IX Jornada de Matemáticas IμUV

Trigonometría en la Esfera

Daniel Jiménez Briones

Noviembre, 2017

1. Introducción

El planeta en el que vivimos tiene la forma aproximada de una esfera. En una noche despejada, todos los cuerpos, estrellas, luna y planetas, parecen brillar y moverse sobre la negra superficie de una gran bóveda que nos envuelve.

Históricamente, se considera a Hiparco de Nicea (180-125 a.C.) como al padre de la Trigonometría. La mayoría de lo que se conoce de los trabajos de Hiparco se encuentra en los escritos de Menelao de Alejandría (100 d.C.), fue el primero en definir lo que era un triángulo esférico en su tratado Sphaerica

Pero la gran figura de la antigüedad fue sin duda, Claudio Ptolomeo (85-165 d.C.), que legó una monumental obra en 13 libros, el Almagesto, en la que se propuso fundamentar la astronomía sobre la aritmética y la geometría. Para la resolución de triángulos se apoya en el Teorema de Menelao y dió a la Trigonometría Esférica una sólida estructura que duró más de 1.000 años.

2. Nociones Básicas en el Plano

Un vector tiene una longitud, también llamada norma o módulo,

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Se llama distancia entre A y B a $d(A,B) = \|A - B\|$.

Al aplicar el teorema del coseno al triángulo formado por los vértices OAB, se tiene que los lados miden

$$\|A\|, \|B\|, \|A - B\|$$

y el ángulo formas $\angle AOB = \alpha$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\|A-B\|^2 - \|B\|^2 - \|A\|^2}{2\|A\|\|B\|} = \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|}$$

3. Nociones Básicas en el Espacio

Un vector tiene una longitud, también llamada norma o módulo,

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Se llama distancia entre A y B a $d(A,B) = \|A-B\|$

Producto Escalar de ambos a $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Además, $\|A\|^2 = A \cdot A$

Ahora, dados 2 vectores $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, se llama ángulo entre A, B al único, $\alpha < 180$, tal que verifica:

$$cos(\alpha) = \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|}$$

Ángulo entre planos vectoriales

Sean $ax + by + cz = 0$ y $a'x + b'y + c'z = 0$ dos planos el ángulos formado por los planos esta definido por $u = (a, b, c),\ v = (a', b', c')$

$$cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

La esfera de radio 1, centrada en el origen de coordenadas, $O = (0,0,0)$, corresponde al conjunto

$$\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

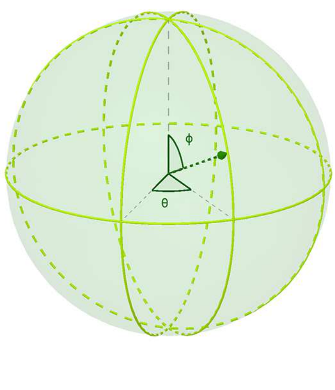
es llamada esfera unidad.

Así, sus puntos son los extremos de todos los vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$.

Las coordenadas esféricas de un punto en de espacio corresponde (r, ϕ, θ).

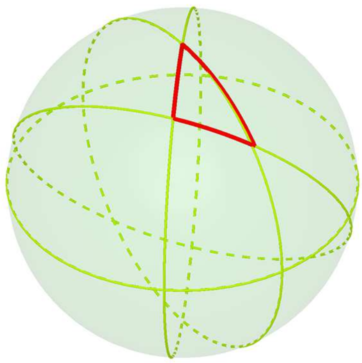
Y las ecuación del cambio de coordenadas esféricas a rectangulares están dadas por

$$x = rcos(\phi)cos(\theta),\ y = rcos(\phi)sin(\theta),\ z = rsin(\phi)$$



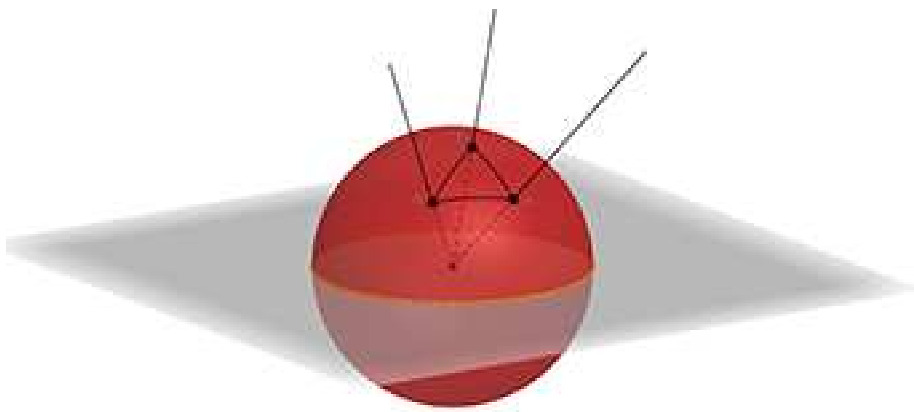
Triángulos en la Esfera Unitaria

Se llama triángulo esférico a la figura que definen 3 puntos, A, B, C, sobre una esfera. Y se definen **lados del triángulo** esférico corresponde a los arcos de máximo entre cada dos puntos. Su medida son distancias esféricas, en grados o radianes. Y **ángulos del triángulo** esférico son los ángulos esféricos entre cada dos lados.



De otro modo, un triángulo esférico se define a partir de tres puntos, con el origen definen un triedro se obtendrá como la intersección de un triedro con la superficie de una esfera cuyo centro coincide con el vértice del triedro.

Observación: Notemos que dado dos planos el ángulos entre ellos corresponde al ángulo entre las rectas tangentes en el punto de intersección y también al ángulos entre los vectores perpendiculares a los planos.

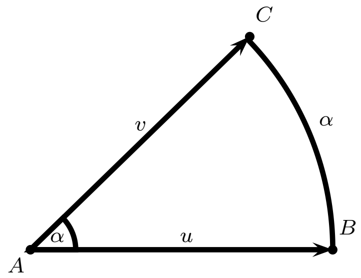


Consideremos un triángulos esférico con ángulos menores o iguales de 180 α, β, γ y lados a, b, c. entonces $a < b + c$

Para ello, sean tres vectores unitarios u, v, w tales que

$$cos(a) = v \cdot w,\ cos(b) = u \cdot w,\ cos(c) = v \cdot u$$

Al considerar un circunferencia unitaria en radianes o en grado amplificando por escalar positivo tenemos que la longitud del arco es igual al ángulo.



Luego tenemos que $a < b + c$ es equivalente a

$$cos(a) > cos(b + c) = cos(b)cos(c) - sen(b)sen(c)$$

Reemplazando y teniendo presente que seno no es negativo.

$$v \cdot w > u \cdot w \cdot v \cdot u - \sqrt{1 - (u \cdot w)^2}\sqrt{1 - (u \cdot v)^2}$$

$$\sqrt{1 - (u \cdot w)^2}\sqrt{1 - (u \cdot v)^2} > (u \cdot w) \cdot (v \cdot u) - (v \cdot w)$$

elevando al cuadrado

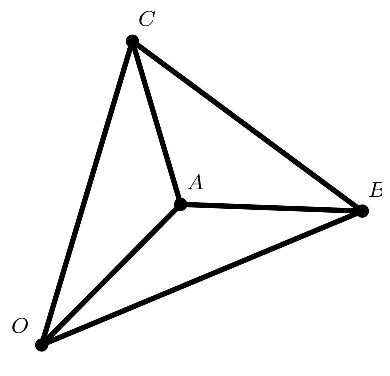
$$1 - (u \cdot w)^2 - (u \cdot v)^2 - (v \cdot w)^2 + 2(u \cdot w)(u \cdot v)(v \cdot w) > 0$$

Pero lo anterior es equivalente

$$\begin{vmatrix} 1 & u \cdot v & u \cdot w \\ u \cdot v & 1 & w \cdot v \\ u \cdot w & u \cdot w & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ v \end{vmatrix} \left\| \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^t \right\| > 0$$

Propiedad 1 *En un triángulo esférico.*
Cada lado es menor que la suma de los otros dos, $a < b + c$.

Observación: en particular, la distancia más corta en la superficie de la esfera es por las circunferencia de radio mayor.



El resultado anterior en el tetraedro nos dice que

$$\angle AOB < \angle BOC + \angle COA$$

La desigualdad anterior la podemos consideres en cada uno de los otros vértices del tetraedro

$$\angle BAC < \angle CAO + \angle OAB, \;\; \angle ABC < \angle OBC + \angle OBA, \;\; \angle ACB < \angle BCO + \angle OCA$$

Por otra parte tenemos tres triángulo planares que contiene el punto O.

$$\angle AOB + \angle OBA + \angle BAO + \angle COB + \angle OBC + \angle BCO + \angle AOC + \angle OCA + \angle CAO = 540$$

Reordenando tenemos

$$\angle AOB + \angle COB + \angle AOC + (\angle OBA + \angle OBC) + (\angle BAO + \angle CAO) + (\angle OCA + \angle BCO) = 540$$

Reemplazando obtenemos

$$\angle AOB + \angle COB + \angle AOC + \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB < 540$$

con el último triángulo

$$\angle AOB + \angle COB + \angle AOC < 360$$

Pero la suma de los lados de triángulos esférico menor que 360.

$$\angle AOB + \angle COB + \angle AOC + \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB < 540$$

Propiedad 2 *La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que 360.*

$$a + b + c < 360$$

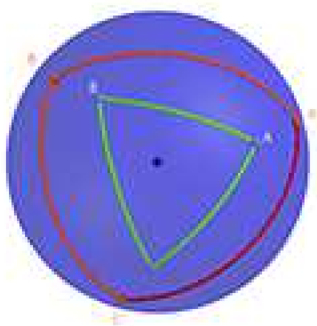
Definición. Se denomina **Defecto Esférico** a lo que le falta en grados, $360 - (a + b + c)$. O en radianes, $2\pi - (a + b + c)$.

Si consideramos ahora el triángulo polar, $A'B'C'$. También, sus lados a', b', c' verifican la cota anterior. O sea, $a' + b' + c' < 360$.

Y se tiene

$$A + B + C = 180 - a' + 180 - b + 180 - c = 540 - (a' + b' + c')$$

Por tanto, $A + B + C < 540$. También se obtiene una cota inferior cuando $a' + b' + c'$ toma su valor máximo 360. Como $540 - 360 = 180$.



Propiedad 3 (Cotas para los ángulos) *La suma de los ángulos de un triángulo esférico satisface las desigualdades*

$$180 < A + B + C < 540$$

Definición. Se llama **Exceso esférico** a lo que excede de un ángulo llano. En grados, $A + B + C - 180$. O en radianes, $\varepsilon = A + B + C - \pi$.

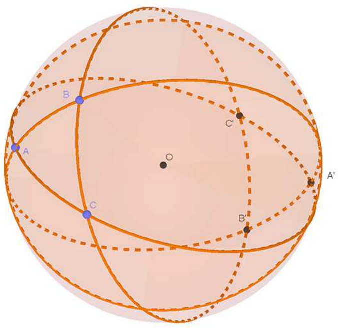
4. Área de un Triángulo Esférico.

El área de una esfera de radio r es $S = 4\pi r^2$.
Definición. **Huso esférico** es la superficie esférica delimitada por dos arcos de cmax. Los **vértices del huso** a los dos puntos antípodas donde se cortan los dos arcos de cmax. Y el **ángulo del huso** al diedro formado por los semiplanos que definen los dos arcos de cmax.

Se puede calcular el área de un huso, que corresponde por regla de tres a $\frac{\alpha}{2\pi}4\pi r^2 = 2\alpha r^2$ si medimos su ángulo en radianes. O bien, $\frac{\alpha\pi}{90}r^2$ si lo medimos en grados sexagesimales.

El caso de un triángulo esférico se tienen tres ángulos luego para cada uso

$$2Ar^2,\ 2Br^2,\ 2Cr^2$$



Los 3 husos tienen de área

$$S_{ABC} + S_{A'BC} = 2Ar^2,\ S_{ABC} + S_{AB'C} = 2Br^2,\ S_{ABC} + S_{ABC'} = 2Cr^2$$

Ahora, la suma de 4 triángulos esférico da la semiesfera superior

$$S_{ABC} + S_{ABC'} + S_{AB'C} + S_{AB'C'} = 2\pi r^2$$

Y los triángulos $S_{AB'C'} = S_{A'BC}$ por ser antípodas. Por tanto, despejando y sustituyendo, tenemos

$$S_{ABC} + 2Cr^2 - S_{ABC} + 2Br^2 - S_{ABC} + 2Ar^2 - S_{ABC} = 2\pi r^2$$

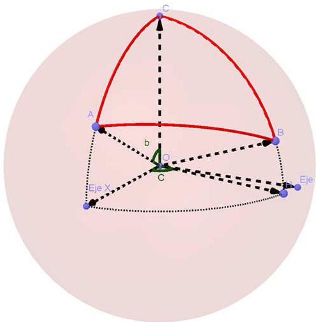
de donde, $2S_{ABC} = (A+B+C)2r^2 - 2\pi r^2 = (A+B+C-\pi)2r^2$. O sea, dividiendo por 2, se tiene

Propiedad 4 *El área de un triángulo esférico es su exceso esférico en radianes multiplicado por el radio al cuadrado.*

$$\boxed{S_{ABC} = (A+B+C-\pi)r^2 = \varepsilon r^2}$$

5. Fórmula Trigonométricas

Es fácil darse cuenta que todo triángulo esférico tiene una copia en el primer octante. O sea, con un vértice C en el polo Norte, otro A en el plano XZ y el tercer vértice B hacia el este. Esta posición de un triángulo esférico la llamamos posición boreal.



Así, todo triángulo esférico se puede estudiar en una posición boreal. La ventaja de estudiar un triángulo, en posición boreal, es que el radio vector del vértice C, es el $w = (0, 0, 1)$.

El del vértice A es $u = (\sin(b), 0, \cos(b))$, ya que el lado (ángulo) b es la colatitud de este punto mientras que su longitud es cero.

Análogamente, el vértice B, el ángulo esférico C. Así, el radio vector del vértice B es $v = (\sin(a)\cos(C), \sin(a)\sin(C), \cos(a))$.

Ahora, si calculamos su producto triple escalar, el volumen del paralelepípedo tenemos

$$Vol_{(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \sin(b) & 0 & \cos(b) \\ \sin(a)\cos(C) & \sin(a)\sin(C) & \cos(a) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin(b)\sin(a)\sin(C)$$

Al intercambiar el punto que esta en el polo, obtenemos las otras formulas

$$\sin(a)\sin(b)\sin(C) = \sin(a)\sin(c)\sin(B) = \sin(b)\sin(c)\sin(A)$$

Teorema 5 *En cualquier triángulo esférico*

$$\boxed{\frac{\sin(C)}{\sin(c)} = \frac{\sin(B)}{\sin(b)} = \frac{\sin(A)}{\sin(a)}}$$

En el caso anterior tenemos que a los puntos A, B, C le corresponde los vectores

$$u = (\sin(b), 0, \cos(b)), \;\; v = (\sin(a)\cos(C), \sin(a)\sin(C), \cos(a)), \;\; w = (0, 0, 1)$$

luego

$$\cos(c) = u \cdot v \iff \cos(c) = \sin(a)\sin(b)\cos(C) + \cos(a)\cos(b)$$

Teorema 6 *En cualquier triángulo esférico*

$$\begin{aligned}\cos(c) &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\cos(C)\\ \cos(b) &= \cos(a)\cos(c)+\sin(a)\sin(c)\cos(B)\\ \cos(a) &= \cos(b)\cos(c)+\sin(b)\sin(c)\cos(A)\end{aligned}$$

Teorema 7 (de las cotangentes) *En cualquier triángulo esférico*

$$\begin{aligned}\cot(a)\sin(b) &= \cos(b)\cos(C)+\sin(C)\cot(A)\\ \cot(a)\sin(c) &= \cos(c)\cos(B)+\sin(B)\cot(A)\\ \cot(b)\sin(c) &= \cos(c)\cos(A)+\sin(A)\cot(B)\\ \cot(b)\sin(a) &= \cos(a)\cos(C)+\sin(C)\cot(B)\\ \cot(c)\sin(a) &= \cos(a)\cos(B)+\sin(B)\cot(C)\\ \cot(c)\sin(b) &= \cos(b)\cos(A)+\sin(A)\cot(C)\end{aligned}$$

Teorema 8 (del coseno para los vértices) *En cualquier triángulo esférico*

$$\begin{aligned}\cos(A) &= \cos(B)\cos(C)+\sin(B)\sin(C)\cos(a)\\ \cos(B) &= \cos(A)\cos(C)+\sin(A)\sin(C)\cos(b)\\ \cos(C) &= \cos(A)\cos(B)+\sin(A)\sin(B)\cos(c)\end{aligned}$$

Referencias

[1] AYRES F., 1970, *Trigonometría Plana y Esférica*, Bogota, Colombia, Schaum McGraw Hill.

[2] ENRIQUE R. AZNAR, *Trigonometría Esférica.* Recuperado de http://www.ugr.es/˜eaznar/matgeo/apuntes/trig_esferica.pdf

[3] GLEN VAN BRUMMELEN., 2013 *Heavenly Matheamatics. The Forgotten art of Spherical Trigonometry* PRINCETON UNIVERSITY PRESS; PRINCETON Recuperado de http://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/el-amanecer-de-los-exoplanetas-582/trigonometra-esfrica-11377