Apuntes de Álgebra Multilineal
(Borrador 2026)

Jesús Juyumaya

Índice general

1. Elementos de Álgebra Lineal **3**

1.1. Espacio Vectorial Libre 3

1.2. Teorema Fundamental del Álgebra Lineal 5

1.3. Espacio Dual 6

1.4. Aniquilador 9

1.5. Ejercicios 12

2. Álgebra Bilineal **15**

2.1. Funciones Bilineales 15

2.2. Formas Bilineales 19

2.3. Formas Bilineales Alternadas 27

2.4. Formas Bilineales Simétricas 32

2.5. Isometrías 40

2.6. Formas Cuadráticas 43

2.7. Ejercicios 44

3. Tensores **47**

3.1. Producto Tensorial 47

3.2. n–Tensores 60

3.3. Tensor de Funciones Lineales 62

3.4. Tensores en Dimensión Finita 66

3.5. Producto Tensorial de Matrices 71
3.6. Extensión de Escalares 73
3.7. Ejercicios 75

4. Tensores Simétricos y Antisimétricos 80
4.1. El Espacio $T^m(V)$ 80
4.2. Los Espacios $A^m(V)$ y $\mathrm{Ker}\,(\mathscr{A}_m)$ 85
4.3. Los Espacios $S^m(V)$ y $\mathrm{Ker}\,(\mathscr{S}_m)$ 91
4.4. Propiedad Universal de $S^m(V)$ y $A^m(V)$ 93
4.5. Ejercicios 96

Capítulo 1

Elementos de Álgebra Lineal

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Denotaremos por $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ el $\mathbb{K}$–espacio vectorial formado por las matrices de tamaño $n \times m$ con entradas en $\mathbb{K}$. Denotaremos $M_n(\mathbb{K})$ en vez de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1.1. Espacio Vectorial Libre

sub:1.1

Sea X un conjunto no vacío. Denotamos por $\mathcal{L}(X)$ el $\mathbb{K}$–espacio vectorial libre generado por X, es decir, $\mathcal{L}(X)$ está formado por las siguientes sumas formales.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad (x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{Z}^+). \tag{1.1}$$

forSum

Las operaciones de suma y ponderación por escalar están definidas, respectivamente, como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\, x_i.$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i) x_i \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

El subconjunto $\{1 \cdot x\,;\, x \in X\}$ de $\mathcal{L}(X)$ es una base de $\mathcal{L}(X)$, y está en correspondencia biunívoca con X, mediante la siguiente función inyectiva.

$$\begin{aligned} \epsilon :\ & X \longrightarrow \mathcal{L}(X) \\ & x \mapsto \epsilon(x) = 1 \cdot x \end{aligned} \tag{1.2}$$

epsilon

De este modo, X es visto como un subconjunto de $\mathcal{L}(X)$. Consecuentemente, X es una base para $\mathcal{L}(X)$.

univ(x)

Lema 1.1. *El par* $(\mathcal{L}(X), \epsilon)$ *satisface la siguiente propiedad universal: si* W *es un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y* $f : X \longrightarrow W$ *es una función, entonces existe una única transformación lineal* $\phi : \mathcal{L}(X) \longrightarrow W$ *tal que* $\phi \circ \epsilon = f$*. Tenemos, así, el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{L}(X) \arrow[d, dotted, "\phi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Demostración. Dados W y f, definimos ϕ por:

$$\phi : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Se deja como ejercicio al lector verificar los detalles de la demostración. □

Notar que $\mathcal{L}(X)$ puede ser descrito también como el conjunto formado por las funciones de X en $\mathbb{K}$ con soporte finito. En particular, la suma formal de (1.1), es la función de X en $\mathbb{K}$ definida por:

$$x_i \mapsto \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i \in [\![1, n]\!], \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Así, en términos funcionales la base X de $\mathcal{L}(X)$ es el conjunto formado por las funciones delta de Dirac δ_x, $x \in X$, donde

$$\delta_x(a) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a = x, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Observación 1.2. Si X es un conjunto finito, entonces $\mathcal{L}(X)$ coincide con el espacio de todas las funciones de X en $\mathbb{K}$, y $\dim \mathcal{L}(X) = |X|$.

1.2. Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Denotaremos por $\mathrm{Lin}(V, W)$ el $\mathbb{K}$–espacio vectorial formado por las funciones lineales de V en W. Recuerde que dados $f, g \in \mathrm{Lin}(V, W)$ y $\alpha \in K$, la suma $f + g$, y multiplicación por escalar αf, están definidas como sigue.

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad v \in V,$$
$$(\alpha f)(v) = \alpha f(v), \quad v \in V.$$

En el caso $V = W$, el espacio $\mathrm{Lin}(V, W)$ se denota por $\mathrm{End}(V)$.

Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $D = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W. Estas bases originan la base $C_{B,D}$ de $\mathrm{Lin}(V, W)$,

$$C_{B,D} := \{\phi_{i,j}; i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!]\}, \tag{1.3}$$ C{B,D}

donde

$$\phi_{i,j} : v_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases} \tag{1.4}$$ baseLin

La relación fundamental entre las matrices y el espacio de funciones lineales viene dada por el siguiente teorema, cuya demostración puede ser consultada en [3, Teorema 4.22].

TFAL **Teorema 1.3.** *Sean* B *y* D *bases de* V *y* W*, respectivamente. La transformación lineal* $\mathfrak{F}_B^D : \mathrm{Lin}(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $f \mapsto [f]_B^D$, *es un isomorfismo, donde* n *es la dimensión de* V *y* m *es la dimensión de* W*. En particular,* $\mathrm{End}(V) \cong M_n(\mathbb{K})$, *y*

$$\dim \mathrm{Lin}(V, W) = (\dim V)(\dim W).$$

Dado que la definición del isomorfismo $\mathfrak{F}_B^D$ depende de las bases B y D, se dice que es un isomorfismo no canónico. Ahora, si B' y D' son bases de V y W, respectivamente, la relación entre $\mathfrak{F}_B^D$ y $\mathfrak{F}_{B'}^{D'}$ viene dado por la matriz cambio de base $C_{B'}^{B}$ de B' a B y la matriz cambio de base $C_D^{D'}$ de D a D'. De modo preciso, tenemos

$$\mathfrak{F}_{B'}^{D'}(f) = C_D^{D'} \mathfrak{F}_B^D(f) C_{B'}^{B}. \qquad [3, \text{Corolario } 4.27]. \tag{1.5}$$ FBD

Observación 1.4. Recuerde que $M_n(\mathbb{K})$ es un anillo con el producto usual de matrices y que $\mathrm{End}(V)$ es un anillo con el producto dado por la composición de funciones. Así, $M_n(\mathbb{K})$ y $\mathrm{End}(V)$ son $\mathbb{K}$-álgebras, y el isomorfismo del Teorema 1.3 resulta ser un isomorfismo de álgebras.

1.3. Espacio Dual

El *espacio dual* V^* de V se define como el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathrm{Lin}(V, \mathbb{K})$. El Teorema 1.3 dice que $V^* \cong M_{1\times n}$, cuando $\dim V = n$. Así, tenemos la siguiente proposición.

V=dualV **Proposición 1.5.** *Si* $\dim V$ *es finita, entonces* $V \cong V^*$.

Observación 1.6. Si la dimensión de V no es finita, la proposición anterior no es válida. Por ejemplo, si V es el $\mathbb{R}$-espacio vectorial

$\mathbb{R}[x]$, tenemos que $\dim V$ es $\aleph_0$, mientras que $\dim V^* = 2^{\aleph_0}$. En efecto, V^* es isomorfo con el espacio vectorial de las sucesiones reales, y también es isomorfo con $\mathbb{R}[[x]]$.

Dada $B = \{v_i\,; i \in I\}$ una base de V y D la base canónica $\{1\}$ de $\mathbb{K}$. Para cada $i \in I$, sea $v_i^* \in V^*$, definido como sigue.

$$v_i^* : v_k \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases} \tag{1.6}$$

Proposición 1.7. $B^* := \{v_i^*\,; i \in I\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Sea $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ un subconjunto de B^*. Consideremos la ecuación $\alpha_1 v_1^* + \cdots + \alpha_n v_n^* = 0$, con $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Al evaluar ambos lados de esta ecuación en $v_j, j \in [\![1, n]\!]$, se obtiene que $\alpha_j = 0$. Así, obtenemos que $\alpha_i = 0$, para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Por lo tanto, B^* es linealmente independiente. $\square$

En el caso que $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (finito), tenemos $v_i^* = \phi_{i,1}$, para todo i. Así, B^* es la base $C_{B,D}$ definida en (1.3). La base B^* es llamada *la base dual de* B.

La Proposición 1.5 implica que $V \cong (V^*)^*$. Sin embargo, daremos otra demostración de este hecho, mediante un isomorfismo canónico, es decir, un isomorfismo cuya definición es independiente de la elección de bases,

V=dualVCano **Proposición 1.8.** *La transformación lineal* $\Psi : V \longrightarrow (V^*)^*$, *definida por*

$$\begin{array}{ccccccc} v & \mapsto & \Psi(v): & V^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & f & \mapsto & \Psi(v)(f) := f(v) \end{array}$$

es un monomorfismo. En el caso que $\dim V$ *es finita,* Ψ *es un isomorfismo.*

Demostración. Si $v \in \operatorname{Ker}\Psi$, entonces $\Psi(v) = 0$. Luego, $\Psi(v)(f) = 0$, para todo $f \in V^*$. Es decir, $f(v) = 0$ para todo $f \in V^*$. Luego $v = 0$; por lo tanto Ψ es inyectiva.

Si $\dim V$ es finita, Ψ resulta ser un isomorfismo, pues V y $(V^*)^*$ tienen igual dimensión. □

Definición 1.9. La traspuesta (o dual) de $f \in \mathrm{Lin}(V, W)$ es la transformación lineal $f^* \in \mathrm{Lin}(W^*, V^*)$, definida por

$$f^*(g) = g \circ f, \qquad (g \in W^*).$$

Teorema 1.10. *Sea* $\Phi : \mathrm{Lin}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Lin}(W^*, V^*)$ *la transformación lineal definida por* $f \mapsto f^*$. *Tenemos que* Φ *es un monomorfismo, y en el caso que* V *y* W *son de dimensión finita, es un isomorfismo.*

Demostración. Si $f \in \operatorname{Ker}\Phi$, entonces $\Phi(f)(g) = 0$, para todo $g \in W^*$, o equivalentemente, $(g \circ f)(v) = 0$, para todo $v \in V$, $g \in W^*$. Pongamos ahora $f(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m$, donde los w_i's son parte de una base de W. Luego, $\alpha_1 g(w_1) + \cdots + \alpha_m g(w_m) = 0$; tomando ahora $g = w_j^*$, se obtiene que $\alpha_j = 0$, para todo j. Por lo tanto $f(v) = 0$, para todo $v \in V$, es decir, $f = 0$. Así Φ es un monomorfismo.

En el caso que las dimensiones de V y W son finitas, se sigue que Φ es un isomorfismo, pues $\mathrm{Lin}(V, W) = \mathrm{Lin}(W^*, V^*) = (\dim V)(\dim W)$.

□

Proposición 1.11. *Si* $f \in \mathrm{Lin}(V, W)$*, con* V *y* W *son de dimensión finita, entonces*

$$[f^*]_{D^*}^{B^*} = \textit{ transpuesta de la matriz } [f]_B^D,$$

donde B *es una base de* V*,* D *es una base de* W*.*

Demostración. Ver [3, Proposición 4.31]. □

1.4. Aniquilador

Sea S un subconjunto de V, el aniquilador $\mathrm{An}(S)$ de S, se define como:

$$\mathrm{An}(S) = \{f \in V^* \,;\, f(s) = 0, \quad \text{para todo } s \in S\}.$$

Claro que $\mathrm{An}(\{0\}) = V^*$. Además, si $S \subseteq T$, entonces $\mathrm{An}(T) \subseteq \mathrm{An}(S)$.

Ejemplo 1.12. Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}_2[x]$ formado por los polinomios:

$$r(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{y} \quad s(x) = x - 1.$$

Sea $f \in \mathrm{An}(S)$, definido por $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Esto es,

$$f(ax^2 + bx + c) = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Luego, $f(r(x)) = f(s(x)) = 0$ implica que α ,β y γ satisfacen las ecuaciones: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ y $\beta - \gamma = 0$. Luego, $\alpha = -2\gamma$ y $\beta = \gamma$. En consecuencia, $\mathrm{An}(S)$ es el espacio de dimensión 1 generado por la transformación lineal definida por:

$$ax^2 + bx + c \mapsto -2a + b + c.$$

pro1.1 **Proposición 1.13.** *Sea S un subconjunto de V, entonces:*

(i) $\mathrm{An}(S)$ *es un subespacio de* V^*.

(ii) $\mathrm{An}(S) = \mathrm{An}(\mathrm{Vect}\,(S))$.

(iii) $\mathrm{An}(S) + \mathrm{An}(T) \subseteq \mathrm{An}(S \cap T)$, *para todo* $T \subseteq V$.

Demostración. Queda de ejercicio. □

En lo que resta de capítulo V es de dimensión finita.

Proposición 1.14. *Si* U *un subespacio de* V*, entonces*

$$\dim U + \dim \mathrm{An}(U) = \dim V.$$

Demostración. Sea $A = \{u_1, \dots, u_m\}$ una base de U y sea $B := A \cup \{u_{m+1}, \dots, u_n\}$ una base de V. Sea D^* el subconjunto de B^* formado por $u^*_{m+1}, \dots, u^*_n$; nótese que D^* está contenido en $\mathrm{An}(U)$. Claramente, la demostración resulta mostrando que D^* es una base de $\mathrm{An}(U)$. Ahora como D^* es linealmente independiente, solo resta ver que este conjunto genera a $\mathrm{An}(U)$. Dado $f \in \mathrm{An}(U)$, tenemos que

$$f = \alpha_1 u^*_1 + \dots + \alpha_n u^*_n.$$

Evaluando esta última expresión en $u_i \in A$, se obtiene que $\alpha_i u^*_i(u_i) = 0$, luego $\alpha_i = 0$, para todo $i \in [\![1, m]\!]$. Por lo tanto D^* genera a $\mathrm{An}(U)$. □

pro1.2 **Proposición 1.15.** *Si* U *y* W *son subespacios de* V*, entonces*

$$\mathrm{An}(U + W) = \mathrm{An}(U) \cap \mathrm{An}(W).$$

Demostración. Sea $f \in \mathrm{An}(U + W)$, entonces $f(u + w) = 0$, para todo $u \in U$ y $w \in W$. En consecuencia, $f(u) = f(w) = 0$, para todo $u \in U$ y $w \in W$. Por lo tanto, $f \in \mathrm{An}(U) \cap \mathrm{An}(W)$. Reciprocamente, dado $f \in \mathrm{An}(U) \cap \mathrm{An}(W)$, se sigue que $f(u) = f(w) = 0$, luego $0 = f(u) + f(w) = f(u+w)$, para todo $u \in U$ y $w \in W$. Es decir, $f \in \mathrm{An}(U+W)$. □

thm1.3 **Teorema 1.16.** *Si* U *un subespacio de* V*, entonces*

$$\dim U + \dim \mathrm{An}(U) = \dim V.$$

Demostración. Sea $B = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ una base de V tal que los primeros m vectores $v_1, \dots, v_m$ constituyen una base de U.

Sea $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_m^*, v_{m+1}^*, \ldots, v_n^*\}$ la base dual de B. En particular, $D = \{v_{m+1}^*, \ldots, v_n^*\}$ es un subconjunto linealmente independiente contenido en $\mathrm{An}(U)$. Demostraremos que D es un conjunto de generadores de $\mathrm{An}(U)$, de donde sigue la demostración del teorema.

Sea $f = \alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^* \in \mathrm{An}(U)$. Para demostrar que D genera a $\mathrm{An}(U)$ es suficiente demostrar que $\alpha_i = 0$, para todo $i \leqslant m$. Lo cual se obtiene del hecho que $f(v_i) = 0$, para todo $i \in [\![1, m]\!]$. En efecto,

$$0 = f(v_i) = (\alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^*)(v_i) = \alpha_i.$$

$\square$

CorU=AnU **Corolario 1.17.** $\Psi(U) = \mathrm{An}(\mathrm{An}(U))$. *En particular,* $U \cong \mathrm{An}(\mathrm{An}(U))$.

Demostración. Sea $u \in U$ y $f \in \mathrm{An}(U)$, luego $0 = f(u) = \Psi(u)(f)$. Es decir, $\Psi(u) \in \mathrm{An}(\mathrm{An}(U))$. Así, $\Psi(U)$ esta contenido en $\mathrm{An}(\mathrm{An}(U))$. Por otra parte, del Teorema 1.16 obtenemos:

$$\dim \mathrm{An}(\mathrm{An}(U)) = \dim V^* - \dim \mathrm{An}(U) = \dim V - \dim \mathrm{An}(U) = \dim U.$$

Por lo tanto, $\Psi(U) = \mathrm{An}(\mathrm{An}(U))$. $\square$

Corolario 1.18. *Si* U *y* W *son subespacios de* V, *entonces*

$$\mathrm{An}(U \cap W) = \mathrm{An}(U) + \mathrm{An}(W).$$

Demostración. Tenemos $\dim \mathrm{An}(U \cap W) = \dim V - \dim (U \cap W)$. Ahora, de la Proposición 1.15 y Corolario 1.17 se sigue que:

$$\mathrm{An}(\mathrm{An}(U) + \mathrm{An}(W)) = \mathrm{An}(\mathrm{An}(U)) \cap \mathrm{An}(\mathrm{An}(W)) \simeq U \cap W.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{An}(U \cap W) &= \dim V - \dim \mathrm{An}(\mathrm{An}(U) + \mathrm{An}(W)) \\ &= \dim (\mathrm{An}(U) + \mathrm{An}(W)). \end{aligned}$$

Es decir, $\dim \mathrm{An}(U \cap W) = \dim (\mathrm{An}(U) + \mathrm{An}(W))$. Luego, usando Proposición 1.13 (iii), la demostración concluye. $\square$

Sea W un subespacio de V y sea $\iota : W \hookrightarrow V$ la función inclusión. Sea ϕ la transformación lineal de V^* en W^*, definida por:

$$\phi(f) = f \circ \iota \qquad (f \in V^*).$$

Proposición 1.19. ϕ *es epiyectiva y* $\ker(\phi) = \mathrm{An}(W)$. *En particular,*

$$\frac{V^*}{\mathrm{An}(W)} \simeq W^*.$$

Demostración. Es fácil ver que $\ker(\phi) = \mathrm{An}(W)$. Ahora, de esta igualdad y el Teorema 1.16 se sigue que $\dim V = \dim W^* + \dim \ker(\phi)$. Combinando esta última igualdad con la fórmula de Grassmann, se deduce que $\dim W^* = \dim \mathrm{Im}(\phi)$. Así, ϕ es epiyectiva. El isomorfismo del enunciado es una consecuencia del teorema fundamental de homomorfismo de grupos. $\square$

1.5. Ejercicios

Exercise 1.20. Sea ϕ un endomorfismo del espacio vectorial V. Demuestre:

(i) Si α es un valor propio de ϕ, entonces α es un valor propio de ϕ^*.

(ii) Si V tiene una base de valores propios de ϕ, entonces V^* tiene una base de valores propios de ϕ^*.

Exercise 1.21. Demuestre que $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.

Exercise 1.22. Hacer Ejercicios 4.64-4.74 de los *Apuntes de Lineal.*

Exercise 1.23. Sean f y g elementos de V^* tales que: $f(v) = 0$, implica $g(v) = 0$. Demuestre que $\{f, g\}$ es linealmente dependiente.

Exercise 1.24. Sean f y g dos formas lineales de un espacio vectorial de dimensión finita. Demuestre que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ si y solo si $\{f, g\}$ es linealmente dependiente.

Exercise 1.25. Sea V el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Explicite una base para $\mathrm{An}(U)$, donde

$$U = \{(a, b, c, d) \in V\,;\, a + b + c + d = 0, a + b - c + d = 0\}\,.$$

Exercise 1.26. Determine una base del aniquilador de W, cuando:

(i) $W = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(ii) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x]\,; p(0){=}0\}$ en $\mathbb{R}_4[x]$.

(iii) $W = \mathrm{Vect}\{1, i, 1 + i\}$ en $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$–espacio vectorial

(iv) W es el subconjunto de $(\mathbb{R}^3)^*$ constituido por ϕ, y ψ, donde

$$\phi(x, y, z) = x + 2y + 2z \qquad \psi(x, y, z) = -x - z.$$

(v) Calcular una base para $\mathrm{An}(\mathrm{An}(W))$.

Exercise 1.27. Sean U, W dos subespacios de V. Demuestre:

(i) $\mathrm{An}(U + W) = \mathrm{An}(U) \cap \mathrm{An}(W)$.

(ii) $\mathrm{An}(U \cap W) = \mathrm{An}(U) + \mathrm{An}(W)$.

Exercise 1.28. Sean V, W dos espacios vectoriales y $\phi \in \mathrm{Lin}(V, W)$. Demuestre:

(i) $\mathrm{An}(\mathrm{Ker}\,\phi^*) = \mathrm{Im}\ \phi$.

(ii) $\mathrm{rg}\,(\phi) = \mathrm{rg}\,(\phi^*)$.

Capítulo 2

Álgebra Bilineal

2.1. Funciones Bilineales

Sean U, V y W tres $\mathbb{K}$–espacios vectoriales. Una función b de $U \times V$ en W es una *función bilineal*, si ella es lineal en cada componente. Es decir, para todo $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene:

$$\begin{aligned} b(\alpha u + u', v) &= \alpha b(u, v) + b(u', v), \\ b(u, \alpha v + v') &= \alpha b(u, v) + b(u, v'). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1. La multiplicación usual de matrices define una función bilineal b, de $M_{n\times r}(\mathbb{K}) \times M_{r\times m}(\mathbb{K})$ en $M_{n\times m}(\mathbb{K})$,

$$b : (N, M) \mapsto NM,$$

donde $N \in M_{n\times r}(\mathbb{K}), M \in M_{r\times m}(\mathbb{K})$.

Ejemplo 2.2. El producto punto $\langle \quad \rangle$ es una función bilineal.

$$\langle \quad \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

donde

$$\langle x, y \rangle := \sum_i x_i y_i, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Ex2.3 **Ejemplo 2.3.** La función $b : V \times V^* \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $b(v, f) = f(v)$ es una función bilineal.

Ejemplo 2.4. Fijemos $f \in U^*$, $g \in V^*$, entonces la función $(u, v) \mapsto f(u)g(v)$ define una forma bilineal sobre $U \times V$. Análogamente, fijemos $u \in U$, $v \in V$, entonces la función $(f, g) \mapsto f(u)g(v)$ define una función bilineal de $U^* \times V^*$ en $\mathbb{K}$.

Observación 2.5. Obsérvese que si b es una función bilineal, esta queda completamente determinada por los valores $b(u_i, v_j)$, donde u_i (resp. v_j) recorren una base de U (resp. V).

Sea $b : U \times V \longrightarrow W$ una función bilineal. El *radical izquierdo* $\mathrm{Rad}_L(b)$ de b y el *radical derecho* $\mathrm{Rad}_R(b)$ de b, se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rad}_L(b) &:= \{u \in U \,;\, b(u, v) = 0, \quad \text{para todo } v \in V\}, \\ \mathrm{Rad}_R(b) &:= \{v \in V \,;\, b(u, v) = 0, \quad \text{para todo } u \in U\}. \end{aligned}$$

Nótese que si b es la función bilineal del Ejemplo 2.3, entonces $\mathrm{Rad}_R(b) = \mathrm{An}(V)$.

Proposición 2.6. $\mathrm{Rad}_L(b)$ *(resp.* $\mathrm{Rad}_R(b)$*) es un subespacio vectorial de* U *(resp.* V*).*

Demostración. Queda de ejercicio. □

Definición 2.7. En el caso que $\mathrm{Rad}_L(b)$ y $\mathrm{Rad}_R(b)$ sean nulos, se dice que b es no degenerada. En caso contrario, se dice que b es degenerada.

Si $b : U \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma bilineal no degenerada, esta se suele denotar por $\langle\ \ \rangle$, y se dice que es un producto escalar entre U y V. También se dice que U y V son duales, respecto de $\langle\ \ \rangle$.

Proposición 2.8. *Sean* U *y* V *dos* $\mathbb{K}$*–espacios vectoriales duales respecto de* $\langle\ \ \rangle$*, entonces la función* $\phi : U \longrightarrow V^*$*, definida por* $u \mapsto \phi_u$ *es un monomorfismo, donde*

$$\phi_u : v \mapsto \langle u, v\rangle.$$

Demostración. Es una rutina verificar que ϕ es lineal. Sea $u \in \operatorname{Ker}\phi$, entonces ϕ_u es la forma lineal nula de V, en consecuencia $\phi_u(v) = \langle u, v\rangle = 0$, para todo $v \in V$. Como $\langle\ \ \rangle$ es no degenerada, se concluye que $u = 0$, luego ϕ es inyectiva. $\square$

Denotaremos por $\operatorname{Bil}(U \times V, W)$ el conjunto formado por todas las funciones bilineales de $U \times V$ en W. Las operaciones usuales de suma de funciones y ponderación por escalar dotan a $\operatorname{Bil}(U \times V, W)$ de una estructura de $\mathbb{K}$–espacio vectorial. Más precisamente, para $b_1, b_2 \in \operatorname{Bil}(U \times V, W)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos:

$$\begin{aligned} (b_1 + b_2)(u, v) &= b_1(u, v) + b_2(u, v), \quad (u, v) \in U \times V, \\ (\alpha b_1)(u, v) &= \alpha b_1(u, v), \quad (u, v) \in U \times V. \end{aligned}$$

A continuación construiremos una base de $\operatorname{Bil}(U \times V, W)$ a partir de bases de U, V y W. Sean $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\{w_1, \ldots, w_r\}$ bases de U, V y W, respectivamente. Para cada $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, m]\!]$, $k \in [\![1, r]\!]$ definamos la función bilineal b_{ijk}, que es determinada por las siguientes asignaciones:

$$b_{ijk}(u_a, v_b) = \begin{cases} w_k & \text{si} \quad i = a, j = b, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

baseBil **Proposición 2.9.** *El conjunto,*

$$B = \{b_{ijk}\,;\, i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!], k \in [\![1, r]\!]\}$$

es una base de $\mathrm{Bil}(U \times V, W)$. *En particular,*

$$\dim \mathrm{Bil}(U \times V, W) = (\dim U)(\dim V)(\dim W).$$

Demostración. Veamos que B es linealmente independiente. Para todo i, j, consideremos la combinación lineal

$$\sum_k \alpha_{i,j,k} b_{ijk} = 0.$$

Evaluando en (u_r, v_s), obtenemos la combinación lineal $\sum_k \alpha_{r,s,k} w_k = 0$. Luego, $\alpha_{r,s,k} = 0$, para todo k. Por lo tanto, $\alpha_{i,j,k} = 0$ para todo i, j, k.

Veamos ahora que B genera a $\mathrm{Bil}(U \times V, W)$. Todo elemento $b \in \mathrm{Bil}(U \times V, W)$ queda completamente determinado por los valores $b(u_i, v_j)$. Tenemos:

$$b(u_i, v_j) = \sum_k \alpha_{i,j,k} w_k = \sum_k \alpha_{i,j,k} b_{i,j,k}(u_i, v_j) = \left(\sum_k \alpha_{i,j,k} b_{i,j,k} \right) (u_i, v_j).$$

Luego, existen escalares i, j, k tales que $b = \sum_k \alpha_{i,j,k} b_{i,j,k}$. Es decir, B genera a $\mathrm{Bil}(U \times V, W)$. Por lo tanto, B es una base de $\mathrm{Bil}(U \times V, W)$. $\square$

Sea $F : \mathrm{Bil}(U \times V, W) \longrightarrow \mathrm{Lin}(U, \mathrm{Lin}(V, W))$, definida por $b \mapsto F_b$, donde $F_b : U \longrightarrow \mathrm{Lin}(V, W)$, $u \mapsto F_b(u)$,

$$\begin{aligned} F_b(u) : \ & V \longrightarrow W \\ & v \mapsto b(u, v). \end{aligned}$$

Corolario 2.10. F *es un isomorfismo.*

Demostración. Es una rutina ver que F es una función lineal. El Teorema 1.3 junto con la Proposición 2.9, dicen que el dominio y codominio de F tienen igual dimensión. Luego, para tener que F sea un isomorfismo, basta ver que F es inyectiva. Lo cual es equivalente a ver que Ker F es trivial. Sea $u \in \mathrm{Ker} F$, entonces $F_b(u) = 0$ para todo $u \in U$, luego $F_b(u)(v) = b(u, v) = 0$, para todo $u \in U, v \in V$, es decir $b = 0$. Así, F es inyectiva y en consecuencia es un isomorfismo. $\square$

2.2. Formas Bilineales

El resto del capítulo está dedicado a estudiar *formas bilineales* sobre $U \times V$, es decir, funciones bilineales b de $U \times V$ en $\mathbb{K}$. En el caso que $U = V$, se dice que b es una *forma bilineal* sobre V.

Sean $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $D = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de U y V, respectivamente. Si b es una forma bilineal sobre $U \times V$, ella queda completamente determinada por los valores $b(u_i, v_j) \in \mathbb{K}$. En efecto, sean $u \in U$, $v \in V$, X las coordenadas de u en la base B, e Y las coordenadas de v en la base D. Pongamos:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Entonces, $b(u, v) = \sum_{i,j} \alpha_i b(u_i, v_j) \beta_j$. Sea $M = (m_{ij})$ la matriz de tamaño $n \times m$, donde $m_{ij} := b(u_i, v_j)$. Entonces, un cálculo directo muestra que

$$b(u, v) = X^t M Y. \tag{2.1}$$

`b(u,v)`

Definición 2.11. La matriz M se llama matriz de b respecto de las bases B y D, la cual denotaremos por $[b]_{B,D}$. En el caso que b sea una forma bilineal sobre V y $B = D$, la matriz $[b]_{B,D}$ se denota simplemente por $[b]_B$.

La siguiente proposición nos dice cómo están relacionadas las matrices de una misma forma bilineal respecto a diferentes bases.

matrizfb **Proposición 2.12.** *Sea* b *una forma bilineal sobre* $U \times V$*. Sean* B, B' *dos bases de* U *y* D, D' *dos bases de* V*. Tenemos*

$$[b]_{B',D'} = P^t [b]_{B,D} Q,$$

donde P *denota la matriz cambio de bases de la base* B' *a la base* B Q *denota la matriz cambio de bases de la base* D' *a la base* D*.*

Demostración. Desde (2.1) tenemos que

$$b(u, v) = X^t [b]_{B,D} Y = (X')^t [b]_{B',D'} Y',$$

donde X (resp. X') son las coordenadas de u en la base B (resp. B'), e Y (resp. Y') son las coordenadas de v en la base D (resp. D'). Así, tenemos que $(X')^t [b]_{B',D'} Y' = X^t [b]_{B,D} Y$, o equivalentemente, $(X')^t [b]_{B',D'} Y' = (PX')^t [b]_{B,D} QY'$, luego $(X')^t [b]_{B',D'} Y' = (X')^t P^t [b]_{B,D} QY'$. Por lo tanto $[b]_{B',D'} = P^t [b]_{B,D} Q$. □

Si b es una forma bilineal sobre V, podemos tomar en la Proposición 2.12, $B = D$ y $B' = D'$. Luego

$$[b]_{B'} = P^t [b]_B P.$$

Esta última igualdad motiva la siguiente definición.

Definición 2.13. Dos matrices M y N cuadradas, de igual tamaño, se dicen congruentes, si existe una matriz invertible P tal que

$$N = P^t M P.$$

Proposición 2.14. *La relación ser congruente define una relación de equivalencia en* $M_n(\mathbb{K})$*.*

Demostración. Queda de ejercicio. □

Teorema 2.15. *Sea* b *una forma bilineal sobre* V*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathrm{Rad}_L(b) = \{0\}$.

(ii) $\mathrm{Rad}_R(b) = \{0\}$.

(iii) *Cualquier representación matricial de* b *es una matriz invertible,*

(iv) b *es no degenerada.*

Demostración. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V, y $M = [b(v_i, v_j)]$ la matriz asociada a V respecto de la base B. Sea $v \in V$, tenemos:

$$v \in \mathrm{Rad}_L(b) \text{ si y solo si } b(v, v_i) = 0, \text{ para todo } i.$$
$$v \in \mathrm{Rad}_R(b) \text{ si y solo si } b(v_i, v) = 0, \text{ para todo } i.$$

Pongamos $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, con $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Luego $b(v_i, v) = \alpha_1 b(v_i, v_1) + \cdots + \alpha_n b(v_n, v)$. Así, $v \in \mathrm{Rad}_R(b)$ si y solo si $(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ es solución del sistema homogéneo $MX = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Rad}_R(b) = \{0\}$ si y solo si $MX = 0$ tiene la solución trivial, o equivalentemente, M es invertible. Resumiendo, (ii) es equivalente con (iii). De igual modo se ve que (i) es equivalente con (iii). De donde se sigue que (iii) es equivalente con (iv). Por lo tanto, las afirmaciones de (i) a (iv) son todas equivalentes. □

Prodela

Corolario 2.16. *Si* b *es una forma bilineal no degenerada sobre* V*, entonces todo elemento del dual de* V *es de la forma* $b(v, \cdot)$*, para algún* $v \in V$*.*

Demostración. Sea $\widetilde{b}$ de V en V^* definida por $v \mapsto b(v, \cdot)$. Tenemos que $\operatorname{Ker} \widetilde{b} = \operatorname{Rad}_R(b) = \{0\}$, luego $\widetilde{b}$ es inyectiva, en consecuencia es un isomorfismo. □

Definición 2.17. Sea $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal.

(i) b se dice simétrica si $b(u, v) = b(v, u)$, para todo $u, v \in V$.

(ii) b se dice antisimétrica si $b(u, v) = -b(v, u)$, para todo $u, v \in V$.

(iii) b se dice alternada si $b(v, v) = 0$, para todo $v \in V$.

Nótese que si b es una forma bilineal alternada, entonces ella es antisimétrica. En efecto, sean $u, v \in V$, si suponemos que b es alternada, entonces $0 = b(u + v, u + v)$. Luego

$$0 = b(u, u) + b(u, v) + b(v, u) + b(v, v)$$

por lo tanto

$$b(u, v) = -b(v, u) \quad \text{para todo} \quad u, v \in V.$$

Es decir b es antisimétrica.

Observación 2.18. La igualdad anterior nos dice que si la característica del cuerpo $\mathbb{K}$ es diferente de 2, entonces los conceptos de antisimétrico y alternado son equivalentes. Sin embargo, si la característica del cuerpo es 2, los conceptos de ser simétrico y antisimétrico coinciden.

Proposición 2.19. *Sea* b *una forma bilineal sobre* V*, entonces:*

(i) b *es simétrica si y solo si toda representación matricial de* b *es una matriz simétrica.*

(ii) b *es antisimétrica si y solo si toda representación matricial de* b *es una matriz antisimétrica,*

Definición 2.20. Una forma bilineal b sobre V se dice que es refleja si $b(u, v) = 0$, entonces $b(v, u) = 0$.

Es claro que si una forma bilineal es simétrica o alternada, entonces es refleja. Demostraremos que el recíproco también es cierto en el Teorema 2.22. La demostración de este teorema usa el siguiente lema técnico.

Lema 2.21. *Si* b *es una forma bilineal sobre* V *tal que para todo* $u, v, w \in V$, *se tiene* $b(u, v)b(w, u) = b(v, u)b(u, w)$, *entonces* b *es simétrica o bien alternada.*

Demostración. Observe que, al tomar en la ecuación del lema $u = v$, obtenemos

$$b(v, v)(b(w, v) - b(v, w)) = 0. \tag{2.2}$$

thmReEsSiAl1

La demostración será por el absurdo. Supongamos que b no es simétrica ni alternada, entonces existen $x, y, z \in V$ tales que:

$$b(y, y) \neq 0, \qquad b(x, z) - b(z, x) \neq 0. \tag{2.3}$$

thmReEsSiAl2

En la ecuación (2.2), se obtiene:

(i) $b(x, x) = 0$ (resp. $b(z, z) = 0$), al especializar $v = x$, $w = z$ (resp. $v = z$, $w = x$).

(ii) $b(x, y) = b(y, x)$, al especializar $w = x, v = y$.

(iii) $b(y, z) = b(z, y)$, al especializar $w = z, v = y$.

Especializando ahora la ecuación del lema en $u = x$, $v = y$, $w = z$, se obtiene $b(x, y)b(z, x) = b(y, x)b(x, z)$. Esta ecuación y (ii) implican que $b(x, y) = b(y, x) = 0$. Luego, $b(x, y + z) = b(x, y) + b(x, z) = b(x, z)$. Analogamente, al intercambiar el rol de u y w en la ecuación del lema y tomando, otra vez, $u = x$, $v = y$, $w = z$, junto con (iii), se obtiene $b(z, y) = b(y, z) = 0$. Luego,

$$b(y + z, x) = b(y, x) + b(z, x) = b(z, x).$$

Ocupando ahora (2.3) y (ii) se sigue que $b(x, y + z) - b(y + z, x) \neq 0$. Esta ecuación junto con (2.2) implican $b(y + z, y + z) = 0$, pero $b(y + z, y + z) = b(y, y) + b(y, z) + b(z, y) + b(z, z) = b(y, y)$. Así, obtenemos $b(y, y) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, b debe ser simétrica o bien alternada. □

thmReEsSiAl **Teorema 2.22.** *Sea b una forma bilineal sobre V, entonces b es refleja si y solo si b es simétrica o bien alternada.*

Demostración. Supongamos que b es refleja. Sean $u, v, w \in V$ y definamos $x = b(u, v)w - b(u, w)v$. Tenemos

$$b(u, x) = b(u, v)b(u, w) - b(u, w)b(u, v) = 0.$$

Dado que b es refleja, también tenemos $b(x, u) = 0$. Por otra parte, $b(x, u) = b(u, v)b(w, v) - b(v, u)b(u, w)$. Así, obtenemos la ecuación: $b(u, v)b(w, v) = b(v, u)b(u, w)$. Usando el Lema 2.3, se sigue que b es refleja o bien alternada. El reciproco es inmediato. □

Sea U un subespacio de V y sea b una forma bilineal sobre V. Definimos:

$$\begin{aligned} U^{\perp_L} &= \{v \in V; \quad b(v, u) = 0, \text{para todo } u \in U\}, \\ U^{\perp_R} &= \{v \in V; \quad b(u, v) = 0, \text{para todo } u \in U\}. \end{aligned}$$

Nótese que si $U = V$, entonces:

$$U^{\perp_L} = \mathrm{Rad}_L(b), \quad U^{\perp_R} = \mathrm{Rad}_R(b).$$

Proposición 2.23. *Sea U un subespacio de V. Si b es una forma bilineal no degenerada sobre V, entonces*

$$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp_L} = \dim U + \dim U^{\perp_R}.$$

Demostración. Sea $\widetilde{b}$ la función lineal de V en U^* definida por $v \mapsto b(v,\cdot)_{|U}$. Es claro que $\operatorname{Ker}\widetilde{b} = U^{\perp_L}$. Además, $\operatorname{Im}\widetilde{b} = U^*$; en efecto, dada $f \in U^*$, la extendemos a una función f' de V^*. Luego, de la Proposición 2.16 se sigue que $f' = b(v,\cdot)$, para algún $v \in V$. Luego, $\widetilde{b}(v) = b(v,\cdot)_{|U} = f'_{|U} = f$. La demostración de la primera igualdad del lema sigue de la formula de Grassman [3, Teorema 4.9]) aplicada a $\widetilde{b}$. Para demostrar la otra igualdad se procede de modo análogo. $\square$

Observe que en el caso que b es una forma bilineal refleja los subespacios $U^{\perp_L}$ y $U^{\perp_R}$ coinciden. Consecuentemente, en este caso se habla del ortogonal de U, el cual se denota por $U^{\perp}$.

Ejemplo 2.24. Sea b la forma bilineal refleja sobre $\mathbb{R}$, definida por $(x,y) \mapsto x^t M y$, donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para el subespacio U generado por $e_1 - e_2$, se tiene $U^{\perp} = \mathbb{R}$.

Definición 2.25. Sean b una forma bilineal refleja sobre V y U un subespacio de V. El radical de U, denotado por $\mathrm{Rad}(U)$, es el espacio $U \cap U^{\perp}$. En el caso que $\mathrm{Rad}(U) = \{0\}$, se dice que U es subespacio no degenerado de (V,b).

Proposición 2.26. *Sea* b *una forma bilineal refleja sobre* V *y* U *un subespacio de* V*. Tenemos:*

b *restringida a* $U \times U$ *es no degenerada si y solo si* $\mathrm{Rad}(U) = \{0\}$ *.*

Demostración. Que b restringida a $U \times U$ es no degenerada equivale a que cualquier representación matricial de ella es una matriz invertible, lo cual equivale a que $\mathrm{Rad}_L(b_{|U\times U}) = \{0\}$. Ahora,

$$\mathrm{Rad}_L(b_{|U\times U}) = \{v \in U\,;\, b(v,u) = 0, u \in U\} = U \cap U^{\perp_L}.$$

Dado que b es refleja, se concluye que $\mathrm{Rad}_L(b_{|U\times U}) = \mathrm{Rad}(U)$. Por lo tanto, $\mathrm{Rad}(U) = \{0\}$. $\square$

La notación $V = U \obot U'$ significa que V es suma directa de U con U' y además que un factor es ortogonal del otro.

PriDes **Proposición 2.27.** *Si* b *una forma bilineal refleja sobre* V *y* U *un subespacio no degenerado de* V*, entonces* $V = U \obot U^{\perp}$.

Demostración. Sea $B = \{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ una base para V, tal que $\{u_1, \dots, u_m\}$ es una base de U. Sea $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ en $U^{\perp}$, lo cual equivale a $b(u_i, v) = 0$, para todo $1 \leqslant i \leqslant m$, es decir

$$\sum_{j=1}^{n} b(u_i, u_j)\alpha_j = 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}.$$

Esto último equivale a decir que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$ es solución del sistema homogéneo $NX = 0$, donde N es de tamaño $m \times n$ (m son las primeras filas de N). Luego, $\dim U^{\perp} = n - \mathrm{rg}\,(N) \geqslant n - m$. Por otra parte, dado que U es no degenerado, se tiene que $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. Luego, $U + U^{\perp}$ es una suma directa. Esto implica,

$$\dim\,(U + U^{\perp}) = \dim U + \dim U^{\perp} \geqslant m + (n - m) = n.$$

Por lo tanto, $V = U \obot U^{\perp}$. $\square$

2.3. Formas Bilineales Alternadas

Durante la presente sección b denota una forma bilineal alternada no nula sobre V.

Note que si u, v en V son tales que $b(u, v) \neq 0$, entonces ellos son linealmente independientes. Ahora, si $\lambda := b(u, v) \neq 0$, entonces $b(u', v') = 1$, con $u' := \lambda^{-1} u$, $v' = v$. Por lo tanto, en el caso que la dimensión de V es 2, b queda representada, respecto a la base $\{u', v'\}$, por la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nótese que si $V = \mathbb{K}^2$, entonces:

$$b\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Es decir, b es el determinante de la matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Definición 2.28. Si $u, v \in V$ son tales que $b(u, v) = 1$, entonces se dice que (u, v) es un par hiperbólico. El subespacio $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{u, v\}$, se llama plano hiperbólico de V.

fna

Teorema 2.29. *Sea b una forma bilineal alternada no nula sobre un espacio vectorial V de dimensión n, entonces existen planos hiperbólicos $U_1, \ldots, U_m$ de V, tales que*

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus \mathrm{Rad}(b).$$

Además, V posee una base $B = \{u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m, w_1, \ldots, w_{n-2m}\}$ tal *que*

$$[b]_B = \begin{bmatrix} H & & & \\ & \ddots & & \\ & & H & \\ & & & 0_{n-2m} \end{bmatrix}, \qquad H := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

fnaM

Demostración. La demostración será por inducción sobre la dimensión n de V. Supongamos que $n = 2$. Como b no es nula, se sigue que existe un par hiperbólico (u, v), así $V = \mathrm{Vect}\{u, v\}$. Además, la matriz de b respecto a la base $\{u, v\}$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supongamos ahora que el teorema es válido para todo espacio vectorial cuya dimensión es menor o igual a n. Sea V un espacio vectorial de dimensión mayor que n. Tomemos en V un par hiperbólico (u, v) y definamos $U_1 = \mathrm{Vect}\{u_1, v_1\}$. Entonces la Proposición 2.27, dice que:

$$V = U_1 \oplus U_1^{\perp}.$$

Usando la hipótesis de inducción sobre $U_1^{\perp}$, se tiene que existen subespacios hiperbólicos $U_2, \ldots, U_m$ tales que

$$U_1^{\perp} = U_2 \oplus U_3 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus \mathrm{Rad}(U_1^{\perp}).$$

En consecuencia, para demostrar la descomposición de V anunciada en el teorema, basta demostrar que $\mathrm{Rad}(b) = \mathrm{Rad}(U_1^{\perp})$. Tenemos:

$$\mathrm{Rad}(b) = V \cap V^{\perp} = V \cap (U_1 \oplus U_1^{\perp})^{\perp} = U_1^{\perp} \oplus (U_1^{\perp})^{\perp}.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Rad}(b) = \mathrm{Rad}(U_1^{\perp})$.

Para concluir la demostración, sean $\{w_1, \dots, w_{n-2m}\}$ una base de $\mathrm{Rad}(b)$ y (u_i, v_i) un par hiperbólico asociado a U_i, con $i \in [\![1, m]\!]$. Tomando $B := \{u_1, v_1, \dots, u_m, v_m, w_1, \dots, w_{n-2m}\}$, se sigue que $[b]_B$ tiene la forma (2.4). □

Corolario 2.30. *Si* b *en el Teorema 2.29 es no degenerada, entonces la dimensión de* V *es un número par.*

En términos matriciales, el teorema anterior nos dice que si M es una matriz antisimétrica, entonces existe una matriz invertible P, tal que P^tMP es de la forma (2.4). En efecto, dada $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, entonces consideremos la forma bilineal b sobre $V = \mathbb{K}^n$, definida por $(X, Y) \mapsto X^tMY$. Así, M es la matriz asociada a b respecto de la base canónica C de V. Según Teorema 2.29, podemos encontrar una matriz B de V tal que $[b]_B$ este de la forma (2.4). Así, si P es la matriz cambio de base de la base B a la base C, tenemos

$$[b]_B = P^tMP. \tag{2.5}$$

PtMP

Definición 2.31. La forma (2.5) se llama la forma normal de la matriz antisimétrica M.

Observación 2.32. Conservando las notaciones anteriores, tenemos:

(i) El rango de M es un número par.

(ii) El determinante de M es un cuadrado.

Ejemplo 2.33. Hallar la forma normal de la matriz M,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea b la forma bilineal antisimétrica sobre $V := \mathbb{K}^5$ que define M. Tenemos que (u_1, v_1) es un plano hiperbólico de V, donde $u_1 = e_2$ y $v_1 = e_1$. Sea $U_1 := \text{Vect}\{u_1, v_1\}$, entonces tenemos

$$V = U_1 \oplus U_1^{\perp}.$$

Ahora, $U_1^{\perp}$ está constituido por los vectores $x \in V$, tales que $b(x, u_1) = b(x, v_1) = 0$. Sea

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} b(x, u_1) &= -x_1 + x_3 - x_5, \\ b(x, v_1) &= x_2 + x_5. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$U_1^{\perp} = \text{Vect}\{e_1 + e_3, e_4, -e_1 - e_2 + e_5\}.$$

Tenemos que $b(e_1 + e_3, -e_1 - e_2 + e_5) = -2$. Pongamos

$$u_2 := -\frac{1}{2}(e_1 + e_3), \quad v_2 := -e_1 - e_2 + e_5.$$

Luego, se tiene $b(u_2, v_2) = 1$. Así, (u_2, v_2) es un par hiperbólico con plano hiperbólico $U_2 == \text{Vect}\{u_2, v_2\}$. Usando la Proposición 2.27, tenemos $U_1^{\perp} = U_2 \oplus U_2^{\perp}$. Ahora los elementos x en $U_2^{\perp}$, son aquellos de $U_1^{\perp}$ ortogonales a U_2. Por lo tanto, x satisface las ecuaciones:

$$b(x, u_1) = b(x, v_1) = b(x, u_2) = b(x, v_2) = 0.$$

Un cálculo directo muestra que:

$$b(x, u_2) = -x_5, \quad b(x, v_2) = -2x_3 - 2x_4.$$

Luego, $\mathrm{Rad}(V) = U_2^{\perp}$ está constituido por las soluciones del siguiente sistema homogéneo.

$$\left.\begin{array}{rcl} -x_1 + x_3 - x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_5 & = & 0 \\ -x_5 & = & 0 \\ -2x_3 - 2x_4 & = & 0 \end{array}\right|$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Rad}(V) = \{x \in V ; x_1 = x_3 = -x_4, x_2 = x_5 = 0\} = \mathrm{Vect}\{w_1\},$$

donde $w_1 := -e_1 - e_3 + e_4$.

Tomando $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, w_1\}$, se tiene que la forma normal de M es

$$[b]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz invertible P tal que $P^t M P = [b]_B$, es la matriz cambio de base de B a la base canónica. Luego,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposición 2.34. *Si M y N dos matrices antisimétricas en $M_n(\mathbb{K})$, entonces ellas son congruentes si y solo si ellas tienen igual rango.*

Demostración. Si M y N son dos matrices congruentes, entonces existe una matriz invertible P tal que $P^tNP = M$. Sea r el rango de M, entonces existen matrices invertibles R y S tales que

$$RMS = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego $RMS = RP^tNPS$. Así, el rango de N también es r. Recíprocamente, si la forma normal de M posee r matrices hiperbólicas, entonces el rango de M es $2r$. Analogamente, si la forma normal de N posee s matrices hiperbólicas, entonces el rango de N es $2s$. Por lo tanto $r = s$, es decir, M y N tienen la misma forma normal. Luego ellas son congruentes. □

Ejemplo 2.35. Toda matriz antisimétrica de $M_2(\mathbb{K})$ es congruente a la matriz nula o la matriz hiperbólica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4. Formas Bilineales Simétricas

Definición 2.36. Sea b una forma bilineal simétrica no nula sobre V.

(i) Un subconjunto S de V se dice ortogonal si para todo $u, v \in S$, con $u \neq v$, se tiene que ellos son ortogonales, es decir, $b(u, v) = 0$. Si u, v son ortogonales se denota $u \perp v$.

(ii) Un vector $v \in V \backslash \{0\}$ se dice anisotrópico si $b(v, v) \neq 0$. En caso contrario se dice que es isotrópico. Se conviene en tomar el vector 0 como anisotrópico, aunque $b(0, 0) = 0$.

Lema 2.37. *Si b es una forma bilineal simétrica (no nula) sobre V, entonces V tiene un vector anisotrópico no nulo. .*

Demostración. Supongamos que en $V \backslash \{0\}$ todo vector es isotrópico, entonces para todo $u, v \in V$, se tiene $b(u + v, u + v) = 0$, lo cual nos dice que $2b(u, v) = 0$, para todo u, v. Es decir, b es la forma bilineal nula; lo cual es una contradicción. □

fbs **Teorema 2.38.** *Sea b una forma bilineal simétrica no nula sobre V, entonces existe una base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V y escalares no nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tal que:*

$$[b]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & \alpha_r & \\ & & & 0_{n-r} \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

fnsM

donde $r = \operatorname{rg}(b)$ y $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de $\operatorname{Rad}(b)$.

Demostración. La demostración será por inducción sobre $n = \dim V$. Si $n = 1$, el teorema es claramente válido. Supongamos válido el teorema para todo espacio vectorial de dimensión menor que n. Sea V de dimensión n, entonces del lema anterior dice que existe un vector anisotrópico $v_1 \neq 0$. Sea $\alpha_1 := b(v_1, v_1)$ y denotemos por U_1

el subespacio de V generado por v_1. Luego, usando la Proposición 2.27, tenemos la siguiente descomposición.

$$V = U_1 \oplus U_1^{\perp}.$$

Usando ahora la hipótesis de inducción sobre $U_1^{\perp}$, se sigue que existe una base $\{v_2, \ldots, v_n\}$ de $U_1^{\perp}$ tal que $b(v_i, v_j) = 0$, para $i \neq j$. Además:

$$\alpha_i := b(v_i, v_i) \neq 0 \quad \text{para todo } i \in [\![2, r]\!],$$

$$b(v_i, v_i) = 0 \quad \text{para todo } i \in [\![r+1, n]\!].$$

Sea $B := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, entonces $[b]_B$ es la matriz de (2.6). En particular, $\operatorname{rg}(b) = r$. Así, solo resta ver que $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base del radical $\operatorname{Rad}(b)$ de V. Tenemos, $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \operatorname{Rad}(b)$ si y solo si $b(v, v_i) = 0$, para todo i. Por lo tanto,

$$b(v, v_i) = \begin{cases} \lambda_i b(v_i, v_i) & i \in [\![1, r]\!], \\ 0 & i \in [\![r+1, n]\!]. \end{cases}$$

Luego, $v \in \operatorname{Rad}(b)$ si y solo si $\lambda_i = 0$, para todo $i \in [\![1, r]\!]$. Es decir, v es una combinación lineal de $v_{r+1}, \ldots, v_n$. Por lo tanto, $\operatorname{Rad}(b) = \operatorname{Vect}(v_{r+1}, \ldots, v_n)$. □

Ejemplo 2.39. Sea b la forma bilineal simétrica sobre $V = \mathbb{K}^4$ definida por $b(x, y) = x^t M y$, donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A continuación determinaremos

Sea $v_1 = e_1$, tenemos $b(v_1, v_1) = 1$. Sea $U_1 = \mathrm{Vect}\{v_1\}$. Luego,

$$\mathbb{K}^4 = U_1 \oplus U_1^{\perp}.$$

Calculemos $U_1^{\perp}$. Tenemos $x \in U_1^{\perp}$ si y solo si $b(x, e_1) = 0$, o equivalentemente

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

En consecuencia,

$$U_1^{\perp} = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_2, -2e_1 + e_3, e_4\}.$$

Busquemos $v_2 \in U_1^{\perp}$ tal que $b(v_2, v_2) \neq 0$. Tenemos:

$$b(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = -1, \quad b(-2e_1 + e_3, -2e_1 + e_3) = -3, \quad b(e_4, e_4) = 0.$$

Tomemos $v_2 := -2e_1 + e_3$, $U_2 := \mathrm{Vect}\{v_2\}$. Luego,

$$U_1^{\perp} = U_2 \oplus U_2^{\perp}.$$

Calculemos $U_2^{\perp}$. Tenemos que x pertenece a $U_2^{\perp}$ si y solo si ocurre:

$$b(x, v_1) = 0, \qquad b(x, v_2) = 0.$$

Así, $U_2^{\perp}$ está formado por la solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$U_2^{\perp} = \mathrm{Vect}\{-e_1 + 3e_2 + 2e_3, -e_1 - e_2 + 2e_4\}.$$

Repetimos el proceso con $U_2^{\perp}$. Sea $v_3 := -e_1 + 3e_2 + 2e_3$; notar que $b(v_3, v_3) = 3$. Sea $U_3 := \mathrm{Vect}\{v_3\}$, luego

$$U_2^{\perp} = U_3 \oplus U_3^{\perp}.$$

Procedemos ahora a calcular $U_3^{\perp}$. Si $x \in U_3^{\perp}$, debe tenerse $b(x, v_3) = 0$, es decir $-x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0$. Así, $x \in U_3^{\perp}$ si y solo si x es solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{rcl|} x_2 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Luego,

$$U_3^{\perp} = \{x\,;\, x_1 = 0, x_2 = -2x_4, x_3 = -x_4\} = \text{Vect}\{-2e_2 - e_3 + e_4\}.$$

Sean $v_4 := -2e_2 - e_3 + e_4$, $U_4 := \text{Vect}\{v_4\}$; note que $b(v_4, v_4) = -1$.

Resumiendo, tenemos:

$$\mathbb{K}^4 = U_1 \obot U_2 \obot U_3 \obot U_4.$$

Además, si $B =: \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, entonces

$$[b]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por último, si tomamos $P = [v_1\, v_2\, v_3\, v_4]$, es decir, P es la matriz cambio de bases de B a la base canónica de $\mathbb{K}^4$. Tenemos,

$$P^t M P = [b]_B.$$

Terminaremos la sección con el teorema de *Inercia de Sylvester.* Suponga que b es una forma bilineal simétrica sobre un $\mathbb{K}$–espacio vectorial V. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots v_n\}$ una base de V tal que $[b]_B$

tiene la siguiente forma normal.

$$[b]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } \alpha_i \neq 0, \text{ para todo } i.$$

Si tomamos $B' = \{c_1v_1, \dots, c_rv_r, v_{r+1}, \dots v_n\}$, donde los c_i son todos escalares no nulos, entonces B' es una base para V. Tenemos,

$$[b]_{B'} = \begin{bmatrix} c_1^2\alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c_r^2\alpha_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_i \neq 0.$$

Por lo tanto, los elementos de la diagonal pueden ser elegidos convenientemente, dependiendo si los c_i's son cuadrados o no en el cuerpo $\mathbb{K}$. A continuación estudiaremos los casos en que $\mathbb{K}$ es el cuerpo de los números complejos y números reales.

Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en este caso podemos tomar $c_i = \sqrt{b(v_i, v_i)}$, para todo $1 \leqslant i \leqslant r$; luego $b(c_iv_i, c_iv_i) = 1$. Por lo tanto, $[b]_{B'}$ es la matriz con sus primeras r entradas sobre la diagonal igual a 1.

FNComplejos **Teorema 2.40.** [1] *Sean* M, N *dos matrices simétricas en* $M_n(\mathbb{C})$*. Entonces,* M *es congruente con* N *si y solo si* M *y* N *tienen igual rango.*

Ejemplo 2.41. El teorema anterior dice que toda matriz simétrica de $M_3(\mathbb{C})$ es congruente a una, y solo una, de la siguientes matri-

[1] Este teorema es valido sobre cualquier cuerpo algebraicamente cerrado.

ces:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Supongamos ahora que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En este caso si $b(v_i, v_i) > 0$, tomamos $c_i = b(v_i, v_i)$. Entonces, $b(c_i v_i, c_i v_i) = 1$. En el caso $b(v_i, v_i) < 0$, si hacemos $c_i = \sqrt{-b(v_i, v_i)}$, se obtiene $b(c_i v_i, c_i v_i) = -1$.

En consecuencia, la matriz $[b]_{B'}$ es la matriz diagonal cuyas primeras entradas sobre la diagonal son ± 1. El análogo del Teorema 2.40, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, es el siguiente teorema.

Teorema 2.42 (Ley de inercia de Sylvester)**.** *Sea* b *una forma bilineal simétrica sobre un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* V*. Sean* B, D *dos bases de* V*, tal que*

$$[b]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_p & & & & \\ & & & -\alpha_{p+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -\alpha_r & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$[b]_D = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \beta_q & & & & \\ & & & -\beta_{q+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -\beta_r & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\alpha_i, \beta_i > 0$*, para todo* i*. Entonces* $p = q$*.*

Demostración. Sean

$$B = \{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n\}, \quad D = \{w_1, \ldots, w_q, u_{q+1}, \ldots, w_n\}.$$

Sean $U = \mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}$, $W = \mathrm{Vect}\{w_1, \ldots, w_q\}$. Sean $u = a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p \in U$ y $w = b_{q+1} w_{q+1} + \ldots + b_r w_r \in W$. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} b(u,u) &= a_1^2 \alpha_1 + \cdots + a_p^2 \alpha_p \geqslant 0, \\ b(w,w) &= -b_{q+1} 1^2 \beta_{q+1} - \cdots - b_r^2 \beta_r, \leqslant 0. \end{aligned}$$

Luego, si tenemos $v \in U \cap W$, se debe tener que $b(v,v) = 0$. Por lo tanto $v = 0$, es decir, la suma $U + W$ es una suma directa. Ahora,

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W \leqslant n.$$

Luego, $\dim(U + W) = p + (n - q) \leqslant n$. Por lo tanto $p - q \leqslant n$. De modo análogo se obtiene $p - q \geqslant n$. Por lo tanto, $p = q$. □

La *signatura* de b, se denota $\mathrm{sg}(b)$, es la cantidad de números positivos de la diagonal, menos la cantidad de números negativos, en una forma normal de b. Con las notaciones del teorema anterior:

$$\mathrm{sg}(b) = p - (r - p) = 2p - r.$$

Teorema 2.43. *Sean* M *y* N *dos matrices simétricas en* $M_n(\mathbb{R})$*, entonces* M *y* N *son congruentes si y solo si tiene igual rango y signatura.*

Demostración. Queda de ejercicio. □

Ejemplo 2.44. Toda matriz simétrica de $M_3(\mathbb{R})$ es congruente a una, y solo una, de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.5. Isometrías

Definición 2.45. Una isometría entre (V, b) y (V', b') es un isomorfismo lineal ϕ de V en V' tal que

$$b(u, v) = b'(\phi(u), \phi(v))$$

para todo $u, v \in V$. En un diagrama:

Si existe una isometría entre (V, b) y (V', b') se dice que ellos son isométricos.

Proposición 2.46. *(V, b) y (V', b') son isométricos si y solo si existe una base B de V y una B' de V' tal que*

$$[b]_B = [b']_{B'}.$$

Demostración. Sea ϕ una isometría de (V, b) en (V', b'). Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, como ϕ es un isomorfismo de V en V', entonces $B' = \{\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)\}$ es una base para V', además

$b(v_i, v_j) = b'(\phi(v_i), \phi(v_j))$, para todo i, j. Luego, $[b]_B = [b']_{B'}$. Recíprocamente, sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, respectivamente, bases de V y V', tales que $[b]_B = [b]_{B'}$. Definamos el isomorfismo ϕ de V en V' como aquel que envía v_i en v'_i. Ahora, para todo i, j, tenemos:

$$b(v_i, v_j) = b'(v'_i, v'_j) = b'(\phi(v_i), \phi(v_j)).$$

Entonces, ϕ es una isometría. Así, la demostración concluye. □

Sea b una forma bilineal que no es degenerada sobre V, denotemos por $G(V, b)$ el subconjunto de $GL(V)$ constituido por todas las isometrías de (V, b) en si mismo.

Proposición 2.47. $G(V, b)$ *es un subgrupo de* $GL(V)$.

Demostración. □

Sea B una base de V, entonces $\phi \in G(V, b)$ si y solo si $b(u, v) = (b(\phi(u), \phi(v)))$. Ahora, $[\phi(u)]_B = [\phi]_B[u]_B$, entonces se sigue que $\phi \in G(V, b)$ si y solo si

$$[\phi]_B^t[b]_B[\phi]_B = [b]_B.$$

Por lo tanto, el subgrupo $G_n(b)$ de $GL_n(\mathbb{K})$ que le corresponde a $G(V, b)$, tiene la siguiente descripción.

$$G_n(b) = \left\{R \in GL_n(\mathbb{K})\,;\, R^t[b]_B R = [b]_B\right\}.$$

Supongamos que b es una forma bilineal alternada que no es degenerada sobre V. Luego, la dimensión de V es dimensión par $n = 2m$. La siguiente terminología es frecuentemente usada.

1. b se llama forma simpléctica,

2. V se llama espacio simpléctico,

3. (V, b) llama geometría simpléctica,

4. $G(V, b)$ se llama grupo simpléctico y se denota por $\mathrm{Sp}(V)$,

5. $G_n(b)$ se denota por $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$, o $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})_{2m}$.

A modo de ejemplo calculemos $G_n(b)$, cuando b es la forma bilineal alternada definida sobre el $\mathbb{K}$–espacio vectorial V de dimensión 2. Sea B una base de V tal que

$$H := [b]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$ está formado por las matrices $R \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tales que $R^t H R = H$. Esta última igualdad es equivalente a tener $\det(R) = 1$. Entonces,

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{K}) = \{R \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}); \det(R) = 1\}.$$

Así, $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{K})$ coincide con el *grupo especial lineal* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

Exercise 2.48. Explicite $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{K}), \ldots, \mathrm{Sp}_n(\mathbb{K})$.

Si b es una forma bilineal simétrica que no es degenerada sobre V. Entonces $G(V, b)$ se llama grupo de transformaciones ortogonales y se denota por $O(V)$. Tenemos los siguientes subgrupos notables de $O(V)$:

$$O^+(V) := \{T \in O(V)\,;\, \det(T) = 1\}.$$

$$O^-(V) := \{T \in O(V)\,;\, \det(T) = -1\}.$$

Supongamos que la dimensión de V es n, entonces los subgrupos $O(V), O^+(V)$ y $O^-(V)$ en su versión matricial se denotan, respectivamente, $O_n(\mathbb{K}), O_n^+(\mathbb{K})$ y $O_n^-(\mathbb{K})$.

Exercise 2.49. Explicite $O_2(\mathbb{K})$, $O_3(\mathbb{K})$, $O_2^+(\mathbb{K})$, $O_3^+(\mathbb{K})$.

2.6. Formas Cuadráticas

Sea b una forma bilineal simétrica sobre V. La siguiente función Q se llama forma cuadrática asociada a b,

$$\begin{aligned} Q : V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ v &\mapsto Q(v) = b(v, v) \end{aligned}$$

La función Q satisface $Q(\alpha v) = \alpha^2 Q(v)$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v \in V$. También, para todo $u, v \in V$ tenemos:

$$Q(u + v) = b(u + v, u + v) = Q(u) + 2b(u, v) + Q(v)$$

Luego,

$$b(u, v) = \frac{1}{2}[Q(u + v) - Q(u) - Q(v)]$$

Esta ecuación dice que la forma bilineal puede ser reconstruida a partir de su forma cuadrática asociada.

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, sea $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, entonces

$$Q(v) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j b(v_i, v_j)$$

Así, $Q(v)$ es un polinomio homogéneo de grado 2 en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Reciprocamente, supongamos que tenemos un polinomio homogéneo $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de grado 2,

$$P = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j$$

Definamos la siguiente matriz simétrica $M = (a_{ij})$ de tamaño n, mediante:

$$a_{ii} := \alpha_{ii}, \qquad a_{ji} := a_{ij} := \frac{1}{2}\alpha_{ij} \quad \text{cuando} \quad i \neq j$$

Definamos la función Q como sigue

$$\begin{aligned} Q : V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ v &\mapsto Q(v) = X^t M X \end{aligned}$$

donde X son las coordenadas de v respecto a una base B de V.

Definición 2.50. Sea Q una forma cuadrática a sobre V a valores reales. Diremos

(i) Q se dice definida positiva (resp. definida negativa) si $Q(v) > 0$ (resp, $Q(V) < 0$), para todo $v \in V$

(ii) Q se dice semi–definida positiva (resp. semi–definida negativa) si $Q(v) \geqslant 0$ (resp. $Q(V) \leqslant 0$), para todo $v \in V$.

2.7. Ejercicios

Exercise 2.51. Sea $V = M_n(\mathbb{K})$. Sea b la forma bilineal definida por

$$b(M, N) = n\mathrm{tr}(MN) - \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(N).$$

Demuestre que b es una forma bilineal simétrica.

Exercise 2.52. Sea b una forma bilineal simétrica

Exercise 2.53. Determine una matriz invertible P de modo que la matriz $P^t M P$ sea diagonal, donde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercise 2.54. Sea V el $\mathbb{R}$–espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$. Sean f y g en el dual de V, definidos como sigue: para $p(x) = ax^2 + bx + c \in V$,

$$f(p(x)) := a - b + c, \qquad g(p(x)) := -a + b - c.$$

Sea ϕ la función de $V \times V$ en $\mathbb{R}$, dada por

$$\phi : (u(x), v(x)) \mapsto f(u(x))g(v(x)) \qquad (u(x), v(x) \in V).$$

(i) Demuestre que ϕ es una forma bilineal sobre V.

(ii) Determine la matriz de ϕ con respecto a la base $\{x^2 + x + 1, x + 1, 1\}$

(iii) Determine una base para $\mathrm{rad}(U)$, donde $U = \{ax^2 + bx + c \in V\,;\, a + b + c = 0\}$.

Exercise 2.55. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 2. Sea ϕ la forma bilineal sobre $V := \mathbb{K}_4[x]$ definida por

$$(p(x), q(x)) \mapsto \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \end{bmatrix},$$

donde $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ y $q(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$.

(i) Determine un base B de V tal que $[\phi]_B$ este en su forma normal.

(ii) Determine una base para $\mathrm{rad}(V)$.

(iii) Sea V un $\mathbb{R}$–espacio vectorial de dimensión finita.

Exercise 2.56. Explicite una base para el $\mathbb{R}$–espacio vectorial constituido por las formas bilineales simétricas sobre V.

Exercise 2.57. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica distinta de 2. Sea M la siguiente matriz antisimétrica

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Determine una matriz P tal P^tMP este en la forma normal

(ii) Determine una base para $\operatorname{rad}(V, b)$, donde $V = \mathbb{K}_4[x]$ y

$$b(p(x), q(x)) := (a\, b\, c\, d\, e)M(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta\, \epsilon)^t$$

para $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ y $q(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$.

Exercise 2.58. Determine condiciones necesarias y suficientes para que la forma bilineal b sobre $\mathbb{C}^4$ sea refleja,

$$b(u, v) := u^t M v \qquad (u, v \in \mathbb{C}^4)$$

donde $M = \begin{bmatrix} a & 1 & b & b^2 \\ b & 0 & c & a \\ 1 & c & 0 & a^2 \\ 1 & a & a & c \end{bmatrix}$.

Capítulo 3

Tensores

A menos que se mencione lo contrario, los espacios vectoriales considerados a lo largo del capítulo son de dimensión arbitraria.

3.1. Producto Tensorial

Definición 3.1. Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales. Un producto tensorial de V con W es un par $(\mathfrak{U}_0, \iota)$, donde $\mathfrak{U}_0$ es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, $\iota : V \times W \longrightarrow \mathfrak{U}_0$ es una función bilineal que satisface las siguentes propiedades T1 y T2.

T1: El espacio vectorial $\mathfrak{U}_0$ está generado por la imagen de ι.

T2: Dados un $\mathbb{K}$–espacio vectorial $\mathfrak{U}$ y una función bilineal $\mathfrak{b}$ de $V \times W$ en $\mathfrak{U}$, existe una función lineal $\widetilde{\mathfrak{b}} : \mathfrak{U}_0 \longrightarrow \mathfrak{U}$ tal que $\mathfrak{b} = \widetilde{\mathfrak{b}} \circ \iota$.

La definición de producto tensorial tiene asociado el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "b"'] & U_0 \arrow[d, dotted, "\widetilde{b}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.2. Sean V y W, respectivamente, los $\mathbb{K}$–espacios vectoriales $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ y $M_{1\times m}(\mathbb{K})$. Veremos a continuación que el par (U_0, ι) es un producto tensorial de V con W, donde U_0 es el $\mathbb{K}$–espacio vectorial $M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $\iota(N, M) = NM$ es la multiplicación usual de matrices. Sea $\{F_i \,;\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ la base canónica de V, es decir, F_i es la matriz con 1 en la i–ésima fila y ceros en el resto, y sea $\{C_j \,;\, 1 \leqslant j \leqslant m\}$ la base canónica de W, es decir, C_j es la matriz con 1 en la j–ésima columna y ceros en el resto. Para todo i, j, tenemos:

$$\iota(F_i\,, C_j) = F_i C_j = E_{i,j},$$

donde $E_{i,j}$ es la matriz de $n \times m$ con 1 en la posición (i, j) y 0 en el resto. Las matrices E_{ij} constituyen la base canónica de $M_{n\times m}(\mathbb{K})$, en consecuencia, se cumple la propiedad T1. Veamos ahora que se cumple T2: sea U un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $b : V \times W \longrightarrow U$ una función bilineal. Asociado a (U, b) tenemos la función lineal $\widetilde{b} : U_0 \longrightarrow U$ definida mediante $\widetilde{b}(E_{i,j}) = b(F_i, C_j)$. Es claro que $b = \widetilde{b} \circ \iota$, en consecuencia el par (U_0, ι) satisface la propiedad T2. Así, $(M_{n\times m}(\mathbb{K}), \iota)$ es un producto tensorial de V con W.

EjemVtV **Ejemplo 3.3.** Veamos que un producto tensorial de V con su dual V^* se puede realizar como el par $(\mathrm{End}(V), \iota)$, donde $\iota : V \times V^* \longrightarrow \mathrm{End}(V)$, $(v, f) \mapsto \iota(v, f)$, con

$$\iota(v, f) : u \mapsto f(u)v.$$

Claramente ι es bilineal. Veamos que se cumple la propiedad T1. Sea B una base de V. Para todo $v_i \in B$, $v_j^* \in B^*$, tenemos que $\iota(v_i, v_j^*) = \phi_{ij}$, ver (1.4). Luego, se deduce que la imagen de ι es $\mathrm{End}(V)$. Así, se cumple T1. Ahora, si $b : V \times V^* \longrightarrow U$ es una función bilineal, definanmos la función lineal $\widetilde{b} : \mathrm{End}(V) \longrightarrow U$, por $\widetilde{b}(\phi_{ij}) = b(v_i, v_j^*)$, donde $v_i \in B$, $v_j^* \in B^*$. Tenemos:

$$(\widetilde{b} \circ \iota)(v_i, v_j^*) = (\widetilde{b})(\iota(v_i, v_j^*)) = \widetilde{b}(\phi_{ij}) = b(v_i, v_j^*).$$

Es decir, $\widetilde{b} \circ \iota = b$. Así, se cumple T2.

examXxY **Ejemplo 3.4.** Sean X, Y dos conjuntos no vacios. Un producto tensorial de $\mathcal{L}(X)$ con $\mathcal{L}(Y)$ es el par $(\mathcal{L}(X \times Y), \iota)$, donde $\iota : (f, g) \mapsto \iota(f, g)$ es definida por

$$\iota(f, g)(x, y) := f(x)g(y) \qquad ((x, y) \in X \times Y).$$

Recordemos que las funciones delta de Dirac δ_x, con $x \in X$, constituyen una base de $\mathcal{L}(X)$. Así, una base de $\mathcal{L}(X \times Y)$ es el conjunto constituido por las funciones delta de Dirac $\delta_{(x,y)}$, donde (x, y) recorre $X \times Y$. Tenemos que $\iota(\delta_x, \delta_y) = \delta_{(x,y)}$, en consecuencia la imagen de ι genera $\mathcal{L}(X \times Y)$, es decir, la propiedad T1 se cumple. Veamos que tenemos la propiedad T2. Sea b una función bilineal de $\mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(Y)$ en U, definamos la función lineal $\widetilde{b}$ de $\mathcal{L}(X \times Y)$ en U como la extensión lineal determinada por:

$$\delta_{(x,y)} \mapsto b(\delta_x, \delta_y).$$

Es una rutina ver que $\widetilde{b} \circ \iota = b$. Así, la propiedad T2 se cumple.

Antes de demostrar la existencia y unicidad del producto tensorial, veremos que pedir las propiedades T1 y T2 es equivalente a pedir la propiedad T. *La propiedad* T es la propiedad T2, pero agregando la unicidad a la existencia de la función $\widetilde{b}$.

PropT **Proposición 3.5.** *Sobre el par* (U_0, ι) *tenemos: la propiedad* T *se cumple si y solo si se se cumplen las propiedades* T1 *y* T2*.*

Demostración. Supongamos que (U_0, ι) satisface las propiedad T. En particular, (U_0, ι) satisface la propiedad T2. Demostraremos ahora que también satisface la propiedad T1, es decir, U_0 está generado por $\iota(V \times W)$. Denotemos por U_0' el $\mathbb{K}$–espacio vectorial generado por $\iota(V \times W)$ y denotemos por μ la función bilineal de $V \times W$ en U_0', definida cambiando el codominio U_0 de ι por U_0'. Aplicando la propiedad T, se sigue que existe una única función lineal $\widetilde{\mu} : U_0 \longrightarrow U_0'$ tal que $\mu = \widetilde{\mu} \circ \iota$. En un diagrama conmutativo, tenemos:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\mu"'] & U_0 \arrow[d, dotted, "\widetilde{\mu}"] \\ & U_0' \end{tikzcd}$$

Ahora, si κ denota la función inclusión de U_0' en U_0, entonces $\iota = \kappa \circ \mu$. Luego, usando el diagrama conmutativo anterior, obtenemos $\iota = \kappa \circ \widetilde{\mu} \circ \iota$. Así, $\kappa \circ \widetilde{\mu}$ hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & U_0 \arrow[d, dotted, "\kappa\circ\widetilde{\mu}"] \\ & U_0 \end{tikzcd}$$

Este diagrama también lo hace conmutativo I_{U_0}. Luego, la unicidad en la propiedad T, implica que $\kappa \circ \widetilde{\mu} = I_{U_0}$. En particular, se sigue que κ es epiyectiva, en consecuencia $U_0' = U_0$. Por lo tanto, el par (U_0, ι) satisface la propiedad T1.

Recíprocamente, supongamos que (U_0, ι) satisface la propiedades T1 y T2. Por lo tanto, solo resta ver que la función lineal $\widetilde{b}$, cuya existencia la asegura la propiedad T2, es única. Si b' es otra función lineal tal que $b' \circ \iota = b$, entonces $\widetilde{b}$ y b' son iguales en la imagen de ι, pero como ambas son lineales y dado que la imagen de ι genera U_0, se deduce que $\widetilde{b} = b'$. $\square$

Observación 3.6. La propiedad T se llama propiedad universal del par (U_0, ι).

A continuación demostraremos la unicidad y existencia del producto tensorial.

thmten **Teorema 3.7** (Unicidad)**.** *El producto tensorial entre los $\mathbb{K}$–espacios vectoriales V y W es único, en el siguiente sentido: si los pares (U_0, ι) y (U_0', ι') son productos tensoriales de V con W, entonces existe un isomorfismo $\psi : U_0 \longrightarrow U_0'$ tal que $\psi \circ \iota = \iota'$. Tenemos, así, el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & U_0 \arrow[d, dotted, "\psi"] \\ & U_0' \end{tikzcd}$$

Demostración. Sean (U_0, ι) y (U_0', ι') tales que satisfacen la propiedad T. Luego, se sigue que existen únicas funciones lineales ψ y ψ' tales que: $\psi \circ \iota = \iota'$, $\psi' \circ \iota' = \iota$. En un diagrama conmutativo, la situación es la siguiente,

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"] \arrow[ddr, "\iota"'] & U_0 \arrow[d, dotted, "\psi"] \\
& U_0' \arrow[d, dotted, "\psi'"] \\
& U_0
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, $\psi' \circ \psi \circ \iota = \iota$. Ahora, la función identidad I_{U_0} también satisface $I_{U_0} \circ \iota = \iota$. Luego, la unicidad en la propiedad T dice que $\psi' \circ \psi = I_{U_0}$. De igual modo se obtiene $\psi \circ \psi' = I_{U_0'}$. Por lo tanto, ψ es un isomorfismo. Luego, la demostración está concluida. □

ThmExis **Teorema 3.8** (Existencia). *Existe el producto tensorial de cualquier par de espacios vectoriales.*

Demostración. Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales. Sea X el conjunto $V \times W$. Sea $\mathcal{L}'$ el subespacio del $\mathbb{K}$-espacio vectorial libre $\mathcal{L}(X)$ (ver Subsección 1.1) generado por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
&\epsilon(v_1 + v_2, w) - \epsilon(v_1, w) - \epsilon(v_2, w), \\
&\epsilon(v, w_1 + w_2) - \epsilon(v, w_1) - \epsilon(v, w_2), \\
&\epsilon(\alpha v, w) - \alpha\epsilon(v, w), \\
&\epsilon(v, \alpha w) - \alpha\epsilon(v, w),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

*

donde ϵ es la función definida en (1.2), v, v_1, $v_2 \in V$, w, w_1, $w_2 \in W$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definamos $U_0 := \mathcal{L}(X)/\mathcal{L}'$, $\iota := \pi \circ \epsilon$, donde π es la proyección natural de $\mathcal{L}(X)$ sobre U_0. Es una rutina verificar que ι es bilineal.

Dado que $\epsilon\,(X)$ genera a $\mathcal{L}(X)$, se sigue que U_0 esta generado por $\{\pi(\epsilon(x))\,;\,x \in X\}$. Así U_0 está generado por $\iota\,(X)$. Luego, (U_0, ι) cumple la propiedad T1.

Veamos ahora que (U_0, ι) satisface la propiedad T2.

Sea $b : V \times W \longrightarrow U$ una función bilineal. De acuerdo al Lema 1.1, existe una función lineal $\phi : \mathcal{L}(X) \longrightarrow U$, tal que $\phi \circ \epsilon = b$. Por otra parte, del hecho que b es bilineal, se sigue que los generadores en (3.1) de $\mathcal{L}'$ pertenecen al $\operatorname{Ker}(\phi)$. Así, $\mathcal{L}' \subseteq \operatorname{Ker}(\psi)$. En consecuencia, ψ induce una función lineal $\widetilde{b} : U_0 \longrightarrow U$ tal que $\phi = \widetilde{b} \circ \pi$. Ahora,

$$\widetilde{b} \circ \iota = \widetilde{b} \circ \pi \circ \epsilon = \phi \circ \epsilon = b.$$

Es decir, el par (U_0, ι) cumple la propiedad T2. Resumamos la demostración en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[dr, "b"'] & \mathcal{L}(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dotted, "\phi"] & U_0 \arrow[dl, dotted, "\widetilde{b}"] \\
 & U &
\end{tikzcd} \qquad (\iota := \pi \circ \epsilon)$$

$\square$

Por lo general, el espacio vectorial U_0 se denota por $V \otimes W$. El par $(V \otimes W, \iota)$, es denotado frecuentemente por $V \otimes W$, y se lee *producto tensorial de* V *con* W.

El vector $\iota(v, w)$ se denota por $v \otimes w$, y se lee v *tensor* w. Consecuentemente, como ι es bilineal, tenemos:

$$\begin{aligned}
(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \\
v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2, \\
\alpha(v \otimes w) &= (\alpha v \otimes) w = v \otimes (\alpha w),
\end{aligned}$$

para todo v, v_1, $v_2 \in V$, w, w_1, $w_2 \in W$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Observación 3.9. Como $\iota(V \times W)$ genera a $V \otimes W$, se sigue que todo elemento t de $V \otimes W$ se escribe (aunque no de modo único) como una suma finita de la forma:

$$t = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \left(v_i \otimes w_j \right),$$

donde $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, $v_i \in V$, $w_j \in W$.

La propiedad T del producto tensorial $(V \otimes W, \iota)$, implica que tenemos la siguiente función biyectiva Γ,

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathrm{Bil}\,(V \times W, U) &\longrightarrow \mathrm{Lin}\,(V \otimes W, U) \\ b &\mapsto \tilde{b} \end{aligned}$$

Más aún, esta función resulta ser lineal y con inversa Γ^{-1} dada por:

$$\Gamma^{-1}(\tilde{b}) = b \circ \iota.$$

Teorema 3.10. *Γ es un isomorfismo.*

Demostración. Tarea: Escribir los detalles □

Corolario 3.11. *$\mathrm{Lin}(V \otimes W, U)$ y $\mathrm{Lin}(V, \mathrm{Lin}(W, U))$ son canónicamente isomorfos.*

Demostración. Dada $f \in \mathrm{Lin}(V \otimes W, U)$, sea $\Phi(f) \in \mathrm{Lin}(V, \mathrm{Lin}(W, U))$, definida como sigue.

$$\Phi(f)(v) : W \longrightarrow U, \quad w \mapsto (\Phi(f)(v))(w) = \Gamma^{-1}(f)(v, w).$$

□

Corolario 3.12. *La función Ψ de $V^* \otimes W^*$ en $(V \otimes W)^*$, definida por*

$$\Psi(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(v) \qquad (v \in V,\ w \in W),$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea F el isomorfismo de $V^* \otimes W^*$ en $\mathrm{Bil}(V \times W, \mathbb{K})$, definido por

$$\begin{array}{rcl} F(f \otimes g) : V \times W & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v, w) & \mapsto & f(v)g(w) \end{array}$$

donde $f \in V^*$ y $g \in W^*$. Entonces, $\Psi := \Gamma \circ F$, es el isomorfismo anunciado en el corolario. □

A continuación demostraremos las principales propiedades del producto tensorial.

Proposición 3.13. *La asignación $\alpha \otimes v \mapsto \alpha v$, con $v \in V, \alpha \in K$ define un isomorfismo de $\mathbb{K} \otimes V$ en V. Analogamente, tenemos un isomorfismo de $V \otimes \mathbb{K}$ en V.*

Demostración. Sea $b : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, definida por $b(\alpha, v) = \alpha v$. La función b es bilineal, luego existe una función lineal $\widetilde{b} : \mathbb{K} \otimes V \longrightarrow V$, tal que $\widetilde{b} \circ \iota = b$, es decir, $\widetilde{b} : \alpha \otimes v \mapsto \alpha v$, para todo $v \in V, \alpha \in \mathbb{K}$. Veremos que $\widetilde{b}$ es el isomorfismo anunciado en la proposición.

La función $\widetilde{b}$ es epiyectiva, pues dado $v \in V$, tomamos $1 \otimes v \in \mathbb{K} \otimes V$ y tenemos: $\widetilde{b}(1 \otimes v) = (\widetilde{b} \circ \iota)(1, v) = b(1, v) = 1 \cdot v = v$.

Para demostrar que $\widetilde{b}$ es inyectiva, consideremos la función lineal $\psi : V \longrightarrow \mathbb{K} \otimes V$, definida por $\psi(v) = 1 \otimes v$. Veremos que $\psi \circ \widetilde{b} = \mathrm{Id}_{K \otimes V}$, lo cual nos dice que $\widetilde{b}$ es inyectiva. En efecto, tenemos:

$$\psi\left(\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes v_i\right)\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = 1 \otimes \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes v_i.$$

Es decir, $\psi \circ \widetilde{b} = \mathrm{Id}_{K \otimes V}$. □

Proposición 3.14. *Tenemos un isomorfismo* $V \otimes W \simeq W \otimes V$, *determinado por la siguiente función 'flip'*

$$v \otimes w \mapsto w \otimes v \qquad (v \in V, w \in W).$$

Demostración. Sea b la función bilineal de $V \times W$ en $W \otimes V$, definida por $b(v, w) = w \otimes v$. Luego, del producto tensorial $(V \otimes W, \iota)$, se sigue que existe una función lineal $\tilde{b}$ de $V \otimes W$ en $W \otimes V$ tal que $\iota \circ \tilde{b} = b$. De igual modo, considerando el producto tensorial $(W \otimes V, \kappa)$ y la función bilineal d de $W \times V$ en $V \otimes W$, $(w, v) \mapsto v \otimes w$, se sigue que existe una función lineal $\tilde{d}$ de $W \otimes V$ en $V \otimes W$ tal que $\kappa \circ \tilde{d} = d$. Ahora, sea f la función bilineal de $V \times W$ en $W \times V$, definida por $f(v, w) = (w, v)$. Tenemos $\kappa \circ f = b$. Luego,

$$\tilde{d} \circ \tilde{b} \circ \iota = \tilde{d} \circ b = \tilde{d} \circ \kappa \circ f = d \circ f.$$

En otros términos $\Gamma(d \circ f) = \tilde{d} \circ \tilde{b}$, pero también $\Gamma(\iota) = \mathrm{Id}_{V \otimes W}$. Luego, debe tenerse $\tilde{d} \circ \tilde{b} = \mathrm{Id}_{V \otimes W}$. De igual modo $\tilde{b} \circ \tilde{d} = \mathrm{Id}_{V \otimes W}$. Por lo tanto, $\tilde{b}$ es un isomorfismo. A continuación ponemos en un diagrama conmutativo las funciones involucradas en la demostración.

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "b"] & V \otimes W \arrow[d, dotted, "\tilde{b}"] \\
W \times V \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "d"'] & W \otimes V \arrow[d, dotted, "\tilde{d}"] \\
 & V \otimes W
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 3.15. *Sean* U, V_1, V_2, $\ldots$, V_m *son* $\mathbb{K}$*–espacios vectoriales, entonces:*

$$U \otimes (V_1 \oplus \cdots \oplus V_m) \simeq U \otimes V_1 \oplus \cdots \oplus U \otimes V_m. \tag{3.2}$$

Analogamente, tenemos

$$(V_1 \oplus \cdots \oplus V_m) \otimes U \simeq V_1 \otimes U \oplus \cdots \oplus V_m \otimes U.$$

Demostración. Pongamos:

$$V := V_1 \oplus \cdots \oplus V_m, \quad W := U \otimes V_1 \oplus \cdots \oplus U \otimes V_m.$$

Sea $\mathbf{i}_r$ la inclusión natural de V_r en V, y sea $\mathbf{p}_r$ la proyección natural de V sobre V_r. Sea b la función bilineal de $U \times V$ en W, definida por

$$b(u, v) = u \otimes \mathbf{p}_1(v) + \cdots + u \otimes \mathbf{p}_m(v).$$

Luego, el producto tensorial asegura que existe que existe una única función lineal $\widetilde{b}$ de $U \otimes V \longrightarrow W$ tal que $\widetilde{b} \circ \iota = b$. Veremos que en efecto $\widetilde{b}$ es un isomorfismo, quedado así demostrado la proposición. La epiyectividad resulta de ver que todo elemento descomponible $u \otimes v_r \in U \otimes V_r$, con $u \in U, v_r \in V_r$, $r \in [1, m]$, tiene preimagen. En efecto, dado un tal elemento, este tiene como preimagen $u \otimes \mathbf{i}_r(v_r)$, pues:

$$\widetilde{b}(u \otimes \mathbf{i}_r(v_r)) = (\widetilde{b} \circ \iota)(u, \mathbf{i}_r(v_r)) = b(u, \mathbf{i}_r(v_r)).$$

Así, $\widetilde{b}(u \otimes \mathbf{i}_r(v_r)) = u \otimes \mathbf{p}_1(\mathbf{i}_r(v_r)) + \cdots + u \otimes \mathbf{p}_m(\mathbf{i}_r(v_r))$. Luego, $\widetilde{b}(u \otimes \mathbf{i}_r(v_r)) = u \otimes v_r$. Por lo tanto, $\widetilde{b}$ es epiyectiva.

Para ver que $\widetilde{b}$ es inyectiva, construiremos una función β tal que $\beta \circ \widetilde{b} = \mathrm{Id}_{U \otimes V}$. Para cada $r \in [1, m]$ sea $\beta_r : U \times V_r \longrightarrow U \otimes V$, definida por $\beta_r(u, v) = u \otimes \mathbf{i}_r(v)$. Dado que β_r es bilineal, entonces existe $\widetilde{\beta}_r : U \otimes V_r \longrightarrow U \otimes V$ tal que $\widetilde{\beta}_r \circ \iota = \beta_r$. Estas funciones lineales definen $\beta : W \longrightarrow U \otimes V$, por $\beta = \beta_1 \oplus \cdots \oplus \beta_m$. Ahora para $u \in U, v = v_1 + \cdots + v_m \in V$, tenemos:

$$(\beta \circ \widetilde{b})(u \otimes w) = (\beta \circ b \circ \iota)(u, w) = \beta(b(u \otimes w))$$

Luego

$$
\begin{aligned}
(\beta \circ \widetilde{b})(u \otimes v) &= \beta(u \otimes \mathbf{p}_1(v) + \cdots + u \otimes \mathbf{p}_m(v)) \\
&= \beta_1(u \otimes \mathbf{p}_1(v)) + \cdots + \beta_m(u \otimes \mathbf{p}_m(v)) \\
&= u \otimes \mathbf{i}_1(\mathbf{p}_1(v)) + \cdots + u \otimes \mathbf{i}_m(\mathbf{p}_m(v)) \\
&= u \otimes \mathbf{i}_1(v) + \cdots + u \otimes \mathbf{i}_m(v).
\end{aligned}
$$

Luego $(\beta \circ \widetilde{b})(u \otimes v) = u \otimes v$. □

Para finalizar la presente sección estudiaremos el producto tensorial de subespacios y el cociente de espacios tensoriales.

Sea A un subespacio vectorial de V y B un subespacio vectorial de W. Consideremos $(V \otimes W, \iota)$ el producto tensorial de V con W. Pongamos $C := \operatorname{vect}(\iota(A \times B))$ y κ la restricción de ι a $A \times B$.

Proposición 3.16. *El par* (C, κ) *es un producto tensorial de* A *con* B*. Así,* $A \otimes B$ *se identifica naturalmente a un subespacio de* $V \otimes W$*.*

Demostración. Directamente de la definición de κ y C se tiene la propiedad T1. Veamos la propiedad T2: Sean U un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y d una función bilineal de $A \times B$ en U. La función d puede ser extendida a una función bilineal $b : V \times W \longrightarrow U$. Usando la propiedad T2, tenemos una función lineal $\widetilde{b} : V \otimes W \longrightarrow U$ tal que $b = \widetilde{b} \circ \iota$. Definamos $\widetilde{d}$ como la restricción de $\widetilde{b}$ a C. Ahora, para todo $v \in A$, $w \in B$, tenemos:

$$
\left(\widetilde{d} \circ \kappa\right)(v, w) = \left(\widetilde{b} \circ \iota\right)(v, w) = b(v, w) = d(v, w)
$$

Luego, $\widetilde{d} \circ \kappa = d$. Por lo tanto el par (C, κ) satisface la condición T2. Así, la proposición queda demostrada. □

Según la proposición anterior $A \otimes W$ y $V \otimes B$ pueden ser considerados como subespacios de $V \otimes W$. Sea U el subespacio de $V \otimes W$

generado por los vectores de $A \otimes W$ junto con los vectores de $V \otimes B$. Pongamos $\overline{U} := V \otimes W/U$. Sea $\bar{\iota} : V/A \times W/B \longrightarrow \overline{U}$ definida por

$$\bar{\iota}\,(v + A, w + B) = v \otimes w + U.$$

Proposición 3.17. *El par* $\left(\overline{U}, \bar{\iota}\right)$ *es un producto tensorial de* V/A *con* W/B.

Demostración. Tarea (ver Greub). $\square$

3.2. n–Tensores

Sean $V_1, \dots, V_n, W$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una función $f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ se dice que es n–multilineal si es lineal en cada una de sus componentes, es decir:

$$f(v_1, \dots, \alpha v_i + u_i, \dots, v_n) = \alpha f((v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f((v_1, \dots, u_i, \dots, v_n).$$

para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $u_i, v_i \in V_i$. En el caso que $W = \mathbb{K}$ se dice que f es una n-forma multilineal.

Ejemplo 3.18. Sean $f_i \in V_i^*$, entonces tenemos la forma multilineal $f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por

$$f(v_1, \dots, v_n) = f_1(v_1) \cdots f_n(v_n).$$

n−Tensor

Teorema 3.19. *Si $V_1, \dots, V_n$ son $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, entonces existe una par (U_0, ι), donde U_0 es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $\iota : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow U_0$ es una función n–multilineal, tal que:*

(i) La imagen de ι genera a U_0.

(ii) Dados un $\mathbb{K}$-epacio vectorial U y una función n-multilineal b de $V \times \cdots \times V$ en U, existe una función lineal $\widetilde{b}$ de U_0 en U, tal que $b = \widetilde{b} \circ \iota$.

Además, el par (U_0, ι) está unicamente definido en el mismo sentido de los 2-tensores (Teorema 3.7).

Demostración. La demostración de la existencia (resp. unicidad) es análoga a la demostración del Teorema 3.8 (resp. Teorema 3.7). □

Observación 3.20. Procediendo como en la Proposición 3.5, las condiciones (i)-(ii) del Teorema 3.19 equivalen a (ii), pero incluyendo la unicidad de $\widetilde{b}$.

Proposición 3.21. *Existe un isomorfismo de* $U\otimes V\otimes W$ *en* $(U\otimes V)\otimes W$*, tal que*

$$u\otimes v\otimes w \mapsto (u\otimes v)\otimes w.$$

Analogamente, $U\otimes V\otimes W \cong U\otimes (V\otimes W)$.

Demostración. La asignación $(u,v,w)\mapsto (u\otimes v)\otimes w$ define una función 3–multilineal c de $U\times V\times W$ en $(U\otimes V)\otimes W$. Luego, existe una función lineal $\tilde{c}: U\otimes V\otimes W \longrightarrow (U\otimes V)\otimes W$, tal que:

$$\tilde{c}\circ\iota = c, \quad \tilde{c}(u\otimes v\otimes w) = (u\otimes v)\otimes w.$$

Demostraremos que $\tilde{c}$ es un isomorfismo. Fijemos $w\in W$ y sea b_w la función bilineal definida por:

$$\begin{aligned} b_w: \quad U\times V &\longrightarrow U\otimes V\otimes W \\ (u,v) &\mapsto u\otimes v\otimes w \end{aligned}$$

Luego, existe un función lineal $\tilde{b}_w: U\otimes V \longrightarrow U\otimes V\otimes W$ tal que $\tilde{b}_w(u\otimes v) = b_w(u,v) = u\otimes v\otimes w$. En un diagrama conmutativo, la situación es como sigue:

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r] \arrow[dr, "b_w"'] & U\otimes V \arrow[d, dotted, "\tilde{b}_w"] \\ & U\otimes V\otimes W \end{tikzcd}$$

Es una rutina verificar que para todo w, $w'\in W$, $\alpha\in\mathbb{K}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{w+w'} &= \tilde{b}_w + \tilde{b}_{w'}, \\ \tilde{b}_{\alpha w} &= \alpha\tilde{b}_w. \end{aligned}$$

Estas igualdades permiten definir la siguiente función bilineal.

$$\begin{aligned} d: (U\otimes V)\times W &\longrightarrow U\otimes V\otimes W \\ (x,w) &\mapsto \tilde{b}_w(x) \end{aligned}$$

Luego, tenemos una función lineal $\widetilde{d} : (U \otimes V) \otimes W \longrightarrow U \otimes V \otimes W$ tal que $\widetilde{d} \circ \kappa = d$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
(\widetilde{d} \circ \widetilde{c})(u \otimes v \otimes w) &= \widetilde{d}((\widetilde{c} \circ \iota)(u, v, w)) = (\widetilde{d}(c(u, v, w)) \\
&= \widetilde{d}((u \otimes v) \otimes w) = (\widetilde{d} \circ \kappa)((u \otimes v), w) \\
&= d(u \otimes v, w) = \widetilde{b}_w(u \otimes v) = u \otimes v \otimes w.
\end{aligned}$$

Luego, $\widetilde{d} \circ \widetilde{c} = \mathrm{Id}_{U \otimes V \otimes W}$. De modo análogo se puede ver que $\widetilde{c} \circ \widetilde{d} = \mathrm{Id}_{(U \otimes V) \otimes W}$. Así, $\widetilde{c}$ es un isomofismo. □

Observación 3.22. La proposición anterior nos permite identificar libremente los siguientes espacios tensoriales:

$$U \otimes V \otimes W, \quad (U \otimes V) \otimes W, \quad U \otimes (V \otimes W).$$

3.3. Tensor de Funciones Lineales

Sean $f \in \mathrm{Lin}(U, W)$, $g \in \mathrm{Lin}(V, Z)$. Estas funciones definen la función bilineal $f \times g : U \times V \longrightarrow W \times Z$, donde

$$(u, v) \mapsto (f(u), g(v)) .$$

Consideremos los productos tensoriales $(U \otimes V, \iota)$ y $(W \otimes Z, \kappa)$. Como $\kappa \circ (f \times g)$ es una función bilineal, se sigue que existe una única función lineal, que denotaremos por $f \otimes g$, tal que

$$(f \otimes g) \circ \iota = \kappa \circ (f \times g) .$$

En un diagrama conmutativo, la situación es como sigue.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f \times g"'] & U \otimes V \arrow[d, dotted, "f \otimes g"] \\
W \times Z \arrow[r, "\kappa"] & W \otimes Z
\end{tikzcd}$$

Resumiendo, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.23. *Si* $f \in \mathrm{Lin}\,(U, W)$ *y* $g \in \mathrm{Lin}\,(V, Z)$*, entonces existe una única función lineal* $f \otimes g \in \mathrm{Lin}\,(U \otimes V, W \otimes Z)$ *tal que*

$$(f \otimes g)\,(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v) \qquad (u \in U, v \in V).$$

En otros términos, la proposición anterior nos dice que tenemos una función bilineal b de $\mathrm{Lin}\,(U, W) \times \mathrm{Lin}\,(V, Z)$ en $\mathrm{Lin}\,(U \otimes V, W \otimes Z)$, definida por

$$b(f, g) = f \otimes g.$$

Ahora, la propiedad T del producto tensorial dice que b determina una única función lineal L,

$$L : \mathrm{Lin}\,(U, W) \otimes \mathrm{Lin}\,(V, Z) \;\longrightarrow\; \mathrm{Lin}\,(U \otimes V, W \otimes Z)$$

tal que

$$b(f, g) = L(f \otimes g).$$

Proposición 3.24. L *es un monomorfismo. En el caso que los espacios* U*,* V*,* W *y* Z *son de dimensión finita,* L *resulta ser un isomorfismo.*

Demostración. Greub □

Estudiemos brevemente la imagen y kernel de $f \otimes g$. De la definición de $f \otimes g$ se obtiene directamente:

$$\mathrm{Im}\,(f \otimes g) = \mathrm{Im}\,(f) \otimes \mathrm{Im}\,(g). \tag{3.3}$$

imphipsi

De donde se sigue la siguiente proposición.

Proposición 3.25. *Si las funciones* f *y* g *son epiyectivas, entonces* $f \otimes g$ *también lo es.*

Para el kernel de $f \otimes g$, tenemos la siguientes proposiciones.

Proposición 3.26. $\mathrm{Ker}\,(f \otimes g)$ *está generado por los vectores de la forma* $x \otimes y$*, donde* $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$ *o* $y \in \mathrm{Ker}\,(g)$*. Así,*

$$\mathrm{Ker}\,(f \otimes g) = \mathrm{Ker}\,(f) \otimes V + U \otimes \mathrm{Ker}\,(g).$$

Demostración. Sea $Y := \mathrm{vect}\,(x \otimes y\,;\, x \in \mathrm{Ker}\,(f) \text{ o } y \in \mathrm{Ker}\,(g))$. De la epiyectividad de f y g se sigue que dados $w \in W$ y $z \in Z$, existen $u \in U$ y $v \in V$ tales que $f(u) = w$ y $g(v) = z$. Definamos ahora la función bilineal b de $W \times Z$ en $(U \otimes V)\,/Y$, mediante

$$b(w, z) = u \otimes v + Y.$$

Nótese que b está bien definida, pues si $u' \in U$ y $v' \in V$ son tales que $f(u') = w$ y $g(v') = z$, entonces:

$$\begin{aligned} u \otimes v - u' \otimes v' &= u \otimes v - u' \otimes v + u' \otimes v - u' \otimes v' \\ &= (u - u') \otimes v + u' \otimes (v - v') \in Y \end{aligned}$$

pues $u - u' \in \mathrm{Ker}\,(f)$ y $v - v' \in \mathrm{Ker}\,(g)$.

Del producto tensorial $(W \otimes Z, \kappa)$ se sigue que existe una función lineal η de $W \otimes Z$ en $U \otimes V/Y$ tal que

$$\eta \circ \kappa = b.$$

Por otra parte, para $u \otimes v \in U \otimes V$, tenemos

$$\eta(f \otimes g)(u \otimes v) = \eta(f(u) \otimes g(v)) = u \otimes v + Y.$$

Luego, $\eta \circ (f \otimes g) = \pi$. Ahora, $Y \subseteq \mathrm{Ker}\,(f \otimes g)$, luego existe una función lineal μ de $(U \otimes V)/Y$ en $W \otimes Z$, tal que $\mu \circ \pi = f \otimes g$, donde $\pi :$ es la proyección canónica de $U \otimes V$ sobre $U \otimes V/Y$.

Tenemos

$$\eta \circ \mu \circ \pi = \eta \circ (f \otimes g) = \mathrm{Id} \circ \pi.$$

Luego, $\eta \circ \mu = \mathrm{Id}$. En consecuencia η es inyectiva. También es epiyectiva, dado que $f \otimes g$ es epiyectiva. Así, η es un isomorfismo, lo que implica que $Y = \mathrm{Ker}\,(f \otimes g)$.

Pongamos en un diagrama conmutativo las funciones utilizadas durante la demostración.

$$\begin{tikzcd}
U \otimes V \arrow[r, "f\otimes g"] \arrow[dr, "\pi"'] & W \otimes Z \arrow[dr, dotted, "\eta"] & W \times Z \arrow[l, "\kappa"'] \arrow[d, "b"] \\
 & (U \otimes V)/Y \arrow[u, dotted, "\mu"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & (U \otimes V)/Y
\end{tikzcd}$$

□

Finalizamos esta sección con una proposición que resume las principales propiedades del producto tensorial de aplicaciones lineales.

Proposición 3.27. *Sean* $f_1,\ f_2 \in \mathrm{Lin}(V, W),\ g, e, h$ *funciones lineales y* α *un escalar. Tenemos:*

(i) $g \otimes (f_1 + f_2) = g \otimes f_1 + g \otimes f_2$.

(ii) $(f_1 + f_2) \otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g$.

(iii) $(\alpha g) \otimes f_1 = g \otimes (\alpha f_1) = \alpha\,(g \otimes f_1)$.

(iv) $(g \otimes f_1)^* = g^* \otimes f_1^*$.

(v) $(g \otimes f_1) \circ (e \otimes h) = (g \circ e) \otimes (f_1 \circ h)$.

Demostración. Queda de ejercicio. □

3.4. Tensores en Dimensión Finita

A continuación daremos dos modelos del producto tensorial, en el caso de dimensión finita. Cabe destacar que, contrariamente al segundo modelo, la construcción del primer modelo no depende de una elección de bases.

Primer Modelo

Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales de dimensión finita. Como es usual denotemos por V^* y W^* sus respectivos espacios duales. Sea $U_0 := \mathrm{Bil}(V^* \times W^*, \mathbb{K})$ y sea ι la función bilineal de $V \times W$ en U_0, $\iota : (v, w) \mapsto \iota(v, w)$, definida por:

$$\iota(v, w)(f, g) := f(v)g(w) \quad (f \in V^*, g \in W^*).$$

Veamos que (U_0, ι) satisface la propiedad T1. Sean $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, \dots, w_m\}$ bases de, respectivamente, V y W. Sean $\{f_1, \dots, f_n\}$ y $\{g_1, \dots, g_m\}$ las respectivas bases duales. Tenemos:

$$\iota(v_i, w_j)(f_r, g_s) = f_r(v_i)g_s(w_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r = i,\ s = j, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Nótese que $\iota(v_i, w_j) = b_{ij1}$, donde $\{b_{ij1} ; i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!]\}$ es la base de U_0 definida en la Proposición 2.9. Por lo tanto $\mathrm{Im}(\iota)$ genera a U_0, es decir, el par (U_0, ι) satisface la propiedad T1. Veamos ahora que (U_0, ι) satisface la propiedad T2. Si U es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y b una función bilineal de $V \times W$ en U, definimos una función lineal $\widetilde{b}$ de U_0 en U por:

$$\widetilde{b} : \sum_{i,j} \gamma_{ij} b_{ij1} \mapsto \sum_{i,j} \gamma_{ij} b(v_i, w_j).$$

Tenemos, $(\phi \circ \iota)(v_i, w_j) = \phi(b_{ij1}) = b(v_i, w_j)$. Luego, $\phi \circ \iota = b$. Así, el par (U_0, ι) satisface la propiedad T2, por lo tanto este par es un producto tensorial de V con W.

ObsMod1 **Observación 3.28.** El modelo anterior de $V \otimes W$, nos dice que

$$\dim(V \otimes W) = \dim \mathrm{Bil}(V^* \times W^*, \mathbb{K}) = (\dim V)(\dim W).$$

Segundo Modelo

Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales de dimensiones n y m, respectivamente. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $D = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W. Sea U_0 un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de dimensión nm. Sea $E = \{u_1, \dots, u_{nm}\}$ una base de U_0. Dispongamos los elementos de la base E en un arreglo rectangular de n filas y m columnas:

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ u_{m+1} & u_{m+2} & \dots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{(n-1)m+1} & u_{(n-1)m+2} & \dots & u_{nm} \end{array}$$

Sea $u_{ij} := u_k$, donde u_k está en la posición (i, j) del arreglo anterior. Consideremos la función biyectiva entre $B \times D$ y E, definida por: $(v_i, w_j) \mapsto u_{ij}$. Está biyección determina una función bilineal ι,

$$\begin{array}{rcl} \iota : V \times W & \longrightarrow & U_0 \\ (v, w) & \mapsto & \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j u_{i,j}, \end{array}$$

donde $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ y $w = \sum_{j=1}^m \beta_j w_j$.

El par (U_0, ι) satisface la condición T1, pues $\iota(v_i, w_j) = u_{ij}$. Ahora, si U es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $b : V \times W \longrightarrow U$ una función bilineal, definamos la función $\widetilde{b}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{b} : U_0 &\longrightarrow U \\ \sum_{i,j} \gamma_{ij} u_{ij} &\longmapsto \sum_{i,j} \gamma_{ij}\, b(v_i, w_j). \end{aligned}$$

Por construcción $\widetilde{b}$ es lineal. Además, $b = \widetilde{b} \circ \iota$. En efecto:

$$\left(\widetilde{b} \circ \iota\right)(v_i, w_j) = \widetilde{b}(u_{ij}) = b(v_i, w_j), \quad \text{para todo } i, j.$$

Así, (U_0, ι) satisface la condición T2. Por lo tanto, (U_0, ι) es un producto tensorial de V con W.

La construcción anterior deja la siguiente proposición.

BaseVtensorD **Proposición 3.29** (Cf. Observación 3.28). *Si* $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *es una base de* V *y* $D = \{w_1, \dots, w_m\}$ *es una base de* W*, entonces*

$$B \otimes D := \{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_n \otimes w_1, \dots, v_n \otimes w_m\}$$

es una base para $V \otimes W$*. En particular,*

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W).$$

Definición 3.30. La base $B \otimes D$ de $V \otimes W$, en la proposición anterior, recibe el nombre de base en orden lexicográfico asociada a las bases B y D.

Claro, la proposición anterior dice que todo elemento de $V \otimes W$ puede ser escrito, de modo único, en la forma:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \alpha_{i,j} (v_i \otimes w_j) \qquad (\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}, v_i \otimes w_j \in B \otimes D).$$

La siguiente proposición generaliza este último hecho.

LiTensor **Proposición 3.31.** *Sea* $\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i \in V \otimes W$. *Si* $\{x_1, \ldots, x_r\}$ *es linealmente independiente, entonces* $y_1, \ldots, y_r$ *están unicamente determinados, es decir:*

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i', \text{ entonces } y_i = y_i', \text{ para todo } i.$$

para todo i. *Analogamente, si* $\{y_1, \ldots, y_r\}$ *es linealmente independiente, entonces* $x_1, \ldots, x_r$ *están unicamente determinados.*

Demostración. Sea B una base de V que contiene $\{x_1, \ldots, x_r\}$, y $D = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de W.

La igualdad $\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i'$, puede ser re-escrita como

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes (y_i - y_i') = 0.$$

Escribiendo $y_i - y_i' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} w_j$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes (y_i - y_i') = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} (x_i \otimes w_j) = 0.$$

Ahora, como los $x_i \otimes w_j$ son parte de la base $B \otimes D$, se sigue que $\alpha_{ij} = 0$, para todo i, j. Luego $y_i = y_i'$, para todo i.

De modo análogo se demuestra la otra afirmación de la proposición. □

CorLiTensor **Corolario 3.32.** *Sean* $x_1, \ldots, x_r$ *como en la proposición anterior y* $\{y_1, \ldots, y_r\} \subset W$. *Tenemos:*

$$\text{Si } \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i = 0, \text{ entonces } y_i = 0, \text{ para todo } i.$$

Antes de finalizar la presente sección, demostraremos un teorema que caracteriza el producto tensorial de espacios vectoriales de dimensión finita.

thmfin **Teorema 3.33.** *Sean* V, W *y* U *tres* $\mathbb{K}$*–espacios vectoriales de dimensión finita, y sea* $\kappa : V \times W \longrightarrow U$ *una función bilineal, tal que:*

(i) $\dim U = (\dim V)\,(\dim W)$,

(ii) $\mathrm{Im}(\kappa)$ *genera a* U.

Entonces (U, κ) *es un producto tensorial de* V *con* W.

Demostración. Sea $\tilde{\kappa}$ la única función lineal de $V \otimes W$ en U determinada por κ, tal que $\tilde{\kappa} \circ \iota = \kappa$. En un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\kappa"'] & V \otimes W \arrow[d, dotted, "\tilde{\kappa}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Es suficiente demostrar que $\tilde{\kappa}$ es un isomorfismo. La hipótesis (ii) y la conmutatividad del diagrama implican que: $U = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Im}(\kappa)) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Im}(\tilde{\kappa} \circ \iota))$. Luego, $U \subseteq \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Im}(\tilde{\kappa})) = \mathrm{Im}(\tilde{\kappa})$. Así, $\tilde{\kappa}$ es epiyectiva. Finalmente, usando (i) de la hipótesis, se concluye que $\tilde{\kappa}$ es un isomorfismo. □

Ejemplo 3.34 (C.f. Ejemplo 3.3)**.** Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de dimensión finita, entonces el producto tensorial de V con V^* puede ser realizado como el par $(\mathrm{End}(V), \kappa)$, donde la imagen $\kappa(v, f)$ del par (v, f) es el siguiente endomorfismo de V,

$$\kappa(v, f) : u \mapsto f(u)v.$$

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Tenemos que $\kappa(v_i, v_j^*)$ es el elemento $\phi_{i,j}$ definido en (1.4). Luego, $\mathrm{Im}(\kappa)$ genera a $\mathrm{End}(V)$; además, $\dim \mathrm{End}(V) = (\dim V)(\dim V^*)$. Por lo tanto, del Teorema 3.33 se sigue que $(\mathrm{End}(V), \kappa)$ es el producto tensorial de V con V^*.

Ejemplo 3.35 (Cf. Ejemplo 3.4)**.** Sea X e Y dos conjuntos finitos. Sea κ la función bilineal de $\mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(Y)$ en $\mathcal{L}(X \times Y)$, definida por:

$$\kappa\,(f,g) : (x,y) \mapsto (f(x), g(y)).$$

La función κ es bilineal y como $\kappa(\delta_x, \delta_y) = \delta_{(x,y)}$ se sigue que la imagen de κ genera a $\mathcal{L}(X \times Y)$. Además, tenemos

$$\dim \mathcal{L}(X \times Y) = (\dim \mathcal{L}(X))\,(\dim \mathcal{L}(Y))\,.$$

Por lo tanto del teorema anterior se concluye que $(\mathcal{L}(X \times Y), \kappa)$ es el producto tensorial de $(\mathcal{L}(X)$ con $\mathcal{L}(Y)$.

3.5. Producto Tensorial de Matrices

Sea M y N dos matrices, de cualquier tamaño, con entradas en $\mathbb{K}$. El producto tensorial de M con N, en ese orden, es la matriz $M \otimes N$ definida como:

$$M \otimes N := \begin{bmatrix} a_{11}N & a_{12}N & \cdots & a_{1m}N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}N & a_{12}N & \cdots & a_{nm}N \end{bmatrix}.$$

donde $M = [a_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$. La matriz $M \otimes N$ se suele llamar el Kroneckerx *producto de Kronecker* de las matrices M con N. Nótese que si M es de tamaño $m \times n$ y N es de tamaño $r \times s$, entonces la matriz $M \otimes N$ es de tamaño $mr \times ns$.

Las principales propiedades del producto tensorial de matrices son resumidas en la siguiente proposición.

Proposición 3.36. *Sean* M_1 *y* M_2 *matrices de igual tamaño;* N, P *y* Q *matrices cualesquiera. Tenemos:*

(i) $P \otimes (M_1 + M_2) = P \otimes M_1 + P \otimes M_2$.

(ii) $(M_1 + M_2) \otimes P = M_1 \otimes P + M_2 \otimes P$.

(iii) $(\alpha P) \otimes Q = P \otimes [\alpha Q) = \alpha (P \otimes Q)$.

(iv) $(P \otimes Q)^t = P^t \otimes Q^t$.

(v) $(M_1 \otimes N)(P \otimes Q) = M_1 P \otimes NQ$.

Demostración. Queda de ejercicio. □

Corolario 3.37. *Sean P y Q matrices invertibles, entonces $P \otimes Q$ es invertible con inversa $P^{-1} \otimes Q^{-1}$.*

Demostración. Es consecuencia de (v) en la proposición anterior. □

El producto de Kronecker define la función bilineal ι de $M_{n\times m}(\mathbb{K}) \times M_{r\times s}(\mathbb{K})$ en $M_{nr\times ms}(\mathbb{K})$, donde

$$\iota(M, N) = M \otimes N.$$

Teorema 3.38. *El par $(M_{nr\times ms}(\mathbb{K}), \iota)$ es un producto tensorial de $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ con $M_{r\times s}(\mathbb{K})$.*

Demostración. Según el Teorema 3.33, solo resta ver que la imagen de ι genera $M_{nr\times ms}(\mathbb{K})$, pues:

$$\dim(M_{nr\times ms}(\mathbb{K})) = \dim(M_{n\times m}(\mathbb{K})) \cdot \dim(M_{r\times s}(\mathbb{K})).$$

Ahora, si E_{ij} son los elementos de la base canónica de $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ y F_{lk} son los elementos de la base canónica de $M_{r\times s}(\mathbb{K})$, se sigue que el conjunto

$$\{E_{ij} \otimes F_{lk}\, ;\, i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!], l \in [\![1, r]\!], k \in [\![1, s]\!]\}.$$

es justamente la base canónica de $M_{nr\times ms}(\mathbb{K})$. Así, la imagen de ι genera $M_{nr\times ms}(K)$, luego la demostración del teorema está concluida. $\square$

Proposición 3.39. *Sea M una matriz de tamaño n con valores propios $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ y N una matriz de tamaño m con valores propios $\beta_1, \beta_2, \dots, \alpha_m$, entonces los valores propios de $M \otimes N$ son los productos $\alpha_i\beta_j$, con $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, m]\!]$.*

Demostración. $\square$

Corolario 3.40. *Sean M y N matrices de tamaño m y n, respectivamente. Entonces:*

(i) $\operatorname{tr}(M \otimes N) = \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(N)$.

(ii) $\det(M \otimes N) = (\det(M))^n(\det(N))^m$.

3.6. Extensión de Escalares

Sea $\mathbb{F} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ una torre de inclusiones de cuerpos. Si V es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, entonces V es también un $\mathbb{F}$–espacio vectorial, el cual se obtiene simplemente en restringir la multiplicación por escalares de $\mathbb{K}$ a $\mathbb{F}$. Este $\mathbb{F}$–espacio vectorial se denota por $V_{\mathbb{F}}$. Note que si $\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{F}}V$ son finitos, entonces

$$\dim_{\mathbb{F}}V_{\mathbb{F}} = \dim_{\mathbb{K}}V \cdot \dim_{\mathbb{F}}\mathbb{K}.$$

La idea es ahora extender la multiplcación de escalares de $\mathbb{K}$ a $\mathbb{L}$. De modo preciso, construir un $\mathbb{L}$–espacio vectorial W, de modo que que $W_{\mathbb{K}}$ contenga al $\mathbb{K}$–espacio vectorial V. La construcción de W se puede realizar mediante el uso de tensores.

Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial, y consideremos el $\mathbb{K}$–espacio vectorial $\mathbb{L} \otimes V$. Se b_λ la función bilineal de $\mathbb{L} \times V$ en $\mathbb{L} \otimes V$, definida por $b_\lambda(\alpha, \nu) = (\lambda\alpha) \otimes \nu$. Luego, tenemos una función lineal $\widetilde{b}_\lambda$ de $\mathbb{L} \otimes V$ en $\mathbb{L} \otimes V$, que hace conmutativo el siguiente diagranma.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{L} \times V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "b_\lambda"'] & \mathbb{L} \otimes V \arrow[d, dotted, "\widetilde{b}_\lambda"] \\
& \mathbb{L} \otimes V
\end{tikzcd}$$

Observe que $\widetilde{b}_\lambda(\alpha \otimes \nu) = b_\lambda(\alpha, \nu) = (\lambda\alpha) \otimes \nu$.

Teorema 3.41. $\mathbb{L} \otimes V$ *es un* $\mathbb{L}$*–espacio vectorial, con la estructura de grupo abeliano del* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial* $\mathbb{L} \otimes V$ *y el producto por escalar es definido por:*

$$\lambda \cdot x := \widetilde{b}_\lambda(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{L}, x \in \mathbb{L} \otimes V).$$

Demostración. Solo resta ver que se cumplen los axiomas (i)–(iv) de [3, Definición 3.1]. Lo cual resultan de un calculo directo. A modo ejemplo, se verá que se cumple el axioma (iii). Sean $\lambda, \lambda' \in \mathbb{L}$, y sea $x = \alpha \otimes \nu \in \mathbb{L} \otimes V$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
(\lambda\lambda') \cdot x &= \widetilde{b}_{\lambda\lambda'}(x) = \widetilde{b}_{\lambda\lambda'}(\alpha \otimes \nu) = b_{\lambda\lambda'}(\alpha, \nu) = (\lambda\lambda')\alpha \otimes \nu = \lambda(\lambda'\alpha) \otimes \nu \\
&= \widetilde{b}_\lambda((\lambda'\alpha) \otimes \nu) = \widetilde{b}_\lambda(\widetilde{b}_{\lambda'}(\alpha \otimes \nu)) = \widetilde{b}_\lambda(\widetilde{b}_{\lambda'}(x)) = \lambda \cdot (\lambda' \cdot x).
\end{aligned}$$

Es decir, $(\lambda\lambda') \cdot x = \lambda \cdot (\lambda' \cdot x)$. □

Definición 3.42. El $\mathbb{L}$–espacio vectorial $\mathbb{L} \otimes V$ se llama la extensión de escalares de $\mathbb{K}$ a $\mathbb{L}$, y se suele denotar por $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} V$.

Teorema 3.43. *Sean* V *un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial,* $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ *una inclusión de cuerpos, y* ϕ *la función de* V *en* $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} V$ *definida por* $\nu \mapsto 1 \otimes \nu$. *Entonces:*

(i) ϕ *es un* $\mathbb{K}$*–monomorfismo.*

(ii) $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} V = \mathrm{Vect}\{\phi(v)\,;\, v \in V\}$.

(iii) Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base de* V*, entonces* $\{\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)\}$ *es una base de* $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} V$*. En particular,* $\dim_{\mathbb{L}} \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} V$.

Demostración. (i) Claramente ϕ es $\mathbb{K}$-lineal. Ahora si $v \in \mathrm{Ker}\,(\phi)$, es decir $\phi(v) = 1 \otimes v = 0$, se sigue que $v = O$. Por lo tanto ϕ es inyectiva.

(ii) Todo elemento x de $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} V$ es una suma de elementos de la forma $\alpha \otimes v$, con $\alpha \in \mathbb{L}$, $v \in V$. Ahora, $\alpha \otimes v = \alpha(1 \otimes v) = \alpha\phi(v)$. Luego, x es una combinación lineal de elementos de la forma $\alpha\phi(v)$. Así la afirmación (ii) queda demostrada.

(iii) La ecuación $\alpha_1\phi(v_1) + \cdots + \alpha_n\phi(v_n) = 0$ es equivalente a $\alpha_1 \otimes v_1 + \cdots + \alpha_n \otimes v_n = 0$. Aplicando el Corolario 3.32 en esta última igualdad, se obtiene que $\alpha_i = 0$, para todo i. $\square$

3.7. Ejercicios

Exercise 3.44. Sean $v \in V$ y $w \in W$. Demuestre que $v \otimes w = 0$ si y solo si $v = 0$ o $w = 0$.

Exercise 3.45. Sean V y W los $\mathbb{C}$–espacios vectoriales $\mathbb{C}_{n-1}[x]$ y $\mathbb{C}^m$, respectivamente. Sea $U = \mathbb{C}^{nm}$, defina una función bilineal ι de $V \times W$ en U tal que (U, ι) sea un producto tensorial de V con W.

Exercise 3.46. Sea $b : V \otimes W \longrightarrow U$ una función bilineal. Demuestre que la siguiente propiedad es equivalente a la propiedad T2: Si $\{v_i\}$ es una famila de vectores linealmente independientes de V y $\{w_j\}$ es una famila de vectores linealmente independientes de W, entonces la familia $\{b(v_i, w_j)\}$ es linealmente independiente.

Exercise 3.47. Sean V y W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales, donde W es de dimensión finita m. Defina una función bilineal ι de $V \times W$ en $V \oplus \cdots \oplus V$ (m–sumandos) y demuestre que $(V \oplus \cdots \oplus V, \iota)$ es un producto tensorial de V con W.

Exercise 3.48. Sean $V_1, \ldots, V_r$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demuestre:

(i) $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r = 0$ si y solo si $v_i = 0$, para algún i.

(ii) Si $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \neq 0$, entonces $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r = w_1 \otimes \cdots \otimes w_r$ si y solo si existen escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tales que $w_i = \alpha_i v_i$, con $i \in [\![1, r]\!]$, y $\alpha_1 \cdots \alpha_r = 1$.

Exercise 3.49. Consideremos los $\mathbb{R}$–espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Sean C_2 y C_3 sus respectivas bases canónicas y x el elemento de $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$, definido por

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Exprese x como una combinación lineal de los elementos de la base $C_2 \otimes C_3$

(ii) Determine la matriz cambio de base de $C_2 \otimes B$ a $D \otimes C_3$, donde

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

y

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(iii) Determine las coordenas de x en la base $D \otimes B$

(iv) ¿Es posible expresar y como suma de 1 o 2 vectores de la forma $v \otimes w$?

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exercise 3.50. Sean $V_1, \ldots, V_r$ espacios vectoriales de dimensiones $m_1, \ldots, m_r$, respectivamente. Demuestre que

$$\dim [V_1 \otimes \cdots \otimes V_r] = m_1 \cdots m_r$$

.

Exercise 3.51. Sean X e Y dos conjuntos finitos distintos del conjunto vacio. Defina una función bilineal ι de $\mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(Y)$ en $\mathcal{L}(X \times Y)$, de modo tal que $(\mathcal{L}(X \times Y), \iota)$ satisface (T1) y (T2). Así, $(\mathcal{L}(X \times Y), \iota)$ es un modelo del producto tensorial de $\mathcal{L}(X)$ con $\mathcal{L}(Y)$. Para ver (T1) podría ser útil recordar que el $\mathbb{K}$–espacio vectorial $\mathcal{L}(X)$ tiene como una base el conjunto constituido por las funciones delta de Dirac: δ_x, $x \in X$.

Exercise 3.52. Sean X e Y dos conjuntos finitos distintos del conjunto vacio. Usando el Teorema 3.33 demuestre que $\mathcal{L}(X \times Y)$ es un modelo del producto tensorial de $\mathcal{L}(X)$ con $\mathcal{L}(Y)$.

Exercise 3.53. Suponga que U, V, W y Z son espacios vectoriales de dimensión finita. Defina ι de modo que $[\mathrm{Lin}\,[U \otimes V, W \otimes Z], \iota]$ sea un producto tensorial de $\mathrm{Lin}(U, V)$ con $\mathrm{Lin}(W, Z)$.

Exercise 3.54. Sean V y W los $\mathbb{K}$–espacios vectoriales $\mathbb{K}_{n-1}[x]$ y $\mathbb{K}_{m-1}[x]$, respectivamente. Sea $U = \mathbb{K}^{nm}$ Defina una función bilineal

ι de $V \times W$ en U y demuestre que (U, ι) es un producto tensorial de V con W.

Exercise 3.55. Sean $\phi \in \mathrm{Lin}(U.V)$ y $\psi \in \mathrm{Lin}(W.Z)$. Demuestre:

(i) $\phi \otimes \psi$ es inyectiva si y solo si ϕ y ψ lo son.

(ii) $\mathrm{rg}(\phi \otimes \psi) = \mathrm{rg}(\phi)\mathrm{rg}(\psi)$, si U y W son de dimensión finita.

Exercise 3.56. Sean M y N dos matrices cualesquiera. Demuestre que

$$\mathrm{rg}(M \otimes N) = \mathrm{rg}(M)\mathrm{rg}(N).$$

Exercise 3.57. Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de dimensión n. Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(V)$ y sea ϕ definida como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathrm{End}(V) & \longrightarrow & \mathrm{End}(V) \\ \sigma & \mapsto & \alpha \circ \sigma \circ \beta \end{array}$$

Demuestre:

(i) $\mathrm{tr}(\phi) = \mathrm{tr}(\alpha)\mathrm{tr}(\beta)$.

(ii) $\det(\phi) = \det(\alpha \circ \beta)^n$.

Exercise 3.58. Sean $M_1, \ldots, M_r$ matrices cuadradas con entradas en un cuerpo $\mathbb{K}$. Demuestre que si $M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$ es la matriz escalar αI_n, donde $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces cada matriz M_i es una matriz escalar $\alpha_i I_{n_i}$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Además, se tiene $\alpha = \alpha_{n_1} \cdots \alpha_{n_r}$.

Exercise 3.59. Sean a, b y c tres números reales. Sea $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, definida por,

$$\phi : (x, y) \mapsto (ax + by, x - y).$$

Sea $\psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, cuya matriz en la base canónica es:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine las condiciones sobre a, b y c, para que $\phi \otimes \psi$ sea invertible.

Exercise 3.60. Sea $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, definida como:

$$\phi((x, y)) = (x + y, x - y).$$

Sea $\psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, cuya matriz en la base canónica es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine la matriz del endomorfismo $\phi \otimes \psi$ respecto de la base $C \otimes B$, donde C denota la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y B es la base $\{e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Los vectores e_1, e_2 y e_3 denotan los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 4

Tensores Simétricos y Antisimétricos

4.1. El Espacio $T^m(V)$

Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y sea $m \in \mathbb{Z}^+$. La a m–ésima potencia tensorial $T^m(V)$ de V, se define como sigue.

$$T^0(V) = \mathbb{K}, \qquad T^m(V) = V \otimes \cdots \otimes V, \quad m\text{–factores, cuando } m \geqslant 1.$$

Notar que los elementos de $T^m(V)$ se pueden escribir, no de modo único, en la siguiente forma.

$$\sum_{1 \leqslant i_j \leqslant n} \alpha_{i_1 \ldots i_m} z_{i_1} \otimes \cdots \otimes z_{i_m} \qquad (z_{i_j} \in V, \alpha_{i_1 \ldots i_m} \in \mathbb{K}).$$

Note que, si V es de dimensión n, entonces $\dim T^m(V) = n^m$, ver Proposición 3.29. Más aún, si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $B^{\otimes m}$ es la base de $T^m(V)$ definida por:

$$B^{\otimes m} = \{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m} ; v_{i_j} \in B, i_j \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, m]\!]\}. \tag{4.1}$$ baseneten

Así, $z \in \mathsf{T}^m(V)$ se escribe de modo único como:

$$z = \sum_{1 \leqslant i_j \leqslant n} \alpha_{i_1 \dots i_m} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m} \qquad (\alpha_{i_1 \dots i_m} \in \mathbb{K}).$$

Como es usual, denotaremos por $\mathfrak{S}_m$ el grupo simétrico de m–símbolos. Recuerde que $\mathfrak{S}_m$ está generado por la transposiciones elementales $s_i = (i\, i+1)$, donde $i \in [\![1, n-1]\!]$. Estos generadores junto que las siguientes relaciones definen una presentación de $\mathfrak{S}_m$.

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i \text{ for } |i - j| > 1, \quad s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \text{ for } |i - j| = 1.$$

rep **Proposición 4.1.** *Para todo* $\sigma \in \mathfrak{S}_m$*, existe un único automorfismo* P_σ *de* $\mathsf{T}^m(V)$ *tal que:*

(i) $\mathsf{P}_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(m)}$.

(ii) $\mathsf{P}_{\sigma\tau} = \mathsf{P}_\sigma \mathsf{P}_\tau$*, para todo* $\tau \in \mathfrak{S}_m$*.*

La afirmación (ii) dice que tenemos una representación de $\mathfrak{S}_m$ *en* $\mathsf{T}^m(V)$*.*

Demostración. Todo $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ define una función m-lineal b_σ de $V^{\times n}$ en $V^{\otimes n}$, definida por

$$b_\sigma : (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(2)}.$$

Luego, la propiedad T del m–tensor nos dice que existe un único endomorfismo P_σ de $\mathsf{T}^m(V)$ que satiscace la propiedad (i). En efecto, este endomorfismo resulta ser un automorfismo, pues P_σ solamente permuta los elementos de la base $\mathsf{B}^{\otimes m}$. $\square$

Definición 4.2. Sea $z \in \mathsf{T}^m(V)$. Se dice que:

(i) z es simétrico, si $P_\sigma(z) = z$, para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_m$,

(ii) z es alternado, o antisimétrico, si $P_\sigma(z) = \mathrm{sg}(\sigma) z$, para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_m$.

Además definimos:

$$\begin{aligned} S^m(V) &:= \{z \in T^m(V)\,;\, z \text{ es simétrico}\}, \\ A^m(V) &:= \{z \in T^m(V)\,;\, z \text{ es alternado}\}. \end{aligned}$$

Proposición 4.3. *Los subconjuntos* $S^m(V)$ *y* $A^m(V)$ *son subespaciosc de* $T^m(V)$.

Demostración. Queda de ejercicio. □

En orden a estudiar los subespacios $S^m(V)$ y $A^m(V)$ es necesario introducir los siguientes endomorfismos de $T^m(V)$: $\mathscr{S}_m$ de $T^m(V)$, llamado *simetrizador*, y el endomorfismo $\mathscr{A}_m$ llamado *alternador*. Más precisamente:

$$\mathscr{S}_m := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} P_\sigma, \tag{4.2}$$

$$\mathscr{A}_m := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sg}(\sigma) P_\sigma. \tag{4.3}$$

El siguiente lemma será usado para demostrar que $\mathscr{S}_m$ y $\mathscr{A}_m$ son proyectores.

lempsig **Lema 4.4.** *Para todo* $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, *tenemos:*

(i) $P_\sigma \mathscr{S}_m = \mathscr{S}_m P_\sigma = \mathscr{S}_m$.

(ii) $P_\sigma \mathscr{A}_m = \mathscr{A}_m P_\sigma = \mathrm{sg}(\sigma) \mathscr{A}_m$.

Demostración. Las afirmaciones resultan de aplicar la Proposición 4.1 y un simple cambio de variables. Por ejemplo veamos que $P_\sigma \mathscr{A}_m = \operatorname{sg}(\sigma)\mathscr{A}_m$. Ocupando (ii) de la Proposition 4.1, tenemos:

$$P_\sigma \mathscr{A}_m = \frac{1}{m!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sg}(\tau) P_\sigma P_\tau = \frac{1}{m!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sg}(\tau) P_{\sigma\tau}.$$

Poniendo ahora $\rho = \sigma\tau$, se sigue que:

$$P_\sigma \mathscr{A}_m = \frac{1}{m!}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sg}(\sigma^{-1}\rho) P_\rho = \operatorname{sg}(\sigma^{-1})\frac{1}{m!}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sg}(\rho) P_\rho = \operatorname{sg}(\sigma)\mathscr{A}_m.$$

□

Proposición 4.5. *Para todo m, tenemos:*

(i) $\mathscr{S}_m$ es un proyector de $T^m(V)$, con imagen $S^m(V)$.

(ii) $\mathscr{A}_m$ es un proyector de $T^m(V)$, con imagen $A^m(V)$.

En particular:

$$T^m(V) = \operatorname{Ker}(\mathscr{S}_m) \oplus S^m(V), \qquad T^m(V) = \operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m) \oplus A^m(V).$$

Demostración. Demostremos (ii). Tenemos:

$$\mathscr{A}_m^2 = \mathscr{A}_m \left(\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sg}(\sigma) P_\sigma\right) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sg}(\sigma)\mathscr{A}_m P_\sigma$$

Luego usando la Proposición 4.4, se obtiene

$$\mathscr{A}_m^2 = \left(\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sg}(\sigma)^2\right)\mathscr{A}_m.$$

Así, $\mathscr{A}_m^2 = \mathscr{A}_m$. Finalmente veamos que $\operatorname{Im}(\mathscr{A}_m) = A^m(V)$. Si $z \in \operatorname{Im}(\mathscr{A}_m)$, entonces $z = \mathscr{A}_m(y)$, para algún y. Luego, $P_\sigma(z) = P_\sigma(\mathscr{A}_m(y)) =$

$\operatorname{sg}(\sigma)\mathscr{A}_m(y) = \operatorname{sg}(\sigma)z$, entonces $P_\sigma(z) = \operatorname{sg}(\sigma)z$, es decir, $z \in A^m(V)$. Reciprocamente, si $z \in A^m(V)$, tenemos:

$$\mathscr{A}(z) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sg}(\sigma)P_\sigma(z) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sg}(\sigma)^2(z) = z.$$

Es decir, $z \in \operatorname{Im}(\mathscr{A}_m)$. Por lo tanto, $\operatorname{Im}(\mathscr{A}_m) = A^m(V)$. □

Proposición 4.6. *Si* $m \geqslant 2$*, entonces*

(i) $\mathscr{S}_m\mathscr{A}_m = \mathscr{A}_m\mathscr{S}_m = 0$.

(ii) $S^m(V) \cap A^m(V) = \{0\}$.

Demostración. Veamos que $\mathscr{S}_m\mathscr{A}_m = 0$. Tenemos

$$\mathscr{S}_m\mathscr{A}_m = \left(\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}P_\sigma\right)\mathscr{A}_m = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}P_\sigma\mathscr{A}_m = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sg}(\sigma)\mathscr{A}_m,$$

donde la última igualdad viene de (ii) de la Proposición 4.4. Note que $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sg}(\sigma) = 0$, por lo tanto $\mathscr{S}_m\mathscr{A}_m = 0$. De modo análogo se ve que $\mathscr{A}_m\mathscr{S}_m = 0$.

Veamos (ii). Tomemos $z \in S^m(V) \cap A^m(V)$, entonces $z = \mathscr{S}_m(z)$, pues $z \in S^m(V)$. Luego, $\mathscr{A}_m z = \mathscr{A}_m\mathscr{S}_m(z)$, esta igualdad dice que $z = 0$, en virtud de que también $z \in A^m(V)$ y parte (i) de la proposición. □

Nótar que si B es una base de V, entonces (4.1) dice que:

$$S^m(V) = \operatorname{Vect}\{\mathscr{S}_m(z)\,;\, z \in B^{\otimes m}\}, \tag{4.4}$$
genalt

$$A^m(V) = \operatorname{Vect}\{\mathscr{A}_m(z)\,;\, z \in B^{\otimes m}\}. \tag{4.5}$$
gensim

4.2. Los Espacios $A^m(V)$ y $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$

En esta sección estudiaremos los espacios $A^m(V)$ y $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$. Durante la sección $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ denota una base de V.

ir=is **Lema 4.7.** *Sea* $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m} \in B^{\otimes m}$*. Si existen* $r, s \in [\![1, m]\!]$ *con* $r \neq s$*, tales que* $i_r = i_s$*, entonces*

$$\mathscr{A}_m(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m}) = 0.$$

En particular $A^m(V) = \{0\}$*, si* $m > n$*.*

Demostración. Supongamos $r < s$. Sea $\sigma = (r, s)$ y pongamos $z = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m}$, con la condición $i_r = i_s$. Tenemos, $P_\sigma(z) = z$, luego $\mathscr{A}_m(P_\sigma(z)) = \mathscr{A}_m(z)$. Usando ahora (ii) del Lema 4.4, se obtiene que $\mathscr{A}_m(z) = \operatorname{sg}(\sigma)\mathscr{A}_m(z)$. Por lo tanto $\mathscr{A}_m(z) = 0$.

Si $m > n$, entonces $z = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m}$ tiene indices repetidos. Luego $\mathscr{A}_m(z) = 0$, para todo $z \in B^{\otimes m}$. Por lo tanto, $A^m(V) = \{0\}$. □

El lema anterior dice que $A^m(V)$, con $m \leqslant n$, es generado por los elementos $\mathscr{A}_m(z)$, donde $z = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m} \in B^{\otimes m}$ es tal que

$$|\{i_1, \ldots, i_m\}| = m.$$

Ahora, para un tal elemento $z = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m}$ tenemos

$$v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{\sigma(m)}} \neq v_{i_{\tau(1)}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{\tau(m)}},$$

si σ y τ son dos permutaciones distintas de $\mathfrak{S}_m$.

propAm **Lema 4.8.** *Sea* $z = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m}$ *en la base* $B^{\otimes m}$*, tal que* $|\{i_1, \ldots, i_m\}| = m$*. Tenemos:*

(i) $\mathscr{A}_m(z) \neq 0$

(ii) Si $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{j_1, \ldots, j_m\}$, *entonces*

$$\mathscr{A}_m(z) = \pm \mathscr{A}_m(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m}).$$

(iii) Si $\{i_1, \ldots, i_m\} \neq \{j_1, \ldots, j_m\}$, *entonces* $\mathscr{A}_m(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m})$ *y* $\mathscr{A}_m(z)$ *no tienen sumandos en común.*

Demostración. (i) Si $\mathscr{A}_m(z) = 0$, se sigue

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sg}(\sigma) v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{\sigma(m)}} = 0.$$

Los sumandos son todos distintos y son parte de la base $B^{\otimes m}$, en consecuencia debe tenerse $\mathrm{sg}(\sigma) = 0$, para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_m$. Lo cual no puede ser, en consecuencia debe tenerse $\mathscr{A}_m(z) \neq 0$.

(ii) Sea $\tau \in \mathfrak{S}_m$ tal que $i_k = j_{\tau(k)}$. Así, $P_\tau(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m}) = z$. Luego:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_m(z) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sg}(\sigma) P_\sigma(z) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sg}(\sigma) P_\sigma(P_\tau(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m})) \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sg}(\sigma) P_{\sigma\tau}(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m}).
\end{aligned}$$

Luego, haciendo $\eta = \sigma\tau$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_m(z) &= \frac{1}{m!} \sum_{\eta \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sg}(\tau^{-1}) \mathrm{sg}(\eta) P_\eta(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m}) \\
&= \frac{1}{m!} \mathrm{sg}(\tau^{-1}) \sum_{\eta \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sg}(\eta) P_\eta(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m}) \\
&= \pm \mathscr{A}_m(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m}).
\end{aligned}$$

(iii) Supongamos que $\mathscr{A}_m(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m})$ y $\mathscr{A}_m(z)$ tienen un sumando en común. Luego existen $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_m$ tales que $P_\sigma(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m}) = P_\tau(z)$, o equivalentemente, $v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m} = P_{\sigma^{-1}\tau}(z)$. De donde se deduce que $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{j_1, \ldots, j_m\}$. □

Teorema 4.9. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial de dimensión* n*. Si* $m \leqslant n$*, entonces una base para* $A^m(V)$ *es el siguiente conjunto.*

$$\{\mathscr{A}_m(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m})\,;\, i_1 < \cdots < i_m, \textit{ donde } i_j \in [\![1, n]\!]\}\,.$$

En particular,

$$\dim A^m(V) = \dim A^{n-m}(V) = \binom{n}{m}.$$

Nótese que $\dim A^n(V) = 1$.

Demostración. Es una consecuencia de Lema 4.7 y Lema 4.8. □

EjeA **Ejemplo 4.10.** Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V. Luego, la dimensión de $A^3(V)$ es $\binom{4}{3} = 4$. Los indices i, j, k tales que $i < j < k$ son:

$$1 < 2 < 3, 1 < 2 < 4, 2 < 3 < 4, 1 < 3 < 4.$$

Luego una base de $A^3(V)$ está formada por:

$$\mathscr{A}_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3), \mathscr{A}_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_4), \mathscr{A}_3(v_2 \otimes v_3 \otimes v_4), \mathscr{A}_3(v_1 \otimes v_3 \otimes v_4).$$

A continuación daremos un lema que da un sistema de generadores de $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$. Para esto necesitamos introducir el siguiente subespacio U de $T^m(V)$.

$$U := \operatorname{Vect}\{z - \operatorname{sg}(\sigma)P_\sigma(z)\,;\, \sigma \in \mathfrak{S}_m,\, z \in T^m(V)\}.$$

KerA=U **Lema 4.11.** $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m) = U$.

Demostración. Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_m(z - \operatorname{sg}(\sigma)P_\sigma(z)) &= \mathscr{A}_m(z) - \operatorname{sg}(\sigma)\mathscr{A}_m P_\sigma(z) \\ &= \mathscr{A}_m(z) - \operatorname{sg}(\sigma)^2 \mathscr{A}_m \quad \text{(Lema 4.4)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, U está contenido en $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$. Reciprocamente, si $z \in \operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$, podemos escribir:

$$z = z - \mathscr{A}_m(z) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (z - \operatorname{sg}(\sigma) P_\sigma(z)) \in U.$$

Es decir, $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$ está contenido en U. Por lo tanto, la demostración concluye. □

esnx **Lema 4.12.** *Sea X un conjunto de generadores de $\mathfrak{S}_m$. El espacio U_X es $\mathfrak{S}_m$–estable, donde*

$$U_X := \operatorname{Vect}\{z - \operatorname{sg}(\sigma) P_\sigma(z)\,;\, \sigma \in X, z \in T^m(V)\}.$$

Demostración. Debemos demostrar que para todo $\tau \in \mathfrak{S}_m$, se tiene $P_\tau(v) \in U_X$, para todo $v \in U_X$. Teniendo presente (ii) de la Proposición 4.1, basta considerar el caso en que $\tau \in X$. Además, como los P_τ son funciones lineales, basta considerar el caso en que $v = z - \operatorname{sg}(\sigma)P_\sigma(z)$, donde $z \in T^m(V)$, $\sigma \in X$. Para un tal generador v, $\tau \in X$, tenemos:

$$\begin{aligned}
P_\tau(v) &= P_\tau(z) - \operatorname{sg}(\sigma) P_\tau P_\sigma z \\
&= -\operatorname{sg}(\tau)\,(z - \operatorname{sg}(\tau) P_\tau(z)) - \operatorname{sg}(\sigma) P_\tau P_\sigma(z) + \operatorname{sg}(\tau)(z) \\
&= -\operatorname{sg}(\tau)\,(z - \operatorname{sg}(\tau) P_\tau(z)) + \operatorname{sg}(\tau)\operatorname{sg}(\sigma)\,[P_\sigma(z) - \operatorname{sg}(\tau) P_\tau P_\sigma(z)] \\
&\quad + \operatorname{sg}(\tau)\,(z - \operatorname{sg}(\sigma) P_\sigma(z))\,.
\end{aligned}$$

Así, $P_\tau(v)$ es una combinación lineal de los generadores que definen U_X, luego $P_\tau(v) \in U_X$. Así, la demostración concluye. □

Ker=U=Ux **Proposición 4.13.** *Para todo $m \leqslant n$, X un conjunto de generadores de $\mathfrak{S}_m$, se tiene que $U = U_X$. Así, por el Lema 4.11, $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m) = U_X$.*

Demostración. Claro que $U_X \subseteq U$. Para tener la otra contención basta demostrar que:

$$z - \mathrm{sg}(\sigma)P_\sigma(z) \in U_X \quad (z \in T^m(V), \sigma \in \mathfrak{S}_m). \tag{4.6}$$ demnKer

La demostración será por inducción sobre el número de generadores $n(\sigma)$ de X usados para escribir $\sigma \in \mathfrak{S}_m$. Si $n(\sigma) = 1$, significa $\sigma \in X$, luego $z - \mathrm{sg}(\sigma)P_\sigma(z) \in U_X$, para todo $z \in T^m(V)$. Supongamos valido (4.6), para todo σ tal que $n(\sigma) < k$. Sea $\tau \in \mathfrak{S}_m$ tal que $n(\tau) = k$, entonces τ se puede escribir en la forma $\tau = \eta\sigma$, donde $\eta \in X$ y $n(\sigma) = k - 1$. Para todo $z \in T^m(V)$, tenemos:

$$\begin{aligned} z - \mathrm{sg}(\tau)P_\tau(z) &= z - \mathrm{sg}(\eta)\mathrm{sg}(\sigma)P_\eta P_\sigma(z) \\ &= z - \mathrm{sg}(\eta)P_\eta(z) + \mathrm{sg}(\eta)\left[P_\eta(z) - \mathrm{sg}(\sigma)P_\eta P_\sigma(z)\right] \\ &= z - \mathrm{sg}(\eta)P_\eta(z) + \mathrm{sg}(\eta)P_\eta\left(z - \mathrm{sg}(\sigma)P_\sigma(z)\right). \end{aligned}$$

La estabilidad de U_X (Lema 4.12), junto con la hipótesis de inducción que dice que $z - \mathrm{sg}(\sigma)P_\sigma(z) \in U_X$, luego $P_\eta\left(z - \mathrm{sg}(\sigma)P_\sigma(z)\right) \in U_X$. Por lo tanto, $z - \mathrm{sg}(\tau)P_\tau(z) \in U_X$, pues también $z - \mathrm{sg}(\eta)P_\eta(z) \in U_X$. □

BaseKerACor **Corolario 4.14.** *Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial con base B y X un conjunto de generadores de $\mathfrak{S}_m$, entonces*

$$\mathrm{Ker}\,(\mathscr{A}_m) = \mathrm{Vect}\{z - \mathrm{sg}(\sigma)P_\sigma(z)\,;\, \sigma \in X,\, z \in B^{\otimes m}\}.$$

Demostración. Resulta del hecho que P_σ son funciones lineales, para todo σ. □

Ejemplo 4.15. Tomemos V como en el Ejemplo 4.10. Luego, se tiene que $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathscr{A}_m) = 64 - 4 = 60$. Sea $X = \{s_1, s_2, s_3\}$, el conjunto de transposiciones elementales de $\mathfrak{S}_4$. Según el Corolario 4.14 el $\mathrm{Ker}\,(\mathscr{A}_3)$ está generado por los vectores:

$$z + P_{s_1}(z), z + P_{s_2}(z), z + P_{s_3}(z), \quad z \in B^{\otimes 3}.$$

Sea S el conjunto de generadores de $\mathfrak{S}_m$, constituido por las transposiciones, es decir,

$$S = \{(r, s)\,;\, r < s\}.$$

El Corolario 4.14 dice que $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$ está generado por los elementos de la forma $z - \operatorname{sg}(\sigma)P_\sigma(z) = z + P_\sigma(z)$, donde $\sigma = (r, s) \in S$, $z \in B^{\otimes m}$. Sea $z = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m B^{\otimes m}$. Luego,

$$\begin{aligned} z + P_\sigma(z) &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \cdots \otimes v_s \otimes \cdots \otimes v_m \\ &\quad + v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \cdots \otimes v_m \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes (v_r + v_s) \otimes \cdots \otimes (v_r + v_s) \otimes \cdots \otimes v_m \\ &\quad - v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \cdots \otimes v_m \\ &\quad - v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \otimes \cdots \otimes v_s \otimes \cdots \otimes v_m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m) \subseteq U$, donde

$$U := \operatorname{Vect}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_m\,;\, v_i \in B,\ v_r = v_s \text{ cuando } r \neq s\}.$$

Veamos que $U \subseteq \operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$. Sea $z := v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \in B^{\otimes m}$, donde $v_r = v_s$, para algún $r \neq s$. Sean:

$$z' := \frac{1}{2}z, \qquad \tau := (r, s) \in \mathfrak{S}_m.$$

Tenemos, $z = z' + P_\tau(z') = z' - \operatorname{sg}(\tau)P_\tau(z')$. Luego, $z \in \operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$. Por lo tanto, $U \subseteq \operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m)$. Así, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.16.

$$\operatorname{Ker}(\mathscr{A}_m) = \operatorname{Vect}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_m\,;\, v_i \in V,\ v_r = v_s \textit{ con } r \neq s\}.$$

4.3. Los Espacios $S^m(V)$ y $\operatorname{Ker}(\mathscr{S}_m)$

Como antes, sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

Lema 4.17. *Los elementos distintos de $\mathscr{S}_m(B^{\otimes m})$ constituyen un conjunto linealmente independiente de $S^m(V)$.*

Demostración. Discutida en clases. □

En orden a calcular el cardinal del conjunto $\mathscr{S}_m(B^{\otimes m})$, notemos primero que $\mathscr{S}_m(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m}) = \mathscr{S}_m(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_m})$ si y solo si $(i_1, \ldots, i_m)$ y $(j_1, \ldots, j_m)$ son la misma m–combinación admitiendo repetición[1]. Así, contar la cantidad de elementos de $\mathscr{S}_m(B^{\otimes m})$ equivale a contar la cantidad de m–combinaciones, admitiendo repetición, que se pueden formar con elementos $i_j \in [\![1, n]\!]$. Tal cantidad es $\binom{n+m-1}{m}$. Como representantes de las combinaciones con repetición podemos elegir $(i_1, \ldots, i_m)$ tal que $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m$. En resumen obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.18. *Sean $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Una base para $S^m(V)$ es el siguiente conjunto,*

$$\{\mathscr{S}_m(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_m})\,;\, i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m,\ i_j \in [\![1, n]\!]\}\,.$$

En particular, la dimensión de $S^m(V)$ es $\binom{n+m-1}{m}$.

Procedemos ahora a estudiar $\operatorname{Ker}(\mathscr{S}_m)$. Si $z \in \operatorname{Ker}(\mathscr{S}_m)$, entonces podemos escribir:

$$z = z - \mathscr{S}_m(z) = z - \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} P_\sigma(z) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (z - P_\sigma(z)).$$

[1]Selección de m elementos donde se permite repeticiones y sin importar el orden.

Luego, todo elemento del kernel de $\mathscr{S}_m$ es una combinación lineal de elementos de la forma $z - P_\sigma(z)$. Por otra parte, si $z \in T^m(V)$ y $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, entonces $\mathscr{S}_m(z - P_\sigma(z)) = \mathscr{S}_m(z) - \mathscr{S}_m(P_\sigma(z)) = \mathscr{S}_m(z) - \mathscr{S}_m(z) = 0$. Es decir, $z - P_\sigma(z) \in \operatorname{Ker}(\mathscr{S}_m)$. Resumiendo hemos demostrado la siguiente proposición.

eme **Proposición 4.19.** $\operatorname{Ker}(\mathscr{S}_m) = W$, *donde*

$$W := \operatorname{Vect}\{z - P_\sigma(z)\,;\, \sigma \in \mathfrak{S}_m,\ z \in T^m(V)\}.$$

El resultado de la proposición anterior puede ser refinado. Para esto necesitamos la siguiente definición. Para X un conjunto de de generadores de $\mathfrak{S}_m$, definimos el subespacio W_X como sigue:

$$W_X = \operatorname{Vect}\{z - P_\sigma(z)\,;\, \sigma \in X,\ z \in T^m(V)\}.$$

essx **Lema 4.20.** *Sea X un conjunto de generadores de $\mathfrak{S}_m$. El espacio W_X es $\mathfrak{S}_m$–estable.*

Demostración. Debemos demostrar que para todo $\tau \in \mathfrak{S}_m$ y $v \in W_X$ se cumple: $P_\tau(v) \in W_X$. Como los P_τ son funciones lineales, basta considerar el caso en que $v = z - P_\sigma(z)$, donde $z \in T^m(V)$ y $\sigma \in X$, i.e. v recorre el conjunto de generadores que define a W_X. También, usando la Proposición 4.1, es suficiente considerar el caso en que τ recorre el conjunto de generadores X. Tenemos:

$$\begin{aligned} P_\tau(v) &= P_\tau(z) - P_\tau P_\sigma(z) \\ &= -[z - P_\tau(z)] + [P_\sigma z - P_\tau P_\sigma(z)] + [z - P_\sigma(z)]. \end{aligned}$$

Note que cada sumando pertenece a W_X, luego $P_\tau(v) \in W_X$. $\square$

emex **Proposición 4.21.** $\operatorname{Ker}(\mathscr{S}_m) = W_X$.

Demostración. Teniendo en cuenta la Proposición 4.19, basta demostrar que $W = W_X$. Claro que $W_X \subseteq W$. Para tener la otra inclusión, basta ver que

$$z - P_\sigma z \in W_X \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_m, z \in T^m(V)) \tag{4.7}$$

demoS=SX

Para lo cual usaremos inducción sobre el número de factores que aparecen en una escritura de σ como un producto de generadores en X. Si $\sigma \in X$, entonces (4.7) se cumple trivialmente. Sea σ un producto de n factores de X. Pongamos $\sigma = \tau\sigma'$, donde $\tau \in X$ y σ' es un producto de $n-1$ factores de elementos de X. Tenemos

$$\begin{aligned} z - P_\sigma z &= z - P_\tau P_{\sigma'} z \\ &= (z - P_\tau z) + (P_\tau z - P_\tau P_{\sigma'} z) \\ &= (z - P_\tau z) + P_\tau(z - P_{\sigma'} z). \end{aligned}$$

Ahora, $z - P_\tau z \in W_X$ y de la hipótesis de inducción $z - P_{\sigma'} z \in W_X$. Luego, usando el Lema 4.20 se sigue que $P_\tau(z - P_{\sigma'} z) \in W_X$. Es decir, se cumple (4.7). □

Corolario 4.22. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*–espacio vectorial con base* $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *y* X *un conjunto de generadores de* $\mathfrak{S}_m$*, entonces*

$$\operatorname{Ker}(\mathscr{S}_m) = \operatorname{Vect}\{z - P_\sigma(z)\,;\, \sigma \in X,\, z \in B^{\otimes m}\}.$$

4.4. Propiedad Universal de $S^m(V)$ y $A^m(V)$

Definición 4.23. Sean V, W dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales y ϕ una función m–multilineal de $V \times \cdots \times V$ (m–factores) en W:

1. ϕ se dice simétrica si para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, se tiene:

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = \phi(v_1, \dots, v_m)$$

2. ϕ se dice alternada, si ocurre que $v_i = v_j$ para $i \neq j$, entonces
$$\phi(v_1, \ldots, v_m) = 0.$$

3. ϕ se dice antisimétrica si para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ se tiene:
$$\phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = \mathrm{sg}(\sigma)\phi(v_1, \ldots, v_m).$$

Proposición 4.24. *Si la característica de $\mathbb{K}$ no es 2, entonces ϕ es alternada si y solo si ϕ es antisimétrica.*

Demostración. Supongamos que ϕ es alternada. Luego, para todo $v = (v_1, \ldots, v_m)$ se tiene $\phi(v_i, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_m) = 0$. De la multilinealidad de ϕ, se obtiene $\phi(v) + \phi(v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_m) = 0$. Esta igualdad se puede re–escribir como:
$$\phi(v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_m) = \mathrm{sg}(\sigma)\phi(v),$$
donde σ es la transposición (i, j). Ahora, ocupando la Proposión 4.1, el hecho que sg es un homomorfismo y como las transposiciones generan al grupo simétrico, se deduce que $\phi P_\sigma = \mathrm{sg}(\sigma)\phi$, para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, es decir, ϕ es antisimétrica.

Recíprocamente, sea $v = (v_1, \ldots, v_m)$ tal que $v_i = v_j$, si $i \neq j$ y pongamos $\sigma = (i, j)$. Luego, $\phi(v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_m) = \mathrm{sg}(\sigma)\phi(v)$, es decir, $\phi(v) = -\phi(v)$. Por lo tanto $\phi(v) = 0$. $\square$

thmus **Teorema 4.25.** *Sean V y U dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales. Si s una función m–multilineal simétrica de $V \times \cdots \times V$ en U, entonces existe una única función lineal $\tilde{s} : S^m(V) \longrightarrow U$ tal que $\tilde{s} \circ (\mathscr{S}_m \circ \iota) = s$.*

Demostración. Veamos la existencia de la función $\tilde{s}$. De la propiedad T del producto tensorial $(T^m(V), \iota)$, se sigue que existe una única función lineal $f : T^m(V) \longrightarrow U$ tal que $f \circ \iota = s$. Definamos $\tilde{s}$

como la restricción de f a $S^m(V)$. Claramente $\tilde{s}$ es lineal. A continuación veremos que $\tilde{s} \circ \mathscr{S}_m = f$. Para esto note que, para $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, $z = z_1 \otimes \cdots \otimes z_m \in T^m(V)$, tenemos

$$(f \circ P_\sigma)(z) \quad = f(z_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes z_{\sigma(m)}) = (f \circ \iota)(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(m)}).$$

Así, $(f \circ P_\sigma)(z) = s(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(m)})$. Ahora, como s es simétrica se concluye:

$$(f \circ P_\sigma)(z) = s(z_1, \ldots, z_m).$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}(f \circ \mathscr{S}_m)(z) &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (f \circ P_\sigma)(z) = s(z_1, \ldots, z_m) = (f \circ \iota)(z_1, \ldots, z_m) \\ &= f(z_1 \otimes \cdots \otimes z_m) = f(z).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \circ \mathscr{S}_m = f$. Usando esta última igualdad y la propiedad T, obtenemos:

$$\tilde{s} \circ (\mathscr{S}_m \circ \iota) = (\tilde{s} \circ \mathscr{S}_m) \circ \iota = (f \circ \mathscr{S}_m) \circ \iota = f \circ \iota = s.$$

Para finalizar veamos la unicidad de $\tilde{s}$. Observe que $\tilde{s} \circ \mathscr{S}_m$ satisface la propiedad T, luego, $\tilde{s} \circ \mathscr{S}_m = f$. Ahora para $z \in S^m(V)$, se obtiene $\tilde{s}(z) = f(z)$, pues $\mathscr{S}_m$ actúa como la identidad sobre $S^m(V)$. Así, se deduce que $\tilde{s}$ está unicamente definida.

El siguiente diagrama resume la demostración del teorema.

$$\begin{tikzcd} V \times \cdots \times V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "s"'] & T^m(V) \arrow[r, "\mathscr{S}_m"] \arrow[d, dotted, "f"] & S^m(V) \arrow[dl, dotted, "\tilde{s}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$\square$

Analogamente, tenemos el siguiente teorema.

thmua **Teorema 4.26.** *Sean* V *y* U *dos* $\mathbb{K}$*–espacios vectoriales. Si* a *una función* m*–multilineal alternada de* $V \times \cdots \times V$ *en* U*, entonces existe una única función lineal* $\tilde{a} : A^m(V) \longrightarrow U$ *tal que* $\tilde{a} \circ (\mathscr{A}_m \circ \iota) = a$*.*

En un diagrama conmutativo, tenemos:

$$
\begin{tikzcd}
V \times \cdots \times V \arrow[r, "\iota"] \arrow[drr, "a"'] & T^m(V) \arrow[r, "\mathscr{A}_m"] & A^m(V) \arrow[dl, dotted, "\tilde{a}"] \\
 & & U
\end{tikzcd}
$$

Demostración. La demostración es análoga a la demostración del Teorema 4.25 y queda de ejercico.

□

4.5. Ejercicios

Exercise 4.27. Sea V el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{K}_2[x]$. Explicite una base para:

(i) $A^2(V)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_2)$.

(iii) $S^2(V)$.

(iv) $\mathrm{Ker}(\mathscr{S}_2)$.

Exercise 4.28. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n > 1$. Para $m \in [\![2, n-1]\!]$, explicite un isomorfismo entre $A^m(V)$ y $A^{n-m}(V)$,

.

Exercise 4.29. Sean V el $\mathbb{R}$–espacios vectorial $\mathbb{R}_1[x]$.

(i) Explicite una base de $S^3(V)$ que contenga

$$1 \otimes 1 \otimes (1+x) + 1 \otimes x \otimes (1+x).$$

(ii) Explicite una base de $\operatorname{Ker} \mathscr{S}_3$.

Exercise 4.30. Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y sea $z := v_1 \otimes v_2 \otimes v_1 - v_1 \otimes v_1 \otimes v_2$. Determine la dimensión de $U + \operatorname{Ker} \mathscr{S}_3$, donde $\mathscr{S}_3$ es el simetrizador sobre $V^{\otimes 3}$ y

$$U := \operatorname{vect}\{v_1 \otimes v_1 \otimes v_1, z\}.$$

Exercise 4.31. Sea V un $\mathbb{K}$–espacio de dimensión 2, demuestre que

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A}_2 = S^2(V).$$

Bibliografía

Greub [1] Greub, W. H. *Multilinear Algebra*, Springer, 1967

Ja [2] Jacobson N., *Basic Algebra I*, 2ª Ed., W. Freemn & Company Publisher, San Francisco, 1985.

Ju2026 [3] Juyumaya J. *Apuntes de Álgebra Lineal, 2026*.

La [4] Lang S. *Algebra*, 3ª Ed., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1993.