# Capítulo 2

# Geometría Analítica

En este capítulo trabajaremos en el estudio de las figuras planas, entre ellas las rectas y cónicas, y la relaciones que existe entre ellas, en la naturaleza encontramos esta figura aunque esta en el espacio si las miramos con detención las podremos mirar en un plano, el movimiento de los planetas elipse, el lanzamiento de un proyectil una parábola, El cálculo de cuerpos celestes ajenos al sistema solar que entren en él, atraídos por el sol describen una trayectoria en forma de hipérbola, por lo que puede ser calculado su camino con toda precisión.

## 2.1 Introducción

La geometría es una parte importante de la matemática que tiene por objetivo el estudio de las figuras que se encuentran en el plano (o en el espacio). En el desarrollo de este capítulo, usaremos la terminología habitual de geometría, entre otros tenemos
**Recta:** Es una línea sin principio ni fin que describe de forma idealizada de un hilo tenso en el plano formado por una cantidad infinita de puntos.
**Segmento:** Es una parte de la recta que se encuentra entre dos puntos en la recta que representan el principio y fin de este, llamados extremos.

Por otro lado, el concepto de **analítica** se refiere al análisis que se necesita y se ocupa para poder obtener la resolución de problemas, lo que nos lleva a la definición del concepto de **geometría analítica** que esta dada por el análisis que se realiza a las distintas figuras geométricas, que son subconjunto del plano, las cuales son definidas mediante funciones proposicionales o expresiones algebraicas.

Para representar el plano real, donde se encuentras las figuras, recurriremos al producto cartesiano entre conjuntos, que en nuestro caso se denota por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o de otra manera $\mathbb{R}^2$, que esta constituido por todos los "pares ordenados".

Estas ideas básicas son las que nos permitirán iniciar el estudio de algunas figuras planas de la geometría.

## 2.2 Plano Cartesiano

Iniciamos este estudio, recordándonos las nociones básicas de plano cartesiano.

Para ello tenemos que el producto cartesiano esta dado por

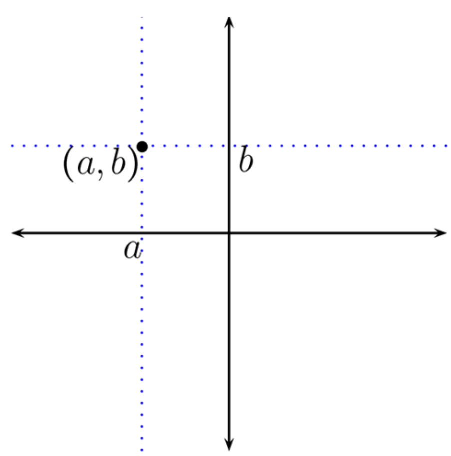
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x \ , y \in \mathbb{R}\}$$

Un elemento de $\mathbb{R}^2$, es un par ordenado $(x, y)$, donde $x$ es la primera coordenada o abscisa e $y$ es la segunda coordenada u ordenada del punto $(x, y)$

Además dos puntos en el producto cartesiano son iguales si y sólo si las abscisa y ordenadas son iguales, es decir, se cumple que

$$(\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}) \ (x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$$

Un representación del producto cartesiano es el plano cartesiano, que se construye con dos rectas perpendiculares (ejes, un horizontal y otro vertical) que se intersecan en un punto(origen), un elemento del producto cartesiano, se representa con la intersecarse de la recta vertical que pasa por el eje horizontal en el valor de la abscisa y una horizontal que pasa por el eje vertical en el valor de la ordenada




### 2.2.1 Distancia entre dos Puntos

La distancia entre dos puntos, corresponde asignarle un valor numérico no negativo al segmento que une estos dos puntos. Esta designación debería cumplir algunas propiedades, básicamente estas son que la distancia o longitud entre puntos iguales es cero, que la distancia no depende del sentido en que se mida y la longitud entre dos puntos es menor que la longitud que se obtiene por la vía de más segmentos.

En la recta real $\mathbb{R}$, la distancia entre dos puntos esta dada por

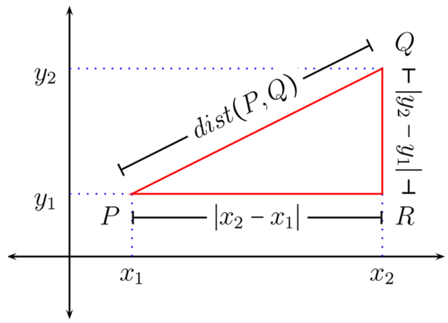
$$dist(a, b) = |b - a| \qquad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

la cual cumples las tres propiedades básicas anteriores.

Para extender esta definición al plano cartesiano, usaremos el teorema de Pitágoras de modo obtener una fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano.

Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$, donde $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$. La distancia entre ellos la denotaremos por $dist(P, Q)$

Grafiquemos los puntos $P, Q$ en el plano cartesiano, y tracemos un triángulo rectángulo, con las rectas paralelas a los ejes coordenados.




Luego por teorema de Pitágoras tenemos que

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2$$

**Observación:** Recordemos que la hipotenusa representa el lado que se encuentra opuesto al ángulo de 90° en la figura, el cateto opuesto que esta representado por la base del triángulo y cateto adyacente el lado restante.

$$\begin{array}{rrcll} & (\text{hipotenusa})^2 & = & (\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2 & \\ \text{donde} & (dist(P, Q))^2 & = & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 & /\sqrt{} \\ \text{entonces} & |dist(P, Q)| & = & \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} & \end{array}$$

**Observación:** La distancia representa una longitud, por lo cual está siempre es no negativa.

**Definición 2.2.1** Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$, con $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ entonces la distancia entre los dos puntos es

$$dist(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\diamondsuit$

**Ejemplo 2.2.2** Considere los puntos $(-2, -1)$ y $(2, 2)$ en $\mathbb{R}^2$, calcule la distancia entre ellos. $\square$

**Solución 1.** Denotemos los puntos de la siguiente forma:

$$A = (-2, -1) \ y \ B = (2, 2)$$

luego calculemos la distancia entre ellos

$$\begin{array}{rcl} dist(A, B) & = & \sqrt{(2 - (-2))^2 + (2 - (-1))^2} \\ & = & \sqrt{(2 + 2)^2 + (2 + 1)^2} \\ & = & \sqrt{(4)^2 + (3)^2} \\ & = & \sqrt{16 + 9} \\ & = & \sqrt{25} = 5 \end{array}$$

Por lo tanto, la distancia que existe entre los puntos $A = (-2,-1)$ y $B = (2,2)$ es 5, o bien

$$dist(A,B) = 5.$$

**Proposición 2.2.3** *Sean $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ entonces*

*a* $dist(P,Q) = 0$ *es equivalente a* $P = Q$.

*b* $dist(P,Q) = dist(Q,P)$.

*c* $dist(P,Q) \leq dist(P,R) + dist(R,Q)$.

**Ejemplo 2.2.4** Demuestre que los puntos $(-2,-1), (2,2), (5,-2)$ son los vértices de un triángulo isósceles □

**Solución 2**. Sean los puntos $A = (-2,-1), B = (2,2)$ y $C = (5,-2)$ en $\mathbb{R}^2$.

Sabemos que $dist(A,B) = 5$, calculada en el ejemplo anteriormente, entonces ahora calcularemos las distancias faltantes para verificar si $A, B$ y $C$ son los vértices de un triángulo isosceles.

$$\begin{aligned} dist(A,C) &= \sqrt{(5-(-2))^2 + (-2-(-1))^2} \\ &= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dist(B,C) &= \sqrt{(5-2)^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

En resumen se tiene lo siguiente

$$dist(A,B) = dist(B,C) = 5, \quad dist(A,C) = 5\sqrt{2}.$$

por lo tanto concluimos que los segmentos que se encuentran entre los puntos $A, B$ y $C$ forman un triángulo isósceles y no es equilátero.

**Observación:** Recordemos que un triángulo es isósceles cuando tiene dos lados de igual longitud.

**Ejemplo 2.2.5** Encuentre todos los puntos que pertenecen a $\mathbb{R}^2$ y que están a una distancia igual a 1 del origen $(0,0)$. □

**Solución 3**. Sea $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $dist(Q,P) = 1$, donde $Q = (0,0)$. Como

$$\begin{array}{ccll} dist(Q,P) & = & 1 & \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} & = & 1 & \\ \sqrt{x^2 + y^2} & = & 1 & /()^2 \\ x^2 + y^2 & = & 1 & \\ x^2 & = & 1 - y^2 & \end{array}$$

Ahora veremos cuales son esos punto, como $x^2 = 1 - y^2$, donde $x^2$ representa un número positivo, luego para que se cumpla la igualdad $1 - y^2$ también debe ser positivo, por lo tanto:

$$\begin{array}{rcll} 1 - y^2 & \geq & 0 & \\ y^2 & \leq & 1 & \surd \\ |y| & \leq & 1 & \end{array}$$

De este modo se tiene que $y \in [-1,1]$ entonces

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 1-y^2 \quad \sqrt{} \\ x & = & \pm\sqrt{1-y^2} \end{array}$$

Por lo tanto

$$P=(x,y)=(\sqrt{1-y^2},y) \text{ o } P=(x,y)=(-\sqrt{1-y^2},y) \text{ con } y \in [-1,1].$$

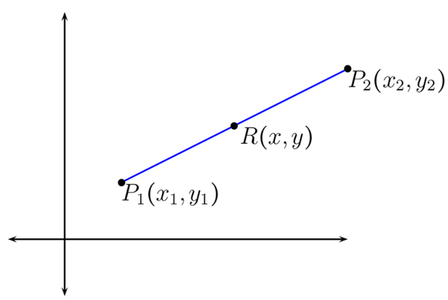
**Observación:** La ecuación $x^2+y^2=1$ gráficamente corresponde a una circunferencia unitaria o de radio 1, ya que son todos los puntos que están a una unidad de origen, figura que estudiaremos más adelante en este capítulo.

### 2.2.2 Punto Medio

**Definición 2.2.6** Dados $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, los extremos de un segmento, se dice que $R$ es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ si y sólo si

$$dist(P_1,R)=dist(R,P_2)$$

$\diamondsuit$




Aún más general, se tiene que

**Definición 2.2.7** Sean $P_1, P_2, R \in \mathbb{R}^2$, se dice que $R$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón $r$ si y sólo si

$$r = dist(P_1,R) : dist(R,P_2).$$

Esto quiere decir:

$$r=\frac{dist(P_1,R)}{dist(R,P_2)}.$$

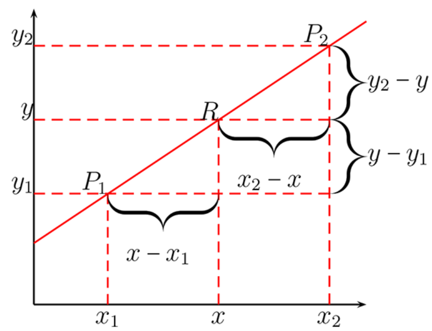
$\diamondsuit$

Determine las coordenadas de punto que cumple tal condición

Sean $P_1=(x_1,y_1), P_2=(x_2,y_2)$ y $R=(x,y)$, de modo que satisface la siguiente razón

$$r=\frac{dist(P_1,R)}{dist(R,P_2)}.$$

Apliquemos thales, en la siguiente figura




luego obtenemos que

$$r = \frac{dist(P_1, R)}{dist(R, P_2)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

Despejando $x$ obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{x-x_1}{x_2-x} \\ r(x_2 - x) &= x - x_1 \\ x + rx &= rx_2 + x_1 \\ x(1+r) &= rx_2 + x_1 \\ x &= \tfrac{rx_2+x_1}{1+r} \end{aligned}$$

Análogamente

$$r = \frac{dist(P_1, R)}{dist(R, P_2)} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Despejando $y$ obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{y-y_1}{y_2-y} \\ y &= \tfrac{ry_2+y_1}{1+r} \end{aligned}$$

Así obtenemos que las coordenadas de $R$ son:

$$R = (x, y) = \left( \frac{rx_2 + x_1}{1 + r}, \frac{ry_2 + y_1}{1 + r} \right)$$

El caso particular en que $r = 1$, se tiene el punto medio, y esta dado por:

$$M = (x, y) = \left( \frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

**Proposición 2.2.8** *Sean $P_1, P_2$ y $M \in \mathbb{R}^2$, tenemos que el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ esta dado por:*

$$M = \left( \frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

*donde $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$.*

**Ejemplo 2.2.9** Encuentre el punto medio del segmento $\overline{AB}$ donde $A = (5, 3)$ y $B = (-10, -2)$ $\square$

**Solución**. Calculemos separadamente $x$ e $y$

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{-10+5}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

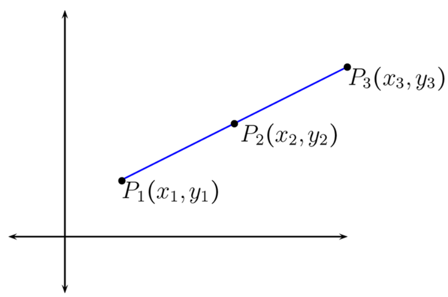
Por lo tanto el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es el punto $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.

### 2.2.3 Puntos Colineales

Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, por propiedad Proposición 2.2.3 de distancia obtenemos

$$dist(P_1, P_3) \leq dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3).$$

Observando la gráfica




Se tiene que $dist(P_1, P_3) = dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3)$, luego

$$\begin{aligned}
dist(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \\
dist(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
dist(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
dist(P_1, P_3) &= dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3) \\
\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}
\end{aligned}$$

Consideremos los siguientes cambio de variables

$$a = x_2 - x_1, \qquad b = x_3 - x_2,$$

de lo cual se tiene que $x_3 - x_1 = a + b$.

De manera similar definimos

$$c = y_2 - y_1, \qquad d = y_3 - y_2.$$

y obtenemos que $y_3 - y_1 = c + d$

Reemplazando, de modo de facilitar la simplificación, se obtiene

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2} & = & \sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2} \quad /()^2 & \\
(a+b)^2+(c+d)^2 & = & a^2+c^2+2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}+b^2+d^2 & \\
a^2+2ab+b^2+c^2+2cd+d^2 & = & a^2+c^2+2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}+b^2+d^2 & \\
2ab+2cd & = & 2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)} & /\frac{1}{2} \\
ab+cd & = & \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)} & \\
a^2b^2+2abcd+c^2d^2 & = & (a^2+c^2)(b^2+d^2) & \\
a^2b^2+2abcd+c^2d^2 & = & a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2 & \\
2abcd & = & a^2d^2+c^2b^2 & \\
a^2d^2-2abcd+c^2b^2 & = & 0 & \\
(ad-cb)^2 & = & 0 &
\end{array}$$

Entonces $ad - cb = 0$, volvemos a las variables originales que son

$$a = x_2 - x_1, \quad c = y_2 - y_1, \quad b = x_3 - x_2, \quad d = y_3 - y_2$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
ad & = & cb \\
(x_2-x_1)(y_3-y_2) & = & (y_2-y_1)(x_3-x_2)
\end{array}$$

**Definición 2.2.10** Sean $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$, diremos que $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ son colineales si y sólo si

$$dist(P_1, P_3) = dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3) \quad \text{o bien} \quad (x_2-x_1)(y_3-y_2) = (y_2-y_1)(x_3-x_2)$$

◊

**Ejemplo 2.2.11** Encuentre el conjunto de todos los puntos colineales a $P = (13, 3)$ y $Q = (9, 15)$. □

**Solución**. Sean $P, Q$ y $R$ colineales, luego por la definición anterior se tiene que

$$dist(P, Q) = dist(P, R) + dist(R, Q)$$

equivalentemente

$$(x_2-x_1)(y_3-y_2) = (y_2-y_1)(x_3-x_2)$$

En este ejemplo tenemos que $P = (13, 3) = (x_1, y_1); Q = (9, 15) = (x_3, y_3)$ y $R = (x_2, y_2) = (x, y)$ entonces obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
(x-13)(15-y) & = & (y-3)(9-x) \\
15x-xy-195+13y & = & 9y-xy-27+3x \\
12x+4y & = & 168 \\
y & = & \frac{168-12x}{4} \\
y & = & 42-3x
\end{array}$$

Por lo tanto $R \in \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = 42 - 3x\}$.

## 2.3 Ecuación de la Recta

La geometría euclidiana nos enseña que dados dos puntos distintos, existe una única recta que contiene a los puntos.

De este modo se tiene que una recta es el conjunto todos los puntos colineales a dos puntos dados.

Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, luego la recta que pasa por los $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$L_{P_1P_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)\}$$

Llamaremos línea recta o simplemente recta a la figura geométrica que resulta al graficar los puntos de este conjunto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

**Observación:** Para una mayor comodidad de escritura, al conjunto que forma una recta

$$L_{P_1P_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)\}$$

lo denotaremos por su ecuación, es decir,

$$L_{P_1P_2} : \; (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)$$

**Ejemplo 2.3.1** Hallar las ecuaciones de la recta $l$ que pasan por los puntos $(5, -9)$ $y$ $(1, 3)$.
□

**Solución**. Sabemos que $(5, -9)$ $y$ $(1, 6) \in l$, donde $(5, -9) = (x_1, y_1)$ y $(1, 6) = (x_2, y_2)$ tenemos

$$\begin{aligned}
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; (1 - 5)(y - 6) = (6 - (-9))(x - 1\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; -4(y - 6) = 15(x - 1)\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; -4y + 24 = 15x - 15\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; 15x + 4y - 39 = 0\}.
\end{aligned}$$

### 2.3.1 Ecuaciones de la Rectas

**Definición 2.3.2** Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in l$ puntos distintos, se define la pendiente de la recta $l$ en los siguientes casos

a Si $x_2 = x_1$, diremos que la pendiente es infinita, y escribiremos $m = \infty$ entonces la recta $l$ es

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; \; x = x_1\} \quad \text{o} \quad l : x = x_1$$

b Si $x_2 \neq x_1$, se define la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

entonces la recta $l$ es

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; \; y = mx + b\} \quad \text{o} \quad l : y = mx + b$$

con

$$b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

$\Diamond$

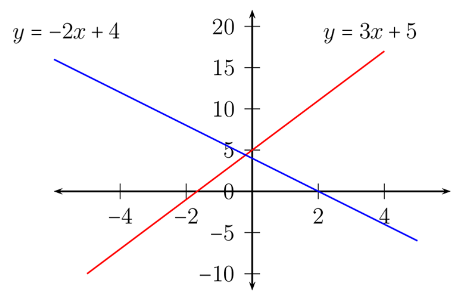
**Observación:** Un caso particular es cuando la pendiente de $l$ toma el valor 0, es decir $m = 0$ entonces la ecuación de la recta $l$ es

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = b\} \quad \text{o} \quad l : y = b$$

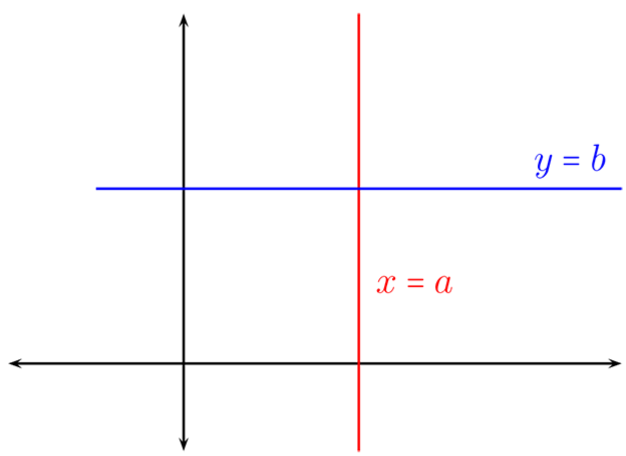
Dependiendo del valor de la pendiente se puede se pueden distinguir dos tipos de inclinación al graficar una recta, es decir, cuando la pendiente es positiva tenemos que es creciente y cuando es negativa es decreciente

$$m > 0 \ \text{ o } \ m < 0$$

este comportamiento lo observaremos mediante dos ejemplos, la recta graficada de color rojo $y = 3x + 5$ es creciente y la recta graficada de color azul $y = -2x + 4$ es decreciente




En los otros casos, la gráfica de las rectas cuando $m = \infty$ son gráficas verticales del forma que tiene la de color rojo y cuando $m = 0$ son gráficas horizontales corresponde a la forma de color azul, dada en la siguiente figura




**Ejemplo 2.3.3** Sean $A = (6, 11)$ y $B = (13, 4) \in \mathbb{R}^2$ dos puntos que pertenece a la recta $l$. Calcule la pendiente de la recta $l$. $\square$

**Solución 1**. Sean $A = (x_1, y_1) = (6, 11)$ y $B = (x_2, y_2) = (13, 4)$, reemplazando en la formula de la pendiente tenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 11}{13 - 6} = \frac{-7}{7} = -1.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta $l$ es $-1$.

**Ejemplo 2.3.4** Calcule las pendientes de las rectas que pasan por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ con $A = (5,7)$, $B = (12,3)$ y que pasan por un punto que es colineales a los puntos de $C = (16,14)$ y $D = (8,10)$. □

**Solución 2**. Sea $A = (5,7)$ y $B = (12,3)$, luego el punto medio de $\overline{AB}$ esta dado por:

$$Q = \left(\tfrac{x_1+x_2}{2}, \tfrac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\tfrac{5+12}{2}, \tfrac{7+3}{2}\right) = \left(\tfrac{17}{2}, \tfrac{10}{2}\right) = \left(\tfrac{17}{2}, 5\right)$$

Consideremos los puntos colineales a $C = (16,14)$ y $D = (8,10)$ que denotaremos como $P = (a,b)$. Reemplazando tenemos que

$$\begin{array}{ccc}
(x_2-x_1)(y_3-y_1) & = & (y_2-y_1)(x_3-x_2) \\
(a-16)(10-b) & = & (b-14)(8-a) \\
10a-ab-160+16b & = & 8b-ab-112+14a \\
4a-8b & = & -48 \\
a & = & \frac{8b-48}{4} \\
a & = & 2b-12
\end{array}$$

Reemplazando $a = 2b-12$ en el punto $P = (a,b)$, tenemos que $P = (2b-12, b)$

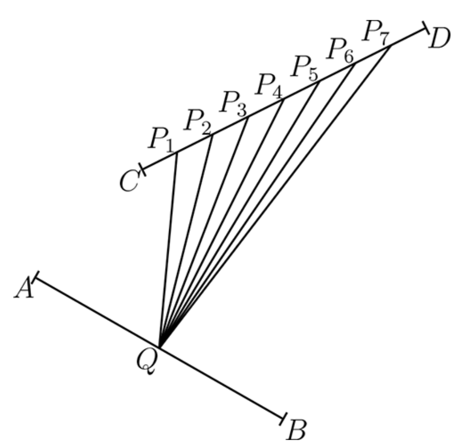
Luego si $Q = \left(\frac{17}{2}, 5\right) = (x_1, y_1)$ y $P = (2b-12, b) = (x_2, y_2)$ su pendiente es

$$\begin{array}{rcl}
m & = & \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\
 & = & \frac{b-5}{2b-12-\frac{17}{2}}; \quad b \neq \frac{41}{4} \\
 & = & \frac{2b-10}{4b-41}
\end{array}$$

Por lo tanto todas las rectas que pasan por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y por los posibles puntos colineales de $C$ $y$ $D$ tienen como pendiente

$$m = \frac{2b-10}{4b-41} \text{ o } m = \infty$$

El problema esta representado por la siguiente figura,



Donde $Q = (\frac{17}{2}, 5)$ es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ son algunos puntos colineales a $C$ y $D$

Finalmente sus ecuaciones están dadas por:

$$l_b : (y - 5) = \frac{2b-10}{4b-41}(x - \frac{17}{2}) \quad \text{o bien } x = \frac{17}{2}.$$

donde $P_b = (2b - 12, b)$ punto colineal de $\overline{CD}$, con $b \in \mathbb{R}$.

A continuación daremos algunas indicaciones para determinar la ecuación de la recta, dependiendo de los datos proporcionados por el problema.

**Primer Caso:** Se conoce un punto de la recta y su pendiente.

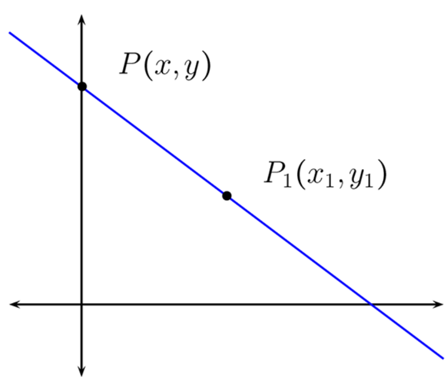
La ecuación de la recta $l$ queda totalmente determinada con un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ y su pendiente $m$.

a) Si la pendiente $m = \infty$ entonces la recta es:

$$l : x = x_1$$

b) Si la pendiente $m \in \mathbb{R}$, luego sea $P = (x, y) \in l$, otro punto de la recta, así tenemos que

$$\begin{array}{rcl} m & = & \frac{y-y_1}{x-x_1} \\ m(x - x_1) & = & y - y_1 \end{array}$$




**Proposición 2.3.5** *Sean $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ un punto de la recta y $m \in \mathbb{R}$ donde $m$ representa la pendiente de la recta $l$ entonces la ecuación de la recta está dada por:*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**Ejemplo 2.3.6** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (11, 3)$ y su pendiente es $m = 13$. □

**Solución 3**. Como la recta pasa por el punto $A = (x_1, y_1) = (11, 3)$ y su pendiente es $m = 13$, reemplazando en la ecuación de la propiedad anterior, se tiene

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & m(x - x_1) \\ y - 3 & = & 13(x - 11). \end{array}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta esta dada por

$$y = 13x - 140$$

**Segundo Caso:** Se conocen dos puntos de la recta.

Sabemos que la ecuación de la recta $l$ queda totalmente determinada por dos puntos.

Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, puntos en la recta

a) Si $x_1 \neq x_2$, reemplazando en la definición de pendiente obtenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

para luego reemplazar en el caso anterior, y obtener

$$l : y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si $x_1 = x_2$ entonces la ecuación es

$$l : x = x_1.$$

**Proposición 2.3.7** *Sean $P_2 = (x_2, y_2), P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ con $x_1 \neq x_2$, entonces la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados es:*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{con} \ \ x_1 \neq x_2$$

**Ejemplo 2.3.8** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 9)$ y por el punto $(5, 7)$. □

**Solución 4**. Ya que la recta pasa por los puntos $A = (x_1, y_1) = (1, 9)$ y $B = (x_2, y_2) = (5, 7)$.

Reemplazando $A$ y $B$ en la definición de pendiente tenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 9}{5 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Y la pendiente en ecuación obtenida anteriormente tenemos lo siguiente

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & m(x - x_1) \\ y - 9 & = & -\frac{1}{2}(x - 1) \\ y & = & -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2} \end{array}$$

**Observación:** Tenga presente que, la ecuación de la recta no varía, al considerar en diferente orden los puntos.

**Ejemplo 2.3.9** La recta $l$ interseca al eje $Y$ en el punto $(0, 6)$ y pasa por el punto $(5, 8)$. Encuentre la ecuación de la recta $l$. □

**Solución 5**. Consideremos los puntos $A = (x_1, y_1) = (0, 6)$ y el punto $B = (x_2, y_2) = (5, 8)$, luego calculemos su pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 6}{5 - 0} = \frac{2}{5}.$$

Luego reemplazando en la ecuación tenemos

$$\begin{array}{r} y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - 6 = \frac{2}{5}(x - 0) \end{array}$$

Despejando $y$ obtenemos la ecuación pedida.

$$y = \frac{2}{5}x + 6.$$

**Observación:** La ecuación de la recta se puede escribir de varias maneras y de acuerdo a esta escritura es que recibe distintos nombres

**Definición 2.3.10** Sean $A, B, C, a, b, m \in \mathbb{R}$ y $l$ una recta, entonces

a Se dice que la recta
$$l : Ax + By + C = 0.$$
esta definida por la **ecuación general** o que $Ax + By + C = 0$ es la ecuación general de la recta.

b Se dice que la recta
$$l : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$
esta definida por la **ecuación simétrica** o que $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ es la ecuación simétrica de la recta.

c Se dice que la recta esta definida por la **ecuación pendiente-ordenada o reducida** cuando la ecuación tiene la siguiente forma
$$l : y = mx + b.$$

$\Diamond$

**Ejemplo 2.3.11** Considere la ecuación de la recta

$$l : y - 7 = \frac{10}{3}(x - 4).$$

Encuentre la ecuación general, ecuación simétrica y la pendiente-ordenada. $\square$

**Solución 6**. Sea $y - 7 = \frac{10}{3}(x - 4)$

a Consideremos la ecuación de la recta
$$\begin{array}{rcl} y - 7 &=& \frac{10}{3}(x - 4) \\ y - 7 &=& \frac{10}{3}x - \frac{40}{3} \quad / \cdot 3 \\ 3y - 21 &=& 10x - 40 \\ 10x - 3y - 19 &=& 0 \end{array}$$
Por lo tanto la ecuación general de la recta es:
$$10x - 3y - 19 = 0$$

b Tomemos la ecuación general $10x - 3y - 19 = 0$
$$\begin{array}{rcl} 10x - 3y - 19 &=& 0 \\ 10x - 3y &=& 19 \quad / \cdot \frac{1}{19} \\ \frac{10}{19}x - \frac{3}{19}y &=& 1 \\ \frac{x}{\frac{19}{10}} - \frac{y}{\frac{19}{3}} &=& 1 \end{array}$$

Por lo tanto la ecuación simétrica de la recta es:

$$\frac{x}{\frac{19}{10}} + \frac{y}{-\frac{19}{3}} = 1$$

c Consideremos la ecuación general $10x - 3y - 19 = 0$

$$\begin{array}{rcl} 10x - 3y - 19 & = & 0 \\ 3y & = & 10x - 19 \quad / \cdot \frac{1}{3} \\ y & = & \frac{10}{3}\, x - \frac{19}{3} \end{array}$$

Por lo tanto la ecuación pendiente-punto es:

$$y = \frac{10}{3}\, x - \frac{19}{3}$$

**Ejemplo 2.3.12** Si $l_1$ es una recta que pasa por los puntos $(7, 11), (3, 4)$ y $l_2$ es una recta de pendiente 13 y pasa por $(8, 5)$.
Hallar la intersección de las rectas $l_1$ y $l_2$. □

**Solución 7**. Sabemos que $(7, 11), (3, 4) \in l_1$ , luego tenemos que

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1) \\ y - 11 & = & \frac{4-11}{3-7}(x - 7) \\ y - \frac{7}{4}x & = & 11 - \frac{49}{4} \\ y - \frac{7}{4}x & = & -\frac{5}{4} \quad / \cdot 4 \\ 4y - 7x + 5 & = & 0 \end{array}$$

Así tenemos la ecuación de la recta $l_1 : 4y - 7x + 5 = 0$.

Para $l_2$ tenemos que pasa por $(8, 5) = (x_1, y_1) \in l_2$ y su pendiente es 13. luego la ecuación es

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & m(x - x_1) \\ y - 5 & = & 13(x - 8) \\ y - 5 & = & 13x - 104 \\ y - 13x + 99 & = & 0 \end{array}$$

Sea $P$ es el punto de intersección de $l_1$ y $l_2$, es decir, $l_1 \cap l_2 = \{P\}$, luego satisface las ecuaciones anteriores, por lo tanto tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 4y - 7x + 5 & = & 0 \\ y - 13x + 99 & = & 0 \end{array}\right|$$

despejando $y$ de la segunda ecuación obtenemos

$$y = 13x - 99$$

y reemplazando en la primera tenemos

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot (13x - 99) - 7x + 5 & = & 0 \\ 52x - 396 - 7x + 5 & = & 0 \\ 45x & = & 391 \\ x & = & \frac{391}{45} \end{array}$$

Reemplazamos $x = \frac{391}{45}$ en $y = 13x - 99$ entonces

$$y = 13 \cdot \left(\frac{391}{45}\right) - 99 = \frac{5083}{45} - 99 = \frac{628}{45}$$

Luego el punto intersección es $P = (\frac{391}{45}, \frac{628}{45})$.

### 2.3.2 Rectas Paralelas o Perpendiculares

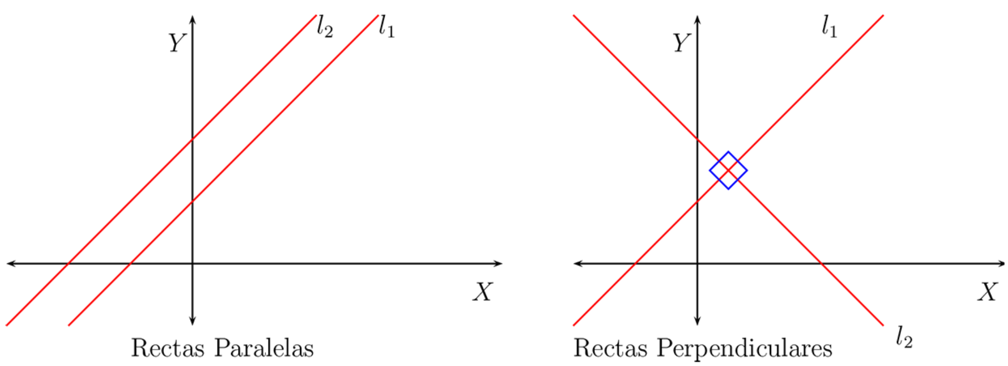
El esta sección se tratara el temas de rectas paralelas o perpendiculares y las condiciones que deben satisfacer los coeficiente que define las rectas para que ellas cumplas una de estas condiciones.

La noción de cuando dos rectas son paralelas cuando no tiene punto en común o son iguales, y la de recta son perpendiculares cuando el punto intercepto de ella forme cuatro regiones iguales

Gráficamente tenemos que si $l_1, l_2$ son rectas de la forma

$$\begin{array}{rcl} l_1 : y &=& m_1x + b_1 \\ l_2 : y &=& m_2x + b_2 \end{array} \quad o \quad \begin{array}{rcl} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 &=& 0 \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 &=& 0 \end{array}$$

entonces representamos gráficamente el paralelismo y perpendicularidad de la siguiente forma




### 2.3.3 Rectas Paralelas

**Definición 2.3.13** Diremos que dos rectas $l_1, l_2$ son **paralelas** o $l_1 // l_2$ si estas no se intersecan en ningún punto o bien son iguales. $\Diamond$

**Proposición 2.3.14** *Las rectas $l_1$ y $l_2$ son paralelas si y sólo si*

$$m_1 = m_2 \quad o \quad A_1B_2 = A_2B_1$$

*es decir, $l_1 // l_2$ si y sólo si las pendientes son iguales.*

Dadas dos rectas distintas, los sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} y &=& m_1x + b_1 \\ y &=& m_2x + b_2 \end{array}\right| \quad \text{o bien} \quad \left.\begin{array}{rcl} A_1x + B_1y &=& -C_1 \\ A_2x + B_2y &=& -C_2 \end{array}\right|$$

no tiene solución si y solo si $m_1 = m_2$ o bien $A_1B_2 = A_2B_1$

**Ejemplo 2.3.15** Sean las rectas $l_1 : 3y + 4x - 15 = 0$ y $l_2 : 9y + 12x + 21 = 0$, verifique si $l_1 // l_2$. $\square$

**Solución**. Como $l_1 : 3y + 4x - 15 = 0$ y $l_2 : 9y + 12x + 21 = 0$ tenemos

$$\begin{array}{llll} l_1 : & 3y + 4x - 15 = 0 & l_2 : & 9y + 12x + 21 = 0 \\ & 3y = -4x + 15 & & 9y = -12x + 21 \\ & y = -\dfrac{4}{3}\, x + 5 & & y = -\dfrac{4}{3}\, x + \dfrac{7}{3} \end{array}$$

Luego

$$m_1 = -\frac{4}{3} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, las rectas $l_1$ y $l_2$ son rectas paralelas, es decir, $l_1 // l_2$

### 2.3.4 Rectas Perpendiculares

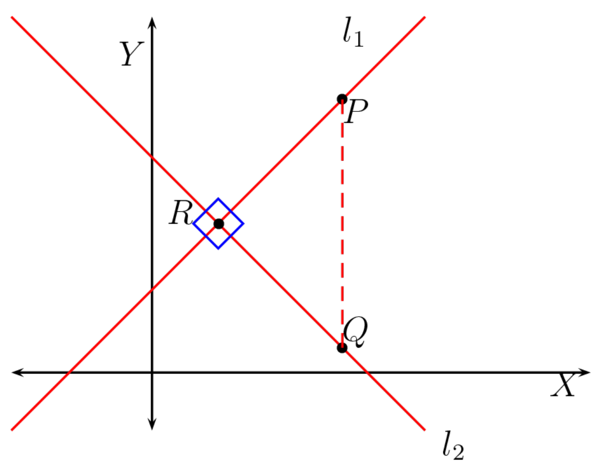
**Definición 2.3.16** Diremos que dos rectas son **perpendiculares** si y sólo si se intersecan en un punto formando un ángulo de 90°. $\lozenge$

**Proposición 2.3.17** *Las rectas $l_1$ y $l_2$ son perpendiculares si y sólo si*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

*es decir, $l_1 \perp l_2$ si y sólo si la multiplicación de sus pendientes es igual a $-1$ o una es horizontal y la otra vertical.*

Dadas las rectas $l_1 : y - a = m_1(x - b)$ y $l_2 : y - a = m_2(x - b)$ cuya intercepto es el punto $R(a, b)$, otros punto de cada recta son $P(a + 1, b + m_1) \in l_1$ y $Q(a + 1, b + m_2) \in l_2$, luego deben formar un triángulo rectángulo, como en la figura.




Usando pitágoras tenemos que $(dist(P, R))^2 + (dist(R, Q))^2 = (dist(P, Q))^2$, reemplazando los puntos se tiene

$$(dist(P, R))^2 = 1 + m_1^2, \quad (dist(R, Q))^2 = 1 + m_2^2, \quad (dist(P, Q))^2 = (m_1 - m_2)^2$$

Y ahora reemplazando en la igualdad pitagórica obtenemos

$$(1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) = (m_1 - m_2)^2$$

al simplificando, se obtiene que $2 = -2m_1m_2$, es decir, $m_1m_2 = -1$
**Ejemplo 2.3.18** Sean las rectas $l_1 : 2y - 7x - 24 = 0$ y $l_2 : 28y + 8x + 13 = 0$, verifique si $l_1 \perp l_2$. □

**Solución 1**. Como $l_1 : 2y - 7x - 24 = 0$ y $l_2 : 28y + 8x + 13 = 0$ tenemos

$$\begin{array}{llll} l_1 : & 2y - 7x - 24 = 0 & l_2 : & 28y + 8x + 13 = 0 \\ & 2y = 7x + 24 & & 28y = -8x - 13 \\ & y = \dfrac{7}{2}\,x + 12 & & y = -\dfrac{2}{7}\,x - \dfrac{13}{28} \end{array}$$

Por otro lado

Luego

$$m_1 = \frac{7}{2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{2}{7}$$

donde

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{7}{2} \cdot \frac{-2}{7} = -1$$

Por lo tanto, se tiene que las rectas $l_1$ y $l_2$ son rectas perpendiculares, es decir, $l_1 \perp l_2$.
**Definición 2.3.19** Diremos que dos rectas son **coincidentes** si y sólo si las rectas son iguales. ♢

**Proposición 2.3.20** *Dadas $l_1, l_2$ dos rectas entonces*

*a Las rectas $l_1 : y = m_1x + b_1$ y $l_2 : y = m_2x + b_2$ son coincidente si y sólo si*

$$m_1 = m_2 \quad y \quad b_1 = b_2$$

*b Las rectas $l_1 : A_1x + B_1y + C_1$ y $l_2 : A_2x + B_2y + C_2$ son coincidente si y sólo si*

$$C_1B_2 = C_2B_1 \quad y \quad A_1B_2 = A_2B_1 \quad y \quad A_1C_2 = A_2C_1$$

**Proposición 2.3.21** *Dada la recta*

$$l : Ax + By = C$$

*y el punto $P = (x_1, y_1)$ entonces tenemos*

*a La ecuación de la recta $l_1$ perpendicular a $l$ que pasa por $P$ es*

$$l_1 : \quad B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

*b La ecuación de la recta $l_2$ paralela a $l$ que pasa por $P$ es*

$$l_2 : \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

**Ejemplo 2.3.22** Sean $A = (2,5), B = (7,3)$ y $l_1, l_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ rectas tales que $A, B \in l_2$ y

$$l_1 : kx + (k+3)y + 5 = 0.$$

Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ en cada caso de modo que:

a $l_1 \perp l_2$.

b $l_1 // \ l_2$.

$\square$

**Solución 2**. Calculemos la pendiente de $l_2$ con $A = (x_1, y_1) = (2,5)$ y $B = (x_2, y_2) = (7,3)$ entonces

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{7-5} = \frac{1}{2}$$

Entonces tomando el punto $A = (2,5)$ y la pendiente $m_2 = \frac{1}{2}$, la ecuación de la recta $l_2$ esta dada por:

$$\begin{array}{rcl} y - 5 & = & \frac{1}{2}(x-2) \\ y - 5 & = & \frac{x}{2} - 1 \\ y & = & \frac{x}{2} + 4 \end{array}$$

Luego la pendiente de $l_1$ la podemos obtener de la escritura de la recta:

$$\begin{array}{r} kx + (k+3)y + 5 = 0 \\ (k+3)y = -kx - 5 \\ y = \frac{-k}{k+3}x - \frac{5}{k+3}; \end{array}$$

**Observación:** El valor de $k$ no puede ser igual a $-3$ en cuyo caso la pendiente es infinito y no serían paralela ni perpendiculares.

Por lo tanto la pendiente de $l_1$ es

$$m_1 = \frac{-k}{k+3}$$

a Para que $l_1 \perp l_2$ necesitamos que $m_1 \cdot m_2 = -1$ luego tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} \cdot \frac{-k}{k+3} & = & -1 \\ -k & = & -2(k+3) \quad / \cdot (-1) \\ k & = & 2k + 6 \\ k & = & -6. \end{array}$$

Reemplazando $k$ en la ecuación obtenemos

$$l_1 : y = -\frac{6}{3}x + \frac{5}{3} \ \text{ y } \ l_2 : y = \frac{1}{2}x + 4$$

son perpendiculares.

b Para que $l_1 // \ l_2$ necesitamos que $m_1 = m_2$

$$\begin{array}{rcl} \frac{-k}{k+3} & = & \frac{1}{2} \\ -2k & = & k+3 \\ -3k & = & 3 \\ k & = & -1 \end{array}$$

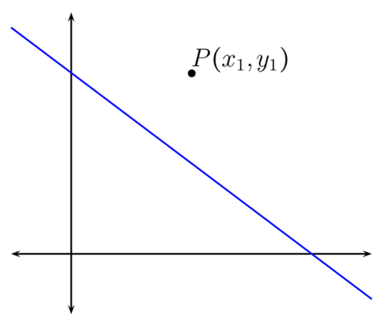
Reemplazando el valor de $k$ en la ecuación de la recta $l_1$ tenemos que:

$$l_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \ \text{ y } \ l_2 : y = \frac{1}{2}x + 4$$

son paralelas.

### 2.3.5 Distancia de un Punto a una Recta

La distancia de un punto a una recta, es la distancia más corta del punto a cualquier de los puntos que pertenezcan a la recta. Note que este punto corresponde a un punto cuya recta es perpendicular a la recta original y pasa por el punto dado, ya que los otros puntos formarían los vértices de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud mayor que el lado correspondiente.




**Proposición 2.3.23** *Sea* $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ *y la recta cuya ecuación es*

$$l : Ax + By = C \quad o \quad l : y = mx + b$$

*entonces la distancia de un punto* $P$ *a la recta* $l$ *esta dada por:*

$$dist(P, l) = \frac{|\ Ax_1 + By_1 - C\ |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

*o por*

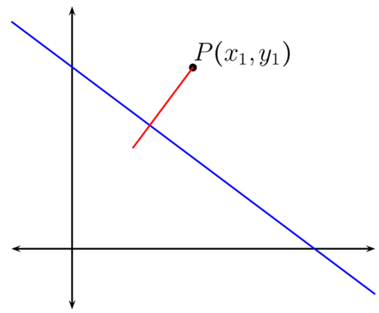
$$dist(P, l) = \frac{|\ y_1 - b - x_1 m\ |}{\sqrt{1 + m^2}}$$

*Demostración.* Sea $l$ una recta de ecuación $Ax + By = C$ y $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$.

Sean $l_1$ perpendicular a $l$ y $P \in l_1$, luego tenemos que

$$l_1 : B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

Calculemos $Q = (x, y)$ el punto de intersección de $l$ con $l_1$




$$\left.\begin{array}{rcl} Ax + By &=& C \\ Bx - Ay &=& Bx_1 - Ay_1 \end{array}\right|$$

Multiplicando la primera ecuación por $A$, la segunda por $B$ y sumamos obtenemos

$$\begin{array}{r} A(Ax + By) + B(Bx - Ay) = AC + B(Bx_1 - Ay_1) \\ (A^2 + B^2)x = AC + B^2x_1 - BAy_1 \\ x = \frac{AC+B^2x_1-BAy_1}{A^2+B^2} \end{array}$$

Análogamente obtenemos

$$y = \frac{BC + A^2y_1 - BAx_1}{A^2 + B^2}$$

Luego calculemos $dist(P, Q)$ donde $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x, y)$

$$dist(Q, P) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

Calculemos primeros $(x - x_1)^2$

$$\begin{array}{rcl} (x - x_1)^2 &=& \left(\frac{AC+B^2x_1-BAy_1}{A^2+B^2} - x_1\right)^2 \\ &=& \left(\frac{AC+B^2x_1-BAy_1-A^2x_1-B^2x_1}{A^2+B^2}\right)^2 \\ &=& \left(\frac{AC-BAy_1-A^2x_1}{A^2+B^2}\right)^2 \\ &=& A^2\frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \end{array}$$

Calculemos ahora $(y - y_1)^2$

$$\begin{array}{rcl} (y - y_1)^2 &=& \left(\frac{BC+A^2y_1-BAx_1}{A^2+B^2} - y_1\right)^2 \\ &=& \left(\frac{BC+A^2y_1-BAx_1-A^2y_1-B^2y_1}{A^2+B^2}\right)^2 \\ &=& \left(\frac{BC-BAx_1-B^2y_1}{A^2+B^2}\right)^2 \\ &=& B^2\frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \end{array}$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}(dist(Q,P))^2 &= (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \\ &= A^2\tfrac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2}+B^2\tfrac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \\ &= (A^2+B^2)\tfrac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \\ &= \tfrac{(C-By_1-Ax_1)^2}{A^2+B^2}\end{aligned}$$

De lo cual

$$dist(Q,P)=\sqrt{\frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{A^2+B^2}}=\sqrt{\frac{(Ax_1+By_1-C)^2}{A^2+B^2}} \qquad \blacksquare$$

**Ejemplo 2.3.24** Dada la recta $2x+3y+4=0$ y el punto $P=(1,3)$.
Determine la distancia entre $P$ y $l$. $\square$

**Solución 1**. Dada la recta $-4x+3y+4=0$ y el punto $P=(1,3)$

$$dist(P,l)=\frac{|-4\cdot 1+3\cdot 3+4|}{\sqrt{(-4)2^2+3^2}}=\frac{9}{5}$$

**Ejemplo 2.3.25** Dado los puntos $A=(-1,4)$, $B=(1,2)$ y $C=(3,-2)$.
Determine el área del triángulo $ABC$ (con vértices en los puntos $A,B,C$). $\square$

**Solución 2**. Ya que $A(-1,4)$, $B(1,2)$ y $C(3,-2)$.
La recta que pasa por $A,B$ es

$$l_{AB}: y-2=\frac{4-2}{-1-1}(x-1)$$

es decir $l_{AB}: y+x=3$.

Luego el área del triángulo es

$$\begin{aligned}\text{área} &= \tfrac{1}{2}\cdot dist(A,B)\cdot dist(C,l_{AB}) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2}\cdot\tfrac{|-2+3-3|}{\sqrt{1+1}} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Luego el área del triángulo $ABC$ es 2.

### 2.3.6 Ejercicios Propuestos

a Demuestre que los puntos $A=(-3,1)$ , $B=(5,3)$, $C=(3,9)$ y $D=(-5,7)$ son los vértices de un paralelogramo.

b Dados los puntos $A=(-4,1)$ y $B=(1,-1)$, determine todos los puntos $C$ sobre la recta de ecuación $y=x+4$ para los cuales el triángulo de vértices $ABC$ tenga área igual a 1.

[*Resp.* $C=(3,7)$ *o* $C=(-3,1)$]

c Considere los puntos del plano $A = (1,2)$ y $B = (3,5)$ y sea $\overline{AB}$ el segmento que los une. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y es perpendicular a la recta que une $A$ con $B$.[*Resp.* $4x + 6y - 29 = 0$]

d Encuentre la ecuación de la altura del triángulo $ABC$ donde $\overline{AB}$ representa la base y $A = (-1,4)$ , $B = (1,2)$ y $C = (3,-2)$.[*Resp.* $y - x - 3 = 0$]

e Sea la ecuación de la recta $L : (k+1)y - kx - 3 = 0$, encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ para los siguientes casos:

  a $L$ pasa por el punto $(-1,2)$. [*Resp.* $k = \frac{1}{3}$]

  b $L$ sea horizontal.[*Resp.* $k = 0$]

  c $L$ sea paralela a la recta de ecuación $3y + x - 2 = 0$. [*Resp.* $k = \frac{-1}{4}$]

  d $L$ sea perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 1 = 0$.[*Resp.* $k = \frac{-3}{5}$]

  e $L$ sea vertical.[*Resp.* $k = -1$]

f Sean $l_1$ y $l_2$ las rectas cuyas ecuaciones son $x+2y = 3$ y $-2x+y = 4$, respectivamente. Determine la ecuación de la recta $l$ que pasa por el punto de intersección entre $l_1$ y $l_2$ y que es perpendicular a la recta $l_3 : 3x - y - 1 = 0$.[*Resp.* $l : x + 3y - 5 = 0$]

g Determinar el área del triángulo de vértices $(-2,-1), (1,4)$ y $(3,-3)$.[*Resp.* $\frac{31}{2}$]

h Determinar la ecuación de la recta que pasa por $P = (-2,3)$ y es perpendicular a la recta $l : 3x - 2y + 5 = 0$.[*Resp.* $2x + 3y - 5 = 0$]

i Dadas las rectas $l_1 : 2x-3y-2 = 0$, $l_2 : 3x-2y+1 = 0$ y $l_3 : x+4y-3 = 0$. Determinar la distancia del punto de intersección de $l_1$ con $l_2$ a la recta $l_3$.[*Resp.* $\approx 2.6$]

j Determine la recta $l$ que esta a una distancia $\sqrt{2}$ del punto $P = (1,-2)$ e interseca perpendicularmente a la $l_1 : 3x - y + 1 = 0$.[*Resp.* $x + 3y + (5 - 2\sqrt{5}) = 0$ *o* $x + 3y + (5 + 2\sqrt{5}) = 0$]

k Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $-4$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.[*Resp.* $4x + y - 10 = 0$]

l Sean $A = (-2,1)$, $B = (4,7)$ y $C = (6,-3)$ los cuales forman el triángulo $ABC$, determine su ortocentro (ortocentro: punto de intersección de las alturas del triángulo $ABC$).[*Resp.* $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$]

m Determine el valor de los coeficientes $A$ y $B$ de la ecuación $Ax - By + 4 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $(-3,1)$ y $(1,6)$.[*Resp.* $A = \frac{20}{19}, B = \frac{16}{19}$]

n Encuentre los valores de $k$ para que la reta $4x+5y+k = 0$, forme un triángulo rectángulo con los ejes coordenados (eje $X$ y eje $Y$), donde su área sea igual a $\frac{5}{2}$.[*Resp.* $k = 10$ *o* $k = -10$]

o Determine los valores para $a$ y $b$ de tal manera que las rectas $ax + (2-b)y - 23 = 0$ y $(a-1)x + by + 15 = 0$ pasen por el punto $(2,-3)$.[*Resp.* $a = 4, b = 7$]

p Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual a la mitad de su distancia al eje $Y$.[*Resp.* $x - 2y + 8 = 0$ *o* $13x - 6y + 24 = 0$]

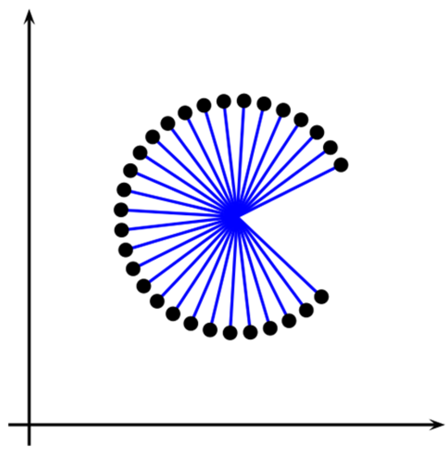
q Calcule la distancia entre las rectas

$$L_1 : 2x + 3y - 6 = 0 \;\; y \;\; L_2 : 2x + 3y + 13 = 0$$

[*Resp.* $\frac{19}{\sqrt{13}}$]

## 2.4 La Circunferencia

**Definición 2.4.1** La circunferencia es el conjunto de todos los puntos que se encuentran a una misma distancia (radio) de otro punto fijo (centro) en el plano. $\Diamond$



**Proposición 2.4.2** *Sean $Q = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}^+$, luego la circunferencia de centro $(h, k)$ y radio $r$ es:*

$$\mathcal{C}_r(Q) \;\; = \;\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$

*o la ecuación de la circunferencia esta dada por $\mathcal{C}_r(Q) : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.*

*Demostración.* Denotaremos el centro de la circunferencia por $Q = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ y al radio por $r \in \mathbb{R}^+$ que representa una longitud entre los puntos.

Sea $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Luego la distancia entre $P$ y $Q$ esta dada por

$$dist(Q, P) = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}.$$

simplificando la expresión

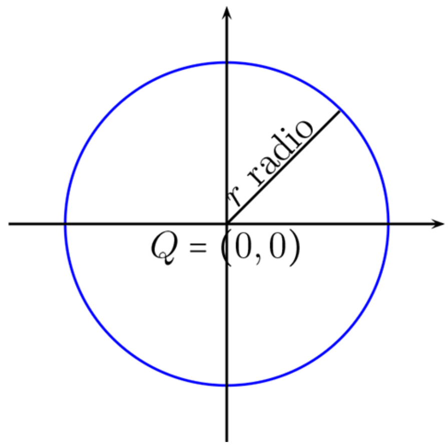
$$\begin{array}{rcl} dist(Q, P) & = & r \\ \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} & = & r \quad /()^2 \\ (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 & = & r^2 \end{array}$$

lo cual debe cumplir cualquier punto que pertenece a la circunferencia. Así obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_r(Q) & = & \{P \in \mathbb{R}^2 \;\; \mid \; dist(Q, P) = r\} \\ \mathcal{C}_r(Q) & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \mid \;\; (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\} \end{array}$$ $\blacksquare$

**Observación:** Al igual que el ejemplo Ejemplo 2.2.5 la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen, $(h,k)=(0,0)$, y radio $r$ esta dada por:

$$x^2+y^2=r^2$$




**Observación:** Sean $T\in\mathcal{C}_r(Q), Q\in\mathbb{R}^2$ y $r\in\mathbb{R}$ donde $T=(x,y)$ , $Q=(h,k)$ es el centro y $r$ que es el radio entonces la ecuación de la circunferencia, la ecuación de la circunferencia la obtenemos de la propiedad Proposición 2.4.2 y es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 \;=\; r^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}(x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2\\ x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2 &= r^2\\ x^2+y^2-2xh-2yk+k^2+h^2-r^2 &= 0\end{aligned}$$

Definamos las siguientes variables

$$A=-2h,\quad B=-2k,\quad C=k^2+h^2-r^2.$$

luego reemplazando obtenemos

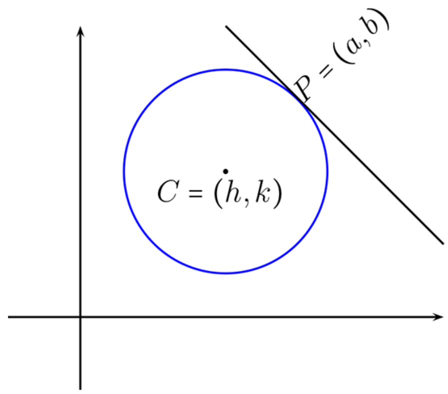
$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

llama **ecuación general de la circunferencia**.

### 2.4.1 Tangencia de una recta a la circunferencia

Una recta $l$ es tangente a una circunferencia $\mathcal{C}_r$ en el punto $P\in l\cap\mathcal{C}_r$, si la recta es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto $P$.

Sean $Q=(h,k)$ el centro de la circunferencia, $P\in\mathbb{R}^2$ el punto de tangencia entre la recta $l$ y la circunferencia. Por lo tanto $l_{PQ}$ es perpendicular a $l$, lo que gráficamente tenemos dado por:




**Ejemplo 2.4.3** Encuentre la recta tangencia a la circunferencia $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ en el punto $(4,1)$. □

**Solución 1**. Sea $C:(x-1)^2+(y+3)^2=25$ y $P=(4,1)$.

Primero notemos que el punto $P$ pertenece a la circunferencia, ya que $3^2+4^2=25$, además el centro de la circunferencia es $Q=(1,-3)$.

La recta que une el centro $Q(1,-3)$ y el punto $P$ tiene pendiente

$$m=\frac{-3-1}{1-4}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

Luego la recta perpendicular, tiene pendiente $m'=-\frac{3}{4}$.

Así tenemos que su ecuación es

$$y-1=-\frac{3}{4}(x-4)$$

Por lo tanto, la recta tangente a $C$ en el punto $P$ es

$$3x+4y=16.$$

**Proposición 2.4.4** *Sean $T=(x_1,y_1)\in\mathcal{C}_r(Q):(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ entonces la ecuación de recta tangente a la circunferencia es*

$$(y_1-k)(y-y_1)=-(x_1-h)(x-x_1).$$

**Ejemplo 2.4.5** Encuentre $P$ el punto de tangencia entre la circunferencia de radio $\sqrt{17}$ y centro $(3,6)$, con la recta $l$ de pendiente $m=\frac{1}{4}$ y que pasa por el punto $(12,4)$. □

**Solución 2**. Como el centro de la circunferencia es $(3,6)$ y su radio es $\sqrt{17}$ tenemos que la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-3)^2+(y-6)^2 \;=\; 17$$

Ya que la recta tiene pendiente $m=\frac{1}{4}$ y el punto $(12,4)$ pertenece a esta, entonces su ecuación es:

$$\begin{aligned} y-b &= m(x-a)\\ y-4 &= \tfrac{1}{4}(x-12)\\ 4y-x &= 4 \end{aligned}$$

Luego, el punto $P$ pertenece a la recta y a la circunferencia y de este modo tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl}(x-3)^2+(y-6)^2 & = & 17\\ 4y-x & = & 4\end{array}\right|$$

Despejando tenemos que $x = 4y - 4$, reemplazando obtenemos

$$(4y-4-3)^2+(y-6)^2 = 17$$

Simplificando se obtiene que

$$y^2-4y+4=0$$

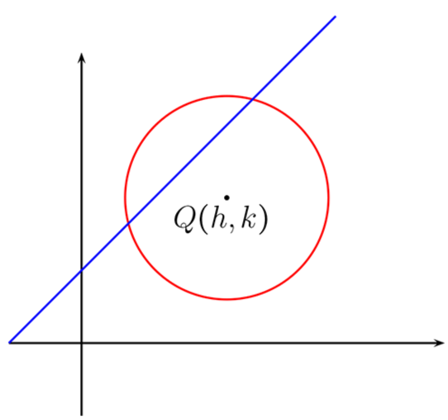
Que tiene las dos soluciones iguales, de este modo obtenemos que $y = 2$, de ello se obtiene que $x = 8 - 4 = 4$.

Por lo tanto el punto de intersección es $(4, 2)$, el cual es fácil verificar que pertenece a la circunferencia $(4-3)^2 + (2-6)^2 = 17$ y a la recta. Luego el punto pedido es $P = (4, 2)$.

### 2.4.2 Intersección entre una recta y una circunferencia

La intersección de una recta con una circunferencia da como resultado un conjunto que a lo más tiene dos puntos que se encuentran en el plano cartesiano, los cuales se pueden obtener a través de un sistema ecuaciones, es decir, un punto que pertenece a la recta y a la circunferencia satisfacen ambas ecuaciones.

Sean $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ una circunferencia de radio $r$ y centro $Q = (h, k)$ y la recta de ecuación $l : Ax + By + C = 0$.




Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto de la intersección de la recta con la circunferencia:

$$\left.\begin{array}{rcl}(x-h)^2+(y-k)^2 & = & r^2\\ Ax+By+C & = & 0\end{array}\right|$$

Veremos sólo el caso $B \neq 0$, despejando $y$ en la ecuación segunda ecuación tenemos

$$y = m_1x + b_1$$

Luego reemplazando en la ecuación en la segunda, obtenemos

$$(x-h)^2 + ([m_1x+b_1]-k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + [m_1x+b_1]^2 - 2k[m_1x+b_1] + k^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + m_1^2x^2 + 2m_1b_1x + b_1^2 - 2km_1x - 2km_1b_1 + k^2 = r^2$$

$$x^2(1+m_1^2) + x(-2h+2m_1b_1-2km_1) + (h^2+b_1^2-2km_1b_1+k^2-r^2) = 0$$

Sean

$$\begin{array}{rcl} a & = & 1+m_1^2 \\ b & = & -2h-2m_1^2x_1+2m_1y_1-2km_1 \\ c & = & h^2+m_1^2x_1^2-2m_1y_1x_1+y_1^2+2km_1x_1-2m_1y_1+k^2-r^2 \end{array}$$

reemplazando obtenemos

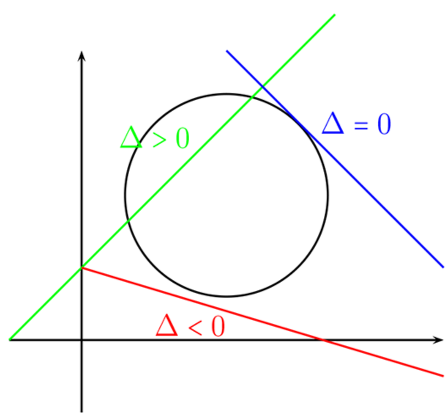
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Luego consideremos el discriminante de la ecuación que denotaremos por $\Delta$.

a Si $\Delta < 0$, se tiene que la ecuación tiene solución vacía en los reales, es decir, no hay puntos comunes a la recta y la circunferencia.

b Si $\Delta = 0$, se tiene que la ecuación tiene una única solución real, es decir, la intersección de la recta con la circunferencia es único el punto, lo cual indica que la recta $l$ es tangente a la circunferencia.

c Si $\Delta > 0$, se tiene que la ecuación tiene dos soluciones reales, es decir, la intersección de la recta con la circunferencia tiene dos puntos, es una recta secante.




**Ejemplo 2.4.6** Dada la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.
Determine cuales puntos de la circunferencia pertenecen a la recta, en cada uno de los siguientes casos.

a $l_1 : 3\sqrt{3} + 6 - x = \sqrt{3}y$

b $l_2 : x = y$

c $l_3 : x - y = -5$

□

**Solución**. Consideremos la circunferencia $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ e interceptemos con la recta, luego se obtiene un sistema de ecuaciones, que debemos resolver en cada una de las alternativas

a

$$\left.\begin{array}{rcl} (x-2)^2+(y-3)^2 & = & 4 \\ 3\sqrt{3}+6-x & = & \sqrt{3}y \end{array}\right|$$

Despejando

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3}y & = & 3\sqrt{3}+6-x \\ y & = & \frac{3\sqrt{3}+6-x}{\sqrt{3}} \\ y & = & 3+\frac{6-x}{\sqrt{3}} \end{array}$$

Reemplazando la variable obtenida, en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$\begin{array}{rcl} (x-2)^2+(y-3)^2 & = & 4 \\ (x-2)^2+\left(3+\frac{6-x}{\sqrt{3}}-3\right)^2 & = & 4 \\ (x-2)^2+\left(\frac{6-x}{\sqrt{3}}\right)^2 & = & 4 \\ x^2-4x+4+\frac{x^2-12x+36}{3} & = & 4 \quad / \cdot 3 \\ 3x^2-12x+x^2-12x+36 & = & 0 \\ 4x^2-24x+36 & = & 0 \quad / \cdot \frac{1}{4} \\ x^2-6x+9 & = & 0 \end{array}$$

Luego el discriminante $\Delta=(6)^2-4\cdot 1\cdot 9=0$, despejando $x$ tenemos

$$x \;=\; \frac{6\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Reemplazando en la recta, encontremos el valor de $y$

$$y=3+\frac{6-x}{\sqrt{3}}=3+\frac{6-3}{\sqrt{3}}=3+\frac{3}{\sqrt{3}}=3+\frac{3\sqrt{3}}{3}=3+\sqrt{3}$$

Por lo tanto el punto de intersección, cuando $\Delta=0$, es

$$P=(3,3+\sqrt{3})$$

b Consideremos ahora el segundo sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} (x-2)^2+(y-3)^2 & = & 4 \\ x & = & y \end{array}\right|$$

Reemplazando la variable $y$ ecuación de la recta, en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$\begin{array}{rcl} (x-2)^2+(y-3)^2 & = & 4 \\ (x-2)^2+(x-3)^2 & = & 4 \\ x^2-4x+4+x^2-6x+9-4 & = & 0 \\ 2x^2-10x+9 & = & 0 \end{array}$$

Luego el discriminante $\Delta = (10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 28$, y determinado las soluciones de la ecuación de segundo grado obtenemos

$$x = \tfrac{10 \pm \sqrt{28}}{4} = \tfrac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$$

Por lo tanto

$$x_1 = \tfrac{5+\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \tfrac{5-\sqrt{7}}{2}$$

Reemplazando en la ecuación de la recta, encontremos $y$

a Si $x = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$ entonces $y = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

b Si $x = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ entonces $y = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$

Por lo tanto los puntos de intersección, cuando $\Delta < 0$, son

$$P_1 = \left(\tfrac{5+\sqrt{7}}{2}, \tfrac{5+\sqrt{7}}{2}\right) \quad y \quad P_2 = \left(\tfrac{5-\sqrt{7}}{2}, \tfrac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$$

c Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl|} (x-2)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ x - y & = & -5 \\ \hline \end{array}$$

Despejando, obtenemos

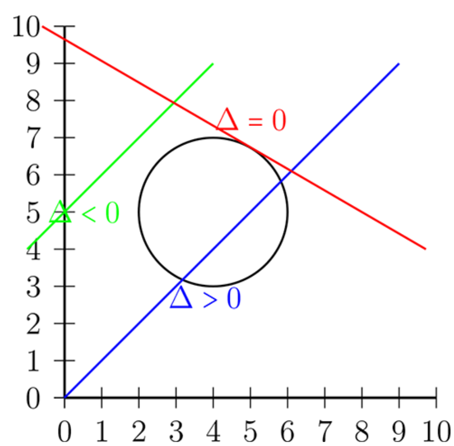
$$x = y - 5$$

Reemplazando ahora en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$\begin{array}{rcl} (x-2)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ (y-5-2)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ (y-7)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ y^2 - 14y + 49 + y^2 - 6y + 9 - 4 & = & 0 \\ 2y^2 - 20y + 54 & = & 0 \end{array}$$

Análogamente calculamos el discriminante y tenemos que $\Delta = -2$, luego la intersección de la circunferencia con la recta $l_3$ es vacía, es decir no tiene puntos.

Gráficamente nos encontramos en la siguiente situación:



### 2.4.3 Ejercicios Propuestos

1 Considere la recta $y-2x-c=0$ y la circunferencia $x^2+y^2=\frac{1}{4}$. Determine el valor de $c$ en cada caso

a La recta es tangente a la circunferencia. [*Resp.* $c=\frac{-\sqrt{5}}{2}$ *o* $c=\frac{\sqrt{5}}{2}$]

b La recta y circunferencia tienen intersección. [*Resp.* $c\in\mathbb{R}-[\frac{-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}]$]

2 Encuentre la ecuación de la circunferencia que contiene al punto $(-1,-8)$ y que es tangente a $3x-4y-4=0$ en el punto $(0,-1)$.[*Resp.* $x^2+y^2-6x+10y=-9$]

3 Hallar la ecuación de la circunferencia de radio es 9 y cuyo centro esta en la intersección de las rectas $x-4y=1$ y $2x-y=2$.[*Resp.* $x^2+y^2-2x=82$]

4 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $(0,-2)$ y es tangente a la recta $5x-12y+2=0$.[*Resp.* $x^2+y^2+4y=0$]

5 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice $A=(-1,0)$ del triángulo $ABC$ y es tangente a $l_{BC}$ con $B=(2,\frac{9}{4})$ y $C=(5,0)$.[*Resp.* $x^2+y^2+2x=323$]

6 Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a las rectas $l_1: x+y+4=0$ y $l_2: 7x-y+4=0$, y su centro se encuentra en la recta $l_3: 4x+3y-2=0$.[*Resp.* $(x-\frac{11}{4})^2+(y+3)^2=\frac{225}{32}$ *o* $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$]

7 Considere la circunferencia de ecuación $x^2+y^2+2ky=0$, desde el punto $A=(5,4)$ se traza la tangente a la circunferencia siendo $Q$ el punto de tangencia. Determine el valor de $k$ para que la longitud del segmento $\overline{AQ}$ sea 1.[*Resp.* $k=-5$]

8 Considere la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=8x+6y$. Determine en cada caso la ecuación de la recta $l$ que es tangente a la circunferencia y que pasa por:

a $P=(8,6)$ . [*Resp.* $l: 3y=-4x+50$]

b $Q=(11,4)$. [*Resp.* $l: 3y-4x+32=0$ *o* $l: 4y+3x-49=0$]

9 Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2-2x=2y-y^2$ en el punto $(2,2)$.[*Resp.* $x+y-4=0$]

10 Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2,-2),(-1,4)$ y $(4,6)$.[*Resp.* $(x-\frac{8}{3})^2+(y-\frac{25}{12})^2=\frac{2465}{144}$]

11 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre la recta $x-2y-2=0$ y es tangente a cada una de las rectas $x-y+2=0$ y $x+y-1=0$.[*Resp.* $(x-5)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\left(\frac{11}{2\sqrt{2}}\right)^2$ *o* $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{5}{4})^2=\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2$]

12 Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ que es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-4x+2y-47=0$ en el punto $(6,5)$.[*Resp.* $(x-8)^2+(y-8)^2=13$ *o* $(x-4)^2+(y-2)^2=13$]

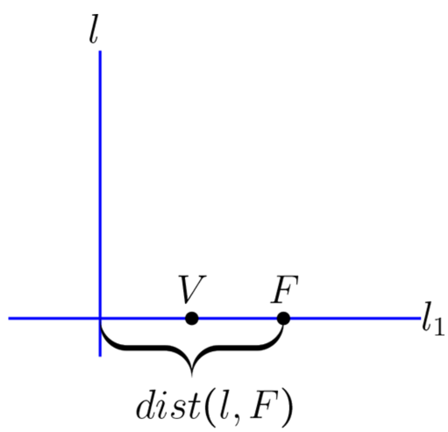
13 Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ y que pasa por la intersección de las circunferencias $x^2+y^2+2x-6y-16=0$ y $x^2+y^2-6x+2y=0$.[*Resp.* $x^2+y^2-x-3y-10=0$ *o* $x^2+y^2-7x+3y+2=0$]

## 2.5 Parábola

**Definición 2.5.1** Una parábola es el conjunto formado por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado **foco** y de una recta llamada **directriz**. ♢

**Observación:** En este texto solamente se abordaran los casos que la directriz sea paralela al eje $X$ o al eje $Y$.

**Descripción de los puntos que están o pertenecen a la Parábola:** Sea $F \in \mathbb{R}^2$ que representa el foco y $l$ una recta del plano (en el dibujo paralela al eje $Y$). Consideremos la recta que pasa por el foco y es perpendicular a $l$, es decir, $l_1 \perp l$, $l_1$ es llamada **eje focal**.




Sea $r \in \mathbb{R}^+$ la distancia que hay entre el foco y la directriz

$$dist(l, F) = r = 2p$$

Si $V \in \mathbb{R}^2$, es el punto medio $\overline{FP_0}$, donde $P_0$ es el punto de intersección de $l$ y $l_1$, el punto $V$ anteriormente nombrado lo llamaremos vértice de la parábola y cumple con

$$dist(l, V) = dist(F, V) = \frac{r}{2} = p$$

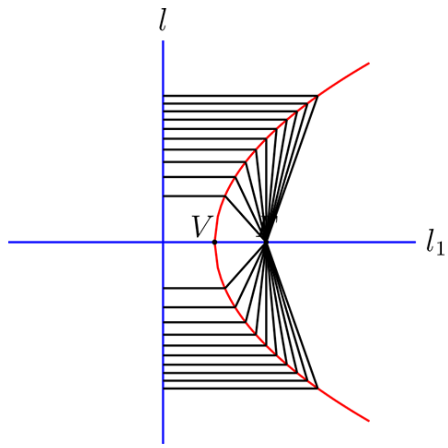
Sea $P \in \mathbb{R}^2$ un punto que pertenece a la parábola, luego

$$dist(l, P) = dist(F, P)$$

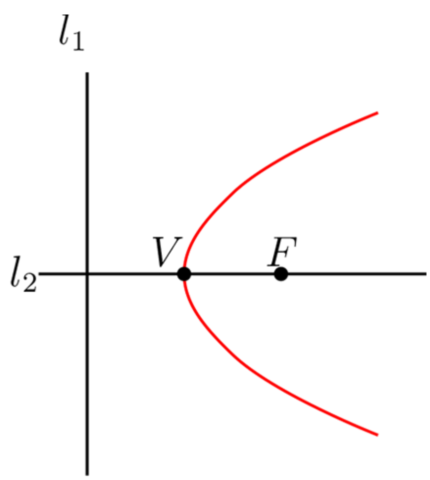
Así tenemos que la parábola con foco $F$ y directriz $l$ es:

$$\mathcal{P}_{(l,F)} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(l, P) = dist(F, P)\}$$

El cual gráficamente corresponde a la siguiente figura




Luego al considerando solamente los puntos, sin marcar las distancias, tenemos la siguiente figura conocida como parábola.

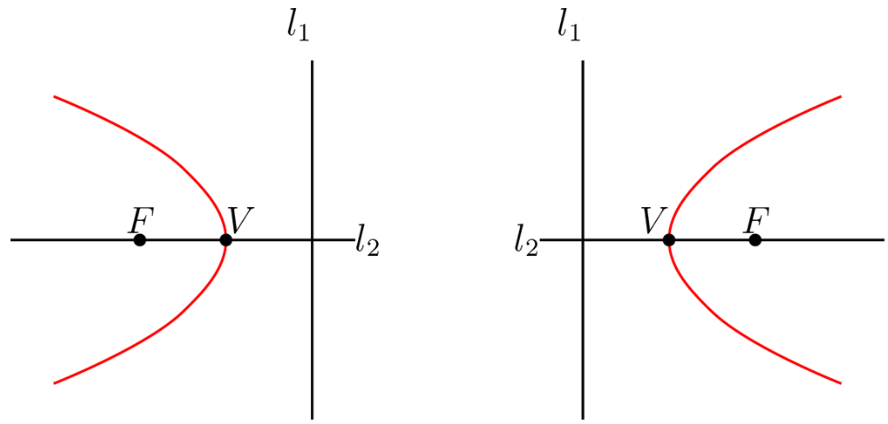



**Observación:** Note que hemos realizado el proceso en forma general y solamente hemos visualizado una de las cuatro posibilidades de abertura de la Parábola. A continuación detallaremos más cada caso.

### 2.5.1 Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje X

Sean $F, V \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h+p, k)$ el foco y $l_1 : x = h-p$ la directriz.

En este caso, se tiene el eje focal paralelo al eje $X$, luego las gráficas que nos encontramos en este caso son las siguientes:




Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola, luego la distancia es

$$dist(l, P) = \frac{|1\cdot x + 0\cdot y + p - h|}{\sqrt{1^2+0^2}} = | x + p - h |$$

Además de la distancia entre puntos, obtenemos

$$dist(F, P) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2}$$

Realicemos el cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$, en estas coordenadas obtenemos

$$\begin{array}{rcl} | u + p | & = & \sqrt{(u - p)^2 + v^2} \\ (u + p)^2 & = & (u - p)^2 + v^2 \\ v^2 & = & (u + p)^2 - (u - p)^2 = 4pu \end{array}$$

Así, tenemos que

$$v^2 = 4pu,$$

volviendo a las coordenadas originales

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

**Proposición 2.5.2** *Sea $F, V, P \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h+p, k)$ el foco, $l : x = h - p$ la directriz entonces $P = (x, y) \in \mathcal{P}_{(l,F)}$ pertenece a la parábola si y sólo si satisface la ecuación*

$$\mathcal{P}_{(l,F)} : (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

**Ejemplo 2.5.3** Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz, el foco si esta tiene como vértice $(0, 0)$, pasa por el punto $(4, -3)$ y el eje focal está en el eje $X$. $\square$

**Solución 1**. Como la parábola tiene su vértice en el origen $(h, k) = (0, 0)$, tenemos que su ecuación esta dada por:

$$y^2 = 4px$$

Pero además, pasa por el punto $(4, -3)$, el cual debe satisfacer la ecuación $y^2 = 4px$, reemplazando se obtiene

$$\begin{array}{rcl} (-3)^2 & = & 4p \cdot 4 \\ p & = & \frac{9}{16} \end{array}$$

Luego, el foco esta dado por el punto $(p, 0)$ lo que corresponde a $(\frac{9}{16}, 0)$. Finalmente la directriz tiene ecuación $l : x = -p$, es decir,

$$l : x = -\frac{9}{16}$$

Y de este modo la ecuación es

$$y^2 = \frac{9}{4}x$$

**Ejemplo 2.5.4** Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz y su foco si el vértice es $(6, 2)$, pasa por el punto $(-3, 5)$ y el eje focal es paralelo al eje $X$. □

**Solución 2**. Como la parábola tiene su vértice en el punto $(6, 2)$ tenemos que su ecuación esta dada por:

$$\begin{aligned} (y-k)^2 &= 4p(x-h) \\ (y-2)^2 &= 4p(x-6) \end{aligned}$$

Además, pasa por el punto $(-3, 5)$ el cual debe satisfacer la ecuación

$$\begin{aligned} (y-2)^2 &= 4p(x-6) \\ (5-2)^2 &= 4p\cdot(-3-6) \\ 9 &= -36p \\ p &= \tfrac{-1}{4} \end{aligned}$$

Luego el foco esta dado por el punto

$$(h+p, k) = \left(6 + \tfrac{-1}{4}, 2\right) = \left(\tfrac{23}{4}, 2\right)$$

Finalmente la ecuación de la directriz $l : x = h - p$ es

$$l : x = 6 - \frac{-1}{4} = \frac{25}{4}$$

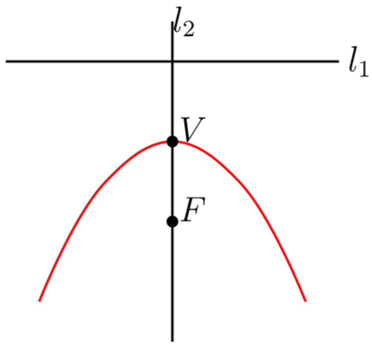
Y de este modo la ecuación de la parábola es

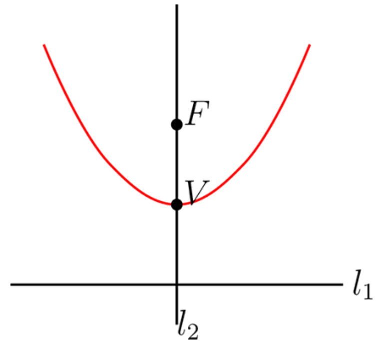
$$(y-2)^2 = -(x-6)$$

### 2.5.2 Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje Y

Sea $F, V \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h, k+p)$ el foco y $l_1 : y = k - p$ la directriz.

En este caso, se tiene el eje focal paralelo al eje $Y$, luego las gráficas que nos encontramos en este caso son las siguientes:




Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola, luego las distancia son:

$$dist(l, P) = dist(F, P)$$

Usando la formula de distancia punto a recta tenemos

$$dist(l, P) = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y + p - k|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} =\mid y + p - k \mid$$

Ahora la de distancia entre puntos tenemos

$$dist(F, P) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2}$$

Por lo tanto como

$$\begin{array}{rcl} dist(l, P) & = & dist(F, P) \\ \mid y + p - k \mid & = & \sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2} \end{array}$$

Volvemos a hacer cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$, luego tenemos que

$$\begin{array}{rcll} \mid v + p \mid & = & \sqrt{u^2 + (v - p)^2} & /()^2 \\ (v + p)^2 & = & u^2 + (v - p)^2 & \\ u^2 & = & (v - p)^2 - (v + p)^2 = 4pv & \end{array}$$

Así entonces tenemos

$$u^2 = 4pv$$

volviendo a las coordenadas originales obtenemos

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

**Proposición 2.5.5** *Sea $F, V, P \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h, k+p)$ el foco, $l : y = k - p$ la directriz y $P = (x, y) \in \mathcal{P}_{(l,F)}$ pertenece a la parábola si y sólo si satisface la ecuación*

$$\mathcal{P}_{(l,F)} : (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

**Ejemplo 2.5.6** Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz, su foco si esta tiene como vértice $(0, 0)$, pasa por el punto $(4, -3)$ y el eje focal es el eje $Y$. □

**Solución 1**. Como la parábola tiene su vértice en el origen $(h,k) = (0,0)$, se tiene que su ecuación esta dada por:

$$x^2 = 4py$$

Pero además pasa por el punto $(4,-3)$ el cual satisface la ecuación, reemplazando se tiene

$$\begin{aligned}(4)^2 &= 4p \cdot -3\\ p &= \tfrac{-3}{4}\end{aligned}$$

Luego el foco esta dado por el punto $(0,p)$ lo que corresponde a $(0,\frac{-3}{4})$. Finalmente la directriz tiene ecuación $l : y = -p$

$$l : y = \tfrac{3}{4}$$

Y de este modo la ecuación de la parábola es

$$x^2 = -3y$$

**Ejemplo 2.5.7** Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz y su foco si el vértice es $(6,2)$, pasa por el punto $(-3,5)$ y si su eje focal es paralelo al eje $Y$. $\square$

**Solución 2**. Como la parábola tiene su vértice es $(h,k) = (6,2)$ y el eje focal es paralelo al eje $X$, se tiene que la ecuación esta dada por:

$$\begin{aligned}(x-h)^2 &= 4p(y-k)\\ (x-6)^2 &= 4p \cdot (y-2)\end{aligned}$$

Pero además pasa por el punto $(-3,5)$, es decir, satisface la ecuación

$$\begin{aligned}(-3-6)^2 &= 4p \cdot (5-2)\\ (-9)^2 &= 4p \cdot 3\\ p &= \tfrac{27}{4}\end{aligned}$$

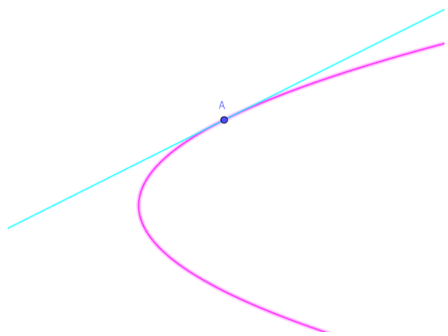
Luego el foco esta dado por el punto $(h, k+p)$ lo que corresponde a $(6, 2+\frac{27}{4}) = (6,\frac{35}{4})$. Finalmente la directriz tiene ecuación $l : y = k - p$

$$l : y = 2 - \tfrac{27}{4} = \tfrac{19}{4}$$

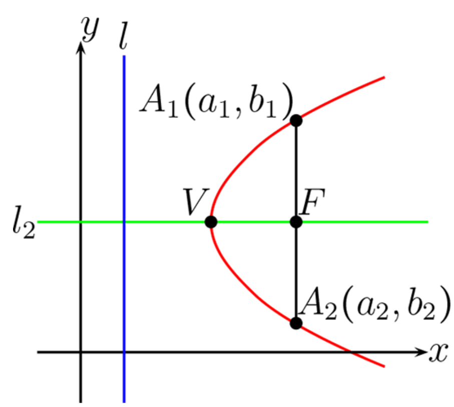
Y de este modo la ecuación de la parábola es

$$(x-6)^2 = 27(y-2)$$

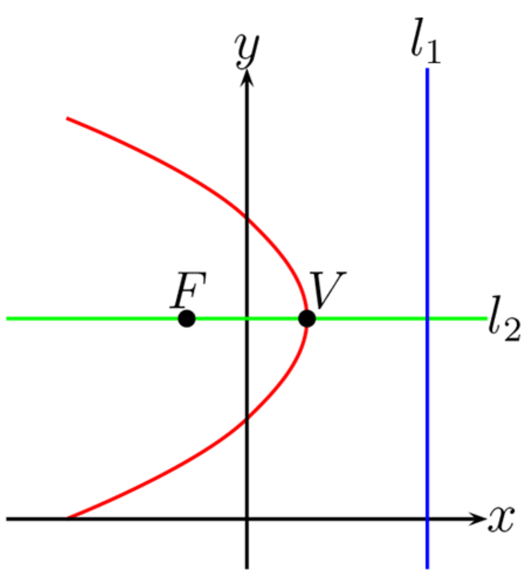
**Observación:** El concepto de **recta tangente** a una parábola en un punto perteneciente a ella, es una recta que pasa por el punto y todos los otros puntos de la parabola perteneces al mismo semiplano que se obtiene con esta recta. Recuerde que toda recta divide al plano en dos semiplano.

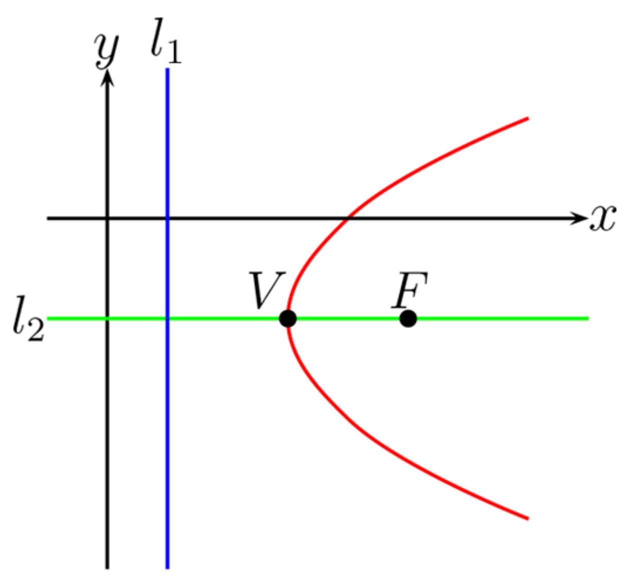



Se define el **lado recto** de una parábola, como el segmento de recta que une los puntos que intercepta la recta paralela a la directriz y que pasa por el foco, como en la figura



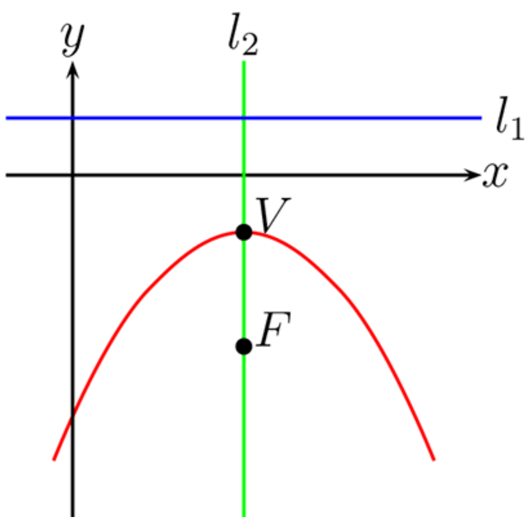

**Resumen:** Dada una parábola, sean $V, F, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^2$, donde $F = (a, b)$, $V = (h, k)$, $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$ y $l, l_1$ rectas del plano cartesiano. Los distintos elementos de una parábola distribuidos de la siguiente forma en la figura

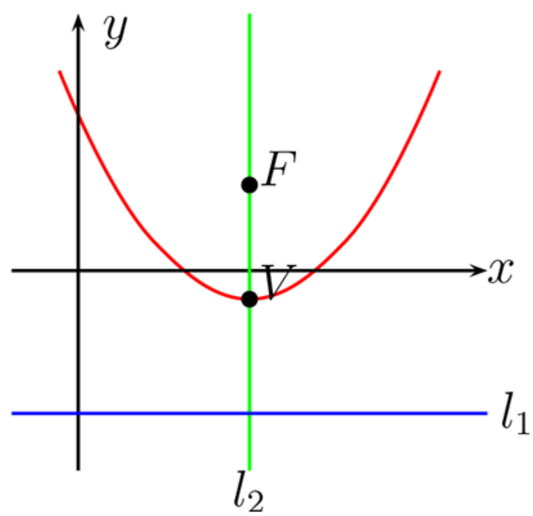


a **Parábola con eje focal paralelo al eje $X$.**

- i El Vértice de la parábola está dado por $V = (h, k)$
- ii El Foco de la parábola está dado por $F = (h + p, k)$
- iii La Directriz de la parábola está dado por $l : x = h - p$
- iv El Eje Focal de la parábola está dado por $l_1 : y = k$
- v El Lado Recto de la parábola $\overline{A_1A_2}$ mide $4|p|$
- vi La ecuación de la parábola está dado por $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
- vii La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $(a, b)$, está dado por $y - b = \frac{2p}{b-k}(x - a)$, con $b \neq k$




b **Parábola con eje focal paralelo al eje $Y$.**

- a El Vértice de la parábola está dado por $V = (h, k)$
- b El Foco de la parábola está dado por $F = (h, k + p)$
- c La Directriz de la parábola está dado por $l : y = h - p$
- d El Eje Focal de la parábola está dado por $l_1 : x = h$
- e El Lado Recto de la parábola $\overline{A_1A_2}$ mide $4|p|$
- f La ecuación de la parábola está dado por $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
- g La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $(a, b)$ está dado por $y - b = \frac{a-h}{2p}(x - a)$.

**Ejemplo 2.5.8** Encuentre la ecuación de la parábola de vértice $V = (2, 3)$, foco en la recta $7x + 3y - 4 = 0$ y eje focal horizontal. □

**Solución 3**. Como la parábola tiene su vértice $V = (2,3) = (h,k)$ y eje focal horizontal su ecuación esta dada por:

$$\begin{aligned} (y-k)^2 &= 4p(x-h) \\ (y-3)^2 &= 4p(x-2) \end{aligned}$$

Ya que el foco esta dado por $F = (h+p,k)$ entonces

$$F = (2+p,3)$$

además el foco $F$ está en la recta, luego satisface la ecuación $7x+3y=4$, reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} 7(2+p)+3\cdot 3 &= 4 \\ 14+7p+9 &= 4 \\ 7p &= -19 \\ p &= \tfrac{-19}{7} \end{aligned}$$

Por lo tanto el foco de la parábola es

$$F = (2+\frac{-19}{7},3) = (\frac{-5}{7},3)$$

y su ecuación es

$$\begin{aligned} (y-3)^2 &= 4p(x-2) \\ (y-3)^2 &= 4\left(\tfrac{-19}{7}\right)(x-2) \end{aligned}$$

**Observación:** La ecuación general de la parábola esta dada por

a Consideremos la ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje $X$.

$$\begin{aligned} (y-k)^2 &= -4p(x-h) \\ y^2-2ky+k^2 &= -4px+4ph \\ y^2-2ky+4px+k^2-4ph &= 0 \end{aligned}$$

Definamos las constantes

$$A_1 = -2k, \quad B_1 = 4p, \quad C_1 = k^2-4ph.$$

Reemplazando obtenemos la ecuación

$$y^2 + A_1y + B_1x + C_1 = 0$$

b Ahora consideremos la ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje $Y$

$$\begin{aligned} (x-h)^2 &= 4p(y-k) \\ x^2-2xh+h^2 &= 4py-4pk \\ x^2-2hx-4py+h^2+4pk &= 0 \end{aligned}$$

Definimos las constantes

$$A_2 = -2h, \quad B_2 = -4p, \quad C_2 = h^2+4pk.$$

Reemplazando obtenemos

$$x^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

**Proposición 2.5.9** *Sean $A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}^*$ entonces*

*a La ecuación $x^2 + Ax + By + C = 0$ corresponde a una parábola, con el eje focal paralelo al eje $Y$,*

*i El vértice $(h,k) = \left(\frac{-A}{2}, \frac{A^2-4C}{4B}\right)$,*

*ii El foco $F = (h, k+p)$, con $p = \frac{-B}{4}$,*

*iii La directriz $l : y = k - p$.*

*b La ecuación $y^2 + Ay + Bx + C = 0$ corresponde a una parábola, con el eje focal paralelo al eje $X$,*

*i El vértice $(h,k) = \left(\frac{A^2-4C}{4B}, \frac{-A}{2}\right)$,*

*ii El foco $F = (h+p, k)$ con $p = \frac{-B}{4}$,*

*iii La directriz $l : x = h - p$.*

**Ejemplo 2.5.10** Considere la ecuación de la parábola $2x^2 + 5x + y - 13 = 0$. Encuentre toda los elementos distinguidos de la parábola. □

**Solución 4**. Para determinar los elementos, completaremos cuadrado, para ello tenemos que la ecuación de la parábola

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 + 5x + y - 13 &=& 0 \\ 2x^2 + 5x &=& -y + 13 \quad / \cdot \frac{1}{2} \\ \left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) &=& \frac{-y}{2} + \frac{13}{2} \; / + \frac{25}{16} \\ \left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) &=& \frac{-y}{2} + \frac{13}{2} + \frac{25}{16} \\ \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 &=& \frac{-y}{2} + \frac{129}{16} \\ \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 &=& \frac{-1}{2}\left(y - \frac{129}{8}\right) \end{array}$$

Luego $4p = -\frac{1}{2}$ entonces $p = -\frac{1}{8}$.

Por lo tanto el vértice de la parábola esta dado por

$$V = (h,k) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{129}{8}\right)$$

El foco dado por

$$F = (h, k+p) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{129}{8} - \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{128}{8}\right) = \left(\frac{-5}{4}, 16\right)$$

La directriz de la parábola tiene como ecuación

$$l \quad : \quad y = k - p = \frac{129}{8} - \frac{-1}{8} = \frac{130}{8} = \frac{65}{4}$$

El eje focal es

$$x = \frac{-5}{4}$$

Y el lado recto mide

$$4p = \frac{1}{2}$$

### 2.5.3 Ejercicios Propuestos

1 Grafique y encuentre vértice, foco y directriz en las siguientes ecuaciones.

a $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

b $y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$

c $y^2 + 1 = x$

d $y^2 - x - 6y + 11 = 0$

e $y^2 - 6x + 6y + 27 + 27 = 0$

f $x^2 = -4x - 3y - 7$

g $4y^2 - 48x - 20y = 71$

2 Encuentre el o los puntos de intersección de las siguientes parábolas $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ e $y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$.

[Resp. $(2, -2)$ y $(2, 6)$]

3 Indique que representa la ecuación $x^2 + 4x - 8y + 36 = 0$, grafiquela y encuentre todas sus componentes.

4 Determinar la ecuación de la parábola cuya directriz pasa por $(-3, 0)$ con vértice en el origen.

[Resp. $y^2 = 12x$]

5 Encuentre la ecuación de la directriz de la parábola $y = 2x^2$.

[Resp. $y = \frac{-1}{8}$]

6 Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje paralelo al eje $X$ y que pasa por los tres puntos $(0, 0)$ , $(8, -4)$ y $(3, 1)$.

[Resp. $y^2 - x + 2y = 0$ ]

7 Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(4, -1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -3)$.

[Resp. $y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$ ]

8 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $(1, 1)$.

[Resp. $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ ]

9 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y - 1 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

[Resp. $x^2 - 4y - 4 = 0$ o bien $x^2 + 8y - 16 = 0$ ]

10 Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $3x + 9y - 11 = 0$.

[Resp. $x + 3y - 2 = 0$ ]

11 Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(1, 4)$ a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.

[Resp. $x + 2y - 9 = 0$ o $3x - 2y + 5 = 0$ ]

12 Determine la ecuación de la recta que es tangente a la parábola $x^2 = -5y$ en el punto $(5, -5)$.

[Resp. $L : y = -2x + 5$]

13 Hallar la ecuación de las tangentes a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$ y que pasa por el punto $(1, 4)$

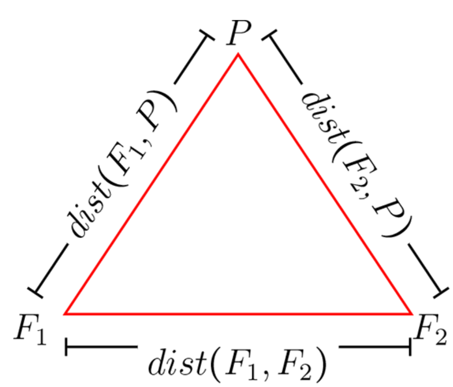
[Resp. $L_1 : 2y = -x + 9, \quad L_2 : 2y = 3x + 5$]

## 2.6 Elipse

**Definición 2.6.1** Una elipse es el conjunto de todos los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante, los dos puntos fijos son llamados focos. $\Diamond$

Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ donde $F_1$ y $F_2$ representan los focos de la elipse y $P$ un punto de la elipse, luego

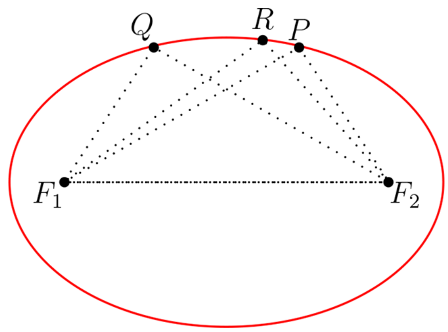
$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = r$$




Repitiendo el proceso para todos los puntos del plano que satisfacen la definición de la elipse tenemos el conjunto

$$\mathcal{E}_{F_1,F_2} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = r\}$$

Si graficamos todos los puntos que pertenecen a $\mathcal{E}_{F_1,F_2}$ tenemos lo siguiente:

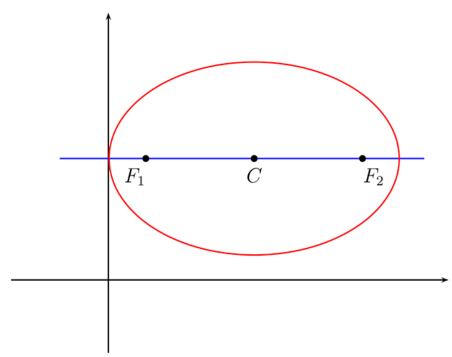



Consideremos la distancia entre los focos $dist(F_1, F_2)$ y el punto medio que hay entre ellos que llamaremos **centro** de la elipse que denotaremos con la letra $C$ y $l \in \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por ambos focos llamada el **eje focal** de la elipse. Por último, la longitud de la sumas de las distancias se llama **longitud del eje mayor**

### 2.6.1 Ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje $X$

Sea $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, con $C = (h, k)$ el centro de la elipse, $F_1$ y $F_2$ los focos y $P = (x, y) \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$ un punto cualquiera que pertenece a la elipse.

Como $C = (h, k)$ y el eje focal paralelo al eje $X$ luego $F_1 = (h + c, k)$, $F_2 = (h - c, k)$, de este modo tenemos la gráfica de la elipse para este caso.




A continuación, describiremos la ecuación de la elipses, para ellos consideremos los siguiente

$$\begin{array}{rcl} dist(F_1, P) + dist(F_2, P) & = & 2a \\ \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} + \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} & = & 2a \end{array}$$

Realizando el cambio de variable $u = x-h$ y $v = y-k$, para simplificar el calculo obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
2a &=& dist(P,F_1)+dist(P,F_2)\\
2a &=& \sqrt{(u-c)^2+v^2}+\sqrt{(u+c)^2+v^2}\\
2a-\sqrt{(u+c)^2+v^2} &=& \sqrt{(u-c)^2+v^2} \quad /()^2 \quad (*)\\
(2a-\sqrt{(u+c)^2+v^2})^2 &=& (\sqrt{(u-c)^2+v^2})^2\\
4a^2-4a\sqrt{(u+c)^2+v^2}+(u+c)^2+v^2 &=& (u-c)^2+v^2\\
(u+c)^2-(u-c)^2+4a^2 &=& 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2}\\
4a^2+4uc &=& 4a\sqrt{(x+c)^2+v^2} \quad /\frac{1}{4}\\
a^2+uc &=& a\sqrt{(u+c)^2+v^2} \quad /()^2 \quad (*)\\
a^4+2a^2uc+u^2c^2 &=& a^2((u+c)^2+v^2)\\
a^4+2a^2uc+u^2c^2 &=& a^2(u^2+2uc+c^2+v^2)\\
a^4+2a^2uc+u^2c^2 &=& a^2u^2+2a^2uc+a^2c^2+a^2v^2\\
a^2u^2-u^2c^2+a^2c^2+a^2v^2-a^4 &=& 0\\
u^2(a^2-c^2)+a^2v^2 &=& a^4-a^2c^2\\
u^2(a^2-c^2)+a^2v^2 &=& a^2(a^2-c^2) \quad /\frac{1}{a^2(a^2-c^2)}\\
\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{a^2-c^2} &=& 1
\end{array}$$

Como $2a > 2c$ entonces $a^2-c^2 > 0$, sea $b^2 = a^2-c^2 < a^2$, luego $b < a$.

Reemplazando tenemos

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2} = 1$$

**Observación:** Para lograr este resultado debemos considerar las dos restricciones (*), la primera de ella es:

$$2a-\sqrt{(u+c)^2+v^2} \geq 0 \Leftrightarrow (u+c)^2+v^2 \leq (2a)^2$$

y corresponde a circunferencias con centro en $F_2$ y de radio menor que $2a$, la segunda restricción es

$$4a^2+4uc \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{c} \leq u,$$

y son rectas paralelas al eje $v$, formando el semiplano derecho, además note que $-\frac{a^2}{c} < -a$, es decir, es el semiplano a la derecha de $-a$ .

**Proposición 2.6.2** *Sean $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ con $C = (h,k)$ representa el centro de la elipse, $F_1 = (c+h,k)$, $F_2 = (-c+h,k)$ los focos y $a \in \mathbb{R}^+$.*
*$P = (x,y) \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$ pertenece a la elipse cuya longitud del eje mayor es $2a$ si y sólo si satisface la ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \ \ con \ \ a > b, \ \ donde\ b^2 = a^2-c^2$$

**Ejemplo 2.6.3** Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el origen, el valor de $a = 4$, eje focal paralelo al eje $X$ y pasa por el punto $P = (3,2)$. □

**Solución 1**. Como su centro esta en el origen y $a = 4$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &=& 1\\
\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{b^2} &=& 1\\
\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2} &=& 1
\end{array}$$

Luego la elipse pasa por el punto $P = (3, 2)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} & = & 1 \\ \frac{3^2}{16} + \frac{2^2}{b^2} & = & 1 \\ \frac{9}{16} + \frac{4}{b^2} & = & 1 \quad / \cdot 16b^2 \\ 9b^2 + 4 \cdot 16 & = & 16b^2 \\ 64 & = & 16b^2 - 9b^2 \\ 64 & = & 7b^2 \end{array}$$

Luego el valor de $b^2$ es:

$$b^2 \quad = \quad \frac{64}{7} < a^2 = 16$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{64}{3}} = 1$$

**Ejemplo 2.6.4** Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el punto $(1, 3)$, el valor de $a = 4$, eje focal paralelo al eje $X$ y pasa por el punto $P = (2, 5)$. □

**Solución 2**. Como su centro esta en el origen y $a = 4$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{array}{rcl} \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} & = & 1 \\ \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{b^2} & = & 1 \end{array}$$

Luego la elipse pasa por el punto $P = (2, 7)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{array}{rcl} \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{b^2} & = & 1 \\ \frac{1^2}{16} + \frac{2^2}{b^2} & = & 1 \quad / \cdot 16b^2 \\ b^2 + 4 \cdot 16 & = & 16b^2 \\ 64 & = & 15b^2 \end{array}$$

Luego el valor de $b^2$ es:

$$b^2 \quad = \quad \frac{64}{15} < a^2 = 16$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{\frac{64}{15}} = 1$$

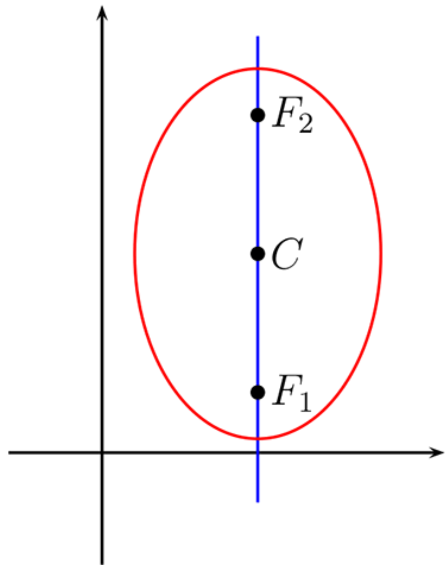
### 2.6.2 Ecuación de la elipse con eje focal en el eje $Y$

Sea $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$, donde $C = (h, k)$ representa el centro de la elipse, $F_1$ y $F_2$ los focos y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la elipse.

Como el centro es $C = (h, k)$ y el eje focal paralelo al eje $Y$ luego $F_1 = (h, k + c)$ y $F_2 = (h, k - c)$, por lo cual tenemos

$$\begin{array}{rcl} dist(F_1, P) + dist(F_2, P) & = & 2a \\ \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} & = & 2a \end{array}$$

Observemos la gráfica de la elipse para este caso.




Realizando el cambio de variable $v = x - h$ y $u = y - k$

$$\begin{aligned} dist(F_1, P) + dist(F_2, P) &= 2a \\ \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} &= 2a \\ \sqrt{(v)^2 + (u-c)^2} + \sqrt{(v)^2 + (u+c)^2} &= 2a \end{aligned}$$

Y es un expresión igual a la obtenida en el caso anterior $(*)$ de la sección anterior, luego usando el mismo desarrollo tenemos

$$u^2(a^2 - c^2) + v^2x^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

de manera similar definimos $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ con lo cual

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

volviendo a las variables originales obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

**Proposición 2.6.5** *Sean $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, con $C = (h, k)$ el centro de la elipse, $F_1 = (h, c+k)$, $F_2 = (h, -c+k)$ los focos y $a \in \mathbb{R}^+$.*
*$P = (x, y) \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$ pertenece a la elipse cuya longitud del eje mayor es $2a$ si y sólo si satisface la ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \quad con \quad a > b, \; donde \; b^2 = a^2 - c^2$$

**Ejemplo 2.6.6** Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el origen, el valor de $a = 6$, eje focal paralelo al eje $Y$ y pasa por el punto $P = (2, 5)$. □

**Solución 1**. Como su centro esta en el origen y $a = 6$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{aligned} \tfrac{x^2}{b^2} + \tfrac{y^2}{a^2} &= 1 \\ \tfrac{x^2}{b^2} + \tfrac{y^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

Luego la elipse pasa por el punto $P = (2,5)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{aligned} \tfrac{x^2}{b^2} + \tfrac{y^2}{36} &= 1 \\ \tfrac{4}{b^2} + \tfrac{25}{36} &= 1 \quad / \cdot 36b^2 \\ 4 \cdot 36 + 25b^2 &= 36b^2 \\ 144 &= 36b^2 - 25b^2 \\ 144 &= 11b^2 \\ b^2 &= \tfrac{144}{11} \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{\frac{144}{11}} + \frac{y^2}{36} = 1$$

**Ejemplo 2.6.7** Encuentre la ecuación de la elipse de centro $(4,3)$, el valor de $a = 6$, eje focal paralelo al eje $Y$ y pasa por el punto $P = (2,5)$. □

**Solución 2**. Como su centro esta en $(h,k) = (4,3)$ y $a = 6$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{aligned} \tfrac{(x-h)^2}{b^2} + \tfrac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \\ \tfrac{(x-h)^2}{b^2} + \tfrac{(y-k)^2}{6^2} &= 1 \\ \tfrac{(x-4)^2}{b^2} + \tfrac{(y-3)^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

Luego la elipse pasa por el punto $P = (2,5)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{aligned} \tfrac{(x-4)^2}{b^2} + \tfrac{(y-3)^2}{36} &= 1 \\ \tfrac{(4-2)^2}{b^2} + \tfrac{(3-5)^2}{36} &= 1 \\ \tfrac{4}{b^2} + \tfrac{4}{36} &= 1 \quad / \cdot 36b^2 \\ 4 \cdot 36 + 4b^2 &= 36b^2 \\ 144 &= 36b^2 - 4b^2 \\ 144 &= 32b^2 \end{aligned}$$

Luego el valor de $b^2$ es:

$$b^2 = \tfrac{144}{32} = \tfrac{9}{2}$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-4)^2}{\frac{9}{2}} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$$

**Observación:** Consideremos la ecuación de la elipse donde el eje focal es paralelo al eje $X$, para ello sean $C = (h,k)$ el centro de la elipse, $F_1$ y $F_2$ los focos y $P = (x,y)$ un punto cualquiera que pertenece a la elipse.

$$\tfrac{(x-h)^2}{a^2} + \tfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Luego desarrollando la ecuación obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} & = & 1 \ \ /(a^2b^2) \\
b^2[(x-h)^2]+a^2[(y-k)^2] & = & a^2b^2 \\
b^2[x^2-2xh+h^2]+a^2[y^2-2yk+k^2] & = & a^2b^2 \\
x^2b^2-2xhb^2+h^2b^2+y^2a^2-2yka^2+k^2a^2 & = & a^2b^2 \\
x^2b^2-2xhb^2+y^2a^2-2yka^2+k^2a^2+h^2b^2-a^2b^2 & = & 0
\end{array}$$

Definimos las siguientes constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \in \mathbb{R}$ dadas por

$$A_1 = b^2; \quad B_1 = -2hb^2; \quad C_1 = a^2; \quad D_1 = -2ka^2; \quad E_1 = k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2.$$

Entonces tenemos que la ecuación general de la elipse para este caso está dada por:

$$A_1x^2 + B_1x + C_1y^2 + D_1y + E_1 = 0$$

Ahora consideremos la ecuación de la elipse, con el eje focal es paralelo al eje $Y$ dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Haciendo un desarrollo similar al anterior, podemos definir $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$A_2 = a^2; \quad B_2 = -2ha^2; \quad C_2 = b^2; \quad D_2 = -2kb^2; \quad E_2 = k^2b^2 + h^2a^2 - a^2b^2.$$

Entonces tenemos que la ecuación general de la elipse para este caso está dada por:

$$A_2x^2 + B_2x + C_2y^2 + D_2y + E_2 = 0$$

**Proposición 2.6.8** *Sean $A, C \in \mathbb{R}^*$, $B, D, E \in \mathbb{R}$ la ecuación*

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E \ = \ 0$$

*define una elipse si y sólo si*

$$AC > 0 \quad y \quad (B^2C + D^2A - 4ACE)C > 0.$$

**Observación:** En algunos textos considera la primer condiciones solamente, pero debe notar que la ecuación $x^2 + 4y^2 + 1 = 0$, en el plano real tiene conjunto solución vacío, por ello no es fácil aceptar que es una elipse, ya que las suma de positivos es positiva, nunca cero.

**Ejemplo 2.6.9** Hallar la ecuación de la elipse de centro $(1, 2)$, uno de los focos es $(6, 2)$ y que pasa por el punto $(4, 6)$ □

**Solución 3**. Como su centro es $(1, 2)$ y el eje focal es paralelo al eje $X$. Luego su ecuación esta dada por:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} & = & 1 \\
\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2} & = & 1
\end{array}$$

Ya que pasa por el punto $(4, 6)$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2} & = & 1 \\
\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2} & = & 1 \\
\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2} & = & 1
\end{array}$$

Tenemos que la distancia del centro al foco es:

$$c = dist(C, F) = \sqrt{(1-6)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ b^2 &= a^2 - 25 \end{aligned}$$

reemplazando en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \tfrac{9}{a^2} + \tfrac{16}{b^2} &= 1 \\ \tfrac{9}{a^2} + \tfrac{16}{a^2-25} &= 1 \ / \cdot (a^2-25)a^2 \\ 9(a^2-25) + 16a^2 &= a^2(a^2-25) \\ a^4 - 25a^2 - 16a^2 - 9a^2 + 225 &= 0 \\ a^4 - 50a^2 + 225 &= 0 \end{aligned}$$

Sea $u = a^2$ entonces

$$u^2 - 50u + 225 = 0$$

Luego

$$u = \tfrac{50 \pm \sqrt{2500-900}}{2} = \tfrac{50 \pm \sqrt{1600}}{2} = \tfrac{50 \pm 40}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_1 &= \tfrac{50+40}{2} \quad \text{y} \quad u_2 = \tfrac{50-40}{2} \\ u_1 &= \tfrac{90}{2} \quad \text{y} \quad u_2 = \tfrac{10}{2} \\ u_1 &= 45 \quad \text{y} \quad u_2 = 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a^2 = 45 \quad \text{o} \quad a^2 = 5$$

Si $a^2 = 5$ tenemos

$$b^2 = a^2 - 25 = 5 - 25 = -20 \ (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Entonces $a^2 = 45$, luego

$$b^2 = a^2 - 25 = 45 - 25 = 20$$

Por lo tanto, al reemplazar los valores obtenido $a^2$ y $b^2$, se tiene la ecuación de la elipse solicitada

$$\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$$

### 2.6.3 Ejercicios Propuestos

1 Grafique y encuentre todos los elementos de la elipse de la ecuación.

a $9x^2 + 2y^2 + 36x + 4y + 20 = 0$

b $16x^2 + 9y^2 - 64x + 54y + 1 = 0$

c $25x^2 + 16y^2 + 150x - 64y = 102$

d $4x^2 + 6y^2 = 12$

e $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

f $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

g $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0$

2 Obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y su diámetro mayor es 6.

[Resp. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$]

3 Hallar la ecuación de la elipse de centro $(1, 2)$, uno de los focos es $(6, 2)$ y que pasa por el punto $(4, 6)$.

[Resp. $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$ ]

4 Determinar las coordenadas de los focos de la elipse $2x^2 + 7y^2 = 3$

[Resp. $F_1 = (\sqrt{\frac{15}{14}}, 0)$ , $F_2 = (-\sqrt{\frac{15}{14}}, 0)$ ]

5 Hallar los vértices y el área de un cuadrado con lados paralelos a los ejes de coordenados inscrito en la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 100$.

[Resp. $A = 16$ , $V_1 = (0, -0.4)$ , $V_2 = (0, 0.4)$ , $V_3 = (-0.3, 0)$ , $V_4 = (0.3, 0)$]

6 El centro de una elipse esta en el punto $(2, -4)$ el vértice y foco de un mismo lado del centro están en los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$ respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse.

[Resp. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$ ]

7 Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje $X$ . Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$.

[Resp. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ]

8 Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje $X$ y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

[Resp. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ ]

9 Hallar la ecuación de la elipse que contiene a los siguientes puntos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(-3, 3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

[Resp. $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$ ]

10 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje $Y$ es siempre igual al doble de su distancia del punto $(3, 2)$.

[Resp. $3x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 52 = 0$ ]

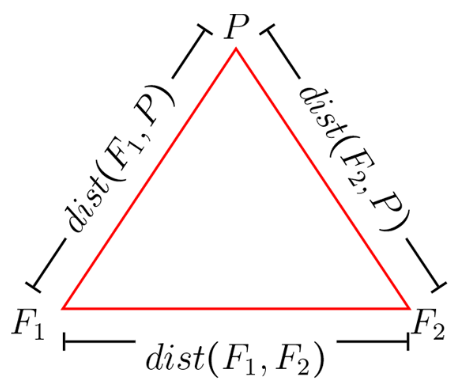
11 Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje $X$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares.

[Resp. $x^2 + 4y^2 + 4x + 16y + 4 = 0$ ]

## 2.7 Hipérbola

**Definición 2.7.1** Una hipérbola es una figura geométrica plano y corresponde al conjunto de todos los puntos que se encuentran en el plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante, los puntos fijos se llaman focos. $\Diamond$

Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ donde $F_1$ y $F_2$ son puntos fijos en el plano que denotaremos como focos y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto que satisface la definición de la hipérbola




entonces consideremos las distancias que hay entre estos 3 puntos

Como $P$ satisface la definición de la hipérbola tenemos

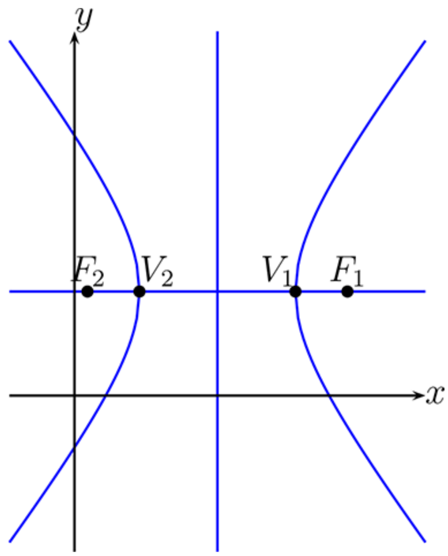
$$| \, dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \, | = r$$

Luego $\mathcal{H}_{F_1,F_2}$ representa al conjunto de todos los puntos que pertenecen a la hipérbola, es decir,

$$\mathcal{H}_{F_1,F_2} = \{P \in \mathbb{R}^2 \quad | \ | \, dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \, | = r\}$$

### 2.7.1 Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje $X$

Sean $V_1, V_2, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{H}_{F_1,F_2}$, donde $V_1, V_2$ representan los vertices de la hipérbola, $F_1$ y $F_2$ los focos y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la hipérbola.




Sea $C = (h, k)$ el centro entonces los focos para nuestro caso están dados por:

$$F_1 = (h - c, k) \quad y \quad F_2 = (h + c, k)$$

luego

$$\begin{aligned} \mid dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \mid &= 2a \\ \mid \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \mid &= 2a \end{aligned}$$

usando el cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$

$$\begin{aligned} \mid \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \mid &= 2a \\ \mid \sqrt{(u+c)^2 + v^2} - \sqrt{(u-c)^2 + v^2} \mid &= 2a \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos los siguientes casos

1
$$\sqrt{(u+c)^2 + v^2} - \sqrt{(u-c)^2 + v^2} = 2a$$

2
$$\sqrt{(u+c)^2 + v^2} - \sqrt{(u-c)^2 + v^2} = -2a$$

Si $P$ está en la parte izquierda de los focos tenemos que la primera ecuación es verdadero y si $P$ se encuentra en la parte derecha de los focos tenemos que la segunda ecuación es verdadero, luego podemos trabajar las dos ecuaciones del siguiente modo

$$\begin{aligned} \sqrt{(u \pm c)^2 + v^2} - \sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} &= 2a \qquad (*) \\ \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(u \mp c)^2 + y^2} \qquad /()^2 \\ (u \pm c)^2 + v^2 &= (2a + \sqrt{(u \mp c)^2 + y^2})^2 \\ u^2 \pm 2uc + c^2 + v^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} + (u \mp c)^2 + v^2 \\ u^2 \pm 2uc + c^2 + v^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} + u^2 \mp 2uc + c^2 + v^2 \\ \pm 4uc - 4a^2 &= 4a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} \qquad /\tfrac{1}{4} \\ \pm uc - a^2 &= a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} \qquad /()^2 \end{aligned}$$

Antes veremos la restricción

$$\begin{array}{rcl} & \pm uc - a^2 \geq 0 & \\ uc - a^2 \geq 0 & \vee & -uc - a^2 \geq 0 \\ u \geq \frac{a^2}{c} & \vee & u \leq -\frac{a^2}{c} \end{array}$$

luego es un semiplano en cada caso. Además como $2a < 2c$

$$\begin{array}{rcl} u^2c^2 \mp 2a^2uc + a^4 &=& a^2((u \mp c)^2 + v^2) \\ u^2c^2 \mp 2a^2uc + a^4 &=& a^2(u^2 \mp 2uc + c^2 + v^2) \\ u^2c^2 \mp 2a^2uc + a^4 &=& a^2u^2 \mp 2a^2uc + a^2c^2 + a^2v^2 \\ u^2(c^2 - a^2) - a^2v^2 &=& a^2(c^2 - a^2) \end{array}$$

Como $2a < 2c$ entonces $a^2 < c^2$, es decir, $c^2 - a^2 > 0$.

Por lo tanto, sea $b^2$ tal que

$$b^2 = c^2 - a^2 > 0$$

Reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} u^2(c^2 - a^2) - a^2v^2 &=& a^2(c^2 - a^2) \\ u^2b^2 - a^2v^2 &=& a^2b^2 \quad / \frac{1}{a^2b^2} \\ \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} &=& 1 \end{array}$$

volviendo a las variables originales obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

**Proposición 2.7.2** *Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{H}_{F_1,F_2}$, con $C = (h,k)$ el centro de la hipérbola, $F_1 = (h-c,k)$ y $F_2 = (h+c,k)$ los focos, los vértices son $V_1 = (h-a,k)$ y $V_2 = (h+a,k)$ y $P = (x,y)$ pertenece a la hipérbola si sólo si satisface la ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \ \textit{donde } b^2 = c^2 - a^2$$

**Ejemplo 2.7.3** Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un foco $F_1 = (5,0)$, el valor de $a = 2$ y el eje focal en el eje $X$. □

**Solución 1**. Como el centro de la hipérbola es $C = (0,0)$ y $F_1 = (5,0)$ tenemos $dist(C,F_1) = c$ entonces

$$dist(C,F_1) = \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2} = 5$$

Ya que $c = 5$, luego el valor de $b$ está dado por:

$$\begin{array}{rcl} c^2 &=& b^2 + a^2 \\ 5^2 &=& b^2 + 2^2 \\ b^2 &=& 21 \end{array}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &=& 1 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} &=& 1. \end{array}$$

**Ejemplo 2.7.4** Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C = (4, 3)$, un foco $F_1 = (8, 3)$, el valor de $a = 2$ y el eje focal paralelo al eje $X$. $\square$

**Solución 2**. Como el centro de la hipérbola es $C = (4, 3)$ y $F_1 = (8, 3)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$dist(C, F_1) = \sqrt{(8-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(4)^2} = 4$$

Ya que $c = 4$, luego el valor de $b$ está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ b^2 &= 12 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \tfrac{(x-4)^2}{a^2} - \tfrac{(y-3)^2}{b^2} &= 1 \\ \tfrac{(x-4)^2}{4} - \tfrac{(y-3)^2}{144} &= 1. \end{aligned}$$

## 2.7.2 Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje $Y$

Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, con $F_1$ y $F_2$ los focos de la hipérbola, $V_1, V_2$ los vértices y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la hipérbola.

Sea $C = (h, k)$ el centro de la hipérbola entonces los focos para nuestro caso son $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$ luego,

$$\begin{aligned} \mid dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \mid &= 2a \\ \mid \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \mid &= 2a \end{aligned}$$

usando el cambio de variable

$$v = x - h \quad \text{y} \quad u = y - k$$

$$\begin{aligned} \mid \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \mid &= 2a \\ \mid \sqrt{(v)^2 + (u+c)^2} - \sqrt{(v)^2 + (u-c)^2} \mid &= 2a \end{aligned}$$

Y es un expresión igual a la obtenida en el sección anterior, luego usando el mismo desarrollo tenemos

$$\tfrac{u^2}{a^2} - \tfrac{v^2}{b^2} = 1$$

volviendo a las variables originales obtenemos

$$\tfrac{(y-k)^2}{a^2} - \tfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

**Proposición 2.7.5** *Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ con $C = (h, k)$ el centro de la hipérbola, $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$ los focos, los vértices $F_1 = (h, k - a)$ y $F_2 = (h, k + a)$ $P = (x, y)$ pertenece a la hipérbola si y sólo si satisface la ecuación*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \ \textit{donde } b^2 = c^2 - a^2$$

**Ejemplo 2.7.6** Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un foco $F_1 = (0, 7)$, el valor de $a = 3$ y el eje focal en el eje $Y$. $\square$

**Solución 1**. Como el centro de la hipérbola es $C = (0, 0)$ y $F_1 = (0, 7)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$dist(C, F_1) = \sqrt{(0-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{(7)^2} = 7$$

Ya que $c = 7$, luego el valor de $b$ está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 7^2 &= b^2 + 3^2 \\ b^2 &= 40 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \tfrac{y^2}{a^2} - \tfrac{x^2}{b^2} &= 1 \\ \tfrac{y^2}{9} - \tfrac{x^2}{49} &= 1. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.7.7** Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C = (5, 9)$, un foco $F_1 = (5, 16)$, el valor de $a = 3$ y el eje focal en el eje $Y$. $\square$

**Solución 2**. Como el centro de la hipérbola es $C = (5, 9)$ y $F_1 = (5, 16)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$dist(C, F_1) = \sqrt{(5-5)^2 + (16-9)^2} = \sqrt{(7)^2} = 7$$

Ya que $c = 7$, luego el valor de $b$ está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 7^2 &= b^2 + 3^2 \\ b^2 &= 40 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \tfrac{(y-9)^2}{a^2} - \tfrac{(x-5)^2}{b^2} &= 1 \\ \tfrac{(y-9)^2}{9} - \tfrac{(x-5)^2}{49} &= 1. \end{aligned}$$

**Observación:** Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{H}_{F_1,F_2}$, con $C = (h, k)$ el centro de la hipérbola , $F_1$ y $F_2$ los focos

Consideremos la ecuación de la hipérbola donde el eje focal es paralelo al eje $X$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Desarrollemos la ecuación

$$\begin{aligned} \tfrac{(x-h)^2}{a^2} - \tfrac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \ \ /(a^2b^2) \\ b^2[(x-h)^2] - a^2[(y-k)^2] &= a^2b^2 \\ b^2[x^2 - 2xh + h^2] - a^2[y^2 - 2yk + k^2] &= a^2b^2 \\ x^2b^2 - 2xhb^2 + h^2b^2 - y^2a^2 + 2yka^2 - k^2a^2 &= a^2b^2 \\ x^2b^2 - 2xhb^2 - y^2a^2 + 2yka^2 - k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Se define las constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \in \mathbb{R}$ tales que

$$A_1 = b^2; \quad B_1 = -2hb^2; \quad C_1 = -a^2; \quad D_1 = 2ka^2; \quad E_1 = -k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2.$$

$$A_1x^2 + B_1x + C_1y^2 + D_1y + E_1 = 0$$

Análogamente para la otra ecuación

$$\tfrac{(y-k)^2}{a^2} - \tfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

podemos transformarla

$$A_2y^2 + B_2y + C_2x^2 + D_2x + E_2 = 0$$

Con

$$A_2 = b^2; \quad B_2 = -2kb^2; \quad C_2 = -a^2; \quad D_2 = -2kb^2; \quad E_2 = -k^2b^2 + h^2a^2 - a^2b^2.$$

**Proposición 2.7.8** *Sean $A, C \in \mathbb{R}^*, B, D, E \in \mathbb{R}$ la ecuación*

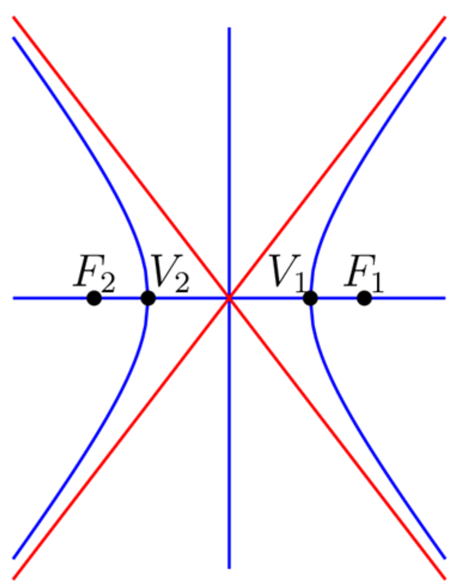
$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$$

*define una hipérbola si y sólo si*

$$AC < 0 \wedge CB^2 + AD^2 - 4ACE \neq 0$$

### 2.7.3 Asíntotas de la hipérbola

Las asíntotas de una hipérbola son rectas que se encuentran tangentes a la hipérbola; es decir, para valores muy grandes la recta y una rama de la hipérbola están muy juntas y que gráficamente se representa de la siguiente forma



**Observación:** Consideremos la ecuación de la hipérbola donde su eje focal se encuentra en el eje $X$

$$\begin{array}{rcll} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} &=& 1 & /(a^2b^2) \\ b^2x^2-a^2y^2 &=& a^2b^2 & \end{array}$$

Despejemos $y$

$$\begin{array}{rcll} b^2x^2-a^2y^2 &=& a^2b^2 & \\ a^2y^2 &=& b^2x^2-a^2b^2 & \\ y^2 &=& \frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2} & /\sqrt{} \\ y &=& \pm\sqrt{\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}} & \\ y &=& \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)} & \\ y &=& \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2(1-\frac{a^2}{x^2})} & \\ y &=& \pm\frac{b}{a}x\sqrt{(1-\frac{a^2}{x^2})} & \end{array}$$

Para valores muy grandes de $x$ el valor de $\frac{a^2}{x^2}$ se va acercando a cero.

Luego

$$\frac{b}{a}\ x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \simeq \pm\frac{b}{a}\ x$$

para valores de $x$ muy grandes

$$y=\frac{b}{a}\ x, \quad y=-\frac{b}{a}\ x$$

**Definición 2.7.9** Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y la hipérbola $\mathcal{H}_{F_1,F_2}$.
Si el eje focal es paralelo a eje $X$, su ecuación esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

entonces la ecuación de las asíntotas de la hipérbola están dadas por

$$(y-k)=\pm\frac{b}{a}\ (x-h)$$

Si el eje focal es paralelo a eje $Y$, su ecuación esta dada por

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

entonces la ecuación de las asíntotas de la hipérbola están dadas por

$$(y-k)=\pm\frac{a}{b}\ (x-h).$$

$\Diamond$

**Ejemplo 2.7.10** Encuentre el lugar geométrico y toda la información posible de los puntos $P=(x,y)$ cuya distancia al punto fijo $(1,4)$ sea igual a $\frac{5}{4}$ de la distancia a la recta $5x-1=0$.
$\square$

**Solución**. Calculemos la distancia del punto $P=(x,y)$ al punto $Q=(1,4)$

$$dist(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$$

Calculemos la distancia del punto $P$ a la recta $l:5x-1=0$.

$$dist(l,P) \;=\; \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|5x+0y+(-1)|}{\sqrt{(5)^2+(0)^2}}=\frac{|5x-1|}{5}$$

Donde $dist(P,Q)$ es igual $\frac{5}{4}$ a $dist(l,P)$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} &= \frac{5}{4}\frac{|5x-1|}{5}\\
\sqrt{x^2-2x+1+y^2-8y+16} &= \frac{|5x-1|}{4} / \cdot ()^2\\
x^2-2x+y^2-8y+17 &= \frac{(5x-1)^2}{16} / \cdot 16\\
16x^2-32x+16y^2-128y+272 &= 25x^2-10x+1\\
9x^2+22x-16y^2+128y-271 &= 0\\
(9x^2+22x)+(-16y^2+128y) &= 271\\
9\left(x^2+\frac{22}{9}x\right)-16\left(y^2-\frac{128}{16}y\right) &= 271
\end{aligned}$$

Ahora completaremos cuadrado

$$\begin{aligned}
9\left(x^2+2\frac{11}{9}x+\frac{121}{81}-\frac{121}{81}\right)-16(y^2-2\cdot 4y+16-16) &= 271\\
9\left(x^2+2\frac{11}{9}x+\frac{121}{81}\right)-9\cdot\frac{121}{81}-16(y^2-2\cdot 4y+16)-16\cdot(-16) &= 271
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9\left(x+\frac{11}{9}\right)^2-16(y-4)^2 &= 271+\frac{121}{9}-256\\
9\left(x+\frac{11}{9}\right)^2-16(y-4)^2 &= \frac{256}{9}\\
\frac{(x+\frac{11}{9})^2}{\frac{256}{9\cdot 9}}-\frac{(y-4)^2}{\frac{256}{9\cdot 16}} &= 1\\
\frac{\left(x+\frac{11}{9}\right)^2}{\left(\frac{16}{9}\right)^2}-\frac{(y-4)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

De donde podemos obtener que el centro de la hipérbola es $(h,k)=(-\frac{11}{9},4)$, además $a=\frac{16}{9}$ y $b=\frac{4}{3}$, con estos valores obtenemos el valor de $c$

$$c^2 \;=\; a^2+b^2=\frac{256}{81}+\frac{16}{9}=\frac{400}{81}=\left(\frac{20}{9}\right)^2$$

entonces $c=\frac{20}{9}$, luego sus focos están dados por:

$$F_1=\left(-\frac{11}{9}-\frac{20}{9},4\right)=\left(-\frac{31}{9},4\right) \quad \text{y} \quad F_2=\left(-\frac{11}{9}+\frac{20}{9},4\right)=(1,4)$$

Los vértices son

$$V_1=\left(-\frac{11}{9}-\frac{16}{9},4\right)=\left(-\frac{27}{9},4\right) \quad \text{y} \quad V_2=\left(-\frac{11}{9}+\frac{16}{9},4\right)=\left(\frac{5}{9},4\right)$$

Las asíntotas están dadas por

$$\begin{aligned}
(y-k) &= \pm\frac{b}{a}(x-h)\\
(y-4) &= \pm\frac{\frac{16}{12}}{\frac{16}{9}}\left(x+\frac{11}{9}\right)
\end{aligned}$$

$$(y-4)=\frac{3}{4}\left(x+\frac{11}{9}\right) \quad \text{y} \quad (y-4)=-\frac{3}{4}\left(x+\frac{11}{9}\right).$$

### 2.7.4 Ejercicios Propuestos

1 Graficar y encontrar todos los elementos que componen a la cónica de ecuación

a $9y^2 = 16x^2 - 36y - 96x + 684$

b $9x^2 - 25y^2 - 18x - 50y = 191$

2 Considere la recta $l_m$ de ecuación $y = mx + 1$. Determine todos los valores de $m \in \mathbb{R}$ tales que las recta $l_m$ interseca a la hipérbola $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$.

[Resp. $m \in \left] -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right[$ y $m \neq \pm\sqrt{2}$ ]

3 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(6, 0)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x - 3 = 0$

[Resp. $3x^2 - y^2 = 27$ ]

4 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4, 6)$, tiene el eje focal paralelo al eje $X$, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$.

[Resp. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ ]

5 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(3, 2)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $y + 1 = 0$.

[Resp. $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$ ]

6 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(2, -1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2 = 0$.

[Resp. $3x^2 - y^2 + 20x - 2y + 11 = 0$ ]

7 Hallar los valores de $m$ para los cuales las rectas de la familia $y = mx - 1$ son tangentes a la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$

[Resp. $m = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ ]

8 Demostrar que la elipse $2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $4y^2 - x^2 = 4$ se intersecan.

| Resumen de Cónicas | | | |
|---|---|---|---|
| | Parábola | Elipse | Hipérbola |
| | $p = dist(V, F)$<br>$p = dist(V, l)$<br>focos sobre el eje | $2a$ =longitud eje mayor<br>$2b$ =longitud eje menor<br>$c^2 = a^2 - b^2$<br>focos sobre el eje mayor | $2a$ =longitud eje transversal<br>$2b$ =longitud eje conjugado<br>$c^2 = a^2 + b^2$<br>focos sobre el eje transversal |
| Eje focal paralelo al eje $X$ | | | |
| Ecuación | $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ | $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ | $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ |
| Centro | | $(h, k)$ | $(h, k)$ |
| Foco(s) | $(h+p, k)$ | $(h \pm c, k)$ | $(h \pm c, k)$ |
| Vértice(s) | $(h, k)$ | $(h \pm a, k)$ | $(h \pm a, k)$ |
| Eje focal paralelo al eje $Y$ | | | |
| Ecuación | $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ | $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ | $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ |
| Centro | | $(h, k)$ | $(h, k)$ |
| Foco(s) | $(h, k+p)$ | $(h, k \pm c)$ | $(h, k \pm c)$ |
| Vértice(s) | $(h, k)$ | $(h, k \pm a)$ | $(h, k \pm a)$ |
| Lado recto | $4p$ | $\frac{2b^2}{a}$ | $\frac{2b^2}{a}$ |
| Excentri cidad | $e = 1$ | $e = \frac{c}{a} < 1$ | $e = \frac{c}{a} > 1$ |