6+2q^5+2q^4+10q^3-3q^2-48q+36\}\\ &= \tfrac{(q-1)^2}{(q-1)^2}\{q^4+4q^3+9q^2+24q+36\}\end{aligned}$$

Así, con lo anterior tenemos la siguiente proposición

Proposición 37. *La dimensión del álgebra de entrelazamiento es,* $(q^4+4q^3+9q^2+24q+36)$.

Daremos a continuación algunas informaciones útiles, para luego recordar la tabla de caracteres irreducibles de $GL_3(K)$.

Proposición 38. *Sea Z un conjunto no vacío y $f : Z^3 \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : Z^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones entonces.*

i)

$$\begin{aligned}\sum_{a,b,c\in Z} f(a,b,c) &= \sum_{a\in Z} f(a,a,a) + \sum_{\substack{a,b\in Z\\ a\neq b}} f(b,a,a) + \sum_{\substack{a,b\in Z\\ a\neq b}} f(a,b,a) + ...\\ &\quad ... + \sum_{\substack{a,b\in Z\\ a\neq b}} f(a,a,b) + \sum_{a,b,c(\neq)\in Z} f(a,b,c).\end{aligned}$$

Además si f cumple con.

$$f(a,a,b) = f(a,b,a) = f(b,a,a),$$

tenemos que

$$\sum_{a,b,c\in Z} f(a,b,c) = \sum_{a\in Z} f(a,a,a) + 3\sum_{\substack{a,b\in Z\\ a\neq b}} f(a,b,b) + \sum_{a,b,c(\neq)\in Z} f(a,b,c).$$

ii)

$$\sum_{a,b\in Z} g(a,b) = \sum_{\substack{a,b\in Z\\ a\neq b}} g(a,b) + \sum_{a\in Z} g(a,a).$$

Notación 6. *Sean α, γ, $\beta \in \widehat{K^*}$, con $1 < |\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}| \leq 3$, se define.*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}: \quad K^*\times K^*\times K^* &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (x,y,z) &\longmapsto \mathcal{S}(x,y,z) := \sum_{(\alpha\ \beta\ \gamma)} \alpha(x)\beta(y)\gamma(z).\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}\sum_{(\alpha\ \beta\ \gamma)} \alpha(x)\beta(y)\gamma(z) &= \alpha(x)\beta(y)\gamma(z) + \alpha(x)\gamma(y)\beta(z) + \beta(x)\gamma(y)\alpha(z) + ...\\ &\quad ... + \beta(x)\alpha(y)\gamma(z) + \gamma(x)\beta(y)\alpha(z) + \gamma(x)\alpha(y)\beta(z)\end{aligned}$$

Proposición 39. *La función $\mathcal{S}$ cumple con.*

i)

$$\sum_{a,b,c\in K^*} \mathcal{S}(a,b,c) = 0.$$

ii)

$$\sum_{a,b,c(\neq)\in K^*} \mathcal{S}(a,b,c) = -1\sum_{a\in K^*}\mathcal{S}(a,a,a) - 3\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}} \mathcal{S}(a,a,b).$$

iii)

$$\sum_{a,b\in K^*}\mathcal{S}(a,a,b) \;=\; \sum_{a\in K^*}\mathcal{S}(a,a,a) + \sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\mathcal{S}(a,a,b).$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos lo siguiente.

$$\sum_{a,b,c\in K^*}\mathcal{S}(a,b,c) = \sum_{a,b,c\in K^*}\sum_{(\alpha\ \beta\ \gamma)}\alpha(a)\beta(b)\gamma(c).$$

Analicemos a continuación la siguiente suma.

$$\sum_{a\in K^*}\sum_{b\in K^*}\sum_{c\in K^*}\alpha(a)\beta(b)\gamma(c) = \sum_{a\in K^*}\alpha(a)\sum_{b\in K^*}\beta(b)\sum_{c\in K^*}\gamma(c).$$

Ocupando proposición 7 y el hecho que $1 < |\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}| \leq 3$, obtenemos.

$$\sum_{a\in K^*}\alpha(a)\sum_{b\in K^*}\beta(b)\sum_{c\in K^*}\gamma(c) = 0.$$

Con lo cual.

$$\sum_{a,b,c\in K^*}\mathcal{S}(a,b,c) = 0.$$

También es fácil percatarse de lo siguiente.

$$\mathcal{S}(a,b,b) = \mathcal{S}(a,b,a) = \mathcal{S}(b,a,a),$$

de donde, por proposición 38 y adjuntando el resultado anterior obtenemos el punto *ii*) de la proposición.

Para el punto *iii*) observemos lo siguiente.

$$\mathcal{S}(a,a,b) = \sum_{(\alpha\ \beta\ \gamma)}\alpha(a)\beta(a)\gamma(b) = \sum_{(\alpha\ \beta\ \gamma)}(\alpha\beta)(a)\gamma(b).$$

Es decir, $\mathcal{S}$ se puede ver como una función en dos variables y aplicando la proposición 38 *ii*) obtenemos el último punto de la demostración.

$\square$

Como ya hemos mencionado otro dato importante para realizar la descomposición de la representación natural, es la tabla de caracteres irreducibles o caracteres asociados a cada representación irreducible de G.

El supraíndice indica el grado de la representación y el subíndice es usado para distiguir entre dos representaciones no isomorfas de un mismo grado.

4. Multiplicidades

A continuación calcularemos las multiplicidades de cada representación irreducible, que aparecen al descomponer la representación natural $L^2(X)$ asociada a G.

1. Cálculo de la multiplicidad de la representación irreducible de G asociada al carácter $\chi_{\alpha\beta\gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)}$. De aqui en adelante omitiremos el supraíndice por comodidad en la lectura de los cálculos.

$$\begin{aligned}
\langle\chi_{\alpha\beta\gamma},\chi_\rho\rangle &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\alpha\beta\gamma}(g)\overline{\chi_\rho(g)}\\
&= \tfrac{1}{|G|}\{\sum_{a\in K^*}\chi_{\alpha\beta\gamma}(\mathcal{C}_1)\chi_\rho(\mathcal{C}_1)+(q^2+q+1)(q^2)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\chi_{\alpha\beta\gamma}(\mathcal{C}_4)\chi_\rho(\mathcal{C}_4)+...\\
&\quad ...+\tfrac{(q^2+q+1)(q^4+q^3)}{6}\sum_{a,b,c(\neq)\in K^*}\chi_{\alpha\beta\gamma}(\mathcal{C}_6)\chi_\rho(\mathcal{C}_6)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q+1)(q^2+q+1)\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta\gamma)(a)+\tfrac{3}{2}(q+1)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\sum_{(\alpha\beta\gamma)}\alpha(a)\beta(a)\gamma(b)+...\\
&\quad ...+\sum_{a,b,c(\neq)}\sum_{(\alpha\beta\gamma)}\alpha(a)\beta(b)\gamma(c)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{\tfrac{1}{6}(q+1)(q^2+q+1)\sum_{a\in K^*}\mathcal{S}(a,a,a)+\tfrac{3}{2}(q+1)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\mathcal{S}(a,a,b)+...\\
&\quad ...+\sum_{a,b,c(\neq)\in K^*}\mathcal{S}(a,b,c)\}
\end{aligned}$$

Ahora por proposición 39 *ii*) tenemos que la suma anterior se transforma en.

$$\begin{aligned}
\langle\chi_{\alpha\beta\gamma},\chi_\rho\rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{[(\tfrac{1}{6}(q+1)(q^2+q+1))-1]\sum_{a\in K^*}\mathcal{S}(a,a,a)+[\tfrac{3}{2}(q+1)-3]\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\mathcal{S}(a,a,b)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{[(\tfrac{1}{6}(q+1)(q^2+q+1))-1]\sum_{a\in K^*}\mathcal{S}(a,a,a)+\tfrac{3}{2}(q-1)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\mathcal{S}(a,a,b)\}
\end{aligned}$$

A continuación, por proposición 39 *iii*) tenemos.

$$\begin{aligned}
\langle\chi_{\alpha\beta\gamma},\chi_\rho\rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{[(\tfrac{1}{6}(q+1)(q^2+q+1))-1-\tfrac{3(q-1)}{2}]\sum_{a\in K^*}\mathcal{S}(a,a,a)+...\\
&\quad ...+\tfrac{3}{2}(q-1)\sum_{a,b\in K^*}\mathcal{S}(a,a,b)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{\tfrac{1}{6}(q^3+2q^2-7q+4)6\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta\gamma)(a)+...\\
&\quad ...+(3)(q-1)\tfrac{1}{2}\sum_{a,b\in K^*}\mathcal{S}(a,a,b)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q-1)^2(q+4)\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta\gamma)(a)+...\\
&\quad ...+(3)(q-1)\tfrac{1}{2}\sum_{a,b\in K^*}\mathcal{S}(a,a,b)\}
\end{aligned}$$

Notemos que.

$$\frac{1}{2}\mathcal{S}(a,a,b)=(\alpha\beta)(a)\gamma(b)+(\alpha\gamma)(a)\beta(b)+(\gamma\beta)(a)\alpha(b).$$

Así obtenemos lo siguiente.

$$\langle \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)}, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} q+7 & (\alpha\beta = 1 \wedge \gamma = 1) \veebar (\alpha\gamma = 1 \wedge \beta = 1) \veebar (\beta\gamma = 1 \wedge \alpha = 1) \\ q+4 & \alpha\beta\gamma = 1 \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

2. Cálculo de la multiplicidad de la representación irreducible de G asociada al carácter χ_α^1.

$$\begin{aligned} \langle \chi_\alpha, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\alpha\beta\gamma}(g) \overline{\chi_\rho(g)} \\ &= \tfrac{1}{|G|} \{ \sum_{a \in K^*} \chi_\alpha(\mathcal{C}_1) \chi_\rho(\mathcal{C}_1) + (q^2+q+1)(q^2) \sum_{\substack{a,b \in K^* \\ a \neq b}} \chi_\alpha(\mathcal{C}_4) \chi_\rho(\mathcal{C}_4) + ... \\ &\quad ... + \tfrac{(q^2+q+1)(q^4+q^3)}{6} \sum_{a,b,c(\neq) \in K^*} \chi_\alpha(\mathcal{C}_6) \chi_\rho(\mathcal{C}_6) \} \\ &= \tfrac{1}{(q-1)^3} \{ \sum_{a \in K^*} \alpha(a^3) + 3 \sum_{\substack{a,b \in K^* \\ a \neq b}} \alpha(a^2 b) + \sum_{a,b,c(\neq)} \alpha(abc) \} \end{aligned}$$

Considerando la función $f_\alpha \ : \ K^* \times K^* \times K^* \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por.

$$f_\alpha(x,y,z) := \alpha(xyz), \qquad (x,y,z) \in K^* \times K^* \times K^*,$$

Observemos que $f_\alpha(x,x,y) = f_\alpha(x,z,x) = f_\alpha(z,x,x)$ y ocupando la proposición 38 $i)$ obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} \langle \chi_\alpha^1, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3} \{ \sum_{a \in K^*} \sum_{b \in K^*} \sum_{c \in K^*} \alpha(abc) \} \\ \langle \chi_\alpha^1, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3} \{ \sum_{a \in K^*} \alpha(a) \sum_{b \in K^*} \alpha(b) \sum_{c \in K^*} \alpha(c) \}. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos.

$$\langle \chi_\alpha^1, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

3. Cálculo de la multiplicidad de la representación irreducible de G asociada al carácter $\chi_\alpha^{q^2+q}$.

$$\begin{aligned} \langle \chi_\alpha, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha(g) \overline{\chi_\rho(g)} \\ &= \tfrac{1}{|G|} \{ \sum_{a \in K^*} \chi_\alpha(\mathcal{C}_1) \chi_\rho(\mathcal{C}_1) + (q^2+q+1)(q^2) \sum_{\substack{a,b \in K^* \\ a \neq b}} \chi_\alpha(\mathcal{C}_4) \chi_\rho(\mathcal{C}_4) + ... \\ &\quad ... + \tfrac{(q^2+q+1)(q^4+q^3)}{6} \sum_{a,b,c(\neq) \in K^*} \chi_\alpha(\mathcal{C}_6) \chi_\rho(\mathcal{C}_6) \} \\ &= \tfrac{1}{(q-1)^3} \{ (q+1)(q) \sum_{a \in K^*} \alpha(a^3) + 3(q+1) \sum_{\substack{a,b \in K^* \\ a \neq b}} \alpha(a^2 b) + 2 \sum_{a,b,c(\neq)} \alpha(abc) \} \\ &= \tfrac{1}{(q-1)^3} \{ ((q+1)(q) - 2) \sum_{a \in K^*} \alpha(a^3) + (3(q+1) - 6) \sum_{\substack{a,b \in K^* \\ a \neq b}} \alpha(a^2 b) + 2 \sum_{a,b,c \in K^*} \alpha(abc) \} \end{aligned}$$

Teniendo presente la función f_α y ocupando la proposición 38 *ii*) obtenemos.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\alpha, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{((q-1)(q+2)-3(q-1))\sum_{a\in K^*}\alpha(a^3)+3(q-1)\sum_{a,b\in K^*}\alpha(a^2b)+ ...\\
&\quad +...\ 2\sum_{a,b,c}\alpha(abc)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q-1)^2\sum_{a\in K^*}\alpha^3(a)+3(q-1)\sum_{a\in K^*}\alpha^2(a)\sum_{b\in K^*}\alpha(b)+ ...\\
&\quad ...\ 2\sum_{a\in K^*}\alpha(a)\sum_{b\in K^*}\alpha(b)\sum_{c\in K^*}\alpha(c)\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\langle \chi_\alpha^{q^2+q}, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 6 & \alpha = 1 \\ 1 & \alpha \neq 1; \alpha^3 = 1 \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

4. Cálculo de la multiplicidad de la representación irreducible de G asociada al carácter $\chi_\alpha^{q^3}$.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\alpha, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\alpha(g)\overline{\chi_\rho(g)}\\
&= \tfrac{1}{|G|}\{\sum_{a\in K^*}\chi_\alpha(\mathcal{C}_1)\chi_\rho(\mathcal{C}_1)+(q^2+q+1)(q^2)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\chi_\alpha(\mathcal{C}_4)\chi_\rho(\mathcal{C}_4)+ ...\\
&\quad ...+\tfrac{(q^2+q+1)(q^4+q^3)}{6}\sum_{a,b,c(\neq)\in K^*}\chi_\alpha(\mathcal{C}_6)\chi_\rho(\mathcal{C}_6)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{q^3\sum_{a\in K^*}\alpha(a^3)+3q\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\alpha(a^2b)+\sum_{a,b,c(\neq)}\alpha(abc)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{((q^3-1)-3(q-1))\sum_{a\in K^*}\alpha(a^3)+3(q-1)\sum_{a,b\in K^*}\alpha(a^2b)+\sum_{a,b,c}\alpha(abc)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q-1)^2(q+2)\sum_{a\in K^*}\alpha^3(a)+3(q-1)\sum_{a\in K^*}\alpha(a^2)\sum_{b\in K*}\alpha(b)+\sum_{a,b,c\in K*}\alpha(abc)\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\langle \chi_\alpha^{q^3}, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} q+6 & \alpha = 1 \\ q+2 & \alpha \neq 1; \alpha^3 = 1 \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

5. Cálculo de la multiplicidad de la representación irreducible de G asociada al carácter $\chi_{\alpha\beta}^{q^2+q+1}$.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\alpha\beta}, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\alpha\beta}(g)\overline{\chi_\rho(g)}\\
&= \tfrac{1}{|G|}\{\sum_{a\in K^*}\chi_{\alpha\beta}(\mathcal{C}_1)\chi_\rho(\mathcal{C}_1)+(q^2+q+1)(q^2)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\chi_{\alpha\beta}(\mathcal{C}_4)\chi_\rho(\mathcal{C}_4)+ ...\\
&\quad ...+\tfrac{(q^2+q+1)(q^4+q^3)}{6}\sum_{a,b,c(\neq)\in K^*}\chi_{\alpha\beta}(\mathcal{C}_6)\chi_\rho(\mathcal{C}_6)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\alpha\beta}, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q^2+q+1)\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a) + 3\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}[(q+1)(\alpha\beta)(a)\beta(b)+\beta^2(a)\alpha(b)] + ...\\ &\quad ... + \tfrac{1}{2}\sum_{a,b,c(\neq)}\sum_{(abc)}\alpha(a)\beta(bc)\}\end{aligned}$$

Donde

$$\frac{1}{2}\sum_{(abc)}\alpha(a)\beta(b)\beta(c) = \alpha(a)\beta(b)\beta(c)+\alpha(c)\beta(a)\beta(b)+\alpha(b)\beta(c)\beta(a).$$

Lo cual podemos pensarlo del siguiente modo.

$$\frac{1}{2}\sum_{(abc)}\alpha(a)\beta(b)\beta(c) = \sum_{(\alpha\beta\beta)}\alpha(a)\beta(b)\beta(c), \tag{17}$$

pues tenemos.

$$\sum_{(abc)}\alpha(a)\beta(b)\beta(c) \;=\; 2[\ \alpha(a)\beta(b)\beta(c)+\alpha(b)\beta(a)\beta(c)+\alpha(c)\beta(a)\beta(b)\ ]$$

Observemos lo siguiente.

$$(q+1)(\alpha\beta)(a)\beta(b)+\beta^2(a)\alpha(b) = (q-1)(\alpha\beta)(a)\beta(b)+\sum_{(\alpha\beta\beta)}\alpha(a)\beta(a)\beta(b).$$

Con lo cual tenemos.

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\alpha\beta}, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q^2+q+1)\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a) + 3(q-1)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\alpha(a)\beta(a)\beta(b) + ...\\ &\quad ... + 3\sum_{a,b(\neq)}\sum_{(\alpha\beta\beta)}\alpha(a)\beta(a)\beta(b) + \sum_{a,b,c(\neq)}\sum_{(\alpha\beta\beta)}\alpha(a)\beta(b)\beta(c)\}\end{aligned}$$

Por proposición 39 *ii*) obtenemos la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\alpha\beta}, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q^2+q+1)\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a) + 3(q-1)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\alpha(a)\beta(a)\beta(b) + ...\\ &\quad ... - \sum_{a\in K^*}\sum_{(\alpha\beta\beta)}\alpha(a)\beta(a)\beta(a)\}\\ &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q^2+q+1)\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a) + 3(q-1)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\alpha(a)\beta(a)\beta(b) + ...\\ &\quad ... - 3\sum_{a\in K^*}\alpha(a)\beta(a)\beta(a)\}\end{aligned}$$

Además, ocupando la proposición 38 *ii*) sabemos que.

$$\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta)(a)\beta(a) + \sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}(\alpha\beta)(a)\beta(b) = \sum_{a,b\in K^*}(\alpha\beta)(a)\beta(b).$$

Con lo cual obtenemos.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\alpha\beta}, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q^2+q-2)\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a) + 3(q-1)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\alpha(a)\beta(a)\beta(b)\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q^2+q-2-3(q-1))\sum_{a\in K^*}\alpha(a)\beta(a)\beta(a) + 3(q-1)\sum_{a,b\in K^*}(\alpha\beta)(a)\beta(b)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q-1)^2\sum_{a\in K^*}\alpha(a)\beta(a)\beta(a) + 3(q-1)\sum_{a,b\in K^*}(\alpha\beta)(a)\beta(b)\}
\end{aligned}$$

Pero,

$$\sum_{a,b\in K^*}(\alpha\beta)(a)\beta(b) = \sum_{a\in K^*}(\alpha\beta)(a)\sum_{b\in K^*}\beta(b) = 0,$$

pues $\alpha \neq \beta$. Con lo cual obtenemos.

$$\langle \chi_{\alpha\beta}^{q^2+q+1}, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1 & \alpha\beta^2 = 1 \\ 0 & \alpha\beta^2 \neq 1. \end{cases}$$

6. Cálculo de la multiplicidad de la representación irreducible de G asociada al carácter $\chi_{\alpha\beta}^{q(q^2+q+1)}$.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\alpha\beta}, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\alpha\beta}(g)\overline{\chi_\rho(g)}\\
&= \tfrac{1}{|G|}\{\sum_{a\in K^*}\chi_{\alpha\beta}(\mathcal{C}_1)\chi_\rho(\mathcal{C}_1) + (q^2+q+1)(q^2)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\chi_{\alpha\beta}(\mathcal{C}_4)\chi_\rho(\mathcal{C}_4) + ..\\
&\quad ... + \tfrac{(q^2+q+1)(q^4+q^3)}{6}\sum_{a,b,c(\neq)\in K^*}\chi_{\alpha\beta}(\mathcal{C}_6)\chi_\rho(\mathcal{C}_6)\}\\
&= \tfrac{1}{|G|}\{(q^2+q+1)^2(q+1)(q^4)\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a) + ...\\
&\quad ... + 3(q^2+1+q)(q+1)(q^3)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}[(q+1)(\alpha\beta)(a)\beta(b) + q\beta^2(a)\alpha(b)] + ...\\
&\quad ... + (q^2+1+q)(q+1)(q^3)\sum_{a,b,c(\neq)}\tfrac{1}{2}\sum_{(abc)}\alpha(a)\beta(bc)\}\\
&= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q^2+q+1)(q)\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a) + 3\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}[(q+1)(\alpha\beta)(a)\beta(b) + q\beta^2(a)\alpha(b)] + ...\\
&\quad ... + \sum_{a,b,c(\neq)}\tfrac{1}{2}\sum_{(abc)}\alpha(a)\beta(bc)\}
\end{aligned}$$

Observemos lo siguiente.

$$(q+1)(\alpha\beta)(a)\beta(b) + q\beta^2(a)\alpha(b) = (q-1)(\alpha\beta)(a)\beta(b) + (q-1)\beta^2(a)\alpha(b) + \sum_{(\alpha\beta\beta)}\alpha(a)\beta(a)\beta(b).$$

Ahora por proposición 39 *ii*) y usando la igualdad 17 tenemos.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\alpha\beta}, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{[(q^2+q+1)(q)-3]\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a) + 3(q-1)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}(\alpha\beta)(a)\beta(b) + ...\\
&\qquad ... + 3(q-1)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\beta^2(a)\alpha(b)\}.
\end{aligned}$$

Debido a la proposición 38 $ii)$ tenemos.

$$\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta)(a)\beta(a)+\sum_{a,b(\neq)\in K^*}(\alpha\beta)(a)\beta(b)=\sum_{a,b\in K^*}(\alpha\beta)(a)\beta(b)=0.$$

y

$$\sum_{a\in K^*}\beta^2(a)\alpha(a)+\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\beta^2(a)\alpha(b)=\sum_{a,b\in K^*}\beta^2(a)\alpha(b).$$

Por lo tanto.

$$\begin{aligned}\langle\chi_{\alpha\beta},\chi_\rho\rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{[(q^2+q+1)(q)-3-6(q-1)]\textstyle\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a)+3(q-1)\sum_{a,b\in K^*}\beta^2(a)\alpha(b)\}\\ &= \tfrac{1}{(q-1)^3}\{(q-1)^2(q+3)\textstyle\sum_{a\in K^*}(\alpha\beta^2)(a)+3(q-1)\sum_{a,b\in K^*}\beta^2(a)\alpha(b)\}\end{aligned}$$

Con lo cual.

$$\langle\chi_{\alpha\beta}^{(q)(q^2+q+1)},\chi_\rho\rangle=\begin{cases} q+6 & \alpha=1\wedge\beta^2=1\\ q+3 & \beta^2\neq 1\wedge\alpha\beta^2=1\\ 0 & E.O.C.\end{cases}$$

7. Cálculo de la multiplicidad de la representación irreducible de G asociada al carácter $\chi_{\alpha\Delta}^{(q-1)(q^2+q+1)}$.

$$\begin{aligned}\langle\chi_{\alpha\Delta},\chi_\rho\rangle &= \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G}\chi_\alpha(g)\overline{\chi_\rho(g)}\\ &= \tfrac{1}{|G|}\{\textstyle\sum_{a\in K^*}\chi_\alpha(\mathcal{C}_1)\chi_\rho(\mathcal{C}_1)+(q^2+q+1)(q^2)\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\chi_\alpha(\mathcal{C}_4)\chi_\rho(\mathcal{C}_4)\}\\ &= \tfrac{1}{|G|}\{(q-1)(q^2+q+1)^2(q+1)(q^3)\textstyle\sum_{a\in K^*}(\alpha\Delta)(a)+...\\ &\quad ...+3(q-1)(q^2+q+1)(q+1)(q^3)\textstyle\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\alpha(a)\Delta(b)\}\\ &= \tfrac{1}{(q-1)^2}\{(q^2+q+1)\textstyle\sum_{a\in K^*}(\alpha\Delta)(a)+3\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\alpha(a)\Delta(b)\}\end{aligned}$$

Debido a la proposición 38 $ii)$ tenemos lo siguiente.

$$\sum_{a\in K^*}(\alpha\Delta)(a)\ +\ \sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\alpha(a)\Delta(b)\ =\ \sum_{a,b\in K^*}\alpha(a)\Delta(b),$$

de donde obtenemos.

$$\begin{aligned}\langle\chi_{\alpha\Delta},\chi_\rho\rangle &= \tfrac{1}{(q-1)^2}\{(q^2+q+1)\textstyle\sum_{a\in K^*}(\alpha\Delta)(a)+3\sum_{\substack{a,b\in K^*\\ a\neq b}}\alpha(a)\Delta(b)\}\\ &= \tfrac{1}{(q-1)^2}\{(q-1)(q+2)\textstyle\sum_{a\in K^*}(\alpha\Delta)(a)+3\sum_{a\in K^*}\alpha(a)\sum_{b\in K^*}\Delta(b)\}.\end{aligned}$$

Tener presente el siguiente hecho.

$$\Delta(b) = \frac{1}{(q+1)} \sum_{\substack{z \in K_2^* \\ N(z)=b}} \Delta(N(z)),$$

donde $N(z) = z\ z^q$. Con lo cual tenemos.

$$\begin{array}{rcl} \langle \chi_{\alpha\Delta}, \chi_\rho \rangle & = & \frac{1}{(q-1)^2}\{(q-1)(q+2)\sum_{a\in K^*}(\alpha\Delta)(a) + 3\sum_{a\in K^*}\alpha(a)\sum_{b\in K^*}\Delta(b)\} \\ & = & \frac{1}{(q-1)^2}\{(q-1)(q+2)\sum_{a\in K^*}(\alpha\Delta)(a) + \frac{3}{(q+1)}\sum_{a\in K^*}\alpha(a)\sum_{z\in K_2^*}\Delta(N(z))\} \end{array}$$

De donde obtenemos.

$$\langle \chi_{\alpha\Delta}^{(q-1)(q^2+q+1)}, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} q+5 & (\alpha = 1) \wedge (\alpha\Delta = 1) \\ q+2 & (\alpha \neq 1) \wedge (\alpha\Delta = 1) \wedge (\Delta \circ N \neq 1) \\ 0 & E.O.C. \end{cases}$$

8. Cálculo de la multiplicidad de la representación irreducible de G asociada al carácter $\chi_\phi^{(q-1)(q^2-1)}$.

$$\begin{array}{rcl} \langle \chi_\phi, \chi_\rho \rangle & = & \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\alpha(g)\overline{\chi_\rho(g)} \\ & = & \frac{1}{|G|}\sum_{a\in K^*}\chi_\alpha(\mathcal{C}_1)\chi_\rho(\mathcal{C}_1) \\ & = & \frac{(q-1)(q^2-1)(q^2+q+1)(q+1)(q^3)}{|G|}\sum_{a\in K^*}\phi(a) \\ & = & \frac{(q+1)}{(q-1)}\sum_{a\in K^*}\phi(a) \end{array}$$

Lo que a continuación desarrollaremos ya ha sido estudiado en capítulos anteriores, que es una nueva forma de escribir la suma antes mencionada, por esta razón sólo veremos los pasos más importantes.

$$\begin{array}{rccl} N' : & K_3^* & \longrightarrow & K^* \\ & z & \longmapsto & N'(z) := z\ z^q\ z^{q^2}, \end{array}$$

epimorfismo. Con lo cual tenemos que:

$$K_3^*/Ker(N) \simeq K^*,$$

donde

$$Ker(N') = \{z \in K_2^* \quad | \quad N'(z) = 1\},$$

donde $|Ker(N')| = (q^2+q+1)$. Así la cantidad de preimagenes de un elemento en K^* es (q^2+q+1). Con lo cual tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\phi, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{(q+1)}{(q-1)} \sum_{a\in K^*} \phi(a) \\
&= \tfrac{(q+1)}{(q-1)(q^2+q+1)} \sum_{a\in K^*} \sum_{\substack{z\in K_3^* \\ N'(z)=a}} \phi(N'(z)) \\
&= \tfrac{(q+1)}{(q^3-1)} \sum_{z\in K_3^*} (\phi \circ N')(z)
\end{aligned}$$

Donde $\Delta \circ N' \in \widehat{K_3^*}$. Por lo tanto.

$$\langle \chi_\phi^{(q-1)(q^2-1)}, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} q+1 & \phi^{q^2+q+1} = 1 \\ 0 & \phi^{q^2+q+1} \neq 1 \end{cases}$$

Teorema 40. *La representación natural ρ se descompone del siguiente modo.*

$$\begin{aligned}
L^2(X) &= \bigoplus_{\alpha\beta\gamma=1} [q+4]\ V_{(\alpha,\beta,\gamma)}^{(q+1)(q^2+q+1)} \bigoplus \bigoplus_{\alpha\beta=1} [q+7]\ V_{(\alpha,\beta,1)}^{(q+1)(q^2+q+1)} \bigoplus V_1^1 \bigoplus \ldots \\
&\ldots \bigoplus 6\ V_1^{q^2+q} \bigoplus \bigoplus_{\substack{\alpha^3=1 \\ \alpha\neq 1}} V_\alpha^{q^2+q} \bigoplus [q+6]\ V_1^{q^3} \bigoplus \bigoplus_{\substack{\alpha^3=1 \\ \alpha\neq 1}} [q+2]\ V_\alpha^{q^3} \bigoplus \ldots \\
&\ldots \bigoplus \bigoplus_{\alpha\beta^2=1} V_{(\alpha,\beta)}^{q^2+q+1} \bigoplus \bigoplus_{\beta^2=1} [q+6]\ V_{(1,\beta)}^{(q)(q^2+q+1)} \bigoplus \bigoplus_{\substack{\beta^2\neq 1 \\ \alpha\beta^2=1}} [q+3]\ V_{(\alpha,\beta)}^{(q)(q^2+q+1)} \bigoplus \ldots \\
&\ldots \bigoplus \bigoplus_{\Delta_{|K^*}=1} [q+5]\ V_{(1,\Delta)}^{(q-1)(q^2+q+1)} \bigoplus \bigoplus_{\substack{\alpha\Delta=1 \\ \Delta^{q+1}\neq 1 \\ \alpha\neq 1}} [q+2]\ V_{(\alpha,\Delta)}^{(q-1)(q^2+q+1)} \bigoplus \ldots \\
&\ldots \bigoplus \bigoplus_{\phi^{q^2+q+1}=1} [q+1]\ V_\phi^{(q-1)(q^2-1)}.
\end{aligned}$$

Donde V_j^i son los espacios asociados a las representaciones irreducibles de G cuyo carácter es χ_j^i.

5. Generalizaciones

Lo que realizaremos en la presente sección será dar algunas generalizaciones, o de otra forma, la determinación de una fórmula que nos permita cálcular en forma más rapida la tabla de caracteres y el número de entrelazamiento.

Sea $G_n = GL_n(K)$ con $|K| = q$ y T_n el subgrupo diagonal o Toro de G_n.

1. Consideremos a continuación los siguientes conjuntos.

$$X_n = G_n/T_n,$$

y también

$$Y_n \;=\; \{(l_{v_1}, l_{v_2}, l_{v_3}, \cdots, l_{v_n}) \quad | \quad \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\} \text{ base de } K^n\}.$$

Sabemos que Y_n es un G_n-espacio. La acción esta definida del siguiente modo.

$$g \cdot (l_{v_1}, l_{v_2}, l_{v_3}, \cdots, l_{v_n}) := (g \cdot l_{v_1}, g \cdot l_{v_2}, g \cdot l_{v_3}, \cdots, g \cdot l_{v_n}),$$

donde

$$g \cdot l_{v_i} = l_{g\ v_i}, \qquad l_{v_i} = \langle\ v_i\ \rangle$$

Observación 25. *Observemos que G_n actúa transitivamente sobre Y_n, pues dado $(l_{v_1}, l_{v_2}, l_{v_3}, \cdots, l_{v_n}) \in Y$ existe*

$$g = (v_1\ v_2\ v_3 \cdots v_n) \in G_n,$$

tal que

$$g \cdot (l_{e_1}, l_{e_2}, l_{e_3}, \cdots, l_{e_n}) = (l_{v_1}, l_{v_2}, l_{v_3}, \cdots, l_{v_n}).$$

Además tenemos lo siguiente.

$$Stab_{(l_{e_1}, l_{e_2}, l_{e_3}, \cdots, l_{e_n})} \;=\; T_n,$$

pues si $g = (v_1, v_2, v_3 \cdots, v_n) \in G_n$ es tal que $g \cdot x \;=\; x$, con $x = (l_{e_1}, l_{e_2}, l_{e_3}, \cdots, l_{e_n})$, tenemos.

$$v_j = \lambda_j\ e_j, \qquad \lambda_j \in K^*,\ j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\},$$

Juntando la observación anterior con la proposición 1 tenemos la siguiente correspondencia.

$$Y_n \qquad \longleftrightarrow \qquad G_n/Stab_{(l_{e_1}, l_{e_2}, l_{e_3}, \cdots, l_{e_n})}. \tag{18}$$

La equivalencia 18 es nuestra primera generalización, que nos ayudara a encontrar el valor del carácter asociado a la representación natural asociada a G_n, para $X_n = G_n/T_n$. Este resultado será nuestra segunda generalización.

En lo que sigue el conjunto X_n será pensado, ví la equivalencia 18, como el conjunto Y_n.

2. El del carácter asociado a la representación natural, $(L^2(X_n)\ ,\ \rho)$ de G_n, considerando $X_n = G_n/T_n$.

Proposición 41. *Sea $g \in G_n$.*

1. *Si g fija al menos un elemento $x \in X$ entonces g es diagonalizable.*
2. *Si g tiene al menos un valor propio fuera del cuerpo K entonces*

$$\chi_\rho(g) = 0.$$

Demostración. Sea $g \in GL_n(K)$. Sabemos por proposición 18 que,

$$\chi_\rho(g) \ = \ \#\{x \in X \mid \ g \cdot x \ = \ x\}.$$

Supongamos que g fija un elemento $x = (l_{v_1}, l_{v_2}, l_{v_3}, \cdots, l_{v_n}) \in X_n$, entonces tenemos lo siguiente.

$$\begin{array}{rcl} g\ v_1 & = & \lambda_1\ v_1 \\ g\ v_2 & = & \lambda_2\ v_2 \\ g\ v_3 & = & \lambda_3\ v_3 \\ \vdots & = & \vdots \\ g\ v_n & = & \lambda_n\ v_n, \end{array}$$

con $\lambda_j \in K^*$, $j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$. Así la matriz g en la base $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ es diagonal. Es decir, g es diagonalizable. Con lo anteriormente dicho demostramos el punto 1 de la proposición.

Demostremos el punto 2. Si suponemos que $\chi_\rho(g) \neq 0$, entonces que existe al menos un elemento $x \in X$ tal que $g \cdot x \ = \ x$. Con lo realizado anteriormente, g es diagonalizable y evidentemente todos sus valores propios pertenecen a K^*. □

Hasta este punto ya sabemos el valor del carácter de la representación natural asociada a G_n en las clases de conjugación no diagonalizables, es decir cero. El paso siguiente será encontrar su valor en las clases de conjugación diagonalizables.

Definición 18. *1. Sea $n \in \mathbb{N}$ se define a continuación el siguiente elemento.*

$$\xi_n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{q^n - 1}{q-1} - \frac{q^j - 1}{q-1} \right) = \frac{\mid GL_n(K) \mid}{\mid T_n \mid} = \mid X_n \mid.$$

2. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_r)$, $r \leq n$, donde $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_r\}$ es un conjunto de numeros enteros positivos. Se dice que λ es una partición de n sí sólo si.

i) $\sum_{j=1}^{r}\lambda_j \;=\; n.$

ii) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_r.$

Recordar que los tipos de clases de conjugación de $GL_n(K)$, diagonalizables, estan parametrizadas por las particiones de n.

TEOREMA 42. *Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_r)$ la partición de n, que parametriza al tipo de clase de conjugación $\mathcal{C}$, de un elemento diagonalizable de G_n, entonces*

$$\chi_\rho(\mathcal{C}) \;=\; P_\lambda^n \quad \xi_{\lambda_1}\; \xi_{\lambda_2}\; \xi_{\lambda_3} \cdots \xi_{\lambda_r} \tag{19}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{C}$ la clase de conjugación de G_n parametrizada por la partición λ de n. Recordar que todos los elementos de la clase tiene el mismo polinomio caracteristico, pues son matrices conjugadas, por tal razón usaremos $\mathcal{C}$ como un representante de la clase.

Sean $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$, y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_r$, los valores propios y multiplicidades respectivamente de $\mathcal{C}$, con $r \leq n$.

Observemos lo siguiente.

Las únicas rectas fijas por $\mathcal{C}$ son las pertenecientes a los espacios propios V_{a_i}, asociados a cada valor propio a_i, cuya dimensión es λ_i, con $i \in \{1, 2, 3 \cdots, r\}$.

Teniendo presente lo anterior y ocupando la proposición 18, procedamos a contar la cantidad de n-uplas en X fijas por $\mathcal{C}$.

Pensemos en la n-upla cuyos primeras coordenadas estan constituidas por rectas del espacio propio V_{a_1}, las coordenadas que siguen, por rectas del espacio propio V_{a_2}, y así sucesivamente hasta las últimas coordenadas constituidas por rectas del espacio propio V_{a_r}. O de otro modo la n-upla en X formada por bloques V_{a_1}, V_{a_2}, $V_{a_3}, \cdots, V_{a_r}$. Calculemos la cantidad de n-uplas que tienen esta forma.

Anotemos como $l_{v_{(i,j)}}$ las rectas que forman la n-upla en cuestión, donde i indica la coordenada y j indica el espacio propio al cual pertenece o de otro modo $v_{(i,j)} \in V_{a_j}$.

La cantidad de rectas posibles para la primera coordenada de la n-upla es.

$$\left(\frac{q^{\lambda_1} - 1}{q - 1}\right).$$

OBSERVACIÓN 26. *Sea V es un K-espacio vectorial de dimensión finita, $W \leq V$ con B una base de W, entonces.*

$$v \notin W \Longleftrightarrow W \neq \langle W \cup \{v\}\rangle \Longleftrightarrow B \cup \{v\} \textit{ es un conjunto linealmente independiente.}$$

es decir, $v \notin W$ sí sólo si $\langle v\rangle \notin \{\ l < W \mid$ dimensión de $l = 1\ \}$.

La cantidad de rectas posibles para la segunda coordenada de la n-upla, es tal que el conjunto,

$$\{v_{(1,1)}\ ,\ v_{(1,2)}\},$$

es linealmente independiente, es decir, ocupando obsevación anterior, $v_{(1,2)} \notin l_{v_{(1,1)}}$, lo cual es equivalente a decir $l_{v_{(2,1)}} \neq l_{v_{(1,1)}}$. Por lo tanto la cantidad de rectas pertenecientes a V_{a_1}, que pueden ocupar la segunda coordenada de la n-upla es.

$$\left(\frac{q^{\lambda_1}-1}{q-1}\right) - 1.$$

La cantidad de rectas posibles en V_{a_1}, para ocupar la tercera coordenada de la n-upla, es tal que el conjunto,

$$\{v_{(1,1)}\ ,\ v_{(2,1)}\ ,\ v_{(3,1)}\},$$

es linealmente independiente, que es equivalente a decir $v_{(3,1)} \notin \langle\{v_{(1,1)}\ ,\ v_{(2,1)}\}\rangle$, lo que a su vez es equivalente $l_{v_{(3,1)}} \notin \{\ l < \langle\{v_{(1,1)}\ ,\ v_{(2,1)}\}\rangle \mid \text{dimensión de } l = 1\ \}$. Por la tanto la cantidad de rectas pertenecientes a V_{a_1} que pueden ocupar la tercera coordenada de la n-upla es.

$$\left(\frac{q^{\lambda_1}-1}{q-1}\right) - \left(\frac{q^{2}-1}{q-1}\right).$$

Siguiendo este proceso obtenemos que la cantidad de n-uplas en X formada por bloques es.

$$\xi_{\lambda_1}\ \xi_{\lambda_2}\ \xi_{\lambda_3} \cdots \xi_{\lambda_r}$$

Ademas observando que si $g \in G_n$ fija una n-upla entonces g fija cualquier arreglo nuevo que hagamos de dicha n-upla, obtenemos el bello resultado.

$$\chi_\rho(\mathcal{C}) = P_\lambda^n \quad \xi_{\lambda_1}\ \xi_{\lambda_2}\ \xi_{\lambda_3} \cdots \xi_{\lambda_r}.$$

$\square$

Resumiendo lo dicho en los puntos 1 y 2, tenemos que el carácter de la representación natural asociada a G_n para $X_n = G_n/T_n$, en las clases de conjugación no diagonalizables es cero y para las diagonalizables tenemos la formula dada por el teorema 42.

Observar que también podemos ocupar el siguiente hecho, que nos servira, junto con lo anterior, para cálcular la dimensión del álgebra de entrelazamiento.

Sea $\mathcal{C}_\lambda$ un representante de un clase de conjugación diagonalizable de G_n, parametrizada por la partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_r)$ entonces

$$| \mathcal{O}_{\mathcal{C}_\lambda} | = \frac{| G_n |}{\prod_{j=1}^{r} |G_{\lambda_j}|}. \tag{20}$$

Sea $\widetilde{\mathbb{G}}$ un sistema de representantes para las clases de conjugación de G_n. Observemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G_n|} \sum_{g \in G_n} \chi_\rho^2(g) \\
&= \tfrac{1}{|G_n|} \sum_{\mathcal{C} \in \widetilde{\mathbb{G}}} \quad \sum_{g \in \mathcal{O}_\mathcal{C}} \chi_\rho^2(g) \\
&= \tfrac{1}{|G_n|} \sum_{\mathcal{C} \in \widetilde{G}} \quad \sum_{g \in \mathcal{O}_\mathcal{C}} \chi_\rho^2(\mathcal{C}) \\
&= \tfrac{1}{|G_n|} \sum_{\mathcal{C} \in \widetilde{\mathbb{G}}} \quad \mid \mathcal{O}_\mathcal{C} \mid \chi_\rho^2(\mathcal{C})
\end{aligned}$$

Sea $\mathbb{D}$ un conjunto representantes para las clases de conjugación diagonalizables de G_n, $\mathcal{J}$ el conjunto de todas las particiones de n y Π_λ la cantidad de clases parametrizadas por la partición λ. Así la suma anterior adquiere la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G_n|} \sum_{\mathcal{C} \in \widetilde{\mathbb{G}}} \quad \mid \mathcal{O}_\mathcal{C} \mid \chi_\rho^2(\mathcal{C}) \\
&= \tfrac{1}{|G_n|} \sum_{\mathcal{C} \in \mathbb{D}} \quad \mid \mathcal{O}_\mathcal{C} \mid \chi_\rho^2(\mathcal{C}) \\
&= \tfrac{1}{|G_n|} \sum_{\lambda \in \mathcal{J}} \quad \Pi_\lambda \mid \mathcal{O}_{\mathcal{C}_\lambda} \mid \chi_\rho^2(\mathcal{C}_\lambda)
\end{aligned}$$

La suma anterior queda absolutamente determinada. Sólo basta emplear para su resolución las formulas 19 y 20. Con esta información tenemos el siguiente teorema.

Teorema 43. *La dimensión del álgebra de entrelazamiento asociada a la representación natural ρ en el grupo G_n es:*

$$\frac{1}{|G_n|} \sum_{\lambda \in \mathcal{J}} \quad \Pi_\lambda \mid \mathcal{O}_{\mathcal{C}_\lambda} \mid \chi_\rho^2(\mathcal{C}_\lambda).$$

Un par de ejercicios interesantes de desarrollar, es en primer término, verificar la dimensión del álgebra de entrelazamiento que obtuvimos para G_3 y encontrar la dimensión del álgebra de entrelazamiento para G_4.

1. Dimensión del álgebra de entrelazamiento de ρ para $G = GL_3(K)$.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle &= \tfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho^2(g) \\
&= \tfrac{1}{|G|} \{ \tfrac{|G|}{|G|} \sum_{a \in K^*} (P_3^3 \ \xi_3)^2 \ + \ \tfrac{|G|}{|GL_2(K) \times GL_1(K)|} \sum_{\substack{a,b \in K^* \\ a \neq b}} (P_{(2,1)}^3 \ \xi_2 \ \xi_1)^2 \ + ... \\
&\quad ... + \tfrac{1}{6} \tfrac{|G|}{|GL_1(K) \times GL_1(K) \times GL_1(K)|} \sum_{(\neq) a,b,c \in K^*} (P_{(1,1,1)}^3 \ \xi_1 \ \xi_1 \ \xi_1)^2 \} \\
&= \tfrac{1}{|G|} \{ (q-1)(q^2+q+1)^2(q+1)^2(q)^6 + 9(q^4)(q-1)(q-2)(q^2+q+1)(q+1)^2 ... \\
&\quad ... + 6(q-1)(q-2)(q-3)(q^2+q+1)(q^3)(q+1) \} \\
&= \tfrac{(q^3-1)(q+1)(q^3)}{|G|} \{ (q^2+q+1)(q+1)(q^3) + 9(q)(q-2)(q+1) + 6(q-2)(q-3) \} \\
&= \tfrac{1}{(q-1)^2} \{ q^6 + 2q^5 + 2q^4 + 10q^3 - 3q^2 - 48q + 36 \} \\
&= \tfrac{(q-1)^2}{(q-1)^2} \{ q^4 + 4q^3 + 9q^2 + 24q + 36 \}
\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle \ = \ q^4 + 4q^3 + 9q^2 + 24q + 36.$$

2. Dimensión del álgebra de entrelazamiento de ρ para $G = GL_4(K)$.

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle \ &= \ \tfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho^2(g) \\
&= \ \tfrac{1}{|G|} \{ \tfrac{|G|}{|G|} \sum_{a \in K^*} (P_4^4 \ \xi_4)^2 \ + \ \tfrac{|G|}{|GL_3(K) \times GL_1(K)|} \sum_{\substack{a,b \in K^* \\ a \neq b}} (P_{(3,1)}^4 \ \xi_3 \ \xi_1)^2 \ + ... \\
&\quad ... + \tfrac{1}{2} \tfrac{|G|}{|GL_2(K) \times GL_1(K) \times GL_1(K)|} \sum_{(\neq) a,b,c \in K^*} (P_{(2,1,1)}^4 \ \xi_2 \ \xi_1 \ \xi_1)^2 \ + ... \\
&\quad ... + \tfrac{1}{2} \tfrac{|G|}{|GL_2(K) \times GL_2(K)|} \sum_{\substack{a,b \in K^* \\ a \neq b}} (P_{(2,2)}^4 \ \xi_2 \ \xi_2)^2 \ + ... \\
&\quad ... + \tfrac{1}{4!} \tfrac{|G|}{|GL_1(K) \times GL_1(K) \times GL_1(K) \times GL_1(K)|} \sum_{(\neq) a,b,c,d \in K^*} (P_{(1,1,1,1}^4 \ \xi_1 \ \xi_1 \ \xi_1 \ \xi_1)^2 \ \} \\
&= \ \tfrac{1}{(q-1)^3} \{ q^6 (q^3 + q^2 + q + 1)(q^2 + q + 1)(q + 1) \ + \ 16q^3 (q^2 + q + 1)(q + 1)(q - 2) \ + ... \\
&\quad ... + 72(q^2 + q)(q^2 - 5q + 6) + 18(q^2 + 2q + 1)(q^3 - 2q^2) + 24(q - 2)(q - 3)(q - 4) \} \\
&= \ \tfrac{1}{(q-1)^3} (q - 1)^3 (q^9 + 6q^8 + 20q^7 + 49q^6 + 98q^5 + 186q^4 + 314q^3 + 468q^2 + 672q + 576)
\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle \ = \ q^9 + 6q^8 + 20q^7 + 49q^6 + 98q^5 + 186q^4 + 314q^3 + 468q^2 + 672q + 576.$$

Bibliografía

[1] **J.L Alperin; Rowen B. Bell** : Groups and Representations. Department of Mathematics. University of Chicago.

[2] **Jean Pierre Serre** : Représentations Linéaires Des Gruopes Finis. Paris. Omega Barcelona, colección metodos. 1971. 182p.

[3] **Jorge Soto** : Representaciones Geométricas de Grupos Finitos. Escuela Latinoamericana de Matemáticas(ELAM). Santiago. Chile. 1988. 104p.

[4] **Hoffman-Kunze** : Algebra lineal. Prentice-Hall Hispanoamerica. 1973.

[5] **Hungerford, T.W** : Algebra. Springer-Verlang New York. Heidelberg. Berlin. Alemania. 1972. 512p.