Universidad de Valparaíso
CHILE
Tradición Excelencia Innovación

Introducción al Cálculo

Daniel Jiménez.

Cuarta Versión
2019

La primera versión del presente apunte, corresponde a un trabajo de recopilación realizado por los alumnos Victor Bravo, Elena Orellana y Ambar Toledo de la Carrera de Matemáticas de nuestra Universidad durante el año 2008. El material se obtuvo de distintos años en que fue dictada la asignatura de Introducción al Calculo y el trabajo consistió en darle una presentación coherente a los diferentes borradores seleccionados.

Índice

Capítulo 1

Los Números Reales

Introducción del Capítulo

Existe tres manera de construir los numeros reales, una de ellas necesita primero construir los naturales, después los enteros y los racionales ambos se construyen con una relación de equivalencia en el producto cartesiana del anterior. Finalmente se construyen el conjunto de las sucesiones en los racionales para dar paso bajo una relación de equivalencia al conjunto de los numeros reales que satisface las propiedades que a continuación presentaremos

La anterior construction anterior demanda un tiempo que no se dispone para la exposición de este texto por ello, a continuación presentaremos los números reales $\mathbb{R}$, de manera axiomática, esto es, aceptaremos que existe un conjunto, el de los números reales, el cual bajo las operaciones de suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ verifica ciertas propiedades.

1.1 Introducción

Veremos algunas de las propiedades que satisfacen algunos conjuntos notables, de modo de reconocerlas después en el conjunto de los números reales.

Consideremos en primer lugar el conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

llamado conjunto de los **Números Naturales**, este conjunto provisto de la operación producto $(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

1 **Clausura:** Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n \cdot m$ es un único elemento en $\mathbb{N}$.

2 **Asociatividad:** Para todo $n, m, r \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(n \cdot m) \cdot r = n \cdot (m \cdot r).$$

3 **Existencia de neutro:** Existe $e = 1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot n = n \cdot 1 = n.$$

4 **Conmutatividad:** Para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Pero en $\mathbb{N}$ no se verifica la propiedad de **existencia de inverso multiplicativo**, esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$ no existe un elemento $n' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \cdot n' = 1.$$

Si consideramos ahora la operación suma $(+)$ en $\mathbb{N}$, tenemos que esta verifica (1), (2), (3) y (4). Del mismo modo, no cumple la propiedad del inverso aditivo, esto es, dado $n \in \mathbb{N}$ no existe un elemento $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n + m = 0.$$

Consideremos ahora el conjunto de los **Números Enteros**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

este conjunto lo podemos expresar en términos del conjunto anterior, esto es

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^-,$$

$$\mathbb{N}^- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto bajo la suma verifica las siguientes propiedades:

1 **Clausura:** Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $a + b$ es un único elemento en $\mathbb{Z}$.

2 **Asociatividad:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3 **Existencia de neutro:** Existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbb{Z}$

$$0 + a = a + 0 = a.$$

4 **Existencia de elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $(-a) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

5 **Conmutatividad:**Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a + b = b + a.$$

Ahora bien, si consideramos la operación producto $(\cdot)$ en $\mathbb{Z}$ esta verifica (1),(2),(3) y (5). Sin embargo no se verifica (4) pues en general para $a \in \mathbb{Z}$ no existe $a^{'} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a \cdot a^{'} = 1.$$

El hecho de que $\mathbb{Z}$ con la operación suma $(+)$ satisface las propiedades antes mencionadas se resume diciendo que $\mathbb{Z}$ con la suma es un grupo.

Consideremos

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

el cual recibe el nombre de conjunto de los **Números Racionales.**

Se definen en él las siguientes operaciones:

a Suma

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

b Producto

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Con estas operaciones se tiene que, $\mathbb{Q}$ con $(+)$ y $\mathbb{Q}-\{0\}$ con $(\cdot)$ son grupos, es decir, satisfacen las propiedades de **clausura, asociatividad, existencia de neutro y existencia de inverso**, además se verifica la **conmutatividad**.

Otro conjunto notable es el conjunto de los **Números Irracionales** que usualmente es denotado por $\mathbb{I}$.

Algunos ejemplos de números irracionales son:

$$\pi, \quad e, \quad \sqrt{2}.$$

Observación: El conjunto $\mathbb{I}$ con la operación $(+)$ no satisface la propiedad de clausura, en efecto, consideremos los irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, tenemos que $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, el cual es un número racional ($0 = \frac{0}{1}$ por ejemplo), de esto es evidente que $\mathbb{I}$ no es un grupo.

1.2 Estructura de Grupo

Ahora estableceremos las secuencias de propiedades que permiten generalizar los ejemplos dados en la sección anterior, para ello necesitamos considerar un conjunto no vacío, donde se define la operación binaria, que habitualmente se denota por $+$ y $\cdot$, cuyo significado es dado dos elementos obtengo un único elemento en el mismo conjunto.

Definición 1.2.1 Sea G un conjunto no vacío. Diremos que $*$ es una operación binaria o clausura en G si para todo a, b en G existe un único $a * b$ en G, es decir

$$(\forall a, b \in G)(\exists!\, c \in G)(a * b = c).$$

$\diamondsuit$

Definición 1.2.2 Un **grupo** es un conjunto no vacío G y una operación binaria $*$, tal que para todo a, b y c en G se cumplen los siguientes:

a **Asociatividad:** Para todo a, b, c en G, se cumple

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

En símbolos

$$(\forall a, b, c \in G)(a * (b * c) = (a * b) * c).$$

b **Existencia de elemento neutro:** Existe e elemento neutro de G, tal que para todo a en G, se cumple

$$a * e = a = e * a.$$

En símbolos

$$(\exists\, e \in G)(\forall a \in G)(a * e = a = e * a).$$

c **Existencia de elemento inverso:** Para todo a en G, existe b en G, tal que

$$a * b = e = b * a.$$

En símbolos

$$(\forall a \in G)(\exists\, b \in G)(a * b = e = b * a).$$

En adelante diremos que $(G, *)$ es un grupo, para indicar que G con la operación $*$ es un grupo.

d Diremos que G es un **grupo abeliano** o conmutativo, si y sólo si $(G, *)$ es un grupo y satisface la propiedad de **conmutatividad**, esto es:

$$(\forall a, b \in G)(a * b = b * a).$$

$\Diamond$

Proposición 1.2.3 *Sea G un grupo entonces*

a El elemento neutro $e \in G$ es único.

b El inverso de un elemento es único.

Ejemplo 1.2.4 Los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ con la suma habitual de números son grupos abelianos. Con la multiplicación usual el conjunto $\mathbb{Q} - \{0\}$ es también un grupo abeliano. $\square$

Ejemplo 1.2.5 Sea X un conjunto no vacío y definamos

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{Q}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{Q} \mid f \text{ es una función}\}$$

el conjunto de todas las funciones de X en $\mathbb{Q}$. "La definición del concepto **función** será visto con detalle en el capítulo siguiente", y la operación suma $(+)$ definida por:

$$\begin{array}{rcrcl} f+g & : & X & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & x & \longmapsto & (f+g)(x) := f(x) + g(x) \end{array}$$

entonces $\mathcal{F}(X, \mathbb{Q})$ es un grupo. La demostración sera vista en el capítulo de funciones $\square$

1.3 Números Reales $\mathbb{R}$

En esta sección, daremos los axiomas que define la estructura aditiva y multiplicativa de los Número Reales, y partir de ellas la definición de potencia multiplicativa. Colocando en relieve las propiedades que nos permite resolver los problemas lineales en los Números Reales.

1.3.1 Axiomas de $\mathbb{R}$ como cuerpo

Existe un conjunto que denotaremos por $\mathbb{R}$ que es no vacío, cuyos elementos serán llamados **números reales**, en el cual están definidas las operaciones binarias suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, que satisfacen las siguientes propiedades o axiomas

Axioma 1.3.1 $0, 1 \in \mathbb{R},\ 0 \neq 1$.

Axioma 1.3.2 $(\mathbb{R}, +)$ *es un grupo abeliano.*

Axioma 1.3.3 $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano.*

Axioma 1.3.4 *Distributividad:*

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c).$$

Ya que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o $\mathbb{R}$ satisface estos axiomas o propiedades con las operaciones binarias dadas, se dice que $\mathbb{R}$ es un **cuerpo**.

Notación: Si no hay peligro de confusión, en adelante anotaremos sólo "ab", para referirnos al producto "$a \cdot b$", con $a, b \in \mathbb{R}$.

Observación: La propiedad Distributiva, también se le denomina **Factorización**, en los casos cuando se usa de derecha a izquierda, para ello ambos sumando deben tener un factor en común.

Proposición 1.3.5 *En $\mathbb{R}$ tenemos que:*

a El neutro aditivo es un número real único.

b El neutro multiplicativo es un número real único.

c El inverso aditivo de un número real es único.

d El inverso multiplicativo de un número real no nulo es único.

Demostración. Supongamos que 0 y $0'$ son neutros aditivos, luego $0 + 0' = 0$, ya que 0 es el neutro, del mismo modo $0 + 0' = 0'$, y además la suma es única, luego

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

Ahora supongamos que dado $a \in \mathbb{R}$, los números $b,\ b'$ son los inversos, luego $a + b' = 0$ y $b + a = 0$, de la propiedad asociatividad tenemos

$$\begin{array}{rcl} b + (a + b') & = & (b + a) + b' \\ b + 0 & = & 0 + b' \\ b & = & b' \end{array}$$

Las otras proposiciones se demuestran de manera similar ■

Notación: $-a$ denota el inverso aditivo de a para todo $a \in \mathbb{R}$ y b^{-1} denota el inverso multiplicativo de b, con $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Observación: Un técnica de demostración bastante utilizada, es llamada **método del absurdo**. Este método es muy útil para demostrar que proposiciones del tipo $p \Rightarrow q$ son verdaderas. Notemos las siguientes equivalencias

$$\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{\overline{p} \vee q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}.$$

El propósito es suponer que la proposición $p \wedge \overline{q}$ es verdadera, a partir de ella y con pasos deductivos, llegar a una contradicción, esto significa que la proposición $p \wedge \overline{q}$ debe ser falsa y por lo tanto, su negación $\overline{p \wedge \overline{q}}$ es verdadera, de este modo se tiene que $p \Rightarrow q$ es verdadero.
Ejemplo 1.3.6 Dada $m \in \mathbb{Z}$, demostrar que se cumple
Si m^2 es par, entonces m es par. □

Demostración. La proposición es una implicación, donde $p : m^2$ par y $q : m$ impar. Procedamos por absurdo.

Supongamos $p : m^2$ par y $\overline{q} : m$ impar son verdaderas. Como m es impar entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m = 2k + 1$$

de esto tenemos que

$$\begin{aligned} m^2 &= (2k+1)(2k+1) \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

luego $m^2 = 2k^{'} + 1$, con $k^{'} = 2k^2 + 2k$, $k^{'} \in \mathbb{Z}$ de donde obtenemos que m^2 es un número impar, lo que contradice nuestro supuesto de que m^2 es par, así

$$m^2 \text{ par } \Rightarrow m \text{ par.}$$ ■

Proposición 1.3.7 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

a $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

b $-(-a) = a$.

c $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \quad a \neq 0, b \neq 0$.

d $(a^{-1})^{-1} = a$.

e $a \cdot 0 = 0$.

f $-(ab) = (-a)b = a(-b)$.

g $(-a)(-b) = ab$.

h $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$.

Demostración.

a Sean a y b números reales, entonces también lo es $a+b$ y como $(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano, entonces existe $-(a+b)$ inverso aditivo de $a+b$ por lo tanto

$$(a+b)+(-(a+b))=0.$$

Por otra parte, también existen $-a$ y $-b$ tales que:

$$\begin{aligned}(a+b)+(-a)+(-b) &= (a+(-a))+(b+(-b))\\ &= 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

de esta última igualdad podemos concluir que $(-a)+(-b)$ es también inverso de $a+b$ y luego por unicidad del inverso tenemos que

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

b Como $(-a)$ es un número real y $(\mathbb{R},+)$ es un grupo abeliano, entonces existe $-(-a)$ inverso aditivo de $(-a)$ tal que

$$(-a)+(-(-a))=0.$$

Por otro lado

$$(-a)+a=0,$$

de estas igualdades obtenemos que $-(-a)$ y a son inversos de $(-a)$, luego por unicidad del inverso se tiene que

$$-(-a)=a.$$

c Análoga a (a), cambiando de notación aditiva a notación multiplicativa.

d Análoga a (b), cambiando de notación aditiva a notación multiplicativa.

e Como 0 es neutro aditivo se tiene que:

$$0=0+0,$$

entonces por distributividad tenemos

$$a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$$

luego,

$$a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0.$$

Ahora, sumando a ambos lados de la igualdad anterior el inverso aditivo de $a\cdot 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}a\cdot 0+(-(a\cdot 0)) &= a\cdot 0+a\cdot 0+(-(a\cdot 0))\\ 0 &= a\cdot 0+(a\cdot 0+(-(a\cdot 0)))\\ 0 &= a\cdot 0+0\\ 0 &= a\cdot 0\end{aligned}$$

así,

$$a\cdot 0=0.$$

f Es claro que

$$ab + (-(ab)) = 0.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= (a + (-a))b \\ &= 0 \cdot b \\ &= 0 \quad \text{(por item anterior)} \end{aligned}$$

Tenemos entonces que tanto $(-a)b$ como $-(ab)$ son inversos de ab, luego por unicidad del inverso se tiene que

$$-(ab) = (-a)b$$

Además, por conmutatividad en la anterior igualdad, se tiene

$$\begin{aligned} -(ab) &= -(ba) \\ &= (-b)a \\ &= a(-b) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(-a)b = -(ab) = a(-b).$$

g Notemos que

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -(a(-b)) \quad \text{(usando (f))} \\ &= -(-(ab)) \quad \text{(usando (f))} \\ &= ab \quad \text{(usando (b))} \end{aligned}$$

luego,

$$(-a)(-b) = ab.$$

h $(\Rightarrow)$ Observemos que

$$(ab = 0) \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

es una proposición del tipo $p \Rightarrow (q \vee r)$, la cual es equivalente a $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r$, que es lo que usaremos para probar esta parte de la demostración.

Supongamos entonces $a \neq 0$, luego existe a^{-1} tal que

$$\begin{aligned} ab = 0 \ &\Rightarrow \ a^{-1}ab = a^{-1}0 \\ &\Rightarrow \ 1 \cdot b = 0 \\ &\Rightarrow \ b = 0. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Claramente si $a = 0 \vee b = 0$ se tiene que $ab = 0$.

Concluyendo así la demostración.

■

Notación: También debemos tener presente

$$a \cdot b^{-1} = ab^{-1} = \frac{a}{b} = a : b$$

Con la notación anterior, y las propiedades demostrada tenemos

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \qquad \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\left(\frac{-a}{b}\right)$$

Ejemplo 1.3.8 Reemplazar $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{1}{3}$ en

$$x = \frac{ab - a}{a + 1}$$

$\square$

Solución.

$$x = \frac{ab-a}{a+1} = \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{-1}{2}}{\frac{-1}{2} + 1} = \frac{\frac{-1}{6} - \frac{-1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{-1+3}{6}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

1.3.2 Potencias Enteras

Definición 1.3.9 Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define la potencia real de base a y exponente n por:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{veces}}$$

Más precisamente, sea $a \in \mathbb{R}$, se define por recurrencia

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Además para el caso $a \neq 0$, se define

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= (a^{-1})^n = \frac{1}{(a)^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{n-veces}}} \end{aligned}$$

$\lozenge$

Teorema 1.3.10 *Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces:*

a $a^{m+n} = a^m a^n$.

b $a^n b^n = (ab)^n$.

c $(a^n)^m = a^{nm}$.

d $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

e $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Demostración. Probaremos sólo (a) quedando las demás propiedades como ejercicio. Procederemos por inducción como sigue.

Sea $p(n) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n); \quad n \in \mathbb{N}_0$

$$p(0) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+0} = a^m a^0)$$

lo cual es verdadero por definición de potencia.

Supongamos $p(n)$ verdadero y demostremos que $p(n+1)$ es verdadero.

$$p(n+1) : (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n+1} = a^m a^{n+1})$$

$$\begin{array}{rcll} a^{m+n+1} & = & a^{m+n}a & \text{(definición de potencia)} \\ & = & (a^m a^n)a & \text{(hipótesis de inducción)} \\ & = & a^m(a^n a) & \text{(asociatividad)} \\ & = & a^m a^{n+1} & \text{(definición de potencia)} \end{array}$$

tenemos entonces que

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n)$$

es verdadero por teorema de inducción.

Sea $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}_0$, luego

$$\begin{array}{rcl} a^{m+n} & = & a^{m-(-n)} \\ & = & a^{-(-m+(-n))} \\ & = & (a^{-1})^{-m+(-n)} \\ & = & (a^{-1})^{-m}(a^{-1})^{-n} \\ & = & a^m a^n \end{array}$$

de este modo podemos concluir que

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(a^{m+n} = a^m a^n). \qquad \blacksquare$$

Observación: Las tres primeras propiedades antes mencionadas son válidas para el caso $a = 0$ o $b = 0$, siempre que las expresiones que las definen tengan sentido en $\mathbb{R}$, es decir, que $n, m \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo 1.3.11 Simplificar completamente, para los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ donde estén bien definida la siguiente expresión:

$$X = \left(\frac{a^{-3}b}{a^2b^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{a^2b}\right)^{-3}.$$

$\square$

Solución.

$$\begin{array}{rcl} X & = & \left(\frac{a^{-3}b}{a^2b^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{a^{-2}b^{-1}}{a^2b}\right)^{-3} \\ & = & \left(\dfrac{\frac{b}{a^3}}{\frac{a^2}{b^4}}\right)^{-2} : \left(\dfrac{\frac{1}{a^2b}}{a^2b}\right)^{-3} \\ & = & \left(\frac{b^5}{a^5}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{(a^2b)^2}\right)^{-3} \\ & = & \left(\frac{a^5}{b^5}\right)^{2} : (a^2b)^6 \\ & = & \frac{a^{10}}{b^{10}} : a^{12}b^6 = \frac{a^{10}}{a^{12}b^{16}} = \frac{1}{a^2b^{16}}. \end{array}$$

De este modo se tiene que

$$X = \frac{1}{a^2 b^{16}}.$$

1.3.3 Productos Notables

Los productos notables, corresponden a una factorización de una expresión algebraica, que son de uso habitualmente en los diferentes problemas desarrollados en este capítulo, la demostración de estas propiedades, se obtiene de las propiedades de potencias y los axiomas de los números reales. Los de uso más frecuente se listas a continuación

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

a $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

b $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

c $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

d $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$.

e $(\forall m \in \mathbb{Z}^+)(\, a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})\,)$.

Ejemplo 1.3.12 Simplificar completamente, para los valores de $a \in \mathbb{R}$ donde estén bien definida la siguiente expresión:

$$X = \frac{\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a} - \dfrac{a}{1-a}}.$$

□

Solución. Sea $a \in \mathbb{R}$, tal que la expresión está bien definida, luego podemos simplificar.

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a} - \dfrac{a}{1-a}} \\
&= \frac{\dfrac{a^2 + (1-a)^2}{a(1-a)}}{\dfrac{(1-a)^2 - a^2}{a(1-a)}} \\
&= \frac{a^2 + (1-a)^2}{a(1-a)} \frac{a(1-a)}{(1-a)^2 - a^2} \\
&= \frac{a^2 + (1-a)^2}{(1-a)^2 - a^2} \\
&= \frac{2a^2 - 2a + 1}{1 - 2a}.
\end{aligned}$$

1.3.4 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición 1.3.13 Una ecuación lineal en la variable x, es una expresión del tipo

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

$\lozenge$

Encontrar el conjunto solución para una ecuación de este tipo, corresponde a determinar $x \in \mathbb{R}$ de modo que la igualdad en anterior se verifique.

Determinemos ahora la solución de esta ecuación

$$\begin{array}{rrcl} & ax + b & = & 0 \\ \Leftrightarrow & ax & = & -b \\ \Leftrightarrow & x & = & -\dfrac{b}{a}. \end{array}$$

Luego el conjunto solución de la ecuación lineal $ax + b = 0$ es

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

Ejemplo 1.3.14 Determinar la solución de la ecuación

$$\frac{1}{4}x - 3 = \frac{5}{4} + 7x.$$

$\square$

Solución 1. Primero debemos llevar esta ecuación a la forma dada anteriormente, obteniendo

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{1}{4}x - 3 & = & \frac{5}{4} + 7x \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4}x - 7x & = & \frac{5}{4} + 3 \\ \Leftrightarrow & \frac{1-28}{4}x & = & \frac{5+12}{3} \\ \Leftrightarrow & -\frac{27}{4}x & = & \frac{17}{3} \\ \Leftrightarrow & x & = & -\frac{68}{81} \end{array}$$

ahora despejando tenemos que la solución esta dada por

$$x = -\frac{68}{81}.$$

o bien el conjunto solución es

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{68}{81} \right\}$$

Ejemplo 1.3.15 Determinar la solución de la ecuación

$$4x - 3\pi = 5\sqrt{2} - 8x.$$

$\square$

Solución 2. Primero debemos llevar esta ecuación a la forma dada anteriormente, obteniendo

$$\begin{array}{rrcl} & 4x-3\pi & = & 5\sqrt{2}-8x \\ \Leftrightarrow & 4x+8x & = & 3\pi+5\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & 12x & = & 3\pi+5\sqrt{2} \end{array}$$

ahora despejando tenemos que la solución esta dada por

$$x=\frac{3\pi+5\sqrt{2}}{12}.$$

o bien el conjunto solución es

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{3\pi+5\sqrt{2}}{12}\right\}$$

Observación: Por el momento estamos usando el resultado, que nos entrega la existencia de la raíz cuadrada de un número no negativo, en particular $\sqrt{2}$.

Ejemplo 1.3.16 Determine el valor de $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ de modo que la solución de la ecuación lineal

$$7\lambda x+3\lambda=4$$

sea igual a $-\frac{3}{5}$. $\square$

Solución 3. Primero determinemos la solución del ejemplo, esto es

$$\begin{array}{rrcl} & 7\lambda x+3\lambda & = & 4 \\ \Leftrightarrow & 7\lambda x & = & 4-3\lambda \end{array}$$

como $\lambda \neq 0$ luego, la solución de la ecuación es:

$$x=\frac{4-3\lambda}{7\lambda}$$

Pero ella debe cumplir con:

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{4-3\lambda}{7\lambda} & = & -\frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & 20-15\lambda & = & -21\lambda \\ \Leftrightarrow & 6\lambda & = & -20 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\lambda=-\frac{10}{3}.$$

Definición 1.3.17 Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right|$$

donde a_{ij}, b_i y $x_j \in \mathbb{R}, \quad \forall i=1,2,\ldots,m, \forall j=1,2,\ldots,n.$ $\Diamond$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, consiste en determinar todas las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisface todas las ecuaciones.

Observación: En general el proceso para resolver un sistema de ecuaciones lineales, es recursivo, y consiste en escoger una variable en una ecuación y eliminar esta variable en las otras ecuaciones lineales, amplificando y restando cada ecuación de modo que el coeficiente sea cero de la variable escogida, obteniendo un nuevo sistema omitiendo la ecuación con la cual se comenzó.

Se continua de la misma manera, es decir, se escoge una variable de alguna ecuación y se eliminar la variable, hasta obtener un sistema que cada ecuación tiene una variable que no aparece en las otras y la últimas una igualdad de números o contener una variable. De acuerdo a ello se tiene que el conjunto solución es del siguiente modo

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales cumple una de las tres posibilidades siguientes:

a El conjunto solución tiene sólo un elemento.

b El conjunto solución tiene infinitos elementos.

c El conjunto solución es vacío.

Ejemplo 1.3.18 Resolver el sistema

$$\begin{array}{rcr|} x-5y & = & -3 \\ 3x-y & = & 8 \\ \hline \end{array}$$

$\square$

Solución 4. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcr|} x-5y & = & -3 \\ 3x-y & = & 8 \\ \hline \end{array}$$

Si multiplicamos por -5 la segunda ecuación y la sumamos con la primera se obtiene la ecuación

$$-14x = -43$$

de donde $x = \dfrac{43}{14}$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos $y = \dfrac{17}{14}$.

Luego el sistema tiene única solución, y esta es

$$x = \frac{43}{14},\ y = \frac{17}{14}$$

o de manera equivalente

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{43}{14}, \frac{17}{14} \right) \right\}.$$

Ejemplo 1.3.19 Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x-y+z & = & 0 \end{array}\right|$$

$\square$

Solución 5. Multiplicando la segunda ecuación por -1 y sumándola con la primera obtenemos la ecuación

$$2y = 1$$

de donde $y = \dfrac{1}{2}$.

Luego reemplazando obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} x+z & = & \frac{1}{2} \\ x+z & = & \frac{1}{2} \end{array}\right|$$

Como ambas ecuaciones son iguales, se tiene que $x = \dfrac{1}{2} - z$, donde $z \in \mathbb{R}$ es arbitrario, así el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones y el conjunto solución lo podemos expresar del siguiente modo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} & = & \left\{ \left(\dfrac{1}{2} - z,\ \dfrac{1}{2},\ z \right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ (x,\ y,\ z) \mid (\exists t \in \mathbb{R})(x = \dfrac{1}{2} - t \wedge y = \dfrac{1}{2} \wedge z = t) \right\} \end{array}$$

Ejemplo 1.3.20 Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} -2x+y+z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \\ x+y-2z & = & -2 \end{array}\right|$$

$\square$

Solución 6. Dado el sistema ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} -2x+y+z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \\ x+y-2z & = & -2 \end{array}\right|$$

De la primera ecuación escogemos la variable y y eliminemos de las otras reemplazando en el sistema de ecuación se tiene que

$$\left.\begin{array}{rcr} -3x+3z & = & 0 \\ 3x-3z & = & -2 \end{array}\right|$$

Simplificando, obtenemos $x - z = 0$, eliminando en la tercer ecuación obtenemos que $0 = -2$, lo cual es claramente una contradicción, en consecuencia el sistema tiene solución vacía.

1.3.5 Problemas de Planteo

Comenzaremos recordando algunos conceptos que serán de gran utilidad para la resolución de problemas:

a Se dice que y es el q por ciento de x, si y sólo si

$$y = \frac{q}{100}x.$$

b La razón entre los números $a : b$ es el cociente

$$\frac{a}{b}.$$

Se llama **proporción** a una igualdad entre dos razones, por ejemplo

$$a : b = c : d$$

la cual se lee a es a b como c es a d.

a Se dice que a es **directamente proporcional** a b si y sólo si existe una constante k tal que

$$a = kb.$$

b Se dice que a es **inversamente proporcional** a b si y sólo si existe una constante k tal que

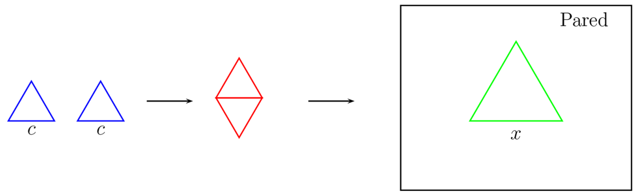
$$a = k\frac{1}{b}.$$

La constante k (en ambos casos) es llamada factor de proporcionalidad.

c Sea T un triángulo equilátero de lado a.

$$\begin{array}{lccc} \text{Altura de} & : & h & = & \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \\ \text{área de} & : & A & = & \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}. \end{array}$$

Ejemplo 1.3.21 Para concluir un trabajo, un albañil corta dos pedazos de cerámica siendo cada uno un triángulo equilátero de base c. Al unir estos pedazos por uno de sus lados, se forma un rombo el cual al ser pegado en la pared no alcanza a cubrir la superficie deseada por el maestro, quedando por rellenar un espacio con una cerámica cuya forma debe ser también un triángulo equilátero, pero de área igual al 60% del rombo. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de esta última cerámica para que se tenga el trabajo terminado?.



$\square$

Solución 1. Sea x la longitud del lado de la cerámica que buscamos.

Se tiene que el área del rombo es dos veces el área de los triángulos equiláteros de lado c, esto es

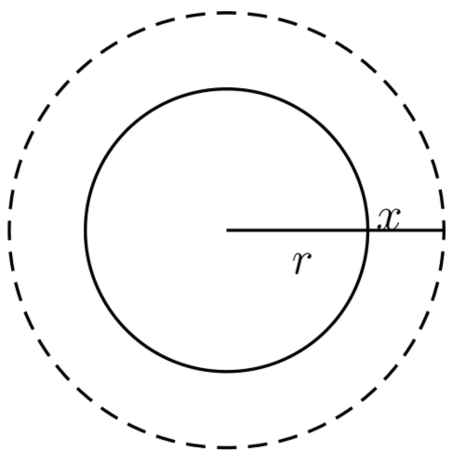
$$\text{Área del rombo} = 2\left(\frac{c^2\sqrt{3}}{4}\right),$$

pero el área del triángulo de lado x es el 60% del área del rombo, o sea

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{60}{100}\frac{c^2\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{6}{5}c^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{6}{5}}\ c.$$

Así la longitud del lado es $x = c\sqrt{\frac{6}{5}}$.

Ejemplo 1.3.22 En que tanto por ciento debe aumentarse el radio de una circunferencia para que su área aumente en un 30%.



$\square$

Solución 2. Sean $A = \pi r^2$ el área de la circunferencia de radio r y x la longitud del radio que debemos aumentar para que su área aumente en un 30%.

Debemos ver que tanto por ciento es x de r.

Tenemos que el área de la circunferencia más el 30% de la misma está dada por

$$1,3\pi r^2 = \pi(r+x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1.3}r = r + x \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{1,3} - 1\right) r \approx 0.14r$$

De aquí tenemos que x es aproximadamente el 14% de r, con lo cual concluimos que el radio debe aumentar en un $100(\sqrt{1,3} - 1)\%$ para obtener un 30% más de área.

Ejemplo 1.3.23 Dos personas A y B se encuentran realizando un trabajo. Si A realiza el trabajo en 3 horas y B realiza el trabajo en 5 horas. ¿Cuánto tiempo demoraran en hacer el trabajo juntos?. $\square$

Solución 3. Sean T el trabajo y x el tiempo (en horas) que demorarán en hacer el trabajo los dos obreros.

Como A demora 3 horas en realizar el trabajo, tenemos que en una hora A realiza $\frac{T}{3}$ del trabajo, razonando del mismo modo se tiene que B realiza $\frac{T}{5}$ del trabajo en una hora.

De acuerdo a esto podemos concluir que en una hora ambos realizan $\frac{T}{3}+\frac{T}{5}=\frac{8T}{15}$ del trabajo.

Luego tenemos que el trabajo total esta dado por la siguiente ecuación

$$\frac{8T}{15}x = T \Leftrightarrow x = \frac{15}{8}$$

simplificando obtenemos que $x = 1.875$ horas. Por lo tanto tenemos que los obreros demoran 1.875 horas en realizar el trabajo juntos.

Ejemplo 1.3.24 Un número entero positivo de dos cifras excede en 18 a seis veces la suma de sus cifras. Si la cifra de las decenas excede en 5 a la de las unidades, ¿cuál es el número?. $\square$

Solución 4. Sea x la cifra de las unidades e y la cifra de las decenas, en primer lugar tenemos que el número buscado es [1] $N = 10y + x$, ahora bien de acuerdo a la información del problema tenemos que

$$10y + x = 6(x + y) + 18 \text{ y que } y = x + 5.$$

En consecuencia tenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcr} -5x + 4y & = & 18 \\ x - y & = & -5 \end{array}\right|$$

multiplicando la segunda ecuación por 4 y sumándola con la primera obtenemos que $x = 2$ y con esto que $y = 7$.

Por lo tanto el número buscado es $N = 7 \cdot 10 + 2 = 72$.

Ejemplo 1.3.25 Una pareja de estudiantes universitarios debe resolver un determinado problema. Después que el primero de ellos a trabajado durante 7 horas en la resolución del problema y el segundo a trabajado durante 4 horas en la solución del mismo, juntos han completado $\frac{5}{9}$ de la solución total. Si ellos siguieran trabajando juntos durante 4 horas más, solo les quedaría por resolver $\frac{1}{18}$ del problema. ¿Cuánto tardaría cada uno en resolver completamente el problema?. $\square$

Solución 5. Sea s la solución del problema. Denotemos por x la cantidad de horas que tardaría el primer estudiante en resolver el problema y denotemos por "y" la cantidad de

[1] Si un número N tiene n cifras $N_0, N_1, \ldots, N_{n-1}$ ordenados de izquierda a derecha entonces $N = N_{n-1}10^{n-1} + \cdots + N_1 10 + N_0$

horas que tardaría el segundo estudiante en dar solución al problema. Entonces en una hora el primer estudiante realiza $\frac{s}{x}$ de la solución completa mientras que el segundo realiza en el mismo tiempo $\frac{s}{y}$ de la solución completa.

De acuerdo a la información del problema tenemos que

$$7\frac{s}{x} + 4\frac{s}{y} = \frac{5s}{9}.$$

Ahora bien como ellos trabajarán juntos durante 4 horas, realizarán $\frac{4s}{x} + \frac{4s}{y}$ de la solución, que es igual a

$$s - \left(\frac{5s}{9} + \frac{s}{18}\right) = \frac{7s}{18}$$

así se tiene que

$$\frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} = \frac{7s}{18}$$

luego tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{7s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{5s}{9} \\ \frac{4s}{x} + \frac{4s}{y} & = & \frac{7s}{18} \end{array}\right|$$

simplificando obtenemos,

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} & = & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} & = & \frac{7}{18} \end{array}\right|$$

resolviendo tenemos que $x = 18$ e $y = 24$. Por lo tanto el primer estudiante tarda 18 horas en dar solución al problema, mientras el segundo tarda 24 horas en realizar la misma tarea.**Observación:** Recuerde que en este tipo de problema se asume que, las personas trabajan todo el tiempo igual "proporcional", y que el trabajo todo el tiempo es igual "proporcional".

1.4 $\mathbb{R}$ es un Cuerpo Ordenado

La construcción de $\mathbb{R}$ como cuerpo ordenado, se puede caracterizar con una relación de orden total o a través del cono positivo, en esta presentación hemos escogido la segunda es por ello definimos los siguiente axiomas.

1.4.1 Axiomas de Orden

Existe un subconjunto de $\mathbb{R} - \{0\}$, el cual sera denotado por $\mathbb{R}^+$. Los elementos de este subconjunto se llaman números reales positivos y cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 1.4.1 *La suma es cerrada, esto es si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$.*

Axioma 1.4.2 *El producto es cerrado, esto es si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $ab \in \mathbb{R}^+$.*

Axioma 1.4.3 *Ley de Tricotomía.*
Si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$a \in \mathbb{R}^+ \ \veebar \ a = 0 \ \veebar \ -a \in \mathbb{R}^+.$$

Observación: Los axiomas recién dados nos permiten ordenar totalmente los números reales y aún más graficar este orden en una recta, llamada recta real.

Proposición 1.4.4 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces se verifican:*

i *Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces $a^2 \in \mathbb{R}^+$, en particular $1 \in \mathbb{R}^+$.*

ii *Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$.*

iii *Si $a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge b - c \in \mathbb{R}^+$ entonces $a - c \in \mathbb{R}^+$.*

iv *$b - a \in \mathbb{R}^+$ si y sólo si $(b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+$.*

v *Si $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}^+$ entonces $bc - ac \in \mathbb{R}^+$.*

vi *Si $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge -c \in \mathbb{R}^+$ entonces $ac - bc \in \mathbb{R}^+$.*

Demostración.

i Tenemos que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces por axioma

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces por axioma Axioma 1.4.2, $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$, es decir

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Si $-a \in \mathbb{R}^+$ entonces por axioma Axioma 1.4.1, $(-a)(-a) \in \mathbb{R}^+$ pero por proposición Proposición 1.3.7 parte (7), $(-a)(-a) = (-a)^2 = a^2$, luego $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

Así

$$a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+.$$

ii Procedamos por absurdo.

Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y supongamos que $a^{-1} \notin \mathbb{R}^+$, entonces

$$a^{-1} = 0 \quad \veebar \quad -(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+.$$

Supongamos $a^{-1} = 0$ entonces $aa^{-1} = 0$, pero $aa^{-1} = 1$, lo cual es una contradicción y por lo tanto $a^{-1} \neq 0$.

Supongamos que $-(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+$. Como $a \in \mathbb{R}^+$ tenemos por axioma Axioma 1.4.2 que $-(a^{-1})a = -1 \in \mathbb{R}^+$, lo cual es una contradicción.

Luego tenemos que

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+.$$

iii Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} & a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge b - c \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \;& (a - b) + (b - c) \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \;& a + (-b + b) - c \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \;& a + 0 - c \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \;& a - c \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

iv Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} & b - a \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \;& b - a + 0 \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \;& b - a + c - c \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \;& (b + c) + (-a - c) \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \;& (b + c) + (a + c) \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

v Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} & b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \;& (b - a)c \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \;& bc - ac \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

vi Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} & b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge -c \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \;& (b - a)(-c) \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \;& (-bc) - (-ac) \in \mathbb{R}^+ \\ \Rightarrow \;& ac - bc \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

■

Definición 1.4.5 Se define el conjunto de los números reales negativos como

$$\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} \mid -a \in \mathbb{R}^+\}.$$

♢

Observación: Notemos que por el axioma 3 podemos descomponer $\mathbb{R}$ en la unión disjunta de $\mathbb{R}^+, \{0\}$ y $\mathbb{R}^-$, esto es

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} \mathbb{R}^-.$$

Definición 1.4.6 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se dice que a es **mayor** que b ó b es menor que a si y sólo si

$$a - b \in \mathbb{R}^+$$

este hecho se anota como

$$a > b \quad \text{o bien} \quad b < a.$$

Diremos que a es **mayor o igual** que b o bien b es menor o igual que a si y sólo si a es mayor que b o a es igual a b, es decir

$$a > b \ \text{ o } \ a = b,$$

de modo abreviado anotaremos este hecho como sigue

$$a \geq b \ \text{ o bien } \ b \leq a.$$

$\Diamond$

Observación: De acuerdo a las notaciones precedentes, tenemos:

i $a \in \mathbb{R}^+$ si y sólo si $a > 0$.

ii $a \in \mathbb{R}^-$ si y sólo si $a < 0$.

Corolario 1.4.7 *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$

i Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ *entonces* $a^2 > 0$.

ii Si $a > 0$ *entonces* $a^{-1} > 0$.

iii Si $a > b \wedge b > c$ *entonces* $a > c$.

iv $b > a$ *si y sólo si* $b + c > a + c$.

v Si $b > a \wedge c > 0$ *entonces* $bc > ac$.

vi Si $b > a \wedge c < 0$ *entonces* $bc < ac$.

Notación: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, por comodidad se utilizara la siguiente notación $a \leq b \leq c$ para denotar $a \leq b \wedge b \leq c$.

Teorema 1.4.8 [Tricotomía]. *Para todo* $a, b \in \mathbb{R}$, *se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones*

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Demostración. Directa del axioma 3 y que $a - b \in \mathbb{R}$. ■

Observación: La relación $a \leq b$, para $a, b \in \mathbb{R}$ es una **relación de orden total.** Pues se verifican que, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

a Reflexividad
$$a \leq a.$$

b Antisimetría
$$(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b.$$

c Transitividad
$$(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c.$$

d Tricotomía
$$a < b \ \veebar \ a = b \ \veebar \ b < a.$$

Proposición 1.4.9 *Sean* $p, q \in \mathbb{Q}$ *con* $p < q$, *entonces existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $p < r < q$.

Demostración. Para la demostración debemos tener presente el corolario Corolario 1.4.7

$$\begin{aligned} p < q \quad &\Rightarrow \quad p + p < p + q \qquad \text{por corolario parte } iv \\ &\Rightarrow \quad 2p < p + q \\ &\Rightarrow \quad p < \frac{p+q}{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} p < q \quad &\Rightarrow \quad p+q < q+q \quad \text{por corolario parte } iv \\ &\Rightarrow \quad p+q < 2q \\ &\Rightarrow \quad \frac{p+q}{2} < q. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que existe $r = \dfrac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$. ■

1.4.2 Raíz n-ésima

La existencia de la raíz n-ésima, se demuestra usando el axioma del supremo, que aún no hemos presentado, por ello asumiremos los siguientes resultados.

Proposición 1.4.10 *Dado a un número real positivo y un número natural n, existe un único b real positivo tal que*

$$a = b^n$$

en símbolos

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! b \in \mathbb{R}^+)(b^n = a).$$

Definición 1.4.11 El número b de la propiedad anterior se llama **raíz n-ésima** de a y se denota por

$$b = \sqrt[n]{a} \quad \vee \quad b = a^{\frac{1}{n}}.$$

Más aún, si $m \in \mathbb{Z}$ se define

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m \text{ con } a > 0 \text{ y } n \in \mathbb{N},$$

ahora bien si n resulta ser un número impar, podemos extender esta definición a bases negativas, esto es

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \quad a > 0.$$

◊

Observación: Si $a \geq 0$ podemos asegurar que

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

están bien definida y tiene sentido todas ellas

Proposición 1.4.12 *Si $a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ entonces*

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}.$$

Este hecho nos dice que las propiedades de potencia dadas en el Teorema se preservan para exponentes racionales.

Proposición 1.4.13 *Si n es un número natural par y $a < 0$, entonces no existe un número real b tal que*

$$a = b^n.$$

Demostración. Supongamos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$a = b^n,$$

como n es par se tiene que $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ luego

$$a = b^{2k} = (b^k)^2.$$

Ahora si $b = 0$ entonces $a = 0$ y si $b \neq 0$, entonces $(b^k)^2 > 0$, es decir $a > 0$. Lo cual en ambos casos es una contradicción pues $a < 0$. ■

Proposición 1.4.14 *Si n es un número natural impar y $a < 0$, entonces existe un único número real b tal que*

$$a = b^n.$$

Demostración. Como $a < 0$, luego $-a > 0$, por la propiedad Proposición 1.4.10, se tiene que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$-a = b^n,$$

como n es impar se tiene que $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ luego

$$a = -(b^n) = -(b^{2k})b = ((-b)^2)^k(-b) = (-b)^n.$$

El cual debe ser único por la propiedad. ■

Ejemplo 1.4.15 $\sqrt{2}$ es irracional. □

Solución 1. En efecto procedamos por absurdo, es decir supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, esto es

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, de modo tal, que la fracción $\frac{p}{q}$ esta simplificada al máximo, ahora bien

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow \quad p^2 &= 2q^2 \end{aligned}$$

luego tenemos que p^2 es un número par, entonces por (**??**) p es par, es decir $p = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, luego tenemos que

$$p^2 = 4k^2$$

pero $p^2 = 2q^2$, por lo tanto $2q^2 = 4k^2$ de aquí que $q^2 = 2k^2$, lo cual nos dice que q^2 es un número par y nuevamente por (**??**) tenemos que q es par.

Hemos concluido entonces que p y q son pares lo que contradice el supuesto que la fracción $\frac{p}{q}$ estaba simplificada al máximo, de este modo obtenemos por absurdo que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Ejemplo 1.4.16 Simplificar completamente, para los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ donde estén bien definida la siguiente expresión:

$$X = \frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-b}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}(a+b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2(a^2+b^2)(a+b)^{-\frac{1}{2}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}}.$$

□

Solución 2.

$$\begin{aligned}
X &= \frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-b}} - (a-b)^{\frac{3}{2}}(a+b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2(a^2+b^2)(a+b)^{-\frac{1}{2}}}{(a-b)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{(a+b)^3}}{\sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{(a-b)^3}}{\sqrt{a+b}} - \frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{\sqrt{(a+b)^4} + \sqrt{(a-b)^4} - 2a^2 - 2b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2 - 2a^2 - 2b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2-2a^2-2b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{0}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}} = 0
\end{aligned}$$

En este caso se tiene $X = 0$.

Observación: Racionalizar una fracción , consiste en obtener un expresión equivalente, en la cual el denominador correspondiente, no incluye expresiones con raíces. Para lograr este cometido se recurre a los Productos Notables.

Ejemplo 1.4.17 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

□

Solución 3.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 1.4.18 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

□

Solución 4. Para resolver este problema tenga presente

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Ejemplo 1.4.19 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

□

Solución 5.

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{\sqrt{2}+1}$$

Ejemplo 1.4.20 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$$

$\square$

Solución 6.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}\\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}\\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2}}\\ &= \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.21 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$\square$

Solución 7.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4\cdot 2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

Ejemplo 1.4.22 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$$

$\square$

Solución 8. Para resolver este problema tenga presente

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}^3+1^3} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$$

Ejemplo 1.4.23 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$$

$\square$

Solución 9.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-1^2}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2(2+\sqrt{6})}\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}\\ &= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{6})}{2(4-6)}\\ &= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(\sqrt{6}-2)}{4}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.24 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$$

$\square$

Solución 10.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})(2-\sqrt{2})}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.25 Racionalizar la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}$$

$\square$

Solución 11. Para resolver este problema tenga presente

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}{4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(4+2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{8-4}\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.26 Para los valores de $a=\sqrt{3}$, $b=(-2)^{-1}$, $c=\frac{2}{-3}$.
Determine en forma exacta y racionalizada el valor de

$$A=\frac{1+\frac{a}{bc}}{\frac{1}{b}-\frac{a}{c}}$$

$\square$

Solución 12. Simplifiquemos antes de reemplazar la expresión que la define

$$A=\frac{1+\frac{a}{bc}}{\frac{1}{b}-\frac{a}{c}}=\frac{\frac{bc+a}{bc}}{\frac{c-ba}{bc}}=\frac{bc+a}{c-ba}$$

Ahora reemplacemos los valores conocidos

$$A=\frac{(-2)^{-1}\cdot\frac{2}{-3}+\sqrt{3}}{\frac{2}{-3}-(-2)^{-1}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\frac{2}{-2\cdot-3}+\sqrt{3}}{\frac{2}{-3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{3}+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}}=\frac{2+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}$$

Finalmente racionalizamos

$$A=\frac{2+6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}\cdot\frac{3\sqrt{3}+4}{3\sqrt{3}+4}=\frac{(2+6\sqrt{3})(3\sqrt{3}+4)}{(3\sqrt{3})^2-4^2}=\frac{62+30\sqrt{3}}{11}$$

1.4.3 Ecuación de Segundo Grado

Definición 1.4.27 Se llama ecuación de segundo grado en la variable x a una expresión del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Además, se llama polinomio de segundo grado en la variable x a una expresión del tipo

$$ax^2 + bx + c \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

$\Diamond$

Ahora determinaremos las soluciones de la ecuación de segundo grado, para ello veamos lo siguiente

$$\begin{array}{rrcl} & ax^2 + bx + c &=& 0 \quad / \cdot 4a \\ \Leftrightarrow & 4a^2x^2 + 4abax + 4ac &=& 0 \\ \Leftrightarrow & (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 - b^2 + 4ac &=& 0 \\ \Leftrightarrow & (2ax + b)^2 &=& b^2 - 4ac \end{array}$$

Notemos que estas ecuación tiene solución o raíces en $\mathbb{R}$ propiedad Proposición 1.4.14 si y sólo si

$$b^2 - 4ac \geq 0.$$

y en este caso podemos calcular

$$\begin{array}{rrcl} & 2ax + b &=& \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\ \Leftrightarrow & 2ax &=& -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ \Leftrightarrow & x &=& \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{array}$$

Además note que, en el caso que el discriminante es no negativo, podemos factorizar el polinomio de segundo grado del siguiente modo

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Definición 1.4.28 El discriminante de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ o del polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ corresponde a la expresión

$$\triangle = b^2 - 4ac.$$

$\Diamond$

Teorema 1.4.29 *Considerando la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$o el polinomio $ax^2 + bx + c$, tenemos que:*

a *Si $\triangle > 0$, entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones o raíces distintas en $\mathbb{R}$*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}.$$

b *Si $\triangle = 0$, entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones raíces iguales en*

$\mathbb{R}$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

c *Si $\triangle < 0$, entonces la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene soluciones vacía o no tiene raíces en $\mathbb{R}$.*

Observación: Si denotamos $\mathcal{S}$ al conjunto solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, entonces tenemos que

a Si $\triangle > 0$, $\mathcal{S} = \{x_1, x_2\}$.

b Si $\triangle = 0$, $\mathcal{S} = \{x_1\}$.

c Si $\triangle < 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Ejemplo 1.4.30 Determinar las raíces y factoricé el polinomio

$$5x^2 + 7x - 3.$$

$\square$

Solución 1. Como $\triangle = (7)^2 + 60 = 109 > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales y distintas, a saber:

$$x_1 = \frac{-7+\sqrt{109}}{10}, \quad x_2 = \frac{-7+\sqrt{109}}{10}.$$

La factorización esta dada por

$$5x^2 + 7x - 3 = 5\left(x - \frac{-7+\sqrt{109}}{10}\right)\left(x - \frac{-7-\sqrt{109}}{10}\right)$$

Ejemplo 1.4.31 Determinar las raíces y factoricé el polinomio

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3.$$

$\square$

Solución 2. En este caso $\triangle = (2\sqrt{3})^2 - 12 = 0$, luego la ecuación tiene una raíz real (dos raíces iguales)

$$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}.$$

La factorización es la siguiente

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = (x+\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = (x+\sqrt{3})^2$$

Ejemplo 1.4.32 Determinar, si existen las raíces de la ecuación

$$x^2 + x + 1.$$

$\square$

Solución 3. Como $\triangle = -3 < 0$, tenemos que la ecuación no tiene raíces reales y por lo tanto no se puede factorizar en producto de factores lineales.

Ejemplo 1.4.33 Resolver la ecuación

$$\sqrt{x} + x = 12.$$

$\square$

Solución 4. La restricción del problema es $\mathbb{R}_0^+$ y usemos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$ es decir $u^2 = x$.

Reemplazando tenemos que

$$u^2 + u - 12 = 0,$$

y su discriminate es $\triangle = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 > 0$, luego tenemos que

$$u = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

es decir

$$u = 3 \ \vee \ u = -4$$

pero volviendo a la variable original, tenemos una sola posibilidad

$$\sqrt{x} = 3$$

y por lo tanto $S = \{9\}$.

Ejemplo 1.4.34 Resolver la ecuación

$$x^2 - x = \frac{9}{x^2 - x}.$$

$\square$

Solución 5. La restricción del problema es $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, luego

$$\begin{aligned} (x^2 - x)^2 &= 9 \\ x^2 - x &= \pm\sqrt{9} \\ x^2 - x \mp 3 &= 0 \end{aligned}$$

Para la primera ecuación $x^2 - x - 3 = 0$, se tiene $\triangle = 13 > 0$. luego la solución es

$$S_1 = \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Para la segunda ecuación $x^2 - x + 3 = 0$, tenemos $\triangle = -11 < 0$. luego la solución es vacía

$$S_2 = \phi.$$

Con lo cual se obtiene que

$$S = S_1 \cup S_2 = S_1 \cup \phi = \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

1.4.4 Sistemas de Ecuaciones no Lineales.

Una herramienta de gran utilidad para la resolución de sistemas no lineales, es la propiedad anteriormente vista que dice, para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = 0 \text{ si y sólo si } x = 0 \vee y = 0$$

de otras manera, la necesidad de factorizar la expresión polinomial o algebraica no olvidado que debe estar igualada a cero.

Ejemplo 1.4.35 Resolver

$$\left.\begin{array}{rcl} (x-y)^2 & = & 9 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right|$$

$\square$

Solución 1. De la primera ecuación $(x-y)^2 = 9$ tenemos los casos

$$x - y = 3 \quad \vee \quad x - y = -3.$$

a Si $x - y = 3$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y & = & 3 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right|$$

de donde $x = \dfrac{5}{2}$ y $y = -\dfrac{1}{2}$.

b Si $x - y = -3$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{rcr} x-y & = & -3 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right|$$

de donde $x = -\dfrac{1}{2}$ y $y = \dfrac{5}{2}$.

Por lo tanto existen dos soluciones para el sistema, estas son

$$(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

o bien

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)\right\}.$$

Ejemplo 1.4.36 Resolver

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-1 & = & 2zx \\ 4y & = & 2zy \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right|$$

$\square$

Solución 2. De la segunda ecuación $4y = 2zy$ tenemos que

$$2y(z-2) = 0$$

de donde

$$y = 0 \quad \vee \quad z = 2.$$

a Supongamos $y = 0$, reemplazando en la tercera ecuación $x^2 + y^2 = 1$ obtenemos que

$$x^2 = 1$$

de donde

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -1.$$

luego, si $x = 1$, entonces $z = \frac{1}{2}$ y si $x = -1$, entonces $z = \frac{3}{2}$.

Así tenemos dos soluciones

$$(x, y, z) = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \quad (x, y, z) = \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right).$$

b Supongamos ahora $z = 2$, reemplazando en la primera ecuación $2x - 1 = 2zx$ se tiene que $x = -\frac{1}{2}$.

Luego reemplazando en la tercera ecuación y obtenemos que

$$y^2 - \frac{3}{4} = 0,$$

de donde

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tenemos entonces dos soluciones más

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), \quad (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right).$$

Por lo tanto existen cuatro soluciones para el sistema, estas son:

$$(x, y, z) = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \quad (x, y, z) = \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right)$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), \quad (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right).$$

o bien

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) \right\}.$$

Ejemplo 1.4.37 Resolver

$$\left.\begin{array}{rcl} y + 2z + wyz & = & 0 \\ x + 2z + wxz & = & 0 \\ 2x + 2y + wxy & = & 0 \\ xyz & = & \sqrt{5} \end{array}\right|$$

$\square$

Solución 3. Restando la segunda ecuación a la primera se tiene que

$$y - x + wz(y - x) = 0 \Leftrightarrow (y - x)(1 + wz) = 0$$

de donde

$$y = x \vee \left(w = -\frac{1}{z}, \text{con } z \neq 0\right)$$

a Supongamos $w = -\dfrac{1}{z}$, reemplazando en la primera ecuación tenemos que

$$2z = 0$$

con lo cual $z = 0$, esto es una contradicción pues $z \neq 0$, así el caso $1 + wz = 0$ no se puede dar.

b Supongamos entonces $x = y$, reemplazando en la tercera ecuación obtenemos

$$x(4 + wx) = 0$$

de donde

$$x = 0 \quad \vee \quad w = -\frac{4}{x}, \text{pues } x \neq 0$$

ahora si $x = 0$, lo reemplazamos en la cuarta ecuación obtenemos que $0 = \sqrt{5}$. Lo que claramente es una contradicción.

Ahora si $w = -\dfrac{4}{x}$, lo reemplazamos en la segunda ecuación tenemos que

$$x = 2z.$$

Finalmente sustituyendo $x = y$ y $x = 2z$ en la cuarta ecuación obtenemos que

$$\frac{x^3}{2} = \sqrt{5}$$

de donde $x = \sqrt[3]{2\sqrt{5}} = y$, $z = \dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}{2}$ y $w = -\dfrac{4}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}$

Así la solución al sistema es

$$(x, y, z, w) = \left(\sqrt[3]{2\sqrt{5}}, \sqrt[3]{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}{2}, -\frac{4}{\sqrt[3]{2\sqrt{5}}}\right).$$

Proposición 1.4.38 *Sean $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ entonces tenemos que*

a Si n es impar entonces

$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

b Si n es par y $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ entonces

$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

Observación: Tenga presente las hipótesis de las propiedades, no hacerlo le puede significar mas de un problema o error, por ejemplo:

$$\sqrt{x} = -1 \leftrightarrow \sqrt{x}^2 = (-1)^2 \leftrightarrow x = 1$$

La primera ecuación tiene como conjunto solución a ϕ y la última ecuación tiene como conjunto solución a $\{1\}$. Por lo tanto, cuidado con la hipótesis.

Ejemplo 1.4.39 Resolver

$$\sqrt{3x+1} = 2$$

□

Solución 4. La ecuación tiene la siguiente restricción:

$$3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

Como $\sqrt{3x+1} \geq 0$ y $2 \geq 0$, luego podemos aplicar la propiedad

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3x+1} & = & 2 \quad /(\ )^2 \\ 3x+1 & = & 4 \\ x & = & 1 \end{array}$$

Ejemplo 1.4.40 Resolver

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$$

□

Solución 5. Las restricciones de la ecuación están dadas por:

$$(2x + 1 \geq 0 \wedge x - 3 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq -\tfrac{1}{2} \wedge x \geq 3)$$

Para aplicar la propiedad, ambas expresiones deben ser no negativas, por ello despejamos del siguiente modo

$$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$$

Así tenemos que $\sqrt{2x+1} \geq 0$ y $2 + \sqrt{x-3} \geq 0$, luego podemos elevar al cuadrado

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2x+1} & = & 2 + \sqrt{x-3} \quad /(\ )^2 \\ 2x+1 & = & 4 + 4\sqrt{x-3} + x - 3 \\ x & = & 4\sqrt{x-3} \end{array}$$

Por restricción, sabemos que $x \geq 3 > 0$, de este modo, volvemos aplicar la misma propiedad

$$\begin{array}{rcl} x & = & 4\sqrt{x-3} \quad /(\ )^2 \\ x^2 & = & 16(x-3) \\ x^2 - 16x + 48 & = & 0. \end{array}$$

Calculando el discriminante de la ecuación de segundo grado, obtenemos que $\triangle = 64 > 0$, luego las soluciones están dada por
$$x = \frac{16 \pm 8}{2}$$
Con lo cual
$$x = 12 \quad \text{o} \quad x = 4$$
Y considerando la restricción obtenemos el conjunto solución
$$S = \{4, 12\}$$

Ejemplo 1.4.41 Resolver
$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 4$$
$\square$

Solución 6. La ecuación tiene la siguiente restricciones
$$(x + 1 \geq 0 \wedge x - 7 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq -1 \wedge x \geq 7)$$
es decir, la restricción es $x \geq 7$.

Como $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} \geq 0$ y $4 \geq 0$, luego podemos elevar al cuadrado
$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} & = & 4 \quad /(\ )^2 \\ x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-7)} + x - 7 & = & 16 \\ 22 - 2x & = & 2\sqrt{(x+1)(x-7)} \\ 11 - x & = & \sqrt{(x+1)(x-7)} \end{array}$$
Además $\sqrt{(x+1)(x-7)} \geq 0$, luego tenemos $11 - x \geq 0$. Con lo cual tenemos que $x \leq 11$, así podemos elevar al cuadrado
$$\begin{array}{rcl} 11 - x & = & \sqrt{(x+1)(x-7)} \quad /(\ )^2 \\ 121 - 22x + x^2 & = & x^2 - 6x - 7 \\ 16x & = & 128 \\ x & = & 8 \end{array}$$
Considerando la restricción obtenemos
$$S = \{8\}$$

Ejemplo 1.4.42 Resolver
$$\sqrt{x+1} + x = 6$$
$\square$

Solución 7. La ecuación tiene la siguiente restricción
$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$
po ello, el conjunto restricción es
$$\mathcal{R} = [-1, \infty[$$

Como $\sqrt{x+1} \geq 0$, luego $6 - x \geq 0$, es decir, $6 \geq x$, elevando al cuadrado tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x+1} & = & 6 - x /()^2 \\ x+1 & = & 36 - 12x + x^2 \\ x^2 - 13x + 35 & = & 0 \end{array}$$

Su discriminante es $169 - 140 = 29 > 0$, luego tenemos

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Note que un de los valores es mayor que 6, y ambos son mayores que -1, luego se obtiene

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{13 - \sqrt{29}}{2} \right\}.$$

1.4.5 Valor Absoluto

Definición 1.4.43 Sea $x \in \mathbb{R}$, se define el valor absoluto de x como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\Diamond$

Observación: Note que se cumple $\sqrt{a^2} = |a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4.44 Comprobar los siguientes valores

a $|-3| = 3$

b $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$

c $|3 - |\sqrt{3} - 2|| = |3 - (2 - \sqrt{3})| = |1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3}$

d $|\sqrt{5} - |2 - \sqrt{5}|| = 2$

$\square$

Proposición 1.4.45 *Sean $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}_0^+$ entonces:*

a $|a| \geq 0$.

b $|a| = |-a|$.

c $|ab| = |a||b|$.

d $|a|^2 = |a^2| = a^2$.

e $-|a| \leq a \leq |a|$.

f $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

g $\sqrt{a^2} = |a|$.

h $|a| = c \Leftrightarrow (a = c \vee a = -c)$.

i $|a| = |b| \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b)$.

Ejemplo 1.4.46 Resolver la siguiente ecuación

$$|x| = 3$$

$\square$

Solución 1. De la propiedad anterior item h, tenemos que

$$x = 3 \;\vee\; x = -3$$

Luego el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \{3, -3\}$$

Ejemplo 1.4.47 Resolver la siguiente ecuación

$$|x - 3| = \sqrt{3} - 1$$

$\square$

Solución 2. Como $\sqrt{3} - 1 > 0$, de la propiedad anterior item h, tenemos que

$$\begin{aligned} x - 3 = \sqrt{3} - 1 &\quad \vee \quad x - 3 = -(\sqrt{3} - 1) \\ x = \sqrt{3} + 2 &\quad \vee \quad x = -\sqrt{3} + 4 \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \{\sqrt{3} + 2, -\sqrt{3} + 4\}$$

Ejemplo 1.4.48 Resolver la siguiente ecuación

$$|2x - 7| = \sqrt{5} - 3$$

$\square$

Solución 3. Como $\sqrt{5} - 3 < 0$, luego por propiedad anterior item a, tenemos que el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \phi$$

Ejemplo 1.4.49 Resolver la siguiente ecuación

$$|3 - x| = 3x - 1$$

$\square$

Solución 4. Como $|3 - x| \geq 0$, luego tenemos que $3x + 1 \geq 0$ y por lo tanto $x \geq -\frac{1}{3}$, ahora de la propiedad anterior item h, tenemos que

$$\begin{aligned} 3 - x = 3x - 1 &\quad \vee \quad 3 - x = -(3x - 1) \\ -4x = -4 &\quad \vee \quad 2x = -2 \\ x = 1 &\quad \vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

Note que uno de los valores no cumple la restricción, luego el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

Ejemplo 1.4.50 Resolver la siguiente ecuación

$$||x-1|-3| = 5$$

□

Solución 5. De la propiedad anterior item h, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |x-1|-3=5 & \vee & |x-1|-3=-5 \\ |x-1|=8 & \vee & |x-1|=-2 \end{array}$$

Como $0 \leq |x-1| = -2 < 0$ es una contradicción, luego continuamos con la otra igualdad

$$\begin{array}{rcl} & |x-1|=8 & \\ x-1=8 & \vee & x-1=-8 \\ x=9 & \vee & x=-7 \end{array}$$

Luego el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \{-7, 9\}$$

Ejemplo 1.4.51 Resolver la siguiente ecuación

$$||x-1|-3x| = 2$$

□

Solución 6. Podemos aplicar la propiedad anterior item h y tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |x-1|-3x=2 & \vee & |x-1|-3x=-2 \\ |x-1|=2+3x & \vee & |x-1|=-2+3x \end{array}$$

Lo resolveremos por caso

Primer Caso $|x-1| = 2+3x$

Como $0 \leq |x-1| = 2+3x$, luego tenemos que $x \geq -\frac{2}{3}$ y ahora aplicamos la propiedad

$$\begin{array}{rcl} x-1=2+3x & \vee & x-1=-(2+3x) \\ -2x=3 & \vee & 4x=-1 \\ x=-\frac{3}{2} & \vee & x=-\frac{1}{4} \end{array}$$

Luego tenemos,

$$\mathcal{S}_1 = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

Segundo Caso $|x-1| = -2+3x$

Como $0 \leq |x-1| = -2+3x$, luego tenemos que $x \geq \frac{2}{3}$ y ahora aplicamos la propiedad

$$\begin{array}{rcl} x-1=-2+3x & \vee & x-1=-(-2+3x) \\ -2x=-1 & \vee & 4x=3 \\ x=\frac{1}{2} & \vee & x=\frac{3}{4} \end{array}$$

Luego tenemos

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$$

Así el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$$

Ejemplo 1.4.52 Resolver la siguiente ecuación

$$|2x - 7| - |x| = 2$$

□

Solución 7. Despejando tenemos

$$|2x - 7| = |x| + 2$$

Ahora podemos aplicar la propiedad anterior item h y tenemos que

$$\begin{aligned} 2x - 7 = |x| + 2 &\quad \vee \quad 2x - 1 = -(|x| + 2) \\ |x| = 2x - 9 &\quad \vee \quad |x| = -1 - 2x \end{aligned}$$

Lo resolveremos por caso

Primer Caso $|x| = 2x - 9$

Como $0 \leq |x| = 2x - 9$, luego tenemos que $x \geq \frac{9}{2}$ y ahora usamos la propiedad

$$\begin{aligned} x = 2x - 9 &\quad \vee \quad x = -(2x - 9) \\ x = 9 &\quad \vee \quad 3x = 9 \\ x = 9 &\quad \vee \quad x = 3 \end{aligned}$$

Luego tenemos,

$$\mathcal{S}_1 = \{9\}$$

Segundo Caso $|x| = -1 - 2x$

Como $0 \leq |x - 1| = -1 - 2x$, luego tenemos que $x \geq -\frac{1}{2}$ y ahora usamos la propiedad

$$\begin{aligned} x = -1 - 2x &\quad \vee \quad x = -(-1 - 2x) \\ 3x = -1 &\quad \vee \quad -x = 1 \\ x = -\tfrac{1}{3} &\quad \vee \quad x = -1 \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

Así el conjunto solución es:

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{3},\ 9 \right\}$$

1.4.6 Inecuaciones

En la secciones anteriores, hemos resuelto problemas donde figura el símbolo de igualdad en la función proposición, lo que hemos llamado ecuación. Ahora emprenderemos el desafió de resolver problemas donde aparece el símbolo de desigualdad, llamadas inecuaciones.

Para ello, a continuación formalizamos algunos conceptos que ya hemos utilizados anteriormente.

a **Conjunto Restricción**

Llamaremos conjunto restricción de una expresión que involucra términos $P(x)$ y $Q(x)$ al conjunto $\mathcal{R}$ de los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales cada término de la expresión esta definido en $\mathbb{R}$. Los términos $P(x)$ y $Q(x)$ son tales que al menos uno de ellos involucra la variable x.

b **Conjunto Solución**

Llamaremos conjunto solución de la ecuación $P(x) = Q(x)$ o de la inecuación $P(x) \leq Q(x)$ al subconjunto $\mathcal{S}$ de los x en $\mathcal{R}$ que satisfacen la ecuación o inecuación, es decir

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid P(x) = Q(x)\} \quad \vee \quad \mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid P(x) \leq Q(x)\}.$$

Intervalos en $\mathbb{R}$: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$ se denotan

$$\begin{array}{rr}
[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}; &]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}; \\
]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}; &]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}; \\
]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}; &]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}; \\
[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}; & [a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.
\end{array}$$

Una inecuación lineal, es decir, una inecuación de uno de los siguientes tipos

$$ax + b \leq 0 \text{ o bien } ax + b < 0 \text{ o bien } ax + b \geq 0 \text{ o bien } ax + b > 0$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$

Veamos un caso particular de resolver la inecuación $ax + b \leq 0$ significa despejar la variable para ello

$$ax + b \leq 0 \text{ si y sólo si } ax \leq -b$$

para concluir necesitamos saber el signo de a. Veamos dos ejemplos

Ejemplo 1.4.53 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$3x + 5 \leq 10.$$

□

Solución 1. En este caso $\mathcal{R}$ es todo $\mathbb{R}$, ahora bien

$$\begin{array}{rrcl}
 & 3x + 5 & \leq & 10 \\
\Leftrightarrow & 3x & \leq & 5 \\
\Leftrightarrow & x & \leq & \dfrac{5}{3}.
\end{array}$$

Tenemos entonces que

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq \frac{5}{3} \right\} = \left] -\infty, \frac{5}{3} \right].$$

Ejemplo 1.4.54 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$8 - 5x \leq -6.$$

$\square$

Solución 2. En este caso $\mathcal{R}$ es todo $\mathbb{R}$, ahora bien

$$\begin{array}{rrcl} & 8 - 5x & \leq & -6 \\ \Leftrightarrow & -5x & \leq & -14 \\ \Leftrightarrow & x & \geq & \dfrac{14}{5}. \end{array}$$

Tenemos entonces que

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \geq \frac{14}{5} \right\} = \left[\frac{14}{5}, \infty \right[.$$

1.4.7 Factores lineales

Proposición 1.4.55 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$

a $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$.

b $ab \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$.

c $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$.

d $ab \leq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \leq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \geq 0)$.

Demostración. Demostraremos sólo el primer item, ya que, la demostración de los otros ítemes, es análoga y se dejará como ejercicio.

($\Rightarrow$) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y suponemos que $ab > 0$

Primer caso. Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$, luego por axioma (2) y asociatividad se tiene que $a^{-1}(ab) = b \in \mathbb{R}^+$ y en consecuencia

$$ab \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+$$

$$ab > 0 \Rightarrow a > 0 \wedge b > 0.$$

Segundo caso. Si $a \in \mathbb{R}^-$ entonces $a^{-1} \in \mathbb{R}^-$, luego por axioma (2) y asociatividad se tiene que $a^{-1}(ab) = b \in \mathbb{R}^-$ y en consecuencia

$$ab \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^-$$

por lo tanto

$$ab > 0 \Rightarrow a < 0 \wedge b < 0$$

tenemos entonces que $ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$.

($\Leftarrow$) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y suponemos que $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

Claramente por el axioma (2)

$$(a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$$

y la otra posibilidad
$$(a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^-)$$
luego tenemos que
$$ab = (-a)(-b) \in \mathbb{R}^+.$$
En consecuencia
$$[(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)] \Rightarrow ab > 0. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 1.4.56 Determinar el conjunto solución de la inecuación
$$(x-3)(x+5) \geq 0.$$
$\square$

Solución 1. El conjunto restricción de la inecuación es $\mathcal{R} = \mathbb{R}$, ahora bien obtenemos que:
$$\begin{array}{rcl} (x-3)(x+5) \geq 0 & \Leftrightarrow & (x-3 \geq 0 \wedge (x+5) \geq 0) \vee (x-3 \leq 0 \wedge (x+5) \leq 0) \\ & \Leftrightarrow & (x \geq 3 \wedge x \geq -5) \vee (x \leq 3 \wedge x \leq -5) \\ & \Leftrightarrow & (x \geq 3) \vee (x \leq -5). \end{array}$$
Por lo tanto
$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{R} \mid (x-3)(x+5) \geq 0\} =]-\infty, -5] \cup [3, \infty[.$$

Observación: La resolución de la inecuación $(x-3)(x+5) \geq 0$, se puede resumir en la siguiente tabla

	$]-\infty,-5[$	-5	$]-5,3[$	3	$]3,\infty[$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-3)(x+5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donde el signo $+$ y $-$ indican que el factor es positivo o negativo en el intervalo analizado, y en la última fila se anota el signo del producto.

Ahora observando la última fila de la tabla tenemos que, la solución a la inecuación
$$(x-3)(x+5) \geq 0$$
es $\mathcal{S} =]-\infty, -5] \cup [3, \infty[$.

Ejemplo 1.4.57 Determinar el conjunto solución de la inecuación
$$\frac{2x-5}{3x+9} \geq 0.$$
$\square$

Solución 2. El conjunto restricción de la inecuación es
$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+9 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-3\},$$

ahora bien notando que a y a^{-1} ambos son negativos o positivos, de otro modo el signo de a y a^{-1} es el mismo, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{2x-5}{3x+9} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2x-5 \geq 0 \wedge (3+9)^{-1} > 0) \vee (2x-5 \leq 0 \wedge (3x+9)^{-1} < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (2x-5 \geq 0 \wedge 3x+9 > 0) \vee (2x-5 \leq 0 \wedge 3x+9 < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 5/2 \wedge x > -3) \vee (x \leq 5/2 \wedge x < -3) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 5/2) \vee (x < -3).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathcal{R} \;\middle|\; \frac{2x-5}{3x+9} \geq 0 \right\} =]-\infty, -3[\cup [5/2, \infty[.$$

De otro modo, tenemos

	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,5/2[$	$5/2$	$]5/2,\infty[$
$2x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$3x+9$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{2x-5}{3x+9}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

El conjunto solución de la inecuación es

$$\mathcal{S} =]-\infty, -3[\cup [5/2, \infty[.$$

Observación: Recuerde que una expresión del tipo $ax+b$, con $a \neq 0$ en un punto es cero, y en los intervalos complementarios es positivo o negativo, lo que se resumen en la siguiente tabla:

	$]-\infty,-b/a[$	$-b/a$	$]-b/a,\infty[$	
$ax+b$	$-$	0	$+$	si $a>0$
$ax+b$	$+$	0	$-$	si $a<0$

Ejemplo 1.4.58 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0.$$

$\square$

Solución 3. La restricción de la inecuación es $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-49 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-7, 7\}$, ahora bien

$$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(4-2x)(x+3)}{(x+7)(x-7)} \leq 0.$$

Consideremos la tabla formada por todos los factores involucrados

	$]-\infty,-7[$	-7	$]-7,-3[$	-3	$]-3,2[$	2	$]2,7[$	7	$]7,\infty[$
$4-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+7$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

Observando la tabla tenemos que $\dfrac{(4-2x)(x+3)}{x^2-49} \leq 0$ en $]-\infty,-7[\cup[-3,2]\cup]7,\infty[$, luego

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap (]-\infty,-7[\cup[-3,2]\cup]7,\infty[) =]-\infty,-7[\cup[-3,2]\cup]7,\infty[.$$

1.4.8 Inecuaciones con factores no lineales

Proposición 1.4.59 *Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$*

i $(a < b \wedge c < d) \Rightarrow ac < bd.$

ii $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n.$

Demostración.

a Inmediato del corolario Corolario 1.4.7 parte 5.

b $(\Rightarrow)$ De anterior item es claro que

$$(a < b \wedge a < b) \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Continuando con este proceso, se prueba inductivamente, ya que

$$(a < b \wedge a^n < b^n) \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}.$$

$(\Leftarrow)$Sea

$$L = (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

entonces se tiene que

$$a^n - b^n = (a-b)L.$$

Ahora bien como $a,b \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $L \in \mathbb{R}^+$ y así por corolario Corolario 1.4.7 parte 2 $L^{-1} \in \mathbb{R}^+$. Por hipótesis tenemos que $a^n < b^n \Leftrightarrow a^n - b^n < 0$, es decir

$$(a-b)L < 0$$

pero $L^{-1} > 0$, luego $(a-b)LL^{-1} < 0$, de donde

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$$

concluyendo así la demostración.

∎

Corolario 1.4.60 *Para todo $a,b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$*

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Demostración. Como a y $b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a = (\sqrt[n]{a})^n$ y $b = (\sqrt[n]{b})^n$, luego de acuerdo a la proposición anterior tenemos que

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n \Leftrightarrow a < b.$$ ∎

Ejemplo 1.4.61 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$x - 5 \leq \sqrt{x^2 - 2}.$$

$\square$

Solución 1. Veamos primero la restricción de la inecuación

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2} \vee x \leq -\sqrt{2}\} \\ &=]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[.\end{aligned}$$

Ahora debemos analizar los casos $x - 5 \geq 0 \wedge x - 5 < 0$, esto es

a Supongamos $x - 5 \leq 0$ y $x \in \mathcal{R}$, es decir

$$x \in \mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cap]-\infty, 5] =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 5]$$

como $x - 5 \leq 0$ y $0 \leq \sqrt{x^2 - 2}$, para $x \in \mathcal{R}_1$ la desigualdad $x - 5 \leq \sqrt{x^2 - 2}$ se satisface. Luego la solución en este caso está dada por

$$\mathcal{S}_1 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 5].$$

b Supongamos ahora $x - 5 \geq 0$ y $x \in \mathcal{R}$, es decir

$$x \in \mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap [5, \infty[= [5, \infty[$$

ahora bien como $x - 5 \geq 0$ y $\sqrt{x^2 - 2} \geq 0$ para $x \in \mathcal{R}_2$, podemos elevar al cuadrado la desigualdad dada, así

$$\begin{aligned} x - 5 &\leq \sqrt{x^2 - 2} \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 &\leq x^2 - 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &\geq \frac{27}{10}\end{aligned}$$

luego la solución en este caso está dada por

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{R}_2 \cap \left[\frac{27}{10}, \infty\right[= [5, \infty[.$$

Tenemos entonces que la solución de la inecuación es

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[.$$

Ejemplo 1.4.62 Resolver la inecuación

$$\sqrt{x - 3} - \sqrt{2x + 1} \leq 1$$

$\square$

Solución 2. La restricciones son $x-3 \geq 0 \ \wedge \ 2x+1 \geq 0$, es decir, $x \geq 3 \ \wedge \ x \geq -\frac{1}{2}$, luego el conjunto restricción de la inecuación es

$$\mathcal{R} = [3, \infty[.$$

Para poder elevar al cuadrado, debemos tener seguridad que los términos son no negativos

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} & \leq & 1 \\ \sqrt{x-3} & \leq & 1 + \sqrt{2x+1} \ \ ()^2 \\ x-3 & \leq & 1 + 2\sqrt{2x+1} + 2x + 1 \\ -x-5 & \leq & 2\sqrt{2x+1} \end{array}$$

Considerando la restricción tenemos que

$$x \geq 3 \Leftrightarrow -x-5 \leq -8$$

Por lo cual obtenemos que,

$$\underbrace{-x-5}_{-} \leq \underbrace{\sqrt{2x+1}}_{+}$$

de este modo la desigualdad se cumple siempre.

Así el conjunto solución es

$$S = [3, \infty[.$$

Proposición 1.4.63 *Dado el polinomio cuadrático ax^2+bx+c, tenemos que:*

a Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ y $a > 0$, entonces

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ y $a < 0$, entonces

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Dada la polinomio de segundo grado, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (4a)(ax^2+bx+c) & = & 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \\ & = & (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 - b^2 + 4ac \\ & = & (2ax+b)^2 + 4ac - b^2 \end{array}$$

De este modo tenemos

$$ax^2 + bx + c = \frac{(2ax+b)^2 + 4ac - b^2}{4a}$$

Supongamos ahora que $\triangle < 0$ y $a > 0$, entonces se tiene que las expresiones $(2ax+b)^2$ y $4ac - b^2$ son siempre positivas, de lo cual se obtiene que $(2ax+b)^2 + (4ac-b^2) > 0$, es decir,

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Análogamente se obtiene que si $\triangle < 0$ y $a < 0$, entonces $ax^2+bx+c < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. ∎

Ejemplo 1.4.64 Resolver la siguiente inecuación

$$x^2 + 2x + 7 > 0$$

$\square$

Solución 3. Para resolver la ecuación cuadráticas

$$x^2 + 2x + 7 > 0$$

veamos su discriminate

Tenemos que $\triangle = -24 < 0; a = 1 > 0$. Usando la propiedad Proposición 1.4.63 tenemos que

$$S = \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.4.65 Resolver la siguiente inecuación

$$2x^2 + 2x + 3 < 0$$

$\square$

Solución 4. Para resolver la ecuación cuadráticas

$$2x^2 + 2x + 3 < 0$$

veamos su discriminate

Tenemos que $\triangle = -20 < 0; a = 2 > 0$. Usando la propiedad Proposición 1.4.63 tenemos que

$$S = \phi$$

Ejemplo 1.4.66 Resolver la siguiente inecuación

$$-x^2 + 2x - 4 > 0$$

$\square$

Solución 5. Para resolver la ecuación cuadráticas

$$-x^2 + 2x - 4 > 0$$

veamos su discriminate

Tenemos que $\triangle = -12 < 0; a = -1 < 0$. Usando la propiedad Proposición 1.4.63 tenemos que

$$S = \phi$$

Ejemplo 1.4.67 Resolver la siguiente inecuación

$$-x^2 - 3x - 5 < 0$$

$\square$

Solución 6. Para resolver la ecuación cuadráticas

$$-x^2 - 3x - 5 < 0$$

veamos su discriminate

Tenemos que $\triangle = -11 < 0; a = -1 < 0$. Usando la propiedad Proposición 1.4.63 tenemos que

$$S = \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.4.68 Resolver la inecuación

$$\frac{\sqrt{2} \cdot x}{x+1} < -\frac{1}{x}$$

$\square$

Solución 7. La restricciones son $x+1 \neq 0 \ \wedge \ x \neq 0$, luego el conjunto de restricción es

$$\mathcal{R} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

La resolución del problema lo tenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{\sqrt{2}x}{x+1} &< -\tfrac{1}{x} \\ \tfrac{\sqrt{2}x}{x+1} + \tfrac{1}{x} &< 0 \\ \tfrac{\sqrt{2}x^2+x+1}{x(x+1)} &< 0 \end{aligned}$$

Como $\triangle(\sqrt{2}x^2 + x + 1) = 1 - 4\sqrt{2} < 0; a = \sqrt{2} > 0$, luego se tiene que

$$\sqrt{2}x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathcal{R}.$$

Para continuar con el desarrollo, utilizaremos una tabla

	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 0[$	0	$]0, \infty[$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt{2}x^2 + x + 1$	$+$		$+$		$+$
$\frac{\sqrt{2}x^2+x+1}{x(x+1)}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

así se obtiene que

$$S =]-1, 0[$$

Ejemplo 1.4.69 Resolver la inecuación

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x}{x-1} \leq 2$$

$\square$

Solución 8. La restricciones son $x+1 \neq 0 \ \wedge \ x-1 \neq 0$, luego el conjunto de restricción es

$$\mathcal{R} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

La resolución o búsqueda de la solución del problema, la obtenemos de lo tenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{2x-1}{x+1} + \tfrac{x}{x-1} &\leq 2 \\ \tfrac{2x-1}{x+1} + \tfrac{x}{x-1} - 2 &\leq 0 \\ \tfrac{(2x-1)(x-1)+x(x+1)-2(x^2-1)}{x^2-1} &\leq 0 \\ \tfrac{x^2-2x+3}{x^2-1} &\leq 0 \end{aligned}$$

Como $\triangle(x^2-2x+3)=4-12=-8<0;\ a=1>0$, luego tenemos que

$$x^2-2x+3>0,\forall x\in\mathcal{R}.$$

Para concluir el desarrollo usaremos una tabla

	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,\infty[$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x+3	$+$		$+$		$+$
$\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

así tenemos que

$$S=]-1,1[$$

1.4.9 Inecuaciones con Valor absoluto

Teorema 1.4.70 *Sean $x,y\in\mathbb{R}$ entonces:*

a $|x|\leq y\Leftrightarrow(-y\leq x\leq y)$.

b $|x|\geq y\Leftrightarrow(y\geq x\vee x\leq -y)$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $|x|\leq y$.
Como $x\leq|x|\wedge|x|\leq y$, entonces por transitividad

$$x\leq y.$$

Además

$$|x|\leq y\Leftrightarrow -y\leq -|x|$$

pero por Proposición Proposición 1.4.45 parte (e) tenemos que

$$-|x|\leq x$$

y nuevamente por transitividad

$$-y\leq x$$

Luego tenemos que $-y\leq x\leq y$.
$(\Leftarrow)$ Supongamos que $-y\leq x\leq y$.

a [Caso 1:] Si $x\geq 0$ entonces $|x|=x$

además

$$x\leq y$$

luego

$$|x|\leq y.$$

b [Caso 2:] Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ es decir, $-|x| = x$
además
$$-y \leq x$$
luego
$$-y \leq -|x| \Leftrightarrow |x| \leq y.$$

En consecuencia
$$|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$$
con lo cual la demostración está terminada.

Demostremos ahora la segunda parte, usando la equivalencia
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q})$$

Aplicándola en la primera parte obtenemos
$$|x| > y \Leftrightarrow (x > y \vee x < -y)$$

la cual puede ser extendida a
$$|x| \geq y \Leftrightarrow (x \geq y \vee x \leq -y)$$

Así la demostración concluye. ■

Observación: Notemos que el teorema precedente es válido para todo $y \in \mathbb{R}$, sin embargo el caso en que $y < 0$ nos permite proceder de manera más rápida, es decir, si $y < 0$ entonces la proposición $|x| < y$ es falsa, y la proposición $|x| > y$ es verdadera.

El hecho de asegurar que la expresión $|x| < y$ es falsa, se traduce diciendo que el conjunto solución de dicha inecuación es
$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Análogamente si la expresión $|x| > y$ es verdadera, su conjunto solución es
$$\mathcal{S} = \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.4.71 Resolver la inecuación
$$|x| < -2$$

Solución
Considere la observación anterior, luego el conjunto solución es $\mathcal{S} = \emptyset$.
Pero si consideramos la inecuación
$$|x| > -2$$
tenemos que la solución es $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. □

Ejemplo 1.4.72 Determinar el conjunto solución de la inecuación
$$|x + 2| \geq 3.$$

Solución
Aplicando el teorema anterior tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} |x+2| \geq 3 & \Leftrightarrow & x+2 \geq 3 \vee x+2 \leq -3 \\ & \Leftrightarrow & x \geq 1 \vee x \leq -5 \\ & \Leftrightarrow & x \in [1,\infty[\cup]-\infty,-5] \\ & \Leftrightarrow & x \in \mathbb{R}-]-5,1[. \end{array}$$

Luego el conjunto solución de la inecuación $|x+2| \geq 3$ está dado por

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}-]-5,1[.$$

$\square$

Ejemplo 1.4.73 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$|x+\sqrt{2}| \leq \pi.$$

Solución
De acuerdo al teorema precedente se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} |x+\sqrt{2}| \leq \pi & \Leftrightarrow & -\pi \leq x+\sqrt{2} \leq \pi \\ & \Leftrightarrow & -\pi-\sqrt{2} \leq x \leq \pi-\sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow & x \in [-\pi-\sqrt{2}, \pi-\sqrt{2}]. \end{array}$$

Luego el conjunto solución de la inecuación esta dado por

$$\mathcal{S} = [-\pi-\sqrt{2}, \pi-\sqrt{2}].$$

$\square$

Ejemplo 1.4.74 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$|x-\sqrt{2}| \leq \sqrt{x^2-3}.$$

$\square$

Solución 1. La restricción se obtiene de

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R} & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3 \geq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt{3}\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{3} \vee x \leq -\sqrt{3}\} \\ & = &]-\infty,-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3},\infty[. \end{array}$$

Ahora elevando al cuadrado en la desigualdad (**??**) se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & |x-\sqrt{2}|^2 & \leq & x^2-3 \\ \Leftrightarrow & x^2-2\sqrt{2}x+2 & \leq & x^2-3 \\ \Leftrightarrow & 5 & \leq & 2\sqrt{2}x \\ \Leftrightarrow & x & \geq & \dfrac{5}{2\sqrt{2}}. \end{array}$$

Tenemos así que el conjunto solución de la inecuación (**??**) está dado por

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \left[\frac{5}{2\sqrt{2}}, \infty\right[= \left[\frac{5}{2\sqrt{2}}, \infty\right[.$$

Ejemplo 1.4.75 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{4-|x-2|}}{(x-1)(x^2-x+2)} \geq 0.$$

□

Solución 2. La restricción de

$$\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{4-|x-2|}}{(x-1)(x^2-x+2)} \geq 0.$$

es $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4-|x-2| \geq 0 \wedge x-1 \neq 0 \wedge x^2-x+2 \neq 0\}$. Analicemos cada caso:

a

$$\begin{array}{rrcl} & 4-|x-2| & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & |x-2| & \leq & 4 \\ \Leftrightarrow & -4 \leq x-2 & \wedge & x-2 \leq 4 \\ \Leftrightarrow & -2 \leq x & \wedge & x \leq 6 \\ \Leftrightarrow & x \in [-2,6]. & & \end{array}$$

b

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

c Debemos encontrar los $x \in \mathbb{R}$ de modo que $x^2-x+2 \neq 0$, ahora bien como el discriminante de la ecuación cuadrática es $\triangle = -7 < 0$ y $a = 1 > 0$ tenemos por Propiedad Proposición 1.4.63 parte (1) que la ecuación $x^2-x+2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, lo cual en particular nos asegura que $x^2-x+2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Recuerde que el conjunto restricción corresponde a la intersección de los casos anteriores, ya que cada una de ella debe cumplirse, entonces que $\mathcal{R} = [-2,6]-\{1\}$.

Resolveremos la inecuación, con el apoyo de una tabla, pero antes analicemos algunos factores, $\sqrt{4-|x-2|} \geq 0$ y $x^2-x+2 > 0$ para todo $x \in \mathcal{R}$, basta sólo resolver la inecuación

$$\frac{(x^2-2x-3)}{(x-1)} \quad \geq \quad 0 \tag{1.1}$$

para tener que

$$\frac{(x^2-2x-3)\sqrt{4-|x-2|}}{(x-1)(x^2-x+2)} \geq 0.$$

Resolvamos entonces inecuaciones

$$\frac{(x^2-2x-3)}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)(x+1)}{x-1} \geq 0. \tag{1.2}$$

Consideremos ahora la siguiente tabla

	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,3[$	3	$]3,\infty[$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

De esto es claro que (**??**) se satisface en $[-1,1[\cup[3,\infty[$, luego la solución a la inecuación es

$$\mathcal{S}=\mathcal{R}\cap([-1,1[\cup[3,\infty[)=[-1,1[\cup[3,6].$$

Ejemplo 1.4.76 Determinar el conjunto solución de la inecuación

$$|x-1|+|x-2|\leq|x-3|$$

□

Solución 3. Sea x que cumple

$$|x-1|+|x-2|\leq|x-3|$$

Para dar solución a este problema consideremos la siguiente tabla, que nos ayuda en la clasificación de los casos que debemos estudiar.

	$]-\infty,1[$	$]1,2[$	$]2,3[$	$]3,\infty[$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$

Note que esta tabla no permite resolver la inecuación como en el ejemplo anterior, pero gracias a la definición de valor absoluto podemos obtener la siguiente información:

	$]-\infty,1[$	$]1,2[$	$]2,3[$	$]3,\infty[$
$\|x-1\|$	$-(x-1)$	$x-1$	$x-1$	$x-1$
$\|x-2\|$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$	$x-2$
$\|x-3\|$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$x-3$

Esto nos sugiere estudiar los siguientes casos cuatro casos:

a Consideremos $x\in]-\infty,1]$, luego reemplazando se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & -(x-1)+(-(x-2)) & \leq & -(x-3) \\ \Leftrightarrow & 1-x+2-x & \leq & 3-x \\ \Leftrightarrow & x & \geq & 0. \end{array}$$

Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_1=]-\infty,1]\cap[0,\infty[=[0,1].$$

b Consideremos $x \in]1, 2]$, luego reemplazando se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & x - 1 + (-(x-2)) & \leq & -(x-3) \\ \Leftrightarrow & x - 1 + 2 - x & \leq & 3 - x \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 2. \end{array}$$

Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_2 =]1, 2] \cap]-\infty, 2[=]1, 2].$$

c Consideremos $x \in]2, 3]$, luego reemplazando se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & x - 1 + x - 2 & \leq & -(x-3) \\ \Leftrightarrow & 2x - 3 & \leq & 3 - x \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 2. \end{array}$$

Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_3 =]2, 3] \cap]-\infty, 2[= \emptyset.$$

d Consideremos $x \in]3, \infty[$, luego reemplazando se tiene

$$\begin{array}{rrcl} & x - 1 + x - 2 & \leq & x - 3 \\ \Leftrightarrow & 2x - 3 & \leq & x - 3 \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 0. \end{array}$$

Así la solución en este caso es

$$\mathcal{S}_4 =]3, \infty[\cap]-\infty, 0] = \emptyset.$$

Tenemos entonces que la solución de la inecuación es

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 = [0, 2].$$

Teorema 1.4.77 [Desigualdad Triangular]. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ entonces*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Demostración. Tenemos por Propiedad Proposición 1.4.45 parte (f) que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}$$

luego sumando, se tiene que

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

así

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \qquad \blacksquare$$

Corolario 1.4.78 *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *entonces* $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demostración. Notemos que $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$
De lo cual se obtiene

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Por otro lado $|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|$

$$\begin{array}{rcr} |y| - |x| & \leq & |y - x| \\ \Leftrightarrow |y| - |x| & \leq & |x - y| \\ \Leftrightarrow |x| - |y| & \geq & -|x - y|. \end{array}$$

Luego, tenemos que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Leftrightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|. \qquad \blacksquare$$

1.4.10 Ejercicios

Resolver las siguientes inecuaciones

a $\dfrac{x}{x+1} \leq 1$

b $(3x + 1)(x + 2) > 0$

c $(x + 1)(x + 2) < (x + 1)(4x - 7)$

d $\dfrac{2x - 1}{x + 1} + \dfrac{x}{x - 1} < 2$

e $\dfrac{x^2(x^2 + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x^2 + 3)} \geq 0$

f $\sqrt{3x + 1} < 2$

g $\sqrt{2x + 5} \leq 3 - x$

h $\sqrt{x - 3} \geq 7 - 2x$

i $\sqrt{\sqrt{2 + 1} - 1} < \sqrt{x}$

j $|5x - 7| > 2 - x$

k $|3x - 5| > x + 2$

l $|2x - 1| - |x - 2| < 3x - 7$

m $||2x - 1| - x| < 3x - 5$

n $\sqrt{2x + 1} < |x| + 3$

Solución. El Conjunto solución en cada caso es:

a $S =]-1, \infty[$

b $S =]-\infty, -2[\cup]-1/3, \infty[$

c $S =]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$

d $S =]-1, 1[$

e $S =]-\infty, -2] \cup \{0\} \cup]-1, \infty[$

f $S = [1/3, 5/3[$

g $S = [-5/2, 4 - \sqrt{12}[$

h $S = [13/4, \infty[$.

i $S =]0, \infty[$.

j $S =]-\infty, 5/4[\cup]3/2, \infty[$

k $S = [3/4, 7/2]$

l $S =]4, \infty[$

m $S =]2, \infty[$

n $v]-1/2, \infty[$

1.5 Axioma del Supremo

Definición 1.5.1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \phi$ y $c \in \mathbb{R}$. Se dice que

a c es una **cota superior** de A, si y sólo si

$$(\forall a \in A)(a \leq c).$$

b a es una **cota inferior** de A, si y sólo si

$$(\forall a \in A)(a \geq c).$$

c A es un **conjunto acotado superiormente**, si y sólo si existe una cota superior para el conjunto A.

d A es un **conjunto acotado inferiormente**, si y sólo si existe una cota inferior para el conjunto A.

e A es un **conjunto acotado**, si y sólo si A es acotado superior e inferiormente se dice que

$\Diamond$

Observación: Si $A = \emptyset$, se dice que A es un conjunto acotado.

Definición 1.5.2 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \phi$ y $L \in \mathbb{R}$.
Se dice que L es el **supremo** de A, si y sólo si, las dos condiciones siguientes se satisfacen:

a L es una cota superior de A.

b Si L' es una cota superior de A, entonces $L \leq L'$.

$\Diamond$

Notación: Si existe el supremo se denota por $\sup(A) = L$.
Observación: Note que por definición, $\sup(A)$ es la menor de las cotas superiores de A.
Definición 1.5.3 Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \phi$ y $L \in \mathbb{R}$.
Se dice que L es el **ínfimo** de A, si y sólo si, las dos condiciones siguientes se satisfacen:

a L es una cota inferior de A.

b Si L' es una cota inferior de A, entonces $L' \leq L$.

$\Diamond$

Notación: Si existe el ínfimo, se denota por $\inf(A) = L$.
Observación: Note que por definición, $\inf(A)$ es la mayor de las cotas inferiores de A.
Ejemplo 1.5.4 Consideremos los conjuntos $A =]-\infty, 5]$ y $B =]7, \infty[$, en este caso tenemos que el conjunto A no es acotado inferiormente, pues no existe $r \in \mathbb{R}$ de modo que $r \leq a$ para todo $a \in A$, en cambio el conjunto B si es acotado inferiormente pues existe $r = 7 \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq b$ para todo $b \in B$. Análogamente podemos ver que el conjunto A es acotado superiormente y el conjunto B no lo es.
Además que todo $r \in [5, \infty[$ es una cota superior para A, luego tenemos que el conjunto de todas las cotas superiores de A es $[5, \infty[$, el $sup(A) = 5$. Del mismo modo tenemos que todo $r' \in]-\infty, 7]$ es una cota inferior para B, luego el conjunto de todas las cotas inferiores de B es $]-\infty, 7]$, el $\inf(B) = 7$. $\square$

Ejemplo 1.5.5 Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq \sqrt{2}\}$. Determine el conjunto de cotas superiores e inferiores del conjunto A. $\square$

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq \sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x-3 \leq \sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2}+3 \leq x \leq \sqrt{2}+3\} \\ &= [-\sqrt{2}+3, \sqrt{2}+3]. \end{aligned}$$

De acuerdo a esto podemos ver que A es un conjunto acotado superior e inferiormente pues existen $r = \sqrt{2}+3$ y $r' = -\sqrt{2}+3$ de modo que $r' \leq a \leq r$ para todo $a \in A$. Además el conjunto de todas las cotas inferiores está dado por $]-\infty, -\sqrt{2}+3]$ y el de las cotas superiores está dado por $[\sqrt{2}+3, \infty[$.
Teorema 1.5.6 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $L \in \mathbb{R}$ cota superior de A. Entonces,$L = \sup(A)$ si y sólo si $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x \in A)(x > L - \epsilon)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Procedamos por absurdo, esto es supongamos que
por hipótesis existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x \leq L - \epsilon, \quad \forall x \in A$$

esto nos entrega que $L-\epsilon$ es una cota superior de A (por definición de cota), pero $L = \sup(A)$, luego $L \leq L - \epsilon$ de aquí que $\epsilon \leq 0$, lo cual contradice $\epsilon > 0$.

($\Leftarrow$) Procediendo de la misma forma, sea L cota superior de A y supongamos que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x \in A)(x > L - \epsilon) \wedge L \neq \sup(A)$$

Como $L \neq \sup(A)$ y L es cota superior de A, entonces L no es la menor de las cotas superiores de A, esto es, existe $L^{'}$ cota superior de A tal que

$$L^{'} \leq L$$

luego existe $\epsilon > 0$ tal que

$$L^{'} + \epsilon = L$$

pero por hipótesis, existe $x \in A$ tal que

$$x > L - \epsilon$$

De este modo tenemos que

$$x > L^{'}, \quad x \in A$$

lo cual es una contradicción pues $L^{'}$ es una cota superior de A. ■

Teorema 1.5.7 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $L \in \mathbb{R}$ cota inferior de A. Entonces,$L = \inf(A)$ si y sólo si $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x \in A)(x < L + \epsilon)$.*

Demostración. Ejercicio (análogo a la demostración del teorema anterior). ■

1.5.1 Axioma del Supremo

El conjunto de los números reales con el axioma del supremo recibe el nombre de **cuerpo ordenado y completo**, o **cuerpo totalmente ordenado** lo cual caracteriza $\mathbb{R}$, y es el siguiente

Axioma 1.5.8 [Axioma del Supremo]. *Si $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado superiormente, entonces el supremo de A existe y es un elemento de $\mathbb{R}$.*

Proposición 1.5.9 *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado.*

Demostración. Supongamos por absurdo que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Luego por el axioma del supremo existe $\sup(\mathbb{N}) = L, L \in \mathbb{R}$, esto es $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})(n > L - \epsilon)$

En particular si consideramos $\epsilon = 1 > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > L - 1$$

es decir,

$$n + 1 > L$$

pero $n + 1 \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción pues $L = \sup(\mathbb{N})$. ■

Teorema 1.5.10 [Propiedad arquimediana].

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists\, n \in \mathbb{N})(x < n).$$

Demostración. Procedamos por absurdo, esto es

$$(\exists\, x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(x \geq n).$$

Es claro que x es una cota superior de $\mathbb{N}$, luego tenemos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 1.5.11 *La propiedad arquimediana la podemos expresar de manera equivalente como sigue*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists\, n \in \mathbb{N})\left(\frac{1}{n} < \epsilon\right).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el número real $\frac{1}{\epsilon}$, entonces por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{\epsilon}$$

de donde

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

concluyendo así la demostración. ■

Ejemplo 1.5.12 Sea

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Demostrar que $\sup(A) = \frac{1}{2}$. □

Solución 1.

a En primer lugar demostremos que $L = \frac{1}{2}$ es una cota superior de A.

Claramente

$$2n < 2n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{2n}{2n+1} &< 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{n}{2n+1} &< \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

así

$$x_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo cual se tiene que $L = \frac{1}{2}$ es cota superior de A.

b Solo nos queda demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists\, x_n \in A)(x_n > \frac{1}{2} - \epsilon)$, lo que equivale a probar la existencia de $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} - \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el número real $\frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$, ahora bien por Teorema Teorema 1.5.10 tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{rrcl} & n & > & \dfrac{1-2\epsilon}{4\epsilon} \\ \Leftrightarrow & 4n\epsilon & > & 1-2\epsilon \\ \Leftrightarrow & 2n\epsilon & > & \dfrac{1}{2} - \epsilon \\ \Leftrightarrow & n & > & n - 2n\epsilon + \dfrac{1}{2} - \epsilon \\ \Leftrightarrow & n & > & 2n\left(\dfrac{1}{2} - \epsilon\right) + \dfrac{1}{2} - \epsilon \\ \Leftrightarrow & n & > & (2n+1)\left(\dfrac{1}{2} - \epsilon\right) \\ \Leftrightarrow & \dfrac{n}{2n+1} & > & \dfrac{1}{2} - \epsilon. \end{array}$$

Así

$$(\forall \epsilon > 0)\left(\exists\, x_n = \frac{n}{2n+1} \in A\right)\left(x_n > \frac{1}{2} - \epsilon\right).$$

Luego

$$\sup(A) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 1.5.13 Sea

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Demostrar que $\inf(A) = 0$. □

Solución 2.

a En primer lugar demostremos que $L = 0$ es una cota inferior de A.

Es evidente que

$$0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$0 < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo cual se tiene que $L = 0$ es cota inferior de A.

b Solo nos queda demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(\exists x_n \in A)(x_n < \epsilon)$, este hecho es clara consecuencia del Corolario Corolario 1.5.11, así

$$(\forall \epsilon > 0)\left(\exists\, x_n = \frac{1}{n} \in A\right)(x_n < \epsilon).$$

Luego
$$\inf(A) = 0.$$

Teorema 1.5.14 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$. Entonces, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Claramente si $x < 0 < y$ existe $p = 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$ y el teorema queda demostrado en este caso.

Supongamos ahora que $0 < x < y$. Sea
$$\epsilon = y - x > 0$$
luego por la corolario de propiedad arquimediana tenemos
$$\frac{1}{n} < \epsilon = y - x$$

Dado $nx \in \mathbb{R}$, nuevamente por la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$m > nx.$$
Sea m el mínimo que satisface $m > nx$, luego
$$m - 1 \leq nx$$
así tenemos
$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y.$$
Por lo tanto
$$x < \frac{m}{n} < y,$$
es decir, existe $p = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.

Por otra parte. Supongamos que $x < y < 0$, entonces $0 < -y < -x$ y por lo anterior existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que
$$-y < p < -x.$$
Luego
$$x < -p < y$$
y como $-p \in \mathbb{Q}$ queda completa la demostración. ■

Definición 1.5.15 Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ es **denso** en $\mathbb{R}$ si y sólo si entre dos números reales cualesquiera existe algún elemento de X. ♢

Observación: De acuerdo al teorema y definición anteriores claramente el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$.

1.6 Ejercicios Propuestos

1. **Grupos**

   a En $\mathbb{Z}$ se define la operación $*$ por:

   $$x * y = xy + x + y.$$

   Decida si $\mathbb{Z}$ bajo esta operación es un grupo.

   b Sean $G = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Z}\}$ y $*$ la operación definida por:

   $$(x, y) * (x', y') = (xx', y + y')$$

   Decida si G bajo esta operación es un grupo.

   c Sea $G = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, se define la suma

   $$(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') = (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$$

   Demuestre que G bajo esta operación es un grupo abeliano.

   d Sea G un grupo. Demuestre que para todo $a, b \in G$, la ecuación

   $$ax = b$$

   tiene única solución.

   e Sea G un grupo y H un subconjunto no vacío de G. Se dice que H es un subgrupo de G si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen

   i $(\forall a, b \in H)(ab \in H)$
   ii $(\forall a \in H)(a^{-1} \in H)$

   De acuerdo a esto demuestre que:

   A $(\mathbb{Q}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.
   B $Z = \{g \in G \mid (\forall h \in G)(gh = hg)\}$ es un subgrupo de G.

2. **Resolver las siguientes ecuaciones**

   a $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{1}{x+3}$
   b $\sqrt{x-3} + x = 6$
   c $\sqrt{4x^2-1} + \sqrt{27-3x^2} = |x| + 5$
   d $\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x} = |x-3|$
   e $\sqrt{\sqrt{x}+3} - \sqrt{\sqrt{x}-3} = \sqrt{2\sqrt{x}}$
   f $x + \sqrt{6-4x^2-x} = 4x^2$
   g $\sqrt{|x+1|-6} = 8x - x^2 - 15$
   h $x - 1 = \sqrt{x^2-x+2}$

i $||2x+3|-|x-3||=|3x+2|+x$

j $||2x+1||=2x$

k $\dfrac{x-5}{x^2-9}+\dfrac{x+3}{x-3}=1$

l $\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{x+2}{x-2}=1$

m $\dfrac{x+m}{m}-\dfrac{x+n}{n}=\dfrac{m^2+n^2}{mn}-2$

n $\left(\dfrac{x+\frac{b-x}{1+bx}}{1-\frac{x(b-x)}{1+bx}}-\dfrac{b-\frac{b-x}{1-bx}}{1-\frac{b(b-x)}{1-bx}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{b}{x}-\dfrac{x}{b}\right)=\dfrac{2}{b}$

3. **Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones**

a $\left.\begin{array}{rcl} x+3y &=& 4\\ 2x+7y &=& 15 \end{array}\right|$

b $\left.\begin{array}{rcl} 2x+3z &=& 4\\ 2x-6y+7z &=& 15\\ x-2y+5z &=& 10 \end{array}\right|$

c $\left.\begin{array}{rcl} x+4y+3z &=& 1\\ 2x+5y+4z &=& 4\\ x-3y-2z &=& 5 \end{array}\right|$

d $\left.\begin{array}{rcl} 4x+y-2z &=& 0\\ x-2y+z &=& 0\\ 11x-4y+-z &=& 0 \end{array}\right|$

e $\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 4\\ 3x+4y &=& 9 \end{array}\right|$

f $\left.\begin{array}{rcl} x^2+xy+y^2 &=& 13\\ x+y &=& 4 \end{array}\right|$

g $\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} &=& \dfrac{25}{12}\\ x^2-y^2 &=& 7 \end{array}\right|$

h $\left.\begin{array}{rcl} x^2+y^2+2x &=& 13\\ 3x+2y^2 &=& 4 \end{array}\right|$

i $\left.\begin{array}{rcl} x &=& 2wx\\ y &=& 4wy\\ z &=& wz\\ 2x^2+4y^2+z^2 &=& 8 \end{array}\right|$

j $\left.\begin{array}{rcl} 2x-wy &=& 0\\ 2y-wx &=& 0\\ z+wz &=& 0\\ z^2+xy-4 &=& 0 \end{array}\right|$

k $\left.\begin{array}{rcl} 2(y+z)+wyz & = & 0 \\ 2(x+z)+wxz & = & 0 \\ 2(y+x)+wyx & = & 0 \\ xyz & = & 64 \end{array}\right|$

l $\left.\begin{array}{rcl} x+w(x-3) & = & 0 \\ y+w(y-4) & = & 0 \\ z & = & wz \\ (x-3)^2+(y-4)^2 & = & z^2 \end{array}\right|$

m $\left.\begin{array}{rcl} yz & = & w(y+z) \\ xz & = & w(x+z) \\ xy & = & w(y+x) \\ xy+xz+yz & = & 5 \end{array}\right|$

4. Considere la igualdad
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$$

   i Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ está definida.

   ii Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ que la satisfacen.

5. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   i $(\forall a \in \mathbb{R}^+)\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}>\dfrac{1}{2}\right)$

   ii $(\forall a, b \in \mathbb{R})\,(a^2+b^2 \geq 2ab)$

   iii $(\forall a \in \mathbb{R})\left(0 \leq a \Rightarrow \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 \leq a\right)$

   iv $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}\right)$

   v $(\forall a, b \in \mathbb{R}^-)(a<b \Rightarrow a^2>b^2)$

   vi $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}-\{0\})\left(x<y \Rightarrow \dfrac{x}{y}<1\right)$

   vii $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)(x \leq y \Rightarrow x \leq 2y)$

   viii $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)(x \leq y \Rightarrow y^{-1} \leq x^{-1})$

   ix $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x+y=1 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4})$

   x $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(0 \leq x \leq y \Rightarrow \frac{x}{y+1} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{x+1}{y+1})$

   xi $(\forall x, y \in \mathbb{R})(|y-x|=|y+x|) \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$

   xii $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(2x+4y=1 \Rightarrow x^2+y^2 \geq \frac{1}{20})$

   xiii $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((2 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 2) \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3)$

   xiv $(\forall x, y \in \mathbb{R})x^3+y^3 \geq x^2-xy+y^2$

   xv $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \neq b, n \in \mathbb{N})\left(\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \dfrac{a+nb}{n}\right)$

xvi $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|)$

6. Considere en $\mathbb{R}$ la ecuación $m+\sqrt{x}=x$, con $m \in \mathbb{R}$.

   i Determine todos los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación tiene solución.

   ii Encuentre la solución para $m=-\dfrac{1}{8}$

7. Determine en los siguientes casos condiciones sobre el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que las ecuaciones

   i $x^2+\lambda x+3=0$

   ii $x^2-2(\lambda+1)x+3=0$

   iii $x^2+2(\lambda+1)x+3\lambda=0$

   iv $\lambda x^2-2x+3\lambda=0$

   tengan

   A Soluciones reales y distintas.

   B Soluciones reales e iguales.

   C No tengan solución.

8. **Simplificar al máximo las siguientes expresiones**

   a $\frac{a^2}{b}-\frac{a^2-b^2}{a+b}:\frac{a-b}{b}+\frac{b}{a}$

   b $\dfrac{1}{a+2-\frac{a+1}{a-\frac{1}{a}}}$

   c $(a^2-b^2):\left[\left(\dfrac{a^2+ab}{b^2+ab}\right):\left(\dfrac{a^2-ab}{b^2-ab}\right)\right]$

   d $\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}\right)\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}\right)$

   e $\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{a^2}{b^3}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a}{b^2}\right)}{\left(\frac{a+2b}{a+b}+\frac{a}{b}\right):\left(\frac{a+2b}{a}-\frac{a}{a+b}\right)}$

   f $\left(\dfrac{\dfrac{a+b}{2}-a}{\dfrac{a+b}{2}-b}\right)^3-\dfrac{\dfrac{a+b}{2}-2a+b}{\dfrac{a+b}{2}+a-2b}$

   g $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x+1}}{x^3-1}-\dfrac{\dfrac{x^2+1}{x^4-x^3}-\dfrac{1}{x^3-x^2}}{x^3+1}$

   h $\dfrac{\left(\frac{x(x+y)+y(y-x)}{y^2-x^2}\right)\left(\frac{(x+2y)x+y^2}{xy}\right)}{\frac{y^2+x(x+2y)}{y(x+2y)}}$

i $\dfrac{3x+2}{\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{1-x}}$

j $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+3}}$

k $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

l $\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+3x-1}-6x}{3x-\sqrt{x^2+x+1}}$

m $\dfrac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}}}$

n $\dfrac{x}{\sqrt[n]{x^m}+\sqrt[m]{a^n}}$, n, m pares.

o $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}-1}\cdot\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x-1}}$

9. **Problemas de planteo**

a Si $a : b = 2 : 3$ y $x = \dfrac{3a^2-2b+b^2}{3a+2b}$, expresar a en tanto % de x.

b Para la altura del centro de gravedad de un tronco de cono rige la fórmula siguiente:

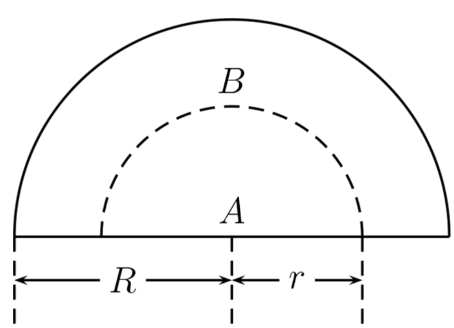
$$X = \frac{R^2+2Rr+3r}{4(R^2+Rr+r^2)}\cdot b$$

¿Qué tanto % de b mide X, si r mide 50% de R ?.

c En un triángulo rectángulo se sabe que el cateto mayor mide 96% de la hipotenusa. ¿Qué tanto % de la hipotenusa mide el cateto menor?.

d La ley de Newton nos da $F = m\cdot a$. ¿Qué tanto % aumenta la aceleración a, si la fuerza F aumenta en 42% y la masa disminuye en 4% ?.

e Las áreas A y B de la figura (**??**) están en la razón $2 : 3$. Expresar r en tanto % de R.



f ¿En qué tanto % hay que aumentar el radio de una esfera para que su volumen aumente en 33.1% ?.

g Los diámetros de dos cilindros son entre si como $3 : 4$ y sus alturas como $5 : 6$. ¿Qué tanto % del volumen del mayor mide el volumen del menor?.

h Determinar dos números enteros consecutivos cuya suma de cuadrados se 128.525.

i Si A hace un trabajo en tres horas y B lo hace en cinco horas. ¿Cuánto tiempo demoran en hacer el trabajo ambos juntos?.

j Hallar tres números consecutivos tales que si el menor se divide entre 20, el mediano entre 27 y el mayor entre 41, la suma de los cocientes es 9.

k A tiene el doble de dinero que B. Si A le da a B 34 pesos. A tendrá los $5/11$ de lo que tenga B. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?.

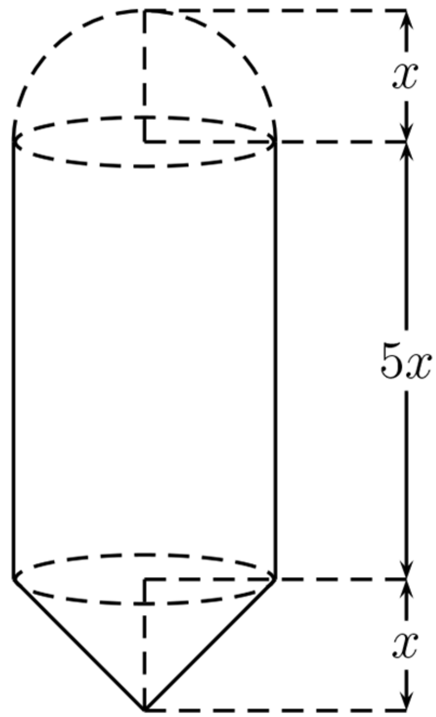
l Dos trabajadores uno de los cuales empieza a trabajar uno y medio días después que el otro, pueden completar un trabajo en 7 días. Si cada uno de ellos hiciera el trabajo individualmente, el primero habría necesitado 3 días más que el segundo que empezó después. ¿Cuántos días tardará cada obrero en realizar el trabajo individualmente?.

m Un ingeniero contrata a un técnico para una cierta labor. Para esto le ofrece un sueldo anual de $500.000 y un lingote de oro. Al cabo de siete meses el técnico termina su trabajo, por lo que recibe $250.000 y el lingote de oro. ¿Cuál es el valor del lingote?.

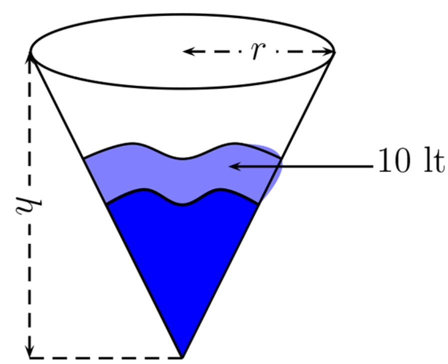
n Un cierto número de estudiantes deben acomodarse en una residencial. Si se ubicaran dos estudiantes por habitación entonces quedarían dos estudiantes sin pieza. Si se ubicaran tres estudiantes por habitación entonces sobrarían dos piezas. ¿Cuántas habitaciones disponibles hay en la residencial y cuántos estudiantes deben acodarse en ella?.

o Cuando el precio de una marca popular de artículos de video es $300 por unidad, una tienda vende 15 unidades a la semana. Sin embargo cada vez que el precio se reduce en $10 las ventas aumentan en 2 unidades a la semana. ¿Qué precio de venta debe ponerse para obtener ingresos semanales de $7.000 ?.

p El cuerpo de la figura (**??**) está formado por una semiesfera, un cilindro y un cono. Calcular x, si el volumen total mide $112,5\pi[cm^3]$.



q Un estanque con cierta cantidad de agua tiene forma de cono invertido. Al agregarle 10 litros, como muestra la figura (**??**), el nivel de agua sube en un 20%. Si la base del cono fuese reducida en un 40%, manteniendo la misma altura resultaría un cono que estaría lleno con la cantidad de agua inicial.



Sabiendo que la altura del estanque es 50 cm. Calcular el radio inicial y el volumen de agua contenido en un comienzo.

10. **Resolver las siguientes inecuaciones**

a $\dfrac{x-1}{1-x} \leq 2x$

b $(x+2)(x+1) \leq 0$

c $\dfrac{x+3}{x} \leq 2$

d $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}\leq 0$

e $x-\dfrac{2x-3}{x}\geq 1-3x$

f $\dfrac{34}{x-4}\leq\dfrac{2}{x-1}-5$

g $\dfrac{x-2}{x+2}\geq\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x-1}{x^2-4}$

h $\dfrac{13-5x}{x^2+x+1}\leq\dfrac{2}{x-2}$

11. **Resolver las siguientes inecuaciones**

a $\dfrac{2(3|x+26|)}{155(x+6)}<\dfrac{533}{155(5x-1)}$

b $\sqrt{-4x^2+25}\leq 3$

c $\dfrac{\sqrt{2x-1}(x+1)}{(x^2+1)(x-2)}\geq 0$

d $\sqrt{\sqrt{1-x}+1}\leq x-1$

e $\sqrt{2-x}-2\sqrt{x}\leq\sqrt{x-2}$

f $\sqrt{x-2}+3\sqrt{3x+1}\leq\sqrt{5x-2}$

g $\sqrt{1-|x|}>1-3x$

h $\dfrac{x^2+2x+24}{\sqrt{2x+1}(x^2+x+5)}\geq 0$

i $1-\left|\dfrac{1}{x}\right|\geq x$

j $\sqrt{2-|x^2-x|}\leq\sqrt{3}$

k $\dfrac{x}{|x+2|}\leq\dfrac{2}{x(x+2)}$

l $|2-|x-1||\leq 1$

m $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geq|x-3|$

n $\dfrac{||x+3|-2|}{||x|-1|}\geq 2$

o $|x+1|+||x-1|+3|\leq|x+2|+8$

p $\left|1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right|\geq 1$

q $\dfrac{|x-1|-|x+1|}{|x^2-1|}\leq\dfrac{|x-1|}{x+1}$

r $\dfrac{|x-1|(\sqrt{x+3}+|x|)}{|x+3|-|x-4|} \geq 0$

s $3x+1+|x-1| < \sqrt{x}$

12. **Axioma del Supremo**

a Determine el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos

a $A = [-2, 3[\cup]5, \sqrt{42}[$

b $A =]-3, 0[\cup]\sqrt{4}, 6]$

c $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$

d $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$

e $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|x|+1} < 2\right\}$

f $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x+1} < 2\right\}$

g $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{x}{2} \leq |x-1| \leq \dfrac{9}{2}\right\}$

b Sean

i $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7 < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$

ii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$ y $B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < \dfrac{-1-x(x+1)}{x+1}\right\}$

Encuentre en cada caso (si existen) el Supremo e ínfimo correspondientes a los conjuntos $A, B, A \cup B$ y $A \cap B$.

c Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$ acotado. Se define

$$\begin{aligned} \alpha + A &= \{\alpha + a \mid a \in A\}. \\ \alpha \cdot A &= \{\alpha a \mid a \in A\}. \end{aligned}$$

Demuestre que

i $\alpha + \sup(A) = \sup(\alpha + A)$

ii $\alpha + \inf(A) = \inf(\alpha + A)$

iii Si α es positivo, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$

iv Si α es positivo, entonces $\inf(\alpha A) = \alpha \inf(A)$

v Si α es negativo, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \inf(A)$

vi Si α es negativo, entonces $\inf(\alpha A) = \alpha \sup(A)$

d Sean A, B dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ y

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Demuestre que:

i $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

ii $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$

e Demuestre que si

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{2n}{n+3},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

entonces el $\sup(A) = 2$.

f Demuestre que si

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{2}{3n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

entonces el $\inf(A) = 0$.

g Determine y demuestre si existe el supremo y el ínfimo de

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = \frac{2}{n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

h Determine y demuestre si existe el supremo y el ínfimo de

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} \;\middle|\; x_n = (-1)^n \frac{5}{2n+3}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Capítulo 2

Geometría Analítica

En este capítulo trabajaremos en el estudio de las figuras planas, entre ellas las rectas y cónicas, y la relaciones que existe entre ellas, en la naturaleza encontramos esta figura aunque esta en el espacio si las miramos con detención las podremos mirar en un plano, el movimiento de los planetas elipse, el lanzamiento de un proyectil una parábola, El cálculo de cuerpos celestes ajenos al sistema solar que entren en él, atraídos por el sol describen una trayectoria en forma de hipérbola, por lo que puede ser calculado su camino con toda precisión.

2.1 Introducción

La geometría es una parte importante de la matemática que tiene por objetivo el estudio de las figuras que se encuentran en el plano (o en el espacio). En el desarrollo de este capítulo, usaremos la terminología habitual de geometría, entre otros tenemos
Recta: Es una línea sin principio ni fin que describe de forma idealizada de un hilo tenso en el plano formado por una cantidad infinita de puntos.
Segmento: Es una parte de la recta que se encuentra entre dos puntos en la recta que representan el principio y fin de este, llamados extremos.

Por otro lado, el concepto de **analítica** se refiere al análisis que se necesita y se ocupa para poder obtener la resolución de problemas, lo que nos lleva a la definición del concepto de **geometría analítica** que esta dada por el análisis que se realiza a las distintas figuras geométricas, que son subconjunto del plano, las cuales son definidas mediante funciones proposicionales o expresiones algebraicas.

Para representar el plano real, donde se encuentras las figuras, recurriremos al producto cartesiano entre conjuntos, que en nuestro caso se denota por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o de otra manera $\mathbb{R}^2$, que esta constituido por todos los "pares ordenados".

Estas ideas básicas son las que nos permitirán iniciar el estudio de algunas figuras planas de la geometría.

2.2 Plano Cartesiano

Iniciamos este estudio, recordándonos las nociones básicas de plano cartesiano.

Para ello tenemos que el producto cartesiano esta dado por

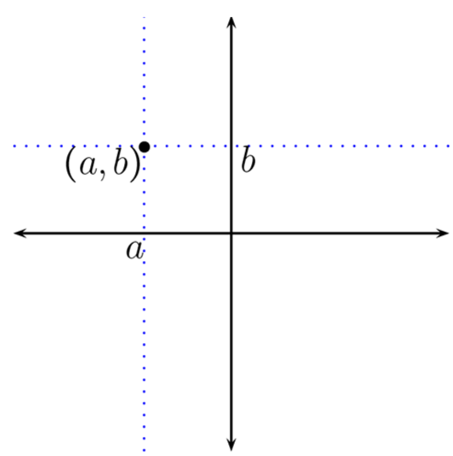
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x \ , y \in \mathbb{R}\}$$

Un elemento de $\mathbb{R}^2$, es un par ordenado (x, y), donde x es la primera coordenada o abscisa e y es la segunda coordenada u ordenada del punto (x, y)

Además dos puntos en el producto cartesiano son iguales si y sólo si las abscisa y ordenadas son iguales, es decir, se cumple que

$$(\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}) \ (x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$$

Un representación del producto cartesiano es el plano cartesiano, que se construye con dos rectas perpendiculares (ejes, un horizontal y otro vertical) que se intersecan en un punto(origen), un elemento del producto cartesiano, se representa con la intersecarse de la recta vertical que pasa por el eje horizontal en el valor de la abscisa y una horizontal que pasa por el eje vertical en el valor de la ordenada



2.2.1 Distancia entre dos Puntos

La distancia entre dos puntos, corresponde asignarle un valor numérico no negativo al segmento que une estos dos puntos. Esta designación debería cumplir algunas propiedades, básicamente estas son que la distancia o longitud entre puntos iguales es cero, que la distancia no depende del sentido en que se mida y la longitud entre dos puntos es menor que la longitud que se obtiene por la vía de más segmentos.

En la recta real $\mathbb{R}$, la distancia entre dos puntos esta dada por

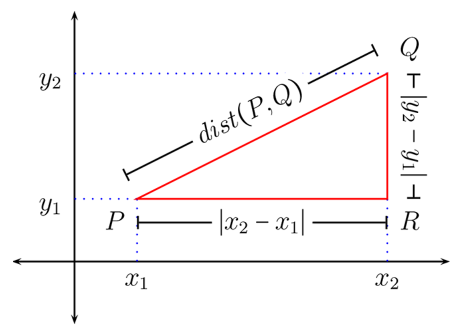
$$dist(a, b) = |b - a| \qquad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

la cual cumples las tres propiedades básicas anteriores.

Para extender esta definición al plano cartesiano, usaremos el teorema de Pitágoras de modo obtener una fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano.

Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$, donde $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$. La distancia entre ellos la denotaremos por $dist(P, Q)$

Grafiquemos los puntos P, Q en el plano cartesiano, y tracemos un triángulo rectángulo, con las rectas paralelas a los ejes coordenados.



Luego por teorema de Pitágoras tenemos que

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2$$

Observación: Recordemos que la hipotenusa representa el lado que se encuentra opuesto al ángulo de 90° en la figura, el cateto opuesto que esta representado por la base del triángulo y cateto adyacente el lado restante.

$$\begin{array}{rrcll} & (\text{hipotenusa})^2 & = & (\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2 & \\ \text{donde} & (dist(P, Q))^2 & = & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 & /\sqrt{} \\ \text{entonces} & |dist(P, Q)| & = & \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} & \end{array}$$

Observación: La distancia representa una longitud, por lo cual está siempre es no negativa.

Definición 2.2.1 Sean $P, Q \in \mathbb{R}^2$, con $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ entonces la distancia entre los dos puntos es

$$dist(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 2.2.2 Considere los puntos $(-2, -1)$ y $(2, 2)$ en $\mathbb{R}^2$, calcule la distancia entre ellos. $\square$

Solución 1. Denotemos los puntos de la siguiente forma:

$$A = (-2, -1) \ y \ B = (2, 2)$$

luego calculemos la distancia entre ellos

$$\begin{aligned} dist(A, B) &= \sqrt{(2 - (-2))^2 + (2 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{(2 + 2)^2 + (2 + 1)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia que existe entre los puntos $A = (-2, -1)$ y $B = (2, 2)$ es 5, o bien

$$dist(A, B) = 5.$$

Proposición 2.2.3 *Sean* $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ *entonces*

a $dist(P, Q) = 0$ *es equivalente a* $P = Q$.

b $dist(P, Q) = dist(Q, P)$.

c $dist(P, Q) \leq dist(P, R) + dist(R, Q)$.

Ejemplo 2.2.4 Demuestre que los puntos $(-2, -1), (2, 2), (5, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles □

Solución 2. Sean los puntos $A = (-2, -1), B = (2, 2)$ y $C = (5, -2)$ en $\mathbb{R}^2$.

Sabemos que $dist(A, B) = 5$, calculada en el ejemplo anteriormente, entonces ahora calcularemos las distancias faltantes para verificar si A, B y C son los vértices de un triángulo isosceles.

$$\begin{aligned} dist(A, C) &= \sqrt{(5 - (-2))^2 + (-2 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dist(B, C) &= \sqrt{(5 - 2)^2 + (-2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

En resumen se tiene lo siguiente

$$dist(A, B) = dist(B, C) = 5, \quad dist(A, C) = 5\sqrt{2}.$$

por lo tanto concluimos que los segmentos que se encuentran entre los puntos A, B y C forman un triángulo isósceles y no es equilátero.

Observación: Recordemos que un triángulo es isósceles cuando tiene dos lados de igual longitud.

Ejemplo 2.2.5 Encuentre todos los puntos que pertenecen a $\mathbb{R}^2$ y que están a una distancia igual a 1 del origen $(0, 0)$. □

Solución 3. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $dist(Q, P) = 1$, donde $Q = (0, 0)$. Como

$$\begin{array}{ccll} dist(Q, P) & = & 1 & \\ \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} & = & 1 & \\ \sqrt{x^2 + y^2} & = & 1 & /()^2 \\ x^2 + y^2 & = & 1 & \\ x^2 & = & 1 - y^2 & \end{array}$$

Ahora veremos cuales son esos punto, como $x^2 = 1 - y^2$, donde x^2 representa un número positivo, luego para que se cumpla la igualdad $1 - y^2$ también debe ser positivo, por lo tanto:

$$\begin{array}{rcll} 1 - y^2 & \geq & 0 & \\ y^2 & \leq & 1 & \surd \\ |y| & \leq & 1 & \end{array}$$

De este modo se tiene que $y \in [-1, 1]$ entonces

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 1 - y^2 \quad \sqrt{} \\ x & = & \pm\sqrt{1 - y^2} \end{array}$$

Por lo tanto

$$P = (x, y) = (\sqrt{1 - y^2}, y) \text{ o } P = (x, y) = (-\sqrt{1 - y^2}, y) \text{ con } y \in [-1, 1].$$

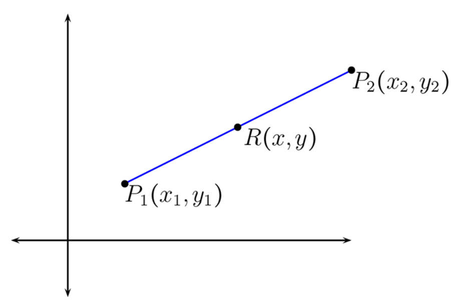
Observación: La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ gráficamente corresponde a una circunferencia unitaria o de radio 1, ya que son todos los puntos que están a una unidad de origen, figura que estudiaremos más adelante en este capítulo.

2.2.2 Punto Medio

Definición 2.2.6 Dados $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, los extremos de un segmento, se dice que R es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ si y sólo si

$$dist(P_1, R) = dist(R, P_2)$$

$\diamondsuit$



Aún más general, se tiene que

Definición 2.2.7 Sean $P_1, P_2, R \in \mathbb{R}^2$, se dice que R divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón r si y sólo si

$$r = dist(P_1, R) : dist(R, P_2).$$

Esto quiere decir:

$$r = \frac{dist(P_1, R)}{dist(R, P_2)}.$$

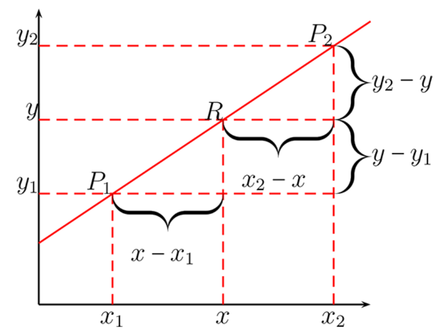
$\diamondsuit$

Determine las coordenadas de punto que cumple tal condición

Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ y $R = (x, y)$, de modo que satisface la siguiente razón

$$r = \frac{dist(P_1, R)}{dist(R, P_2)}.$$

Apliquemos thales, en la siguiente figura



luego obtenemos que

$$r = \frac{dist(P_1, R)}{dist(R, P_2)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}.$$

Despejando x obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{x-x_1}{x_2-x} \\ r(x_2 - x) &= x - x_1 \\ x + rx &= rx_2 + x_1 \\ x(1 + r) &= rx_2 + x_1 \\ x &= \tfrac{rx_2+x_1}{1+r} \end{aligned}$$

Análogamente

$$r = \frac{dist(P_1, R)}{dist(R, P_2)} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Despejando y obtenemos

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{y-y_1}{y_2-y} \\ y &= \tfrac{ry_2+y_1}{1+r} \end{aligned}$$

Así obtenemos que las coordenadas de R son:

$$R = (x, y) = \left(\frac{rx_2 + x_1}{1 + r}, \ \frac{ry_2 + y_1}{1 + r} \right)$$

El caso particular en que $r = 1$, se tiene el punto medio, y esta dado por:

$$M = (x, y) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \ \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

Proposición 2.2.8 *Sean P_1, P_2 y $M \in \mathbb{R}^2$, tenemos que el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ esta dado por:*

$$M = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

donde $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$.

Ejemplo 2.2.9 Encuentre el punto medio del segmento $\overline{AB}$ donde $A = (5, 3)$ y $B = (-10, -2)$ $\square$

Solución. Calculemos separadamente x e y

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{-10+5}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

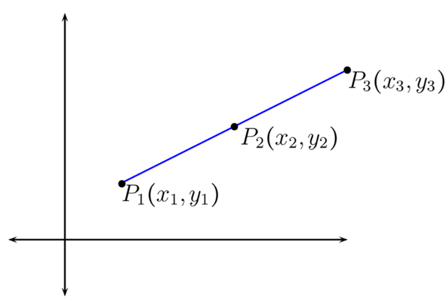
Por lo tanto el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es el punto $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.

2.2.3 Puntos Colineales

Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$, por propiedad Proposición 2.2.3 de distancia obtenemos

$$dist(P_1, P_3) \leq dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3).$$

Observando la gráfica



Se tiene que $dist(P_1, P_3) = dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3)$, luego

$$\begin{aligned}
dist(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \\
dist(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
dist(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
dist(P_1, P_3) &= dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3) \\
\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}
\end{aligned}$$

Consideremos los siguientes cambio de variables

$$a = x_2 - x_1, \qquad b = x_3 - x_2,$$

de lo cual se tiene que $x_3 - x_1 = a + b$.

De manera similar definimos

$$c = y_2 - y_1, \qquad d = y_3 - y_2.$$

y obtenemos que $y_3 - y_1 = c + d$

Reemplazando, de modo de facilitar la simplificación, se obtiene

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2} & = & \sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2} \;\; /()^2 & \\
(a+b)^2+(c+d)^2 & = & a^2+c^2+2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}+b^2+d^2 & \\
a^2+2ab+b^2+c^2+2cd+d^2 & = & a^2+c^2+2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}+b^2+d^2 & \\
2ab+2cd & = & 2\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)} & /\frac{1}{2} \\
ab+cd & = & \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)} & \\
a^2b^2+2abcd+c^2d^2 & = & (a^2+c^2)(b^2+d^2) & \\
a^2b^2+2abcd+c^2d^2 & = & a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2 & \\
2abcd & = & a^2d^2+c^2b^2 & \\
a^2d^2-2abcd+c^2b^2 & = & 0 & \\
(ad-cb)^2 & = & 0 &
\end{array}$$

Entonces $ad - cb = 0$, volvemos a las variables originales que son

$$a = x_2 - x_1, \quad c = y_2 - y_1, \quad b = x_3 - x_2, \quad d = y_3 - y_2$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
ad & = & cb \\
(x_2-x_1)(y_3-y_2) & = & (y_2-y_1)(x_3-x_2)
\end{array}$$

Definición 2.2.10 Sean $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$, diremos que $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_3 = (x_3, y_3)$ son colineales si y sólo si

$$dist(P_1, P_3) = dist(P_1, P_2) + dist(P_2, P_3) \quad \text{o bien} \quad (x_2-x_1)(y_3-y_2) = (y_2-y_1)(x_3-x_2)$$

$\lozenge$

Ejemplo 2.2.11 Encuentre el conjunto de todos los puntos colineales a $P = (13, 3)$ y $Q = (9, 15)$. $\square$

Solución. Sean P, Q y R colineales, luego por la definición anterior se tiene que

$$dist(P, Q) = dist(P, R) + dist(R, Q)$$

equivalentemente

$$(x_2-x_1)(y_3-y_2) = (y_2-y_1)(x_3-x_2)$$

En este ejemplo tenemos que $P = (13, 3) = (x_1, y_1); Q = (9, 15) = (x_3, y_3)$ y $R = (x_2, y_2) = (x, y)$ entonces obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
(x-13)(15-y) & = & (y-3)(9-x) \\
15x - xy - 195 + 13y & = & 9y - xy - 27 + 3x \\
12x + 4y & = & 168 \\
y & = & \frac{168-12x}{4} \\
y & = & 42 - 3x
\end{array}$$

Por lo tanto $R \in \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = 42 - 3x\}$.

2.3 Ecuación de la Recta

La geometría euclidiana nos enseña que dados dos puntos distintos, existe una única recta que contiene a los puntos.

De este modo se tiene que una recta es el conjunto todos los puntos colineales a dos puntos dados.

Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, luego la recta que pasa por los $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$L_{P_1P_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)\}$$

Llamaremos línea recta o simplemente recta a la figura geométrica que resulta al graficar los puntos de este conjunto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Observación: Para una mayor comodidad de escritura, al conjunto que forma una recta

$$L_{P_1P_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)\}$$

lo denotaremos por su ecuación, es decir,

$$L_{P_1P_2}: \ (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)$$

Ejemplo 2.3.1 Hallar las ecuaciones de la recta l que pasan por los puntos $(5, -9)$ y $(1, 3)$.
□

Solución. Sabemos que $(5, -9)$ y $(1, 6) \in l$, donde $(5, -9) = (x_1, y_1)$ y $(1, 6) = (x_2, y_2)$ tenemos

$$\begin{aligned}
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (x_2 - x_1)(y - y_2) = (y_2 - y_1)(x - x_2)\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (1 - 5)(y - 6) = (6 - (-9))(x - 1\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -4(y - 6) = 15(x - 1)\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -4y + 24 = 15x - 15\} \\
l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 15x + 4y - 39 = 0\}.
\end{aligned}$$

2.3.1 Ecuaciones de la Rectas

Definición 2.3.2 Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in l$ puntos distintos, se define la pendiente de la recta l en los siguientes casos

a Si $x_2 = x_1$, diremos que la pendiente es infinita, y escribiremos $m = \infty$ entonces la recta l es

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ x = x_1\} \quad \text{o} \quad l : x = x_1$$

b Si $x_2 \neq x_1$, se define la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

entonces la recta l es

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ y = mx + b\} \quad \text{o} \quad l : y = mx + b$$

con

$$b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

◊

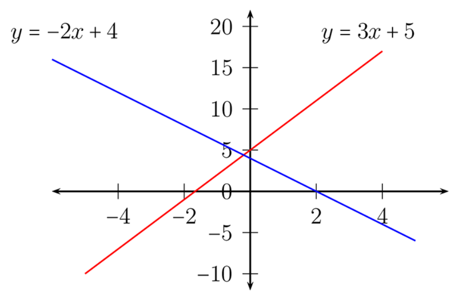
Observación: Un caso particular es cuando la pendiente de l toma el valor 0, es decir $m = 0$ entonces la ecuación de la recta l es

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ y = b\} \quad \text{o} \quad l : y = b$$

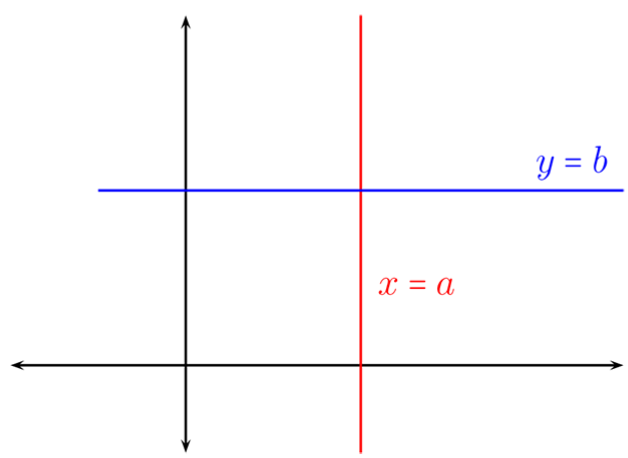
Dependiendo del valor de la pendiente se puede se pueden distinguir dos tipos de inclinación al graficar una recta, es decir, cuando la pendiente es positiva tenemos que es creciente y cuando es negativa es decreciente

$$m > 0 \ \text{ o } \ m < 0$$

este comportamiento lo observaremos mediante dos ejemplos, la recta graficada de color rojo $y = 3x + 5$ es creciente y la recta graficada de color azul $y = -2x + 4$ es decreciente



En los otros casos, la gráfica de las rectas cuando $m = \infty$ son gráficas verticales del forma que tiene la de color rojo y cuando $m = 0$ son gráficas horizontales corresponde a la forma de color azul, dada en la siguiente figura



Ejemplo 2.3.3 Sean $A = (6, 11)$ y $B = (13, 4) \in \mathbb{R}^2$ dos puntos que pertenece a la recta l. Calcule la pendiente de la recta l. □

Solución 1. Sean $A = (x_1, y_1) = (6, 11)$ y $B = (x_2, y_2) = (13, 4)$, reemplazando en la formula de la pendiente tenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 11}{13 - 6} = \frac{-7}{7} = -1.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta l es -1.

Ejemplo 2.3.4 Calcule las pendientes de las rectas que pasan por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ con $A = (5,7)$, $B = (12,3)$ y que pasan por un punto que es colineales a los puntos de $C = (16,14)$ y $D = (8,10)$. $\square$

Solución 2. Sea $A = (5,7)$ y $B = (12,3)$, luego el punto medio de $\overline{AB}$ esta dado por:

$$Q = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{5+12}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{17}{2}, \frac{10}{2}\right) = \left(\frac{17}{2}, 5\right)$$

Consideremos los puntos colineales a $C = (16,14)$ y $D = (8,10)$ que denotaremos como $P = (a,b)$. Reemplazando tenemos que

$$\begin{array}{ccc}
(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) & = & (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) \\
(a - 16)(10 - b) & = & (b - 14)(8 - a) \\
10a - ab - 160 + 16b & = & 8b - ab - 112 + 14a \\
4a - 8b & = & -48 \\
a & = & \frac{8b-48}{4} \\
a & = & 2b - 12
\end{array}$$

Reemplazando $a = 2b - 12$ en el punto $P = (a,b)$, tenemos que $P = (2b - 12, b)$

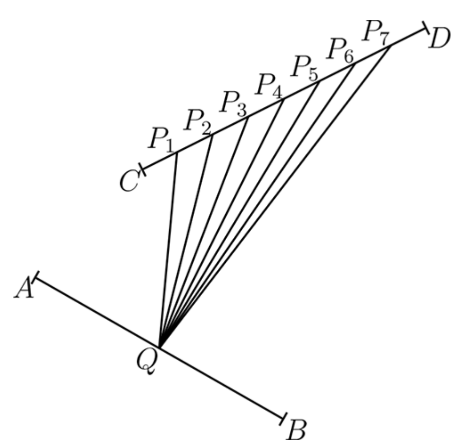
Luego si $Q = \left(\frac{17}{2}, 5\right) = (x_1, y_1)$ y $P = (2b - 12, b) = (x_2, y_2)$ su pendiente es

$$\begin{array}{rcl}
m & = & \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\
 & = & \frac{b-5}{2b-12-\frac{17}{2}}; \quad b \neq \frac{41}{4} \\
 & = & \frac{2b-10}{4b-41}
\end{array}$$

Por lo tanto todas las rectas que pasan por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y por los posibles puntos colineales de C y D tienen como pendiente

$$m = \frac{2b - 10}{4b - 41} \text{ o } m = \infty$$

El problema esta representado por la siguiente figura,



Donde $Q = (\frac{17}{2}, 5)$ es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ son algunos puntos colineales a C y D

Finalmente sus ecuaciones están dadas por:

$$l_b : (y - 5) = \frac{2b-10}{4b-41}(x - \frac{17}{2}) \quad \text{o bien } x = \frac{17}{2}.$$

donde $P_b = (2b - 12, b)$ punto colineal de $\overline{CD}$, con $b \in \mathbb{R}$.
A continuación daremos algunas indicaciones para determinar la ecuación de la recta, dependiendo de los datos proporcionados por el problema.
Primer Caso: Se conoce un punto de la recta y su pendiente.

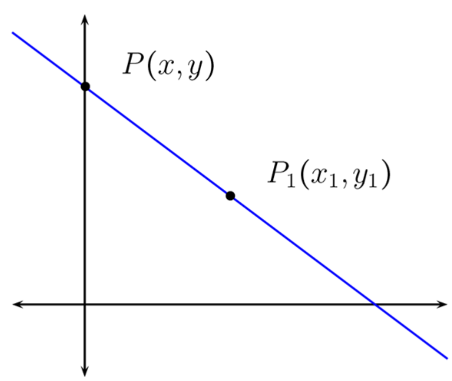
La ecuación de la recta l queda totalmente determinada con un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ y su pendiente m.

a) Si la pendiente $m = \infty$ entonces la recta es:

$$l : x = x_1$$

b) Si la pendiente $m \in \mathbb{R}$, luego sea $P = (x, y) \in l$, otro punto de la recta, así tenemos que

$$\begin{array}{rcl} m & = & \frac{y-y_1}{x-x_1} \\ m(x - x_1) & = & y - y_1 \end{array}$$



Proposición 2.3.5 *Sean $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ un punto de la recta y $m \in \mathbb{R}$ donde m representa la pendiente de la recta l entonces la ecuación de la recta está dada por:*

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo 2.3.6 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (11, 3)$ y su pendiente es $m = 13$. □

Solución 3. Como la recta pasa por el punto $A = (x_1, y_1) = (11, 3)$ y su pendiente es $m = 13$, reemplazando en la ecuación de la propiedad anterior, se tiene

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & m(x - x_1) \\ y - 3 & = & 13(x - 11). \end{array}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta esta dada por

$$y = 13x - 140$$

Segundo Caso: Se conocen dos puntos de la recta.

Sabemos que la ecuación de la recta l queda totalmente determinada por dos puntos.

Sean $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, puntos en la recta

a) Si $x_1 \neq x_2$, reemplazando en la definición de pendiente obtenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

para luego reemplazar en el caso anterior, y obtener

$$l : y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si $x_1 = x_2$ entonces la ecuación es

$$l : x = x_1.$$

Proposición 2.3.7 *Sean $P_2 = (x_2, y_2), P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ con $x_1 \neq x_2$, entonces la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados es:*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \textit{con} \;\; x_1 \neq x_2$$

Ejemplo 2.3.8 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 9)$ y por el punto $(5, 7)$. □

Solución 4. Ya que la recta pasa por los puntos $A = (x_1, y_1) = (1, 9)$ y $B = (x_2, y_2) = (5, 7)$.

Reemplazando A y B en la definición de pendiente tenemos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 9}{5 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Y la pendiente en ecuación obtenida anteriormente tenemos lo siguiente

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & m(x - x_1) \\ y - 9 & = & -\frac{1}{2}(x - 1) \\ y & = & -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2} \end{array}$$

Observación: Tenga presente que, la ecuación de la recta no varía, al considerar en diferente orden los puntos.

Ejemplo 2.3.9 La recta l interseca al eje Y en el punto $(0, 6)$ y pasa por el punto $(5, 8)$. Encuentre la ecuación de la recta l. □

Solución 5. Consideremos los puntos $A = (x_1, y_1) = (0, 6)$ y el punto $B = (x_2, y_2) = (5, 8)$, luego calculemos su pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 6}{5 - 0} = \frac{2}{5}.$$

Luego reemplazando en la ecuación tenemos

$$\begin{array}{r} y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - 6 = \frac{2}{5}(x - 0) \end{array}$$

Despejando y obtenemos la ecuación pedida.

$$y = \frac{2}{5}x + 6.$$

Observación: La ecuación de la recta se puede escribir de varias maneras y de acuerdo a esta escritura es que recibe distintos nombres

Definición 2.3.10 Sean $A, B, C, a, b, m \in \mathbb{R}$ y l una recta, entonces

a Se dice que la recta

$$l : Ax + By + C = 0.$$

esta definida por la **ecuación general** o que $Ax + By + C = 0$ es la ecuación general de la recta.

b Se dice que la recta

$$l : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

esta definida por la **ecuación simétrica** o que $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ es la ecuación simétrica de la recta.

c Se dice que la recta esta definida por la **ecuación pendiente-ordenada o reducida** cuando la ecuación tiene la siguiente forma

$$l : y = mx + b.$$

$\Diamond$

Ejemplo 2.3.11 Considere la ecuación de la recta

$$l : y - 7 = \frac{10}{3}\left(x - 4\right).$$

Encuentre la ecuación general, ecuación simétrica y la pendiente-ordenada. $\square$

Solución 6. Sea $y - 7 = \frac{10}{3}(x - 4)$

a Consideremos la ecuación de la recta

$$\begin{array}{rcl} y - 7 & = & \frac{10}{3}\left(x - 4\right) \\ y - 7 & = & \frac{10}{3}x - \frac{40}{3} \quad / \cdot 3 \\ 3y - 21 & = & 10x - 40 \\ 10x - 3y - 19 & = & 0 \end{array}$$

Por lo tanto la ecuación general de la recta es:

$$10x - 3y - 19 = 0$$

b Tomemos la ecuación general $10x - 3y - 19 = 0$

$$\begin{array}{rcl} 10x - 3y - 19 & = & 0 \\ 10x - 3y & = & 19 \quad / \cdot \frac{1}{19} \\ \frac{10}{19}x - \frac{3}{19}y & = & 1 \\ \frac{x}{\frac{19}{10}} - \frac{y}{\frac{19}{3}} & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto la ecuación simétrica de la recta es:

$$\frac{x}{\frac{19}{10}} + \frac{y}{-\frac{19}{3}} = 1$$

c Consideremos la ecuación general $10x - 3y - 19 = 0$

$$\begin{array}{rcl} 10x - 3y - 19 &=& 0 \\ 3y &=& 10x - 19 \ \ / \cdot \frac{1}{3} \\ y &=& \frac{10}{3}\,x - \frac{19}{3} \end{array}$$

Por lo tanto la ecuación pendiente-punto es:

$$y = \frac{10}{3}\,x - \frac{19}{3}$$

Ejemplo 2.3.12 Si l_1 es una recta que pasa por los puntos $(7,11),(3,4)$ y l_2 es una recta de pendiente 13 y pasa por $(8,5)$.
Hallar la intersección de las rectas l_1 y l_2. □

Solución 7. Sabemos que $(7,11),(3,4) \in l_1$, luego tenemos que

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 &=& \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1) \\ y - 11 &=& \frac{4-11}{3-7}(x-7) \\ y - \frac{7}{4}x &=& 11 - \frac{49}{4} \\ y - \frac{7}{4}x &=& -\frac{5}{4} \quad / \cdot 4 \\ 4y - 7x + 5 &=& 0 \end{array}$$

Así tenemos la ecuación de la recta $l_1 : 4y - 7x + 5 = 0$.

Para l_2 tenemos que pasa por $(8,5) = (x_1, y_1) \in l_2$ y su pendiente es 13. luego la ecuación es

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 &=& m(x - x_1) \\ y - 5 &=& 13(x-8) \\ y - 5 &=& 13x - 104 \\ y - 13x + 99 &=& 0 \end{array}$$

Sea P es el punto de intersección de l_1 y l_2, es decir, $l_1 \cap l_2 = \{P\}$, luego satisface las ecuaciones anteriores, por lo tanto tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 4y - 7x + 5 &=& 0 \\ y - 13x + 99 &=& 0 \end{array}\right|$$

despejando y de la segunda ecuación obtenemos

$$y = 13x - 99$$

y reemplazando en la primera tenemos

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot (13x - 99) - 7x + 5 &=& 0 \\ 52x - 396 - 7x + 5 &=& 0 \\ 45x &=& 391 \\ x &=& \frac{391}{45} \end{array}$$

Reemplazamos $x = \frac{391}{45}$ en $y = 13x - 99$ entonces

$$y \;=\; 13 \cdot \left(\tfrac{391}{45}\right) - 99 = \tfrac{5083}{45} - 99 = \tfrac{628}{45}$$

Luego el punto intersección es $P = (\frac{391}{45}, \frac{628}{45})$.

2.3.2 Rectas Paralelas o Perpendiculares

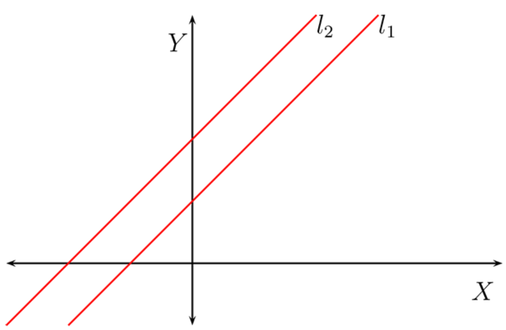
El esta sección se tratara el temas de rectas paralelas o perpendiculares y las condiciones que deben satisfacer los coeficiente que define las rectas para que ellas cumplas una de estas condiciones.

La noción de cuando dos rectas son paralelas cuando no tiene punto en común o son iguales, y la de recta son perpendiculares cuando el punto intercepto de ella forme cuatro regiones iguales

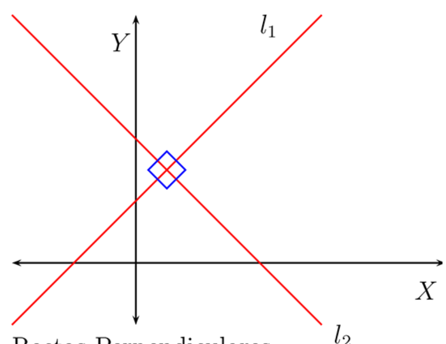
Gráficamente tenemos que si l_1, l_2 son rectas de la forma

$$\begin{array}{rcl} l_1 : y &=& m_1x + b_1 \\ l_2 : y &=& m_2x + b_2 \end{array} \quad o \quad \begin{array}{rcl} l_1 : A_1x + B_1y + C_1 &=& 0 \\ l_2 : A_2x + B_2y + C_2 &=& 0 \end{array}$$

entonces representamos gráficamente el paralelismo y perpendicularidad de la siguiente forma



Rectas Paralelas



Rectas Perpendiculares

2.3.3 Rectas Paralelas

Definición 2.3.13 Diremos que dos rectas l_1, l_2 son **paralelas** o $l_1//l_2$ si estas no se intersecan en ningún punto o bien son iguales. $\Diamond$

Proposición 2.3.14 *Las rectas l_1 y l_2 son paralelas si y sólo si*

$$m_1 = m_2 \quad o \quad A_1B_2 = A_2B_1$$

es decir, $l_1//l_2$ si y sólo si las pendientes son iguales.

Dadas dos rectas distintas, los sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} y &=& m_1x + b_1 \\ y &=& m_2x + b_2 \end{array}\right| \quad \text{o bien} \quad \left.\begin{array}{rcl} A_1x + B_1y &=& -C_1 \\ A_2x + B_2y &=& -C_2 \end{array}\right|$$

no tiene solución si y solo si $m_1 = m_2$ o bien $A_1B_2 = A_2B_1$

Ejemplo 2.3.15 Sean las rectas $l_1 : 3y + 4x - 15 = 0$ y $l_2 : 9y + 12x + 21 = 0$, verifique si $l_1 // l_2$. $\square$

Solución. Como $l_1 : 3y + 4x - 15 = 0$ y $l_2 : 9y + 12x + 21 = 0$ tenemos

$$\begin{array}{llll} l_1 : & 3y + 4x - 15 = 0 & l_2 : & 9y + 12x + 21 = 0 \\ & 3y = -4x + 15 & & 9y = -12x + 21 \\ & y = -\dfrac{4}{3}\, x + 5 & & y = -\dfrac{4}{3}\, x + \dfrac{7}{3} \end{array}$$

Luego

$$m_1 = -\frac{4}{3} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, las rectas l_1 y l_2 son rectas paralelas, es decir, $l_1 // l_2$

2.3.4 Rectas Perpendiculares

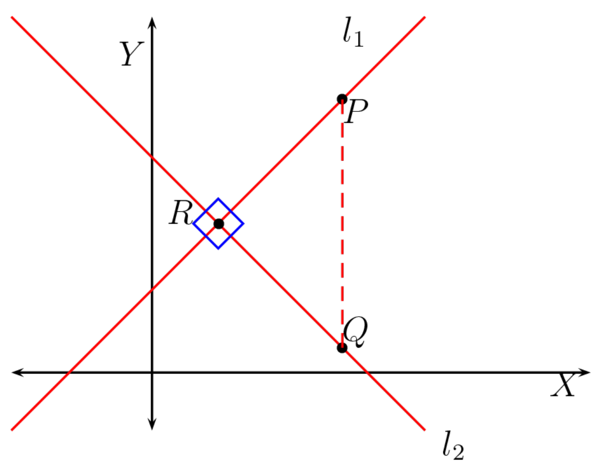
Definición 2.3.16 Diremos que dos rectas son **perpendiculares** si y sólo si se intersecan en un punto formando un ángulo de 90°. $\Diamond$

Proposición 2.3.17 *Las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares si y sólo si*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

es decir, $l_1 \perp l_2$ si y sólo si la multiplicación de sus pendientes es igual a -1 o una es horizontal y la otra vertical.

Dadas las rectas $l_1 : y - a = m_1(x - b)$ y $l_2 : y - a = m_2(x - b)$ cuya intercepto es el punto $R(a, b)$, otros punto de cada recta son $P(a + 1, b + m_1) \in l_1$ y $Q(a + 1, b + m_2) \in l_2$, luego deben formar un triángulo rectángulo, como en la figura.



Usando pitágoras tenemos que $(dist(P, R))^2 + (dist(R, Q))^2 = (dist(P, Q))^2$, reemplazando los puntos se tiene

$$(dist(P, R))^2 = 1 + m_1^2, \quad (dist(R, Q))^2 = 1 + m_2^2, \quad (dist(P, Q))^2 = (m_1 - m_2)^2$$

Y ahora reemplazando en la igualdad pitagórica obtenemos

$$(1+m_1^2)+(1+m_2^2)=(m_1-m_2)^2$$

al simplificando, se obtiene que $2=-2m_1m_2$, es decir, $m_1m_2=-1$
Ejemplo 2.3.18 Sean las rectas $l_1: 2y-7x-24=0$ y $l_2: 28y+8x+13=0$, verifique si $l_1 \perp l_2$. □

Solución 1. Como $l_1: 2y-7x-24=0$ y $l_2: 28y+8x+13=0$ tenemos

$$\begin{array}{llll} l_1: & 2y-7x-24=0 & l_2: & 28y+8x+13=0 \\ & 2y=7x+24 & & 28y=-8x-13 \\ & y=\dfrac{7}{2}\,x+12 & & y=-\dfrac{2}{7}\,x-\dfrac{13}{28} \end{array}$$

Por otro lado

Luego

$$m_1=\frac{7}{2} \quad \text{y} \quad m_2=-\frac{2}{7}$$

donde

$$m_1\cdot m_2=\frac{7}{2}\cdot\frac{-2}{7}=-1$$

Por lo tanto, se tiene que las rectas l_1 y l_2 son rectas perpendiculares, es decir, $l_1 \perp l_2$.
Definición 2.3.19 Diremos que dos rectas son **coincidentes** si y sólo si las rectas son iguales. ◊

Proposición 2.3.20 *Dadas l_1, l_2 dos rectas entonces*

a Las rectas $l_1: y=m_1x+b_1$ y $l_2: y=m_2x+b_2$ son coincidente si y sólo si

$$m_1=m_2 \quad y \quad b_1=b_2$$

b Las rectas $l_1: A_1x+B_1y+C_1$ y $l_2: A_2x+B_2y+C_2$ son coincidente si y sólo si

$$C_1B_2=C_2B_1 \quad y \quad A_1B_2=A_2B_1 \quad y \quad A_1C_2=A_2C_1$$

Proposición 2.3.21 *Dada la recta*

$$l: Ax+By=C$$

y el punto $P=(x_1,y_1)$ entonces tenemos

a La ecuación de la recta l_1 perpendicular a l que pasa por P es

$$l_1: \quad B(x-x_1)-A(y-y_1)=0$$

b La ecuación de la recta l_2 paralela a l que pasa por P es

$$l_2: \quad A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

Ejemplo 2.3.22 Sean $A = (2,5), B = (7,3)$ y $l_1, l_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ rectas tales que $A, B \in l_2$ y

$$l_1 : kx + (k+3)y + 5 = 0.$$

Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ en cada caso de modo que:

a $l_1 \perp l_2$.

b $l_1 // \ l_2$.

$\square$

Solución 2. Calculemos la pendiente de l_2 con $A = (x_1, y_1) = (2,5)$ y $B = (x_2, y_2) = (7,3)$ entonces

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{7-5} = \frac{1}{2}$$

Entonces tomando el punto $A = (2,5)$ y la pendiente $m_2 = \frac{1}{2}$, la ecuación de la recta l_2 esta dada por:

$$\begin{array}{rcl} y - 5 &=& \frac{1}{2}(x-2) \\ y - 5 &=& \frac{x}{2} - 1 \\ y &=& \frac{x}{2} + 4 \end{array}$$

Luego la pendiente de l_1 la podemos obtener de la escritura de la recta:

$$\begin{array}{r} kx + (k+3)y + 5 = 0 \\ (k+3)y = -kx - 5 \\ y = \frac{-k}{k+3}x - \frac{5}{k+3}; \end{array}$$

Observación: El valor de k no puede ser igual a -3 en cuyo caso la pendiente es infinito y no serían paralela ni perpendiculares.

Por lo tanto la pendiente de l_1 es

$$m_1 = \frac{-k}{k+3}$$

a Para que $l_1 \perp l_2$ necesitamos que $m_1 \cdot m_2 = -1$ luego tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} \cdot \frac{-k}{k+3} &=& -1 \\ -k &=& -2(k+3) \quad / \cdot (-1) \\ k &=& 2k + 6 \\ k &=& -6. \end{array}$$

Reemplazando k en la ecuación obtenemos

$$l_1 : y = -\frac{6}{3}x + \frac{5}{3} \ \text{ y } \ l_2 : y = \frac{1}{2}x + 4$$

son perpendiculares.

b Para que $l_1 // l_2$ necesitamos que $m_1 = m_2$

$$\begin{array}{rcl} \frac{-k}{k+3} & = & \frac{1}{2} \\ -2k & = & k+3 \\ -3k & = & 3 \\ k & = & -1 \end{array}$$

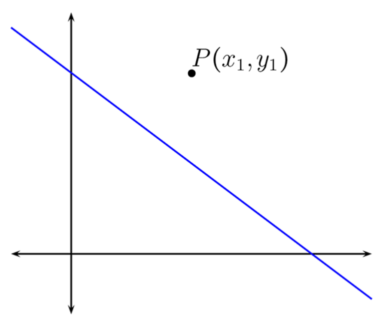
Reemplazando el valor de k en la ecuación de la recta l_1 tenemos que:

$$l_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \ \text{ y } \ l_2 : y = \frac{1}{2}x + 4$$

son paralelas.

2.3.5 Distancia de un Punto a una Recta

La distancia de un punto a una recta, es la distancia más corta del punto a cualquier de los puntos que pertenezcan a la recta. Note que este punto corresponde a un punto cuya recta es perpendicular a la recta original y pasa por el punto dado, ya que los otros puntos formarían los vértices de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud mayor que el lado correspondiente.



Proposición 2.3.23 *Sea $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y la recta cuya ecuación es*

$$l : Ax + By = C \quad o \quad l : y = mx + b$$

entonces la distancia de un punto P a la recta l esta dada por:

$$dist(P, l) = \frac{\mid Ax_1 + By_1 - C \mid}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

o por

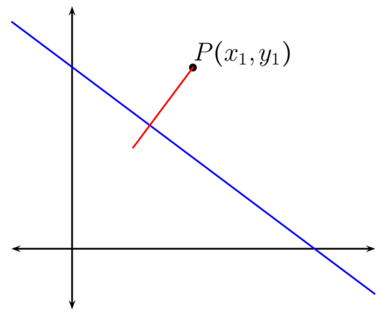
$$dist(P, l) = \frac{\mid y_1 - b - x_1 m \mid}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Demostración. Sea l una recta de ecuación $Ax + By = C$ y $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$.

Sean l_1 perpendicular a l y $P \in l_1$, luego tenemos que

$$l_1 : B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

Calculemos $Q = (x, y)$ el punto de intersección de l con l_1



$$\left.\begin{array}{rcl} Ax + By &=& C \\ Bx - Ay &=& Bx_1 - Ay_1 \end{array}\right|$$

Multiplicando la primera ecuación por A, la segunda por B y sumamos obtenemos

$$\begin{aligned} A(Ax + By) + B(Bx - Ay) = AC + B(Bx_1 - Ay_1) \\ (A^2 + B^2)x = AC + B^2x_1 - BAy_1 \\ x = \tfrac{AC + B^2x_1 - BAy_1}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos

$$y = \frac{BC + A^2y_1 - BAx_1}{A^2 + B^2}$$

Luego calculemos $dist(P, Q)$ donde $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x, y)$

$$dist(Q, P) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

Calculemos primeros $(x - x_1)^2$

$$\begin{array}{rcl} (x - x_1)^2 &=& \left(\frac{AC + B^2x_1 - BAy_1}{A^2 + B^2} - x_1\right)^2 \\ &=& \left(\frac{AC + B^2x_1 - BAy_1 - A^2x_1 - B^2x_1}{A^2 + B^2}\right)^2 \\ &=& \left(\frac{AC - BAy_1 - A^2x_1}{A^2 + B^2}\right)^2 \\ &=& A^2\frac{(C - By_1 - Ax_1)^2}{(A^2 + B^2)^2} \end{array}$$

Calculemos ahora $(y - y_1)^2$

$$\begin{array}{rcl} (y - y_1)^2 &=& \left(\frac{BC + A^2y_1 - BAx_1}{A^2 + B^2} - y_1\right)^2 \\ &=& \left(\frac{BC + A^2y_1 - BAx_1 - A^2y_1 - B^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2 \\ &=& \left(\frac{BC - BAx_1 - B^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2 \\ &=& B^2\frac{(C - By_1 - Ax_1)^2}{(A^2 + B^2)^2} \end{array}$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
(dist(Q,P))^2 &= (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \\
&= A^2\tfrac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2}+B^2\tfrac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \\
&= (A^2+B^2)\tfrac{(C-By_1-Ax_1)^2}{(A^2+B^2)^2} \\
&= \tfrac{(C-By_1-Ax_1)^2}{A^2+B^2}
\end{aligned}$$

De lo cual

$$dist(Q,P)=\sqrt{\frac{(C-By_1-Ax_1)^2}{A^2+B^2}}=\sqrt{\frac{(Ax_1+By_1-C)^2}{A^2+B^2}}$$ ■

Ejemplo 2.3.24 Dada la recta $2x+3y+4=0$ y el punto $P=(1,3)$.
Determine la distancia entre P y l. □

Solución 1. Dada la recta $-4x+3y+4=0$ y el punto $P=(1,3)$

$$dist(P,l)=\frac{|-4\cdot 1+3\cdot 3+4|}{\sqrt{(-4)2^2+3^2}}=\frac{9}{5}$$

Ejemplo 2.3.25 Dado los puntos $A=(-1,4)$, $B=(1,2)$ y $C=(3,-2)$.
Determine el área del triángulo ABC (con vértices en los puntos A,B,C). □

Solución 2. Ya que $A(-1,4)$, $B(1,2)$ y $C(3,-2)$.
La recta que pasa por A,B es

$$l_{AB}: y-2=\frac{4-2}{-1-1}(x-1)$$

es decir $l_{AB}: y+x=3$.

Luego el área del triángulo es

$$\begin{aligned}
\text{área} &= \tfrac{1}{2}\cdot dist(A,B)\cdot dist(C,l_{AB}) \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2}\cdot\tfrac{|-2+3-3|}{\sqrt{1+1}} \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Luego el área del triángulo ABC es 2.

2.3.6 Ejercicios Propuestos

a Demuestre que los puntos $A=(-3,1)$, $B=(5,3)$, $C=(3,9)$ y $D=(-5,7)$ son los vértices de un paralelogramo.

b Dados los puntos $A=(-4,1)$ y $B=(1,-1)$, determine todos los puntos C sobre la recta de ecuación $y=x+4$ para los cuales el triángulo de vértices ABC tenga área igual a 1.

[*Resp.* $C=(3,7)$ *o* $C=(-3,1)$]

c Considere los puntos del plano $A = (1, 2)$ y $B = (3, 5)$ y sea $\overline{AB}$ el segmento que los une. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y es perpendicular a la recta que une A con B.[*Resp.* $4x + 6y - 29 = 0$]

d Encuentre la ecuación de la altura del triángulo ABC donde $\overline{AB}$ representa la base y $A = (-1, 4)$, $B = (1, 2)$ y $C = (3, -2)$.[*Resp.* $y - x - 3 = 0$]

e Sea la ecuación de la recta $L : (k + 1)y - kx - 3 = 0$, encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ para los siguientes casos:

  a L pasa por el punto $(-1, 2)$. [*Resp.* $k = \frac{1}{3}$]

  b L sea horizontal.[*Resp.* $k = 0$]

  c L sea paralela a la recta de ecuación $3y + x - 2 = 0$. [*Resp.* $k = \frac{-1}{4}$]

  d L sea perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 1 = 0$.[*Resp.* $k = \frac{-3}{5}$]

  e L sea vertical.[*Resp.* $k = -1$]

f Sean l_1 y l_2 las rectas cuyas ecuaciones son $x+2y = 3$ y $-2x+y = 4$, respectivamente. Determine la ecuación de la recta l que pasa por el punto de intersección entre l_1 y l_2 y que es perpendicular a la recta $l_3 : 3x - y - 1 = 0$.[*Resp.* $l : x + 3y - 5 = 0$]

g Determinar el área del triángulo de vértices $(-2, -1), (1, 4)$ y $(3, -3)$.[*Resp.* $\frac{31}{2}$]

h Determinar la ecuación de la recta que pasa por $P = (-2, 3)$ y es perpendicular a la recta $l : 3x - 2y + 5 = 0$.[*Resp.* $2x + 3y - 5 = 0$]

i Dadas las rectas $l_1 : 2x-3y-2 = 0$, $l_2 : 3x-2y+1 = 0$ y $l_3 : x+4y-3 = 0$. Determinar la distancia del punto de intersección de l_1 con l_2 a la recta l_3.[*Resp.* ≈ 2.6]

j Determine la recta l que esta a una distancia $\sqrt{2}$ del punto $P = (1, -2)$ e interseca perpendicularmente a la $l_1 : 3x - y + 1 = 0$.[*Resp.* $x + 3y + (5 - 2\sqrt{5}) = 0$ *o* $x + 3y + (5 + 2\sqrt{5}) = 0$]

k Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.[*Resp.* $4x + y - 10 = 0$]

l Sean $A = (-2, 1)$, $B = (4, 7)$ y $C = (6, -3)$ los cuales forman el triángulo ABC, determine su ortocentro (ortocentro: punto de intersección de las alturas del triángulo ABC).[*Resp.* $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$]

m Determine el valor de los coeficientes A y B de la ecuación $Ax - By + 4 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $(-3, 1)$ y $(1, 6)$.[*Resp.* $A = \frac{20}{19}, B = \frac{16}{19}$]

n Encuentre los valores de k para que la reta $4x+5y+k = 0$, forme un triángulo rectángulo con los ejes coordenados (eje X y eje Y), donde su área sea igual a $\frac{5}{2}$.[*Resp.* $k = 10$ *o* $k = -10$]

o Determine los valores para a y b de tal manera que las rectas $ax + (2 - b)y - 23 = 0$ y $(a - 1)x + by + 15 = 0$ pasen por el punto $(2, -3)$.[*Resp.* $a = 4, b = 7$]

p Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual a la mitad de su distancia al eje Y.[*Resp.* $x - 2y + 8 = 0$ *o* $13x - 6y + 24 = 0$]

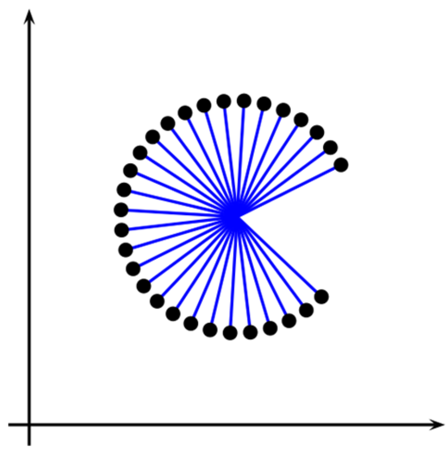
q Calcule la distancia entre las rectas

$$L_1 : 2x + 3y - 6 = 0 \ \ y \ \ L_2 : 2x + 3y + 13 = 0$$

[*Resp.* $\frac{19}{\sqrt{13}}$]

2.4 La Circunferencia

Definición 2.4.1 La circunferencia es el conjunto de todos los puntos que se encuentran a una misma distancia (radio) de otro punto fijo (centro) en el plano. $\diamondsuit$



Proposición 2.4.2 *Sean* $Q = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ *y* $r \in \mathbb{R}^+$, *luego la circunferencia de centro* (h, k) *y radio* r *es:*

$$\mathcal{C}_r(Q) \ = \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

o la ecuación de la circunferencia esta dada por $\mathcal{C}_r(Q) : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

Demostración. Denotaremos el centro de la circunferencia por $Q = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ y al radio por $r \in \mathbb{R}^+$ que representa una longitud entre los puntos.

Sea $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Luego la distancia entre P y Q esta dada por

$$dist(Q, P) = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}.$$

simplificando la expresión

$$\begin{array}{rcl} dist(Q, P) & = & r \\ \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} & = & r \quad /()^2 \\ (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 & = & r^2 \end{array}$$

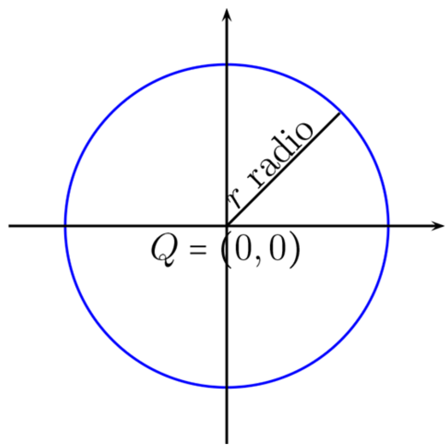
lo cual debe cumplir cualquier punto que pertenece a la circunferencia. Así obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_r(Q) & = & \{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(Q, P) = r\} \\ \mathcal{C}_r(Q) & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\} \end{array}$$

$\blacksquare$

Observación: Al igual que el ejemplo Ejemplo 2.2.5 la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen, $(h, k) = (0, 0)$, y radio r esta dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Observación: Sean $T \in \mathcal{C}_r(Q), Q \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$ donde $T = (x, y)$, $Q = (h, k)$ es el centro y r que es el radio entonces la ecuación de la circunferencia, la ecuación de la circunferencia la obtenemos de la propiedad Proposición 2.4.2 y es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 \;\; = \;\; r^2$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} (x-h)^2 + (y-k)^2 & = & r^2 \\ x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 & = & r^2 \\ x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + k^2 + h^2 - r^2 & = & 0 \end{array}$$

Definamos las siguientes variables

$$A = -2h, \quad B = -2k, \quad C = k^2 + h^2 - r^2.$$

luego reemplazando obtenemos

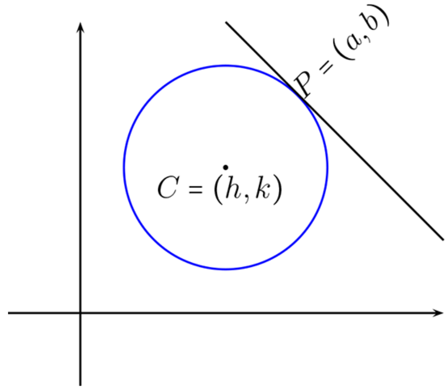
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

llama **ecuación general de la circunferencia**.

2.4.1 Tangencia de una recta a la circunferencia

Una recta l es tangente a una circunferencia $\mathcal{C}_r$ en el punto $P \in l \cap \mathcal{C}_r$, si la recta es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto P.

Sean $Q = (h, k)$ el centro de la circunferencia, $P \in \mathbb{R}^2$ el punto de tangencia entre la recta l y la circunferencia. Por lo tanto l_{PQ} es perpendicular a l, lo que gráficamente tenemos dado por:



Ejemplo 2.4.3 Encuentre la recta tangencia a la circunferencia $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ en el punto $(4,1)$. □

Solución 1. Sea $C:(x-1)^2+(y+3)^2=25$ y $P=(4,1)$.

Primero notemos que el punto P pertenece a la circunferencia, ya que $3^2+4^2=25$, además el centro de la circunferencia es $Q=(1,-3)$.

La recta que une el centro $Q(1,-3)$ y el punto P tiene pendiente

$$m=\frac{-3-1}{1-4}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

Luego la recta perpendicular, tiene pendiente $m'=-\frac{3}{4}$.

Así tenemos que su ecuación es

$$y-1=-\frac{3}{4}(x-4)$$

Por lo tanto, la recta tangente a C en el punto P es

$$3x+4y=16.$$

Proposición 2.4.4 *Sean $T=(x_1,y_1)\in\mathcal{C}_r(Q):(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ entonces la ecuación de recta tangente a la circunferencia es*

$$(y_1-k)(y-y_1)=-(x_1-h)(x-x_1).$$

Ejemplo 2.4.5 Encuentre P el punto de tangencia entre la circunferencia de radio $\sqrt{17}$ y centro $(3,6)$, con la recta l de pendiente $m=\frac{1}{4}$ y que pasa por el punto $(12,4)$. □

Solución 2. Como el centro de la circunferencia es $(3,6)$ y su radio es $\sqrt{17}$ tenemos que la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-3)^2+(y-6)^2 \;=\; 17$$

Ya que la recta tiene pendiente $m=\frac{1}{4}$ y el punto $(12,4)$ pertenece a esta, entonces su ecuación es:

$$\begin{aligned} y-b &= m(x-a)\\ y-4 &= \tfrac{1}{4}(x-12)\\ 4y-x &= 4 \end{aligned}$$

Luego, el punto P pertenece a la recta y a la circunferencia y de este modo tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} (x-3)^2+(y-6)^2 & = & 17 \\ 4y-x & = & 4 \end{array}\right|$$

Despejando tenemos que $x = 4y - 4$, reemplazando obtenemos

$$(4y-4-3)^2+(y-6)^2 = 17$$

Simplificando se obtiene que

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

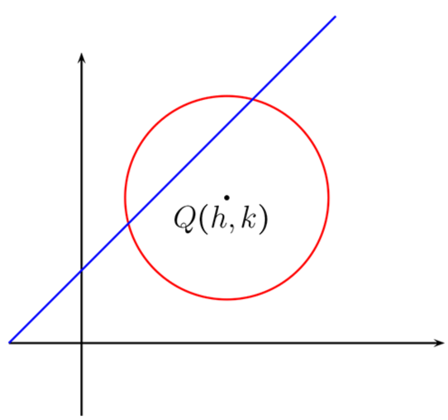
Que tiene las dos soluciones iguales, de este modo obtenemos que $y = 2$, de ello se obtiene que $x = 8 - 4 = 4$.

Por lo tanto el punto de intersección es $(4, 2)$, el cual es fácil verificar que pertenece a la circunferencia $(4-3)^2 + (2-6)^2 = 17$ y a la recta. Luego el punto pedido es $P = (4, 2)$.

2.4.2 Intersección entre una recta y una circunferencia

La intersección de una recta con una circunferencia da como resultado un conjunto que a lo más tiene dos puntos que se encuentran en el plano cartesiano, los cuales se pueden obtener a través de un sistema ecuaciones, es decir, un punto que pertenece a la recta y a la circunferencia satisfacen ambas ecuaciones.

Sean $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ una circunferencia de radio r y centro $Q = (h, k)$ y la recta de ecuación $l : Ax + By + C = 0$.



Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto de la intersección de la recta con la circunferencia:

$$\left.\begin{array}{rcl} (x-h)^2+(y-k)^2 & = & r^2 \\ Ax+By+C & = & 0 \end{array}\right|$$

Veremos sólo el caso $B \neq 0$, despejando y en la ecuación segunda ecuación tenemos

$$y = m_1x + b_1$$

Luego reemplazando en la ecuación en la segunda, obtenemos

$$(x-h)^2 + ([m_1x + b_1] - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + [m_1x + b_1]^2 - 2k[m_1x + b_1] + k^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + m_1^2x^2 + 2m_1b_1x + b_1^2 - 2km_1x - 2km_1b_1 + k^2 = r^2$$

$$x^2(1 + m_1^2) + x(-2h + 2m_1b_1 - 2km_1) + (h^2 + b_1^2 - 2km_1b_1 + k^2 - r^2) = 0$$

Sean

$$\begin{array}{rcl} a & = & 1 + m_1^2 \\ b & = & -2h - 2m_1^2x_1 + 2m_1y_1 - 2km_1 \\ c & = & h^2 + m_1^2x_1^2 - 2m_1y_1x_1 + y_1^2 + 2km_1x_1 - 2m_1y_1 + k^2 - r^2 \end{array}$$

reemplazando obtenemos

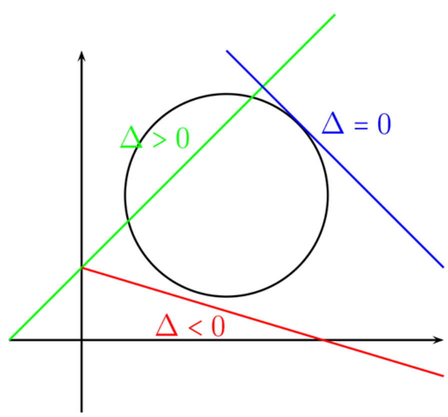
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Luego consideremos el discriminante de la ecuación que denotaremos por Δ.

a Si $\Delta < 0$, se tiene que la ecuación tiene solución vacía en los reales, es decir, no hay puntos comunes a la recta y la circunferencia.

b Si $\Delta = 0$, se tiene que la ecuación tiene una única solución real, es decir, la intersección de la recta con la circunferencia es único el punto, lo cual indica que la recta l es tangente a la circunferencia.

c Si $\Delta > 0$, se tiene que la ecuación tiene dos soluciones reales, es decir, la intersección de la recta con la circunferencia tiene dos puntos, es una recta secante.



Ejemplo 2.4.6 Dada la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.
Determine cuales puntos de la circunferencia pertenecen a la recta, en cada uno de los siguientes casos.

a $l_1 : 3\sqrt{3} + 6 - x = \sqrt{3}y$

b $l_2 : x = y$

c $l_3 : x - y = -5$

□

Solución. Consideremos la circunferencia $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ e interceptemos con la recta, luego se obtiene un sistema de ecuaciones, que debemos resolver en cada una de las alternativas

a

$$\left.\begin{array}{rcl}(x-2)^2+(y-3)^2 & = & 4\\ 3\sqrt{3}+6-x & = & \sqrt{3}y\end{array}\right|$$

Despejando

$$\begin{array}{rcl}\sqrt{3}y & = & 3\sqrt{3}+6-x\\ y & = & \frac{3\sqrt{3}+6-x}{\sqrt{3}}\\ y & = & 3+\frac{6-x}{\sqrt{3}}\end{array}$$

Reemplazando la variable obtenida, en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$\begin{array}{rcl}(x-2)^2+(y-3)^2 & = & 4\\ (x-2)^2+\left(3+\frac{6-x}{\sqrt{3}}-3\right)^2 & = & 4\\ (x-2)^2+\left(\frac{6-x}{\sqrt{3}}\right)^2 & = & 4\\ x^2-4x+4+\frac{x^2-12x+36}{3} & = & 4 \quad /\cdot 3\\ 3x^2-12x+x^2-12x+36 & = & 0\\ 4x^2-24x+36 & = & 0 \quad /\cdot\frac{1}{4}\\ x^2-6x+9 & = & 0\end{array}$$

Luego el discriminante $\Delta=(6)^2-4\cdot 1\cdot 9=0$, despejando x tenemos

$$x \;=\; \frac{6\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Reemplazando en la recta, encontremos el valor de y

$$y=3+\frac{6-x}{\sqrt{3}}=3+\frac{6-3}{\sqrt{3}}=3+\frac{3}{\sqrt{3}}=3+\frac{3\sqrt{3}}{3}=3+\sqrt{3}$$

Por lo tanto el punto de intersección, cuando $\Delta=0$, es

$$P=(3,3+\sqrt{3})$$

b Consideremos ahora el segundo sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl}(x-2)^2+(y-3)^2 & = & 4\\ x & = & y\end{array}\right|$$

Reemplazando la variable y ecuación de la recta, en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$\begin{array}{rcl}(x-2)^2+(y-3)^2 & = & 4\\ (x-2)^2+(x-3)^2 & = & 4\\ x^2-4x+4+x^2-6x+9-4 & = & 0\\ 2x^2-10x+9 & = & 0\end{array}$$

Luego el discriminante $\Delta = (10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 28$, y determinado las soluciones de la ecuación de segundo grado obtenemos

$$x \ = \ \frac{10\pm\sqrt{28}}{4} = \frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$$

Por lo tanto

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

Reemplazando en la ecuación de la recta, encontremos y

a Si $x = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$ entonces $y = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

b Si $x = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ entonces $y = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$

Por lo tanto los puntos de intersección, cuando $\Delta < 0$, son

$$P_1 = \left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}, \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right) \quad y \quad P_2 = \left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$$

c Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl}(x-2)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ x - y & = & -5\end{array}\right|$$

Despejando, obtenemos

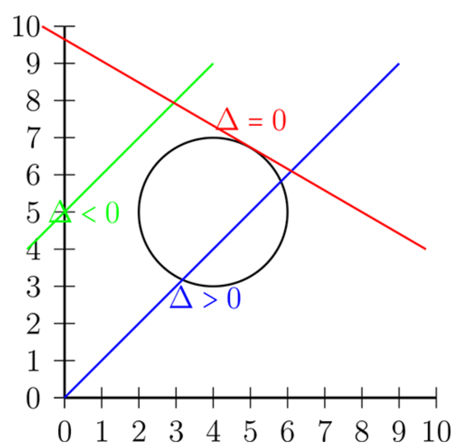
$$x = y - 5$$

Reemplazando ahora en la ecuación de la circunferencia obtenemos

$$\begin{array}{rcl}(x-2)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ (y-5-2)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ (y-7)^2 + (y-3)^2 & = & 4 \\ y^2 - 14y + 49 + y^2 - 6y + 9 - 4 & = & 0 \\ 2y^2 - 20y + 54 & = & 0\end{array}$$

Análogamente calculamos el discriminante y tenemos que $\Delta = -2$, luego la intersección de la circunferencia con la recta l_3 es vacía, es decir no tiene puntos.

Gráficamente nos encontramos en la siguiente situación:



2.4.3 Ejercicios Propuestos

1 Considere la recta $y - 2x - c = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Determine el valor de c en cada caso

a La recta es tangente a la circunferencia. [*Resp.* $c = \frac{-\sqrt{5}}{2}$ *o* $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$]

b La recta y circunferencia tienen intersección. [*Resp.* $c \in \mathbb{R} - [\frac{-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$]

2 Encuentre la ecuación de la circunferencia que contiene al punto $(-1, -8)$ y que es tangente a $3x - 4y - 4 = 0$ en el punto $(0, -1)$.[*Resp.* $x^2 + y^2 - 6x + 10y = -9$]

3 Hallar la ecuación de la circunferencia de radio es 9 y cuyo centro esta en la intersección de las rectas $x - 4y = 1$ y $2x - y = 2$.[*Resp.* $x^2 + y^2 - 2x = 82$]

4 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$.[*Resp.* $x^2 + y^2 + 4y = 0$]

5 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice $A = (-1, 0)$ del triángulo ABC y es tangente a l_{BC} con $B = (2, \frac{9}{4})$ y $C = (5, 0)$.[*Resp.* $x^2 + y^2 + 2x = 323$]

6 Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a las rectas $l_1 : x + y + 4 = 0$ y $l_2 : 7x - y + 4 = 0$, y su centro se encuentra en la recta $l_3 : 4x + 3y - 2 = 0$.[*Resp.* $(x - \frac{11}{4})^2 + (y + 3)^2 = \frac{225}{32}$ *o* $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}$]

7 Considere la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2ky = 0$, desde el punto $A = (5, 4)$ se traza la tangente a la circunferencia siendo Q el punto de tangencia. Determine el valor de k para que la longitud del segmento $\overline{AQ}$ sea 1.[*Resp.* $k = -5$]

8 Considere la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8x + 6y$. Determine en cada caso la ecuación de la recta l que es tangente a la circunferencia y que pasa por:

a $P = (8, 6)$. [*Resp.* $l : 3y = -4x + 50$]

b $Q = (11, 4)$. [*Resp.* $l : 3y - 4x + 32 = 0$ *o* $l : 4y + 3x - 49 = 0$]

9 Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 - 2x = 2y - y^2$ en el punto $(2, 2)$.[*Resp.* $x + y - 4 = 0$]

10 Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, -2), (-1, 4)$ y $(4, 6)$.[*Resp.* $(x - \frac{8}{3})^2 + (y - \frac{25}{12})^2 = \frac{2465}{144}$]

11 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta sobre la recta $x-2y-2 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $x-y+2 = 0$ y $x+y-1 = 0$.[*Resp.* $(x-5)^2+(y-\frac{3}{2})^2 = \left(\frac{11}{2\sqrt{2}}\right)^2$ *o* $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{5}{4})^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2$]

12 Encuentre la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$ en el punto $(6, 5)$.[*Resp.* $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 13$ *o* $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$]

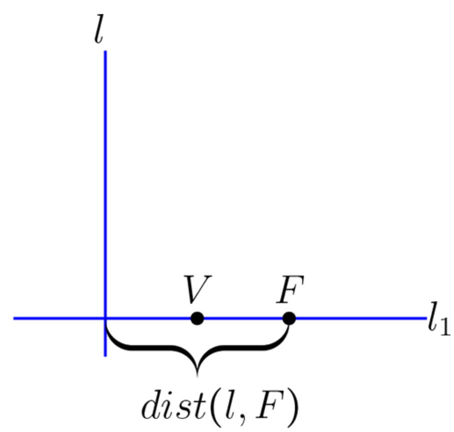
13 Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ y que pasa por la intersección de las circunferencias $x^2+y^2+2x-6y-16=0$ y $x^2+y^2-6x+2y=0$.[*Resp.* $x^2+y^2-x-3y-10=0$ *o* $x^2+y^2-7x+3y+2=0$]

2.5 Parábola

Definición 2.5.1 Una parábola es el conjunto formado por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado **foco** y de una recta llamada **directriz**. $\Diamond$

Observación: En este texto solamente se abordaran los casos que la directriz sea paralela al eje X o al eje Y.

Descripción de los puntos que están o pertenecen a la Parábola: Sea $F \in \mathbb{R}^2$ que representa el foco y l una recta del plano (en el dibujo paralela al eje Y). Consideremos la recta que pasa por el foco y es perpendicular a l, es decir, $l_1 \perp l$, l_1 es llamada **eje focal**.



Sea $r \in \mathbb{R}^+$ la distancia que hay entre el foco y la directriz

$$dist(l,F) = r = 2p$$

Si $V \in \mathbb{R}^2$, es el punto medio $\overline{FP_0}$, donde P_0 es el punto de intersección de l y l_1, el punto V anteriormente nombrado lo llamaremos vértice de la parábola y cumple con

$$dist(l,V) = dist(F,V) = \frac{r}{2} = p$$

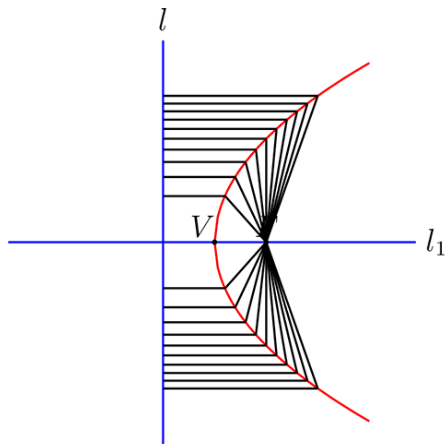
Sea $P \in \mathbb{R}^2$ un punto que pertenece a la parábola, luego

$$dist(l,P) = dist(F,P)$$

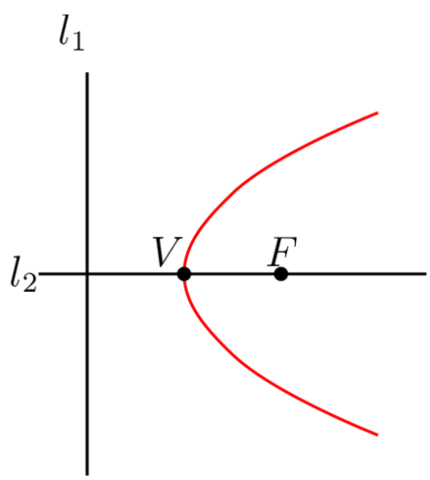
Así tenemos que la parábola con foco F y directriz l es:

$$\mathcal{P}_{(l,F)} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(l,P) = dist(F,P)\}$$

El cual gráficamente corresponde a la siguiente figura



Luego al considerando solamente los puntos, sin marcar las distancias, tenemos la siguiente figura conocida como parábola.

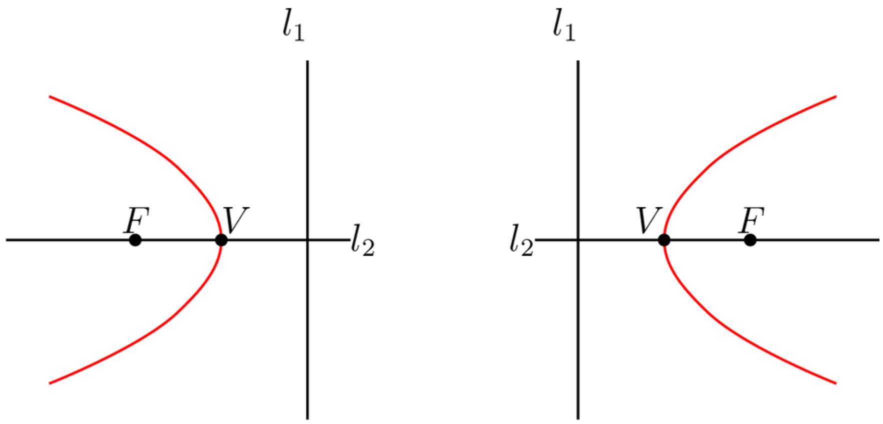


Observación: Note que hemos realizado el proceso en forma general y solamente hemos visualizado una de las cuatro posibilidades de abertura de la Parábola. A continuación detallaremos más cada caso.

2.5.1 Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje X

Sean $F, V \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h+p, k)$ el foco y $l_1 : x = h-p$ la directriz.

En este caso, se tiene el eje focal paralelo al eje X, luego las gráficas que nos encontramos en este caso son las siguientes:



Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola, luego la distancia es

$$dist(l, P) = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y + p - h|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = | x + p - h |$$

Además de la distancia entre puntos, obtenemos

$$dist(F, P) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2}$$

Realicemos el cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$, en estas coordenadas obtenemos

$$\begin{array}{rcl} | u + p | & = & \sqrt{(u - p)^2 + v^2} \\ (u + p)^2 & = & (u - p)^2 + v^2 \\ v^2 & = & (u + p)^2 - (u - p)^2 = 4pu \end{array}$$

Así, tenemos que

$$v^2 = 4pu,$$

volviendo a las coordenadas originales

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Proposición 2.5.2 *Sea $F, V, P \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h+p, k)$ el foco, $l : x = h - p$ la directriz entonces $P = (x, y) \in \mathcal{P}_{(l,F)}$ pertenece a la parábola si y sólo si satisface la ecuación*

$$\mathcal{P}_{(l,F)} : (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Ejemplo 2.5.3 Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz, el foco si esta tiene como vértice $(0, 0)$, pasa por el punto $(4, -3)$ y el eje focal está en el eje X. □

Solución 1. Como la parábola tiene su vértice en el origen $(h, k) = (0, 0)$, tenemos que su ecuación esta dada por:

$$y^2 = 4px$$

Pero además, pasa por el punto $(4, -3)$, el cual debe satisfacer la ecuación $y^2 = 4px$, reemplazando se obtiene

$$\begin{array}{rcl} (-3)^2 & = & 4p \cdot 4 \\ p & = & \frac{9}{16} \end{array}$$

Luego, el foco esta dado por el punto $(p, 0)$ lo que corresponde a $(\frac{9}{16}, 0)$. Finalmente la directriz tiene ecuación $l : x = -p$, es decir,

$$l : x = -\frac{9}{16}$$

Y de este modo la ecuación es

$$y^2 = \frac{9}{4}x$$

Ejemplo 2.5.4 Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz y su foco si el vértice es $(6, 2)$, pasa por el punto $(-3, 5)$ y el eje focal es paralelo al eje X. □

Solución 2. Como la parábola tiene su vértice en el punto $(6, 2)$ tenemos que su ecuación esta dada por:

$$\begin{array}{rcl} (y-k)^2 & = & 4p(x-h) \\ (y-2)^2 & = & 4p(x-6) \end{array}$$

Además, pasa por el punto $(-3, 5)$ el cual debe satisfacer la ecuación

$$\begin{array}{rcl} (y-2)^2 & = & 4p(x-6) \\ (5-2)^2 & = & 4p \cdot (-3-6) \\ 9 & = & -36p \\ p & = & \frac{-1}{4} \end{array}$$

Luego el foco esta dado por el punto

$$(h + p, k) = \left(6 + \tfrac{-1}{4}, 2\right) = \left(\tfrac{23}{4}, 2\right)$$

Finalmente la ecuación de la directriz $l : x = h - p$ es

$$l : x = 6 - \frac{-1}{4} = \frac{25}{4}$$

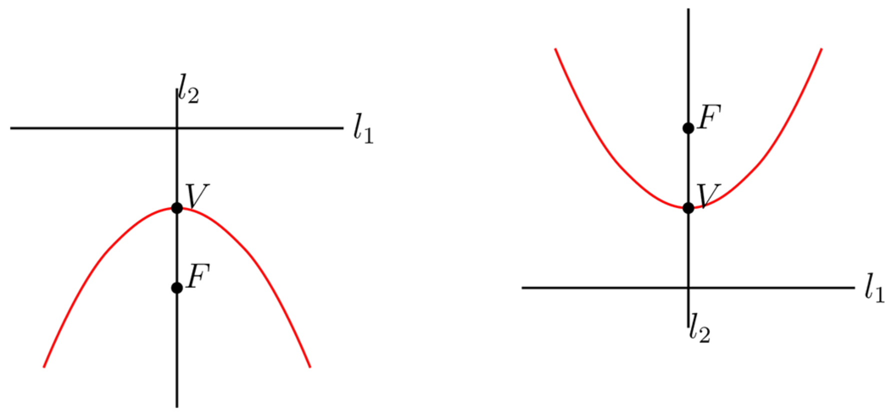
Y de este modo la ecuación de la parábola es

$$(y-2)^2 = -(x-6)$$

2.5.2 Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje Y

Sea $F, V \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h, k+p)$ el foco y $l_1 : y = k - p$ la directriz.

En este caso, se tiene el eje focal paralelo al eje Y, luego las gráficas que nos encontramos en este caso son las siguientes:



Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola, luego las distancia son:

$$dist(l, P) = dist(F, P)$$

Usando la formula de distancia punto a recta tenemos

$$dist(l, P) = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y + p - k|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \mid y + p - k \mid$$

Ahora la de distancia entre puntos tenemos

$$dist(F, P) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2}$$

Por lo tanto como

$$\begin{array}{rcl} dist(l, P) & = & dist(F, P) \\ \mid y + p - k \mid & = & \sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2} \end{array}$$

Volvemos a hacer cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$, luego tenemos que

$$\begin{array}{rcll} \mid v + p \mid & = & \sqrt{u^2 + (v - p)^2} & \qquad /()^2 \\ (v + p)^2 & = & u^2 + (v - p)^2 & \\ u^2 & = & (v - p)^2 - (v + p)^2 = 4pv & \end{array}$$

Así entonces tenemos

$$u^2 = 4pv$$

volviendo a las coordenadas originales obtenemos

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Proposición 2.5.5 *Sea $F, V, P \in \mathbb{R}^2$, con $V = (h, k)$ el vértice de la parábola, $F = (h, k + p)$ el foco, $l : y = k - p$ la directriz y $P = (x, y) \in \mathcal{P}_{(l,F)}$ pertenece a la parábola si y sólo si satisface la ecuación*

$$\mathcal{P}_{(l,F)} : (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Ejemplo 2.5.6 Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz, su foco si esta tiene como vértice $(0, 0)$, pasa por el punto $(4, -3)$ y el eje focal es el eje Y. □

Solución 1. Como la parábola tiene su vértice en el origen $(h,k)=(0,0)$, se tiene que su ecuación esta dada por:

$$x^2 = 4py$$

Pero además pasa por el punto $(4,-3)$ el cual satisface la ecuación, reemplazando se tiene

$$\begin{array}{rcl} (4)^2 & = & 4p \cdot -3 \\ p & = & \frac{-3}{4} \end{array}$$

Luego el foco esta dado por el punto $(0,p)$ lo que corresponde a $(0,\frac{-3}{4})$. Finalmente la directriz tiene ecuación $l: y=-p$

$$l: y \;=\; \frac{3}{4}$$

Y de este modo la ecuación de la parábola es

$$x^2 = -3y$$

Ejemplo 2.5.7 Encuentre la ecuación de la parábola, la directriz y su foco si el vértice es $(6,2)$, pasa por el punto $(-3,5)$ y si su eje focal es paralelo al eje Y. □

Solución 2. Como la parábola tiene su vértice es $(h,k)=(6,2)$ y el eje focal es paralelo al eje X, se tiene que la ecuación esta dada por:

$$\begin{array}{rcl} (x-h)^2 & = & 4p(y-k) \\ (x-6)^2 & = & 4p \cdot (y-2) \end{array}$$

Pero además pasa por el punto $(-3,5)$, es decir, satisface la ecuación

$$\begin{array}{rcl} (-3-6)^2 & = & 4p \cdot (5-2) \\ (-9)^2 & = & 4p \cdot 3 \\ p & = & \frac{27}{4} \end{array}$$

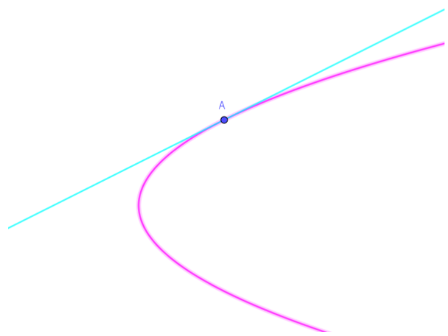
Luego el foco esta dado por el punto $(h,k+p)$ lo que corresponde a $(6,2+\frac{27}{4})=(6,\frac{35}{4})$. Finalmente la directriz tiene ecuación $l: y=k-p$

$$l: y \;=\; 2-\frac{27}{4}=\frac{19}{4}$$

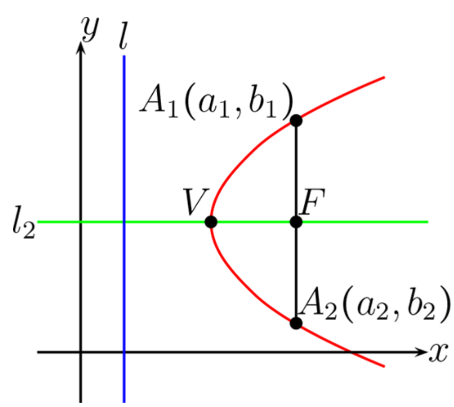
Y de este modo la ecuación de la parábola es

$$(x-6)^2 = 27(y-2)$$

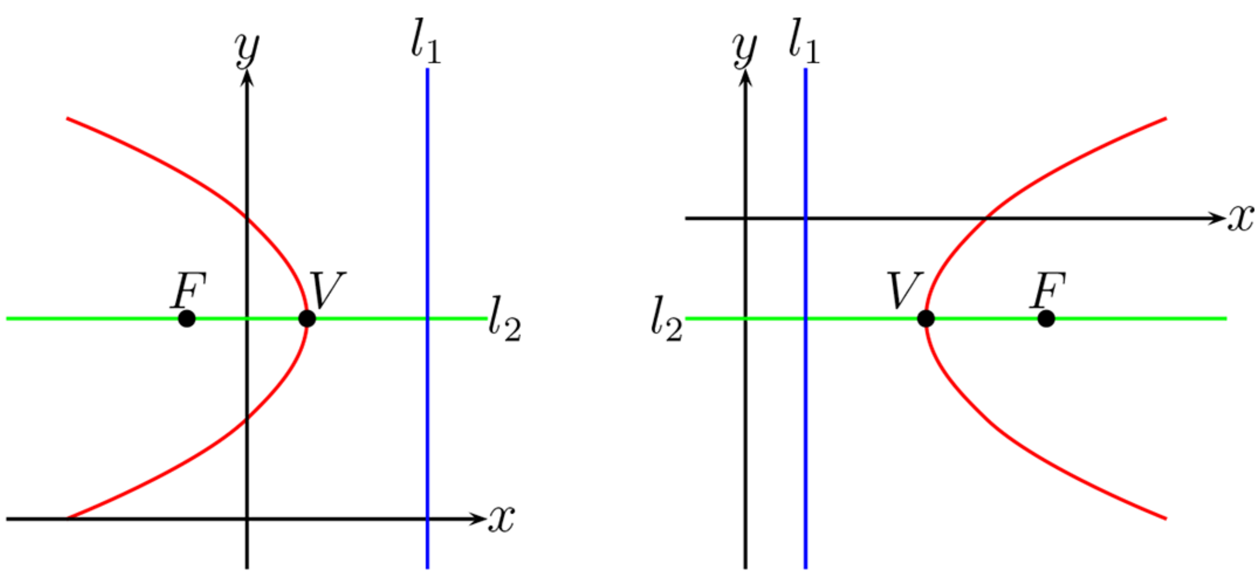
Observación: El concepto de **recta tangente** a una parábola en un punto perteneciente a ella, es una recta que pasa por el punto y todos los otros puntos de la parabola perteneces al mismo semiplano que se obtiene con esta recta. Recuerde que toda recta divide al plano en dos semiplano.



Se define el **lado recto** de una parábola, como el segmento de recta que une los puntos que intercepta la recta paralela a la directriz y que pasa por el foco, como en la figura



Resumen: Dada una parábola, sean $V, F, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^2$, donde $F = (a, b)$, $V = (h, k)$, $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$ y l, l_1 rectas del plano cartesiano. Los distintos elementos de una parábola distribuidos de la siguiente forma en la figura



a **Parábola con eje focal paralelo al eje X.**

i El Vértice de la parábola está dado por $V = (h, k)$

ii El Foco de la parábola está dado por $F = (h + p, k)$

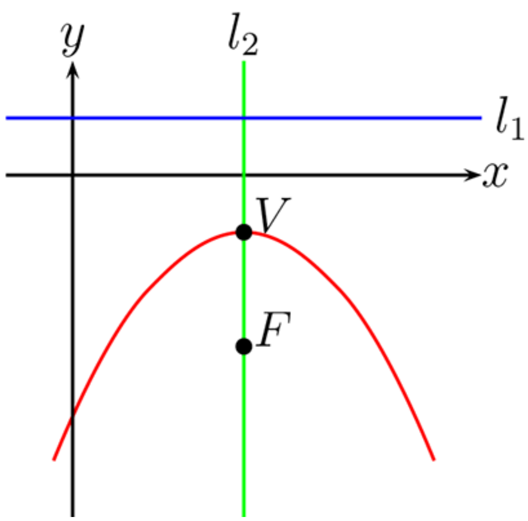
iii La Directriz de la parábola está dado por $l : x = h - p$

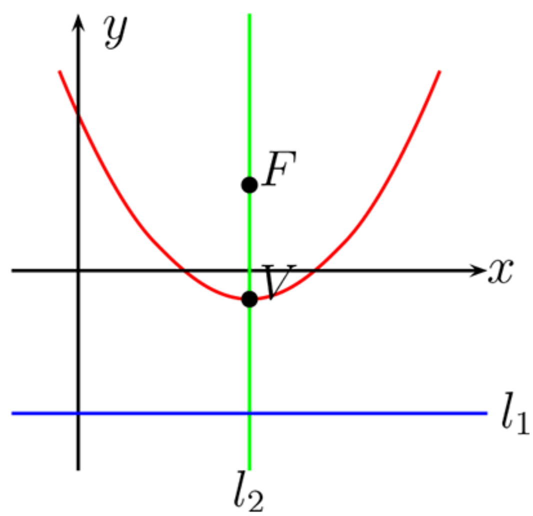
iv El Eje Focal de la parábola está dado por $l_1 : y = k$

v El Lado Recto de la parábola $\overline{A_1A_2}$ mide $4|p|$

vi La ecuación de la parábola está dado por $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

vii La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (a, b), está dado por $y - b = \frac{2p}{b-k}(x - a)$, con $b \neq k$





b **Parábola con eje focal paralelo al eje Y.**

a El Vértice de la parábola está dado por $V = (h, k)$

b El Foco de la parábola está dado por $F = (h, k + p)$

c La Directriz de la parábola está dado por $l : y = h - p$

d El Eje Focal de la parábola está dado por $l_1 : x = h$

e El Lado Recto de la parábola $\overline{A_1A_2}$ mide $4|p|$

f La ecuación de la parábola está dado por $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

g La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (a, b) está dado por $y - b = \frac{a-h}{2p}(x - a)$.

Ejemplo 2.5.8 Encuentre la ecuación de la parábola de vértice $V = (2, 3)$, foco en la recta $7x + 3y - 4 = 0$ y eje focal horizontal. □

Solución 3. Como la parábola tiene su vértice $V = (2, 3) = (h, k)$ y eje focal horizontal su ecuación esta dada por:

$$\begin{aligned} (y-k)^2 &= 4p(x-h) \\ (y-3)^2 &= 4p(x-2) \end{aligned}$$

Ya que el foco esta dado por $F = (h + p, k)$ entonces

$$F = (2 + p, 3)$$

además el foco F está en la recta, luego satisface la ecuación $7x + 3y = 4$, reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} 7(2+p) + 3 \cdot 3 &= 4 \\ 14 + 7p + 9 &= 4 \\ 7p &= -19 \\ p &= \tfrac{-19}{7} \end{aligned}$$

Por lo tanto el foco de la parábola es

$$F = (2 + \frac{-19}{7}, 3) = (\frac{-5}{7}, 3)$$

y su ecuación es

$$\begin{aligned} (y-3)^2 &= 4p(x-2) \\ (y-3)^2 &= 4\left(\tfrac{-19}{7}\right)(x-2) \end{aligned}$$

Observación: La ecuación general de la parábola esta dada por

a Consideremos la ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje X.

$$\begin{aligned} (y-k)^2 &= -4p(x-h) \\ y^2 - 2ky + k^2 &= -4px + 4ph \\ y^2 - 2ky + 4px + k^2 - 4ph &= 0 \end{aligned}$$

Definamos las constantes

$$A_1 = -2k, \quad B_1 = 4p, \quad C_1 = k^2 - 4ph.$$

Reemplazando obtenemos la ecuación

$$y^2 + A_1 y + B_1 x + C_1 = 0$$

b Ahora consideremos la ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje Y

$$\begin{aligned} (x-h)^2 &= 4p(y-k) \\ x^2 - 2xh + h^2 &= 4py - 4pk \\ x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk &= 0 \end{aligned}$$

Definimos las constantes

$$A_2 = -2h, \quad B_2 = -4p, \quad C_2 = h^2 + 4pk.$$

Reemplazando obtenemos

$$x^2 + A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

Proposición 2.5.9 *Sean $A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}^*$ entonces*

a La ecuación $x^2 + Ax + By + C = 0$ corresponde a una parábola, con el eje focal paralelo al eje Y,

i El vértice $(h,k) = \left(\frac{-A}{2}, \frac{A^2-4C}{4B}\right)$,

ii El foco $F = (h, k+p)$, con $p = \frac{-B}{4}$,

iii La directriz $l : y = k - p$.

b La ecuación $y^2 + Ay + Bx + C = 0$ corresponde a una parábola, con el eje focal paralelo al eje X,

i El vértice $(h,k) = \left(\frac{A^2-4C}{4B}, \frac{-A}{2}\right)$,

ii El foco $F = (h+p, k)$ con $p = \frac{-B}{4}$,

iii La directriz $l : x = h - p$.

Ejemplo 2.5.10 Considere la ecuación de la parábola $2x^2 + 5x + y - 13 = 0$. Encuentre toda los elementos distinguidos de la parábola. □

Solución 4. Para determinar los elementos, completaremos cuadrado, para ello tenemos que la ecuación de la parábola

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 + 5x + y - 13 &=& 0 \\ 2x^2 + 5x &=& -y + 13 \quad / \cdot \frac{1}{2} \\ \left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) &=& \frac{-y}{2} + \frac{13}{2} \ / + \frac{25}{16} \\ \left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) &=& \frac{-y}{2} + \frac{13}{2} + \frac{25}{16} \\ \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 &=& \frac{-y}{2} + \frac{129}{16} \\ \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 &=& \frac{-1}{2}\left(y - \frac{129}{8}\right) \end{array}$$

Luego $4p = -\frac{1}{2}$ entonces $p = -\frac{1}{8}$.

Por lo tanto el vértice de la parábola esta dado por

$$V = (h,k) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{129}{8}\right)$$

El foco dado por

$$F = (h, k+p) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{129}{8} - \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{128}{8}\right) = \left(\frac{-5}{4}, 16\right)$$

La directriz de la parábola tiene como ecuación

$$l \ : \ y = k - p = \frac{129}{8} - \frac{-1}{8} = \frac{130}{8} = \frac{65}{4}$$

El eje focal es

$$x = \frac{-5}{4}$$

Y el lado recto mide

$$4p = \frac{1}{2}$$

2.5.3 Ejercicios Propuestos

1 Grafique y encuentre vértice, foco y directriz en las siguientes ecuaciones.

a $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

b $y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$

c $y^2 + 1 = x$

d $y^2 - x - 6y + 11 = 0$

e $y^2 - 6x + 6y + 27 + 27 = 0$

f $x^2 = -4x - 3y - 7$

g $4y^2 - 48x - 20y = 71$

2 Encuentre el o los puntos de intersección de las siguientes parábolas $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ e $y^2 + 8x - 4y - 28 = 0$.

[Resp. $(2, -2)$ y $(2, 6)$]

3 Indique que representa la ecuación $x^2 + 4x - 8y + 36 = 0$, grafiquela y encuentre todas sus componentes.

4 Determinar la ecuación de la parábola cuya directriz pasa por $(-3, 0)$ con vértice en el origen.

[Resp. $y^2 = 12x$]

5 Encuentre la ecuación de la directriz de la parábola $y = 2x^2$.

[Resp. $y = \frac{-1}{8}$]

6 Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos $(0, 0)$, $(8, -4)$ y $(3, 1)$.

[Resp. $y^2 - x + 2y = 0$]

7 Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto $(4, -1)$, eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(3, -3)$.

[Resp. $y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$]

8 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto $(1, 1)$.

[Resp. $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$]

9 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y - 1 = 0$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

[Resp. $x^2 - 4y - 4 = 0$ o bien $x^2 + 8y - 16 = 0$]

10 Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $3x + 9y - 11 = 0$.

[Resp. $x + 3y - 2 = 0$]

11 Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(1, 4)$ a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.

[Resp. $x + 2y - 9 = 0$ o $3x - 2y + 5 = 0$]

12 Determine la ecuación de la recta que es tangente a la parábola $x^2 = -5y$ en el punto $(5, -5)$.

[Resp. $L : y = -2x + 5$]

13 Hallar la ecuación de las tangentes a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$ y que pasa por el punto $(1, 4)$

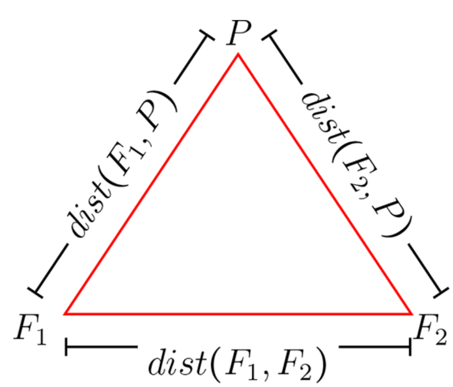
[Resp. $L_1 : 2y = -x + 9, \quad L_2 : 2y = 3x + 5$]

2.6 Elipse

Definición 2.6.1 Una elipse es el conjunto de todos los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante, los dos puntos fijos son llamados focos. $\Diamond$

Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ donde F_1 y F_2 representan los focos de la elipse y P un punto de la elipse, luego

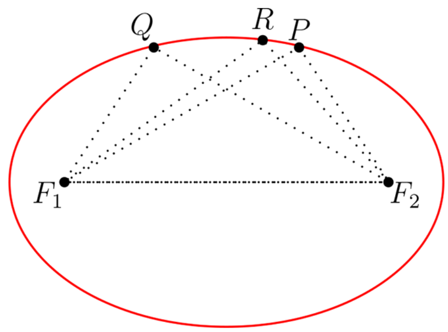
$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = r$$



Repitiendo el proceso para todos los puntos del plano que satisfacen la definición de la elipse tenemos el conjunto

$$\mathcal{E}_{F_1,F_2} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = r\}$$

Si graficamos todos los puntos que pertenecen a $\mathcal{E}_{F_1,F_2}$ tenemos lo siguiente:

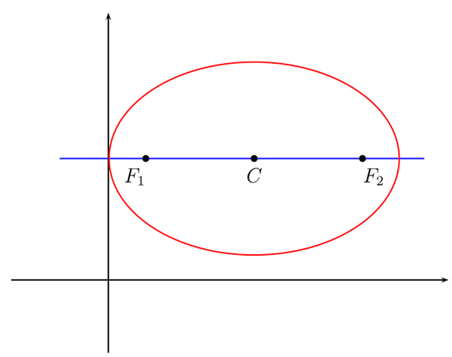


Consideremos la distancia entre los focos $dist(F_1, F_2)$ y el punto medio que hay entre ellos que llamaremos **centro** de la elipse que denotaremos con la letra C y $l \in \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por ambos focos llamada el **eje focal** de la elipse. Por último, la longitud de la sumas de las distancias se llama **longitud del eje mayor**

2.6.1 Ecuación de la elipse con eje focal paralelo al eje X

Sea $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, con $C = (h, k)$ el centro de la elipse, F_1 y F_2 los focos y $P = (x, y) \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$ un punto cualquiera que pertenece a la elipse.

Como $C = (h, k)$ y el eje focal paralelo al eje X luego $F_1 = (h + c, k)$, $F_2 = (h - c, k)$, de este modo tenemos la gráfica de la elipse para este caso.



A continuación, describiremos la ecuación de la elipses, para ellos consideremos los siguiente

$$\begin{aligned} dist(F_1, P) + dist(F_2, P) &= 2a \\ \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} + \sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} &= 2a \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$, para simplificar el calculo obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
2a &=& dist(P, F_1) + dist(P, F_2)\\
2a &=& \sqrt{(u-c)^2+v^2} + \sqrt{(u+c)^2+v^2}\\
2a - \sqrt{(u+c)^2+v^2} &=& \sqrt{(u-c)^2+v^2} \quad /()^2 \quad (*)\\
(2a - \sqrt{(u+c)^2+v^2})^2 &=& (\sqrt{(u-c)^2+v^2})^2\\
4a^2 - 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2} + (u+c)^2 + v^2 &=& (u-c)^2 + v^2\\
(u+c)^2 - (u-c)^2 + 4a^2 &=& 4a\sqrt{(u+c)^2+v^2}\\
4a^2 + 4uc &=& 4a\sqrt{(x+c)^2+v^2} \quad /\frac{1}{4}\\
a^2 + uc &=& a\sqrt{(u+c)^2+v^2} \quad /()^2 \quad (*)\\
a^4 + 2a^2uc + u^2c^2 &=& a^2((u+c)^2+v^2)\\
a^4 + 2a^2uc + u^2c^2 &=& a^2(u^2+2uc+c^2+v^2)\\
a^4 + 2a^2uc + u^2c^2 &=& a^2u^2 + 2a^2uc + a^2c^2 + a^2v^2\\
a^2u^2 - u^2c^2 + a^2c^2 + a^2v^2 - a^4 &=& 0\\
u^2(a^2-c^2) + a^2v^2 &=& a^4 - a^2c^2\\
u^2(a^2-c^2) + a^2v^2 &=& a^2(a^2-c^2) \quad /\frac{1}{a^2(a^2-c^2)}\\
\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2-c^2} &=& 1
\end{array}$$

Como $2a > 2c$ entonces $a^2 - c^2 > 0$, sea $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, luego $b < a$.

Reemplazando tenemos

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

Observación: Para lograr este resultado debemos considerar las dos restricciones (*), la primera de ella es:

$$2a - \sqrt{(u+c)^2+v^2} \geq 0 \Leftrightarrow (u+c)^2 + v^2 \leq (2a)^2$$

y corresponde a circunferencias con centro en F_2 y de radio menor que $2a$, la segunda restricción es

$$4a^2 + 4uc \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{c} \leq u,$$

y son rectas paralelas al eje v, formando el semiplano derecho, además note que $-\frac{a^2}{c} < -a$, es decir, es el semiplano a la derecha de $-a$.

Proposición 2.6.2 *Sean $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ con $C = (h,k)$ representa el centro de la elipse, $F_1 = (c+h, k)$, $F_2 = (-c+h, k)$ los focos y $a \in \mathbb{R}^+$.*
$P = (x,y) \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$ pertenece a la elipse cuya longitud del eje mayor es $2a$ si y sólo si satisface la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \ \ con \ \ a > b, \ \ donde \ b^2 = a^2 - c^2$$

Ejemplo 2.6.3 Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el origen, el valor de $a = 4$, eje focal paralelo al eje X y pasa por el punto $P = (3, 2)$. □

Solución 1. Como su centro esta en el origen y $a = 4$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &=& 1\\
\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{b^2} &=& 1\\
\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} &=& 1
\end{array}$$

Luego la elipse pasa por el punto $P = (3, 2)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{array}{rcl}
\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} & = & 1 \\
\frac{3^2}{16} + \frac{2^2}{b^2} & = & 1 \\
\frac{9}{16} + \frac{4}{b^2} & = & 1 \ \ / \cdot 16b^2 \\
9b^2 + 4 \cdot 16 & = & 16b^2 \\
64 & = & 16b^2 - 9b^2 \\
64 & = & 7b^2
\end{array}$$

Luego el valor de b^2 es:

$$b^2 \ = \ \frac{64}{7} < a^2 = 16$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{64}{3}} = 1$$

Ejemplo 2.6.4 Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el punto $(1, 3)$, el valor de $a = 4$, eje focal paralelo al eje X y pasa por el punto $P = (2, 5)$. □

Solución 2. Como su centro esta en el origen y $a = 4$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} & = & 1 \\
\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{b^2} & = & 1
\end{array}$$

Luego la elipse pasa por el punto $P = (2, 7)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{array}{rcl}
\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{b^2} & = & 1 \\
\frac{1^2}{16} + \frac{2^2}{b^2} & = & 1 \ \ / \cdot 16b^2 \\
b^2 + 4 \cdot 16 & = & 16b^2 \\
64 & = & 15b^2
\end{array}$$

Luego el valor de b^2 es:

$$b^2 \ = \ \frac{64}{15} < a^2 = 16$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{\frac{64}{15}} = 1$$

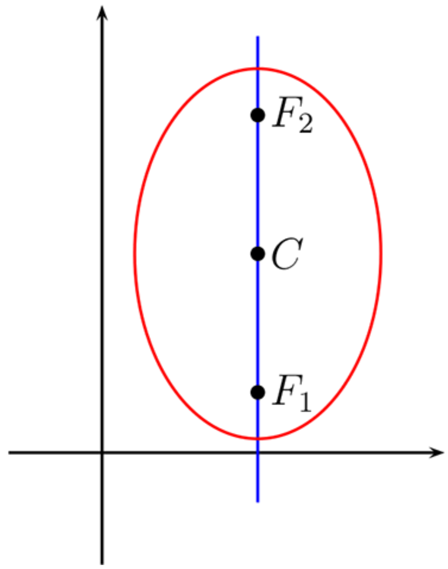
2.6.2 Ecuación de la elipse con eje focal en el eje Y

Sea $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$, donde $C = (h, k)$ representa el centro de la elipse, F_1 y F_2 los focos y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la elipse.

Como el centro es $C = (h, k)$ y el eje focal paralelo al eje Y luego $F_1 = (h, k + c)$ y $F_2 = (h, k - c)$, por lo cual tenemos

$$\begin{array}{rcl}
dist(F_1, P) + dist(F_2, P) & = & 2a \\
\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} & = & 2a
\end{array}$$

Observemos la gráfica de la elipse para este caso.



Realizando el cambio de variable $v = x - h$ y $u = y - k$

$$\begin{aligned} dist(F_1, P) + dist(F_2, P) &= 2a \\ \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} &= 2a \\ \sqrt{(v)^2 + (u-c)^2} + \sqrt{(v)^2 + (u+c)^2} &= 2a \end{aligned}$$

Y es un expresión igual a la obtenida en el caso anterior $(*)$ de la sección anterior, luego usando el mismo desarrollo tenemos

$$u^2(a^2 - c^2) + v^2x^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

de manera similar definimos $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ con lo cual

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

volviendo a las variables originales obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Proposición 2.6.5 *Sean $C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, con $C = (h, k)$ el centro de la elipse, $F_1 = (h, c+k)$, $F_2 = (h, -c+k)$ los focos y $a \in \mathbb{R}^+$.*
$P = (x, y) \in \mathcal{E}_{F_1,F_2}$ pertenece a la elipse cuya longitud del eje mayor es $2a$ si y sólo si satisface la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \quad con \quad a > b, \ donde\ b^2 = a^2 - c^2$$

Ejemplo 2.6.6 Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el origen, el valor de $a = 6$, eje focal paralelo al eje Y y pasa por el punto $P = (2, 5)$. □

Solución 1. Como su centro esta en el origen y $a = 6$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{aligned} \tfrac{x^2}{b^2} + \tfrac{y^2}{a^2} &= 1 \\ \tfrac{x^2}{b^2} + \tfrac{y^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

Luego la elipse pasa por el punto $P = (2, 5)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{aligned} \tfrac{x^2}{b^2} + \tfrac{y^2}{36} &= 1 \\ \tfrac{4}{b^2} + \tfrac{25}{36} &= 1 \ \ / \cdot 36b^2 \\ 4 \cdot 36 + 25b^2 &= 36b^2 \\ 144 &= 36b^2 - 25b^2 \\ 144 &= 11b^2 \\ b^2 &= \tfrac{144}{11} \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{\frac{144}{11}} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Ejemplo 2.6.7 Encuentre la ecuación de la elipse de centro $(4, 3)$, el valor de $a = 6$, eje focal paralelo al eje Y y pasa por el punto $P = (2, 5)$. □

Solución 2. Como su centro esta en $(h, k) = (4, 3)$ y $a = 6$ tenemos que la ecuación de la elipse esta dada por:

$$\begin{aligned} \tfrac{(x-h)^2}{b^2} + \tfrac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \\ \tfrac{(x-h)^2}{b^2} + \tfrac{(y-k)^2}{6^2} &= 1 \\ \tfrac{(x-4)^2}{b^2} + \tfrac{(y-3)^2}{36} &= 1 \end{aligned}$$

Luego la elipse pasa por el punto $P = (2, 5)$ entonces satisface su ecuación

$$\begin{aligned} \tfrac{(x-4)^2}{b^2} + \tfrac{(y-3)^2}{36} &= 1 \\ \tfrac{(4-2)^2}{b^2} + \tfrac{(3-5)^2}{36} &= 1 \\ \tfrac{4}{b^2} + \tfrac{4}{36} &= 1 \ \ / \cdot 36b^2 \\ 4 \cdot 36 + 4b^2 &= 36b^2 \\ 144 &= 36b^2 - 4b^2 \\ 144 &= 32b^2 \end{aligned}$$

Luego el valor de b^2 es:

$$b^2 = \tfrac{144}{32} = \tfrac{9}{2}$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-4)^2}{\frac{9}{2}} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$$

Observación: Consideremos la ecuación de la elipse donde el eje focal es paralelo al eje X, para ello sean $C = (h, k)$ el centro de la elipse, F_1 y F_2 los focos y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la elipse.

$$\tfrac{(x-h)^2}{a^2} + \tfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Luego desarrollando la ecuación obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} &=& 1 \ \ /(a^2b^2)\\
b^2[(x-h)^2]+a^2[(y-k)^2] &=& a^2b^2\\
b^2[x^2-2xh+h^2]+a^2[y^2-2yk+k^2] &=& a^2b^2\\
x^2b^2-2xhb^2+h^2b^2+y^2a^2-2yka^2+k^2a^2 &=& a^2b^2\\
x^2b^2-2xhb^2+y^2a^2-2yka^2+k^2a^2+h^2b^2-a^2b^2 &=& 0
\end{array}$$

Definimos las siguientes constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \in \mathbb{R}$ dadas por

$$A_1 = b^2; \quad B_1 = -2hb^2; \quad C_1 = a^2; \quad D_1 = -2ka^2; \quad E_1 = k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2.$$

Entonces tenemos que la ecuación general de la elipse para este caso está dada por:

$$A_1x^2 + B_1x + C_1y^2 + D_1y + E_1 = 0$$

Ahora consideremos la ecuación de la elipse, con el eje focal es paralelo al eje Y dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Haciendo un desarrollo similar al anterior, podemos definir $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$A_2 = a^2; \quad B_2 = -2ha^2; \quad C_2 = b^2; \quad D_2 = -2kb^2; \quad E_2 = k^2b^2 + h^2a^2 - a^2b^2.$$

Entonces tenemos que la ecuación general de la elipse para este caso está dada por:

$$A_2x^2 + B_2x + C_2y^2 + D_2y + E_2 = 0$$

Proposición 2.6.8 *Sean $A, C \in \mathbb{R}^*$, $B, D, E \in \mathbb{R}$ la ecuación*

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E \ = \ 0$$

define una elipse si y sólo si

$$AC > 0 \quad y \quad (B^2C + D^2A - 4ACE)C > 0.$$

Observación: En algunos textos considera la primer condiciones solamente, pero debe notar que la ecuación $x^2 + 4y^2 + 1 = 0$, en el plano real tiene conjunto solución vacío, por ello no es fácil aceptar que es una elipse, ya que las suma de positivos es positiva, nunca cero.

Ejemplo 2.6.9 Hallar la ecuación de la elipse de centro $(1, 2)$, uno de los focos es $(6, 2)$ y que pasa por el punto $(4, 6)$ □

Solución 3. Como su centro es $(1, 2)$ y el eje focal es paralelo al eje X. Luego su ecuación esta dada por:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} &=& 1\\
\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2} &=& 1
\end{array}$$

Ya que pasa por el punto $(4, 6)$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2} &=& 1\\
\frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2} &=& 1\\
\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2} &=& 1
\end{array}$$

Tenemos que la distancia del centro al foco es:

$$c = dist(C, F) = \sqrt{(1-6)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ b^2 &= a^2 - 25 \end{aligned}$$

reemplazando en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \tfrac{9}{a^2} + \tfrac{16}{b^2} &= 1 \\ \tfrac{9}{a^2} + \tfrac{16}{a^2-25} &= 1 \;/\cdot (a^2-25)a^2 \\ 9(a^2-25) + 16a^2 &= a^2(a^2-25) \\ a^4 - 25a^2 - 16a^2 - 9a^2 + 225 &= 0 \\ a^4 - 50a^2 + 225 &= 0 \end{aligned}$$

Sea $u = a^2$ entonces

$$u^2 - 50u + 225 = 0$$

Luego

$$u = \tfrac{50 \pm \sqrt{2500-900}}{2} = \tfrac{50 \pm \sqrt{1600}}{2} = \tfrac{50 \pm 40}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_1 &= \tfrac{50+40}{2} \quad \text{y} \quad u_2 = \tfrac{50-40}{2} \\ u_1 &= \tfrac{90}{2} \quad \text{y} \quad u_2 = \tfrac{10}{2} \\ u_1 &= 45 \quad \text{y} \quad u_2 = 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a^2 = 45 \quad \text{o} \quad a^2 = 5$$

Si $a^2 = 5$ tenemos

$$b^2 = a^2 - 25 = 5 - 25 = -20 \; (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Entonces $a^2 = 45$, luego

$$b^2 = a^2 - 25 = 45 - 25 = 20$$

Por lo tanto, al reemplazar los valores obtenido a^2 y b^2, se tiene la ecuación de la elipse solicitada

$$\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$$

2.6.3 Ejercicios Propuestos

1 Grafique y encuentre todos los elementos de la elipse de la ecuación.

a $9x^2 + 2y^2 + 36x + 4y + 20 = 0$

b $16x^2 + 9y^2 - 64x + 54y + 1 = 0$

c $25x^2 + 16y^2 + 150x - 64y = 102$

d $4x^2 + 6y^2 = 12$

e $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

f $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

g $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0$

2 Obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y su diámetro mayor es 6.

[Resp. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$]

3 Hallar la ecuación de la elipse de centro $(1, 2)$, uno de los focos es $(6, 2)$ y que pasa por el punto $(4, 6)$.

[Resp. $\frac{(x-1)^2}{45} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$]

4 Determinar las coordenadas de los focos de la elipse $2x^2 + 7y^2 = 3$

[Resp. $F_1 = (\sqrt{\frac{15}{14}}, 0)$, $F_2 = (-\sqrt{\frac{15}{14}}, 0)$]

5 Hallar los vértices y el área de un cuadrado con lados paralelos a los ejes de coordenados inscrito en la elipse de ecuación $9x^2 + 16y^2 = 100$.

[Resp. $A = 16$, $V_1 = (0, -0.4)$, $V_2 = (0, 0.4)$, $V_3 = (-0.3, 0)$, $V_4 = (0.3, 0)$]

6 El centro de una elipse esta en el punto $(2, -4)$ el vértice y foco de un mismo lado del centro están en los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$ respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse.

[Resp. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$]

7 Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X . Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$.

[Resp. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$]

8 Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

[Resp. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$]

9 Hallar la ecuación de la elipse que contiene a los siguientes puntos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(-3, 3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

[Resp. $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$]

10 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual al doble de su distancia del punto $(3, 2)$.

[Resp. $3x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 52 = 0$]

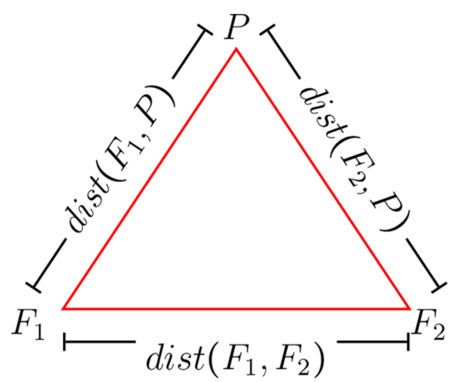
11 Desde cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares.

[Resp. $x^2 + 4y^2 + 4x + 16y + 4 = 0$]

2.7 Hipérbola

Definición 2.7.1 Una hipérbola es una figura geométrica plano y corresponde al conjunto de todos los puntos que se encuentran en el plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante, los puntos fijos se llaman focos. $\Diamond$

Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ donde F_1 y F_2 son puntos fijos en el plano que denotaremos como focos y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto que satisface la definición de la hipérbola



entonces consideremos las distancias que hay entre estos 3 puntos
Como P satisface la definición de la hipérbola tenemos

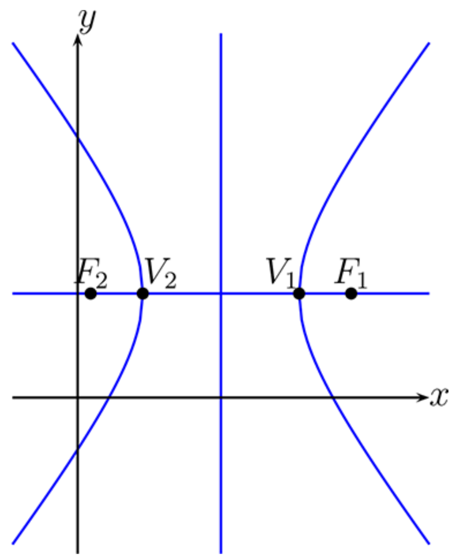
$$| \, dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \, | = r$$

Luego $\mathcal{H}_{F_1,F_2}$ representa al conjunto de todos los puntos que pertenecen a la hipérbola, es decir,

$$\mathcal{H}_{F_1,F_2} = \{P \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad | \, dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \, | = r\}$$

2.7.1 Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje X

Sean $V_1, V_2, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{H}_{F_1,F_2}$, donde V_1, V_2 representan los vertices de la hipérbola, F_1 y F_2 los focos y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la hipérbola.



Sea $C = (h, k)$ el centro entonces los focos para nuestro caso están dados por:

$$F_1 = (h - c, k) \quad y \quad F_2 = (h + c, k)$$

luego

$$\begin{array}{rcl} \mid dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \mid & = & 2a \\ \mid \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \mid & = & 2a \end{array}$$

usando el cambio de variable $u = x - h$ y $v = y - k$

$$\begin{array}{rcl} \mid \sqrt{(x-h+c)^2 + (y-k)^2} - \sqrt{(x-h-c)^2 + (y-k)^2} \mid & = & 2a \\ \mid \sqrt{(u+c)^2 + v^2} - \sqrt{(u-c)^2 + v^2} \mid & = & 2a \end{array}$$

De lo cual obtenemos los siguientes casos

1

$$\sqrt{(u+c)^2 + v^2} - \sqrt{(u-c)^2 + v^2} = 2a$$

2

$$\sqrt{(u+c)^2 + v^2} - \sqrt{(u-c)^2 + v^2} = -2a$$

Si P está en la parte izquierda de los focos tenemos que la primera ecuación es verdadero y si P se encuentra en la parte derecha de los focos tenemos que la segunda ecuación es verdadero, luego podemos trabajar las dos ecuaciones del siguiente modo

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{(u \pm c)^2 + v^2} - \sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} & = & 2a \quad (*) \\ \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} & = & 2a + \sqrt{(u \mp c)^2 + y^2} \quad /()^2 \\ (u \pm c)^2 + v^2 & = & (2a + \sqrt{(u \mp c)^2 + y^2})^2 \\ u^2 \pm 2uc + c^2 + v^2 & = & 4a^2 + 4a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} + (u \mp c)^2 + v^2 \\ u^2 \pm 2uc + c^2 + v^2 & = & 4a^2 + 4a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} + u^2 \mp 2uc + c^2 + v^2 \\ \pm 4uc - 4a^2 & = & 4a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} \quad /\frac{1}{4} \\ \pm uc - a^2 & = & a\sqrt{(u \mp c)^2 + v^2} \quad /()^2 \end{array}$$

Antes veremos la restricción

$$\begin{array}{rcl} \pm uc - a^2 \geq 0 & & \\ uc - a^2 \geq 0 & \vee & -uc - a^2 \geq 0 \\ u \geq \frac{a^2}{c} & \vee & u \leq -\frac{a^2}{c} \end{array}$$

luego es un semiplano en cada caso. Además como $2a < 2c$

$$\begin{array}{rcl} u^2c^2 \mp 2a^2uc + a^4 & = & a^2((u \mp c)^2 + v^2) \\ u^2c^2 \mp 2a^2uc + a^4 & = & a^2(u^2 \mp 2uc + c^2 + v^2) \\ u^2c^2 \mp 2a^2uc + a^4 & = & a^2u^2 \mp 2a^2uc + a^2c^2 + a^2v^2 \\ u^2(c^2 - a^2) - a^2v^2 & = & a^2(c^2 - a^2) \end{array}$$

Como $2a < 2c$ entonces $a^2 < c^2$, es decir, $c^2 - a^2 > 0$.

Por lo tanto, sea b^2 tal que

$$b^2 = c^2 - a^2 > 0$$

Reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} u^2(c^2 - a^2) - a^2v^2 & = & a^2(c^2 - a^2) \\ u^2b^2 - a^2v^2 & = & a^2b^2 \quad / \frac{1}{a^2b^2} \\ \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} & = & 1 \end{array}$$

volviendo a las variables originales obtenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Proposición 2.7.2 *Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{H}_{F_1,F_2}$, con $C = (h,k)$ el centro de la hipérbola, $F_1 = (h-c,k)$ y $F_2 = (h+c,k)$ los focos, los vértices son $V_1 = (h-a,k)$ y $V_2 = (h+a,k)$ y $P = (x,y)$ pertenece a la hipérbola si sólo si satisface la ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \ \textit{donde } b^2 = c^2 - a^2$$

Ejemplo 2.7.3 Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un foco $F_1 = (5,0)$, el valor de $a = 2$ y el eje focal en el eje X. □

Solución 1. Como el centro de la hipérbola es $C = (0,0)$ y $F_1 = (5,0)$ tenemos $dist(C,F_1) = c$ entonces

$$dist(C,F_1) = \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2} = 5$$

Ya que $c = 5$, luego el valor de b está dado por:

$$\begin{array}{rcl} c^2 & = & b^2 + a^2 \\ 5^2 & = & b^2 + 2^2 \\ b^2 & = & 21 \end{array}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} & = & 1 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} & = & 1. \end{array}$$

Ejemplo 2.7.4 Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C = (4, 3)$, un foco $F_1 = (8, 3)$, el valor de $a = 2$ y el eje focal paralelo al eje X. □

Solución 2. Como el centro de la hipérbola es $C = (4, 3)$ y $F_1 = (8, 3)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$dist(C, F_1) = \sqrt{(8-4)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(4)^2} = 4$$

Ya que $c = 4$, luego el valor de b está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ b^2 &= 12 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \tfrac{(x-4)^2}{a^2} - \tfrac{(y-3)^2}{b^2} &= 1 \\ \tfrac{(x-4)^2}{4} - \tfrac{(y-3)^2}{144} &= 1. \end{aligned}$$

2.7.2 Ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje Y

Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, con F_1 y F_2 los focos de la hipérbola, V_1, V_2 los vértices y $P = (x, y)$ un punto cualquiera que pertenece a la hipérbola.

Sea $C = (h, k)$ el centro de la hipérbola entonces los focos para nuestro caso son $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$ luego,

$$\begin{aligned} \mid dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \mid &= 2a \\ \mid \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \mid &= 2a \end{aligned}$$

usando el cambio de variable

$$v = x - h \quad \text{y} \quad u = y - k$$

$$\begin{aligned} \mid \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} \mid &= 2a \\ \mid \sqrt{(v)^2 + (u+c)^2} - \sqrt{(v)^2 + (u-c)^2} \mid &= 2a \end{aligned}$$

Y es un expresión igual a la obtenida en el sección anterior, luego usando el mismo desarrollo tenemos

$$\tfrac{u^2}{a^2} - \tfrac{v^2}{b^2} = 1$$

volviendo a las variables originales obtenemos

$$\tfrac{(y-k)^2}{a^2} - \tfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Proposición 2.7.5 *Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ con $C = (h, k)$ el centro de la hipérbola, $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$ los focos, los vértices $F_1 = (h, k - a)$ y $F_2 = (h, k + a)$ $P = (x, y)$ pertenece a la hipérbola si y sólo si satisface la ecuación*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \text{ donde } b^2 = c^2 - a^2$$

Ejemplo 2.7.6 Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un foco $F_1 = (0, 7)$, el valor de $a = 3$ y el eje focal en el eje Y. $\square$

Solución 1. Como el centro de la hipérbola es $C = (0, 0)$ y $F_1 = (0, 7)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$dist(C, F_1) = \sqrt{(0-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{(7)^2} = 7$$

Ya que $c = 7$, luego el valor de b está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 7^2 &= b^2 + 3^2 \\ b^2 &= 40 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \tfrac{y^2}{a^2} - \tfrac{x^2}{b^2} &= 1 \\ \tfrac{y^2}{9} - \tfrac{x^2}{49} &= 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7.7 Encuentre la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el punto $C = (5, 9)$, un foco $F_1 = (5, 16)$, el valor de $a = 3$ y el eje focal en el eje Y. $\square$

Solución 2. Como el centro de la hipérbola es $C = (5, 9)$ y $F_1 = (5, 16)$ tenemos $dist(C, F_1) = c$ entonces

$$dist(C, F_1) = \sqrt{(5-5)^2 + (16-9)^2} = \sqrt{(7)^2} = 7$$

Ya que $c = 7$, luego el valor de b está dado por:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 \\ 7^2 &= b^2 + 3^2 \\ b^2 &= 40 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es:

$$\begin{aligned} \tfrac{(y-9)^2}{a^2} - \tfrac{(x-5)^2}{b^2} &= 1 \\ \tfrac{(y-9)^2}{9} - \tfrac{(x-5)^2}{49} &= 1. \end{aligned}$$

Observación: Sea $V_1, V_2, C, F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y $P \in \mathcal{H}_{F_1,F_2}$, con $C = (h, k)$ el centro de la hipérbola , F_1 y F_2 los focos

Consideremos la ecuación de la hipérbola donde el eje focal es paralelo al eje X

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Desarrollemos la ecuación

$$\begin{aligned} \tfrac{(x-h)^2}{a^2} - \tfrac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \ \ /(a^2b^2) \\ b^2[(x-h)^2] - a^2[(y-k)^2] &= a^2b^2 \\ b^2[x^2 - 2xh + h^2] - a^2[y^2 - 2yk + k^2] &= a^2b^2 \\ x^2b^2 - 2xhb^2 + h^2b^2 - y^2a^2 + 2yka^2 - k^2a^2 &= a^2b^2 \\ x^2b^2 - 2xhb^2 - y^2a^2 + 2yka^2 - k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Se define las constantes $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \in \mathbb{R}$ tales que

$$A_1 = b^2; \quad B_1 = -2hb^2; \quad C_1 = -a^2; \quad D_1 = 2ka^2; \quad E_1 = -k^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2.$$

$$A_1x^2 + B_1x + C_1y^2 + D_1y + E_1 = 0$$

Análogamente para la otra ecuación

$$\tfrac{(y-k)^2}{a^2} - \tfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

podemos transformarla

$$A_2y^2 + B_2y + C_2x^2 + D_2x + E_2 = 0$$

Con

$$A_2 = b^2; \quad B_2 = -2kb^2; \quad C_2 = -a^2; \quad D_2 = -2kb^2; \quad E_2 = -k^2b^2 + h^2a^2 - a^2b^2.$$

Proposición 2.7.8 *Sean $A, C \in \mathbb{R}^*, B, D, E \in \mathbb{R}$ la ecuación*

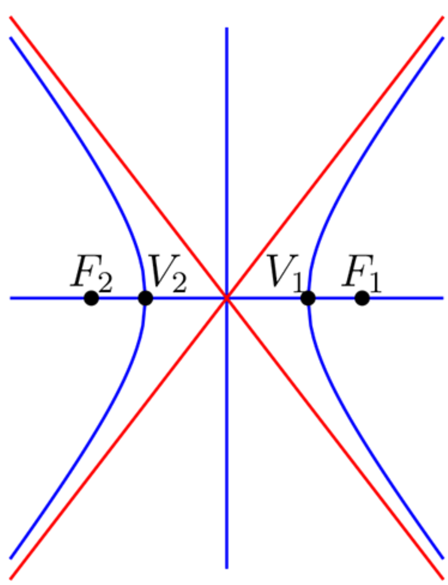
$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E \;\; = \;\; 0$$

define una hipérbola si y sólo si

$$AC < 0 \wedge CB^2 + AD^2 - 4ACE \;\; \neq \;\; 0$$

2.7.3 Asíntotas de la hipérbola

Las asíntotas de una hipérbola son rectas que se encuentran tangentes a la hipérbola; es decir, para valores muy grandes la recta y una rama de la hipérbola están muy juntas y que gráficamente se representa de la siguiente forma



Observación: Consideremos la ecuación de la hipérbola donde su eje focal se encuentra en el eje X

$$\begin{array}{rcll} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} &=& 1 & /(a^2b^2) \\ b^2x^2-a^2y^2 &=& a^2b^2 & \end{array}$$

Despejemos y

$$\begin{array}{rcll} b^2x^2-a^2y^2 &=& a^2b^2 & \\ a^2y^2 &=& b^2x^2-a^2b^2 & \\ y^2 &=& \frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2} & /\sqrt{} \\ y &=& \pm\sqrt{\frac{b^2x^2-a^2b^2}{a^2}} & \\ y &=& \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)} & \\ y &=& \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2(1-\frac{a^2}{x^2})} & \\ y &=& \pm\frac{b}{a}x\sqrt{(1-\frac{a^2}{x^2})} & \end{array}$$

Para valores muy grandes de x el valor de $\frac{a^2}{x^2}$ se va acercando a cero.

Luego

$$\frac{b}{a}\ x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \simeq \pm\frac{b}{a}\ x$$

para valores de x muy grandes

$$y=\frac{b}{a}\ x, \quad y=-\frac{b}{a}\ x$$

Definición 2.7.9 Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y la hipérbola $\mathcal{H}_{F_1,F_2}$.
Si el eje focal es paralelo a eje X, su ecuación esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

entonces la ecuación de las asíntotas de la hipérbola están dadas por

$$(y-k)=\pm\tfrac{b}{a}\ (x-h)$$

Si el eje focal es paralelo a eje Y, su ecuación esta dada por

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

entonces la ecuación de las asíntotas de la hipérbola están dadas por

$$(y-k)=\pm\tfrac{a}{b}\ (x-h).$$

$\Diamond$

Ejemplo 2.7.10 Encuentre el lugar geométrico y toda la información posible de los puntos $P=(x,y)$ cuya distancia al punto fijo $(1,4)$ sea igual a $\frac{5}{4}$ de la distancia a la recta $5x-1=0$.
$\square$

Solución. Calculemos la distancia del punto $P = (x, y)$ al punto $Q = (1, 4)$

$$dist(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

Calculemos la distancia del punto P a la recta $l : 5x - 1 = 0$.

$$dist(l,P) \;=\; \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|5x+0y+(-1)|}{\sqrt{(5)^2+(0)^2}} = \frac{|5x-1|}{5}$$

Donde $dist(P,Q)$ es igual $\frac{5}{4}$ a $dist(l,P)$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} &= \frac{5}{4}\frac{|5x-1|}{5} \\
\sqrt{x^2-2x+1+y^2-8y+16} &= \frac{|5x-1|}{4} / \cdot ()^2 \\
x^2-2x+y^2-8y+17 &= \frac{(5x-1)^2}{16} / \cdot 16 \\
16x^2-32x+16y^2-128y+272 &= 25x^2-10x+1 \\
9x^2+22x-16y^2+128y-271 &= 0 \\
(9x^2+22x)+(-16y^2+128y) &= 271 \\
9\left(x^2+\frac{22}{9}x\right)-16\left(y^2-\frac{128}{16}y\right) &= 271
\end{aligned}$$

Ahora completaremos cuadrado

$$\begin{aligned}
9\left(x^2+2\frac{11}{9}x+\frac{121}{81}-\frac{121}{81}\right)-16(y^2-2\cdot 4y+16-16) &= 271 \\
9\left(x^2+2\frac{11}{9}x+\frac{121}{81}\right)-9\cdot\frac{121}{81}-16(y^2-2\cdot 4y+16)-16\cdot(-16) &= 271
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9\left(x+\frac{11}{9}\right)^2-16(y-4)^2 &= 271+\frac{121}{9}-256 \\
9\left(x+\frac{11}{9}\right)^2-16(y-4)^2 &= \frac{256}{9} \\
\frac{(x+\frac{11}{9})^2}{\frac{256}{9\cdot 9}}-\frac{(y-4)^2}{\frac{256}{9\cdot 16}} &= 1 \\
\frac{\left(x+\frac{11}{9}\right)^2}{\left(\frac{16}{9}\right)^2}-\frac{(y-4)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} &= 1
\end{aligned}$$

De donde podemos obtener que el centro de la hipérbola es $(h,k) = (-\frac{11}{9}, 4)$, además $a = \frac{16}{9}$ y $b = \frac{4}{3}$, con estos valores obtenemos el valor de c

$$c^2 \;=\; a^2+b^2 = \frac{256}{81}+\frac{16}{9} = \frac{400}{81} = \left(\frac{20}{9}\right)^2$$

entonces $c = \frac{20}{9}$, luego sus focos están dados por:

$$F_1 = \left(-\frac{11}{9}-\frac{20}{9}, 4\right) = \left(-\frac{31}{9}, 4\right) \quad \text{y} \quad F_2 = \left(-\frac{11}{9}+\frac{20}{9}, 4\right) = (1,4)$$

Los vértices son

$$V_1 = \left(-\frac{11}{9}-\frac{16}{9}, 4\right) = \left(-\frac{27}{9}, 4\right) \quad \text{y} \quad V_2 = \left(-\frac{11}{9}+\frac{16}{9}, 4\right) = \left(\frac{5}{9}, 4\right)$$

Las asíntotas están dadas por

$$\begin{aligned}
(y-k) &= \pm\frac{b}{a}(x-h) \\
(y-4) &= \pm\frac{\frac{16}{12}}{\frac{16}{9}}\left(x+\frac{11}{9}\right)
\end{aligned}$$

$$(y-4) = \frac{3}{4}\left(x+\frac{11}{9}\right) \quad \text{y} \quad (y-4) = -\frac{3}{4}\left(x+\frac{11}{9}\right).$$

2.7.4 Ejercicios Propuestos

1 Graficar y encontrar todos los elementos que componen a la cónica de ecuación

a $9y^2 = 16x^2 - 36y - 96x + 684$

b $9x^2 - 25y^2 - 18x - 50y = 191$

2 Considere la recta l_m de ecuación $y = mx + 1$. Determine todos los valores de $m \in \mathbb{R}$ tales que las recta l_m interseca a la hipérbola $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$.

[Resp. $m \in \left] -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right[$ y $m \neq \pm\sqrt{2}$]

3 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(6, 0)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $2x - 3 = 0$

[Resp. $3x^2 - y^2 = 27$]

4 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4, 6)$, tiene el eje focal paralelo al eje X, y sus asíntotas son las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$.

[Resp. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$]

5 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(3, 2)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $y + 1 = 0$.

[Resp. $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$]

6 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(2, -1)$ es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2 = 0$.

[Resp. $3x^2 - y^2 + 20x - 2y + 11 = 0$]

7 Hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y = mx - 1$ son tangentes a la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$

[Resp. $m = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$]

8 Demostrar que la elipse $2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $4y^2 - x^2 = 4$ se intersecan.

Resumen de Cónicas			
	Parábola	Elipse	Hipérbola
	$p = dist(V,F)$ $p = dist(V,l)$ focos sobre el eje	$2a$ =longitud eje mayor $2b$ =longitud eje menor $c^2 = a^2 - b^2$ focos sobre el eje mayor	$2a$ =longitud eje transversal $2b$ =longitud eje conjugado $c^2 = a^2 + b^2$ focos sobre el eje transversal
Eje focal paralelo al eje X			
Ecuación	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Centro		(h,k)	(h,k)
Foco(s)	$(h+p,k)$	$(h \pm c,k)$	$(h \pm c,k)$
Vértice(s)	(h,k)	$(h \pm a,k)$	$(h \pm a,k)$
Eje focal paralelo al eje Y			
Ecuación	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Centro		(h,k)	(h,k)
Foco(s)	$(h,k+p)$	$(h,k \pm c)$	$(h,k \pm c)$
Vértice(s)	(h,k)	$(h,k \pm a)$	$(h,k \pm a)$
Lado recto	$4p$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
Excentri cidad	$e = 1$	$e = \frac{c}{a} < 1$	$e = \frac{c}{a} > 1$

Capítulo 3

Funciones

En este capítulo trabajaremos con el concepto de funciones reales en una variables, ejemplo de ello son algunas formulas en las que introducimos datos y nos entregan un valor, como por ejemplo, en Física al conocer la velocidad media y el tiempo transcurrido obtenemos lo que el móvil se desplazo. En geometría el conocer la longitud de un lado de un triángulo equilátero sabemos lo que mide el área del triángulo.

3.1 Introducción

La noción de función está presente en la vida diaria, cuando nos referimos o hacemos una correspondencia estamos hablando de funciones. Por ejemplo cuando decimos:

a A cada rectángulo le corresponde su área.

b A cada persona la corresponde su peso.

c A cada persona le corresponde su cédula de identidad.

En éstos ejemplos se pueden distinguir dos conjuntos A y B.

En el primer ejemplo A denota el conjunto de rectángulos y B el conjunto de los números reales positivos. Es decir, a cada rectángulo x en A le corresponde un real positivo y en B que es su área. Los ejemplos anteriores tienen la particularidad de que dado x que pertenece a A le corresponde un único y que pertenece a B.

Al repasar el primer ejemplo, también es válido decir que el área del rectángulo depende de sus lados, aquí podemos distinguir el concepto de dependencia, donde una de las variables, el área del rectángulo, depende de las otras, sus lados.

3.1.1 Relaciones

Una relación asocia elementos de un conjunto de partida A, a algún o algunos elementos del conjunto de llegada B, es decir, que dados dos conjuntos, una relación $\mathcal{R}$ entre A y B o bien que va desde A hasta B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Los elementos pertenecientes a la relación se denota $(x, y) \in \mathcal{R}$ o bien $x\mathcal{R}y$.

Definición 3.1.1 Una relación de números reales es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ $\Diamond$

Ejemplo 3.1.2 Los siguiente conjuntos son relaciones reales

a $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$

b $\mathcal{P}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x + 1\}$

c $\mathcal{P}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 2y + 3\}$

d $\mathcal{E}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}$

e $\mathcal{E}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 1\}$

f $\mathcal{H}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

g $\mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1\}$

h $\mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$

$\square$

Definición 3.1.3 Sea $\mathcal{R}$ una relación entre A y B, se define el **Dominio** de la relación $\mathcal{R}$ igual al conjunto de todas las preimágenes de B o bien, el conjunto de las primeras coordenadas de los elementos de $\mathcal{R}$ y se denota como $Dom\mathcal{R}$, es decir,

$$Dom\mathcal{R} = \{x \in A \mid (\exists y \in B)(x\mathcal{R}y)\}$$

Un subconjunto de B formado por las imágenes de los elementos del $Dom\mathcal{R} \subseteq A$, o bien, el conjunto de las segundas coordenadas de los elementos de $\mathcal{R}$ se llama **Recorrido** se denota $Rec\mathcal{R}$ y esta definido del siguiente modo:

$$Rec\mathcal{R} = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(x\mathcal{R}y)\}$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.1.4 Sean $A = \{0, 2, 4\}$ y $B = \{a, b\}$ los conjuntos que siguen son relaciones entre A y B.

a $\mathcal{R}_1 = \{(0, a), (2, a), (4, a)\}$, el dominio y recorrido esta dado por

$$Dom\mathcal{R}_1 = \{0, 2, 4\}, \quad Rec\mathcal{R}_1 = \{a\}.$$

b $\mathcal{R}_2 = \{(0, a), (0, b), (2, a)\}$, el dominio y recorrido esta dado por

$$Dom\mathcal{R}_2 = \{0, 2\}, \quad Rec\mathcal{R}_2 = \{a, b\}.$$

c $\mathcal{R}_3 = A \times B$, su dominio es $Dom\mathcal{R}_3 = A$ y el recorrido es $Rec\mathcal{R}_3 = B$.

$\square$

Ejemplo 3.1.5 La circunferencia de radio 4 y de centro $(0, 0)$, es una relación en el plano cartesiano, es decir,

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 16\},$$

y en este caso tenemos que

$$Dom\mathcal{R} = [-4, 4], \quad Rec\mathcal{R} = [-4, 4].$$

$\square$

Definición 3.1.6 Sea $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ una relación, diremos que $\mathcal{R}^{-1}$ es la relación **inversa** de $\mathcal{R}$ que va desde B a A y se denota como:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

$\lozenge$

De la definición se deduce que:

$$(u, v) \in \mathcal{R}^{-1} \Longleftrightarrow (v, u) \in \mathcal{R}.$$

Ejemplo 3.1.7 Sea $\mathcal{R} = \{(1, 1), (3, 2), (4, 4), (1, 2)\}$, luego la relación inversa de $\mathcal{R}$ es:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(1, 1), (2, 3), (4, 4), (2, 1)\}.$$

$\square$

Ejemplo 3.1.8 Sea $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$, luego la relación inversa de $\mathcal{L}$ es:

$$\mathcal{L}^{-1} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 2b + 3a = 1\}.$$

$\square$

3.2 Función

Una función f es una relación de A en B tal que a cada elemento del dominio de la relación, le corresponde un único elemento del recorrido de la relación.

Definición 3.2.1 Se dice que f es una función de números reales si y sólo si

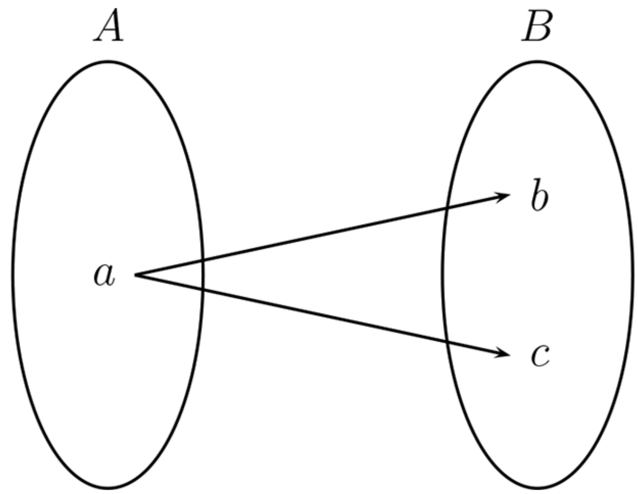
i f una relación en los números reales y

ii $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x, y), (x, z) \in f \Rightarrow y = z)$

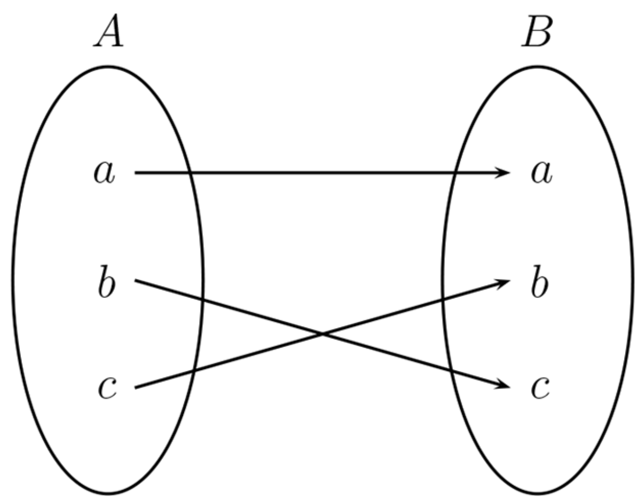
$\lozenge$

Observación: En general, se dice que f es una función de A en B si y sólo si f es una relación entre A y B y $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(xfy)$.

Es decir, no es función cuando un el elemento tiene más de una imagen en el conjunto de llegada. Podemos graficar esta situación, donde f **no es función**, con el siguiente diagrama



En cambio el siguiente diagrama, representa una función.



Ejemplo 3.2.2 Determinar si la siguiente relación es una función

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

$\square$

Solución 1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{L}$
Luego tenemos que

$$2a + 3b = 1 \quad \wedge \quad 2a + 3c = 1$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{array}{rcl} 2a + 3b & = & 2a + 3c \\ 3b & = & 3c \\ b & = & c \end{array}$$

Luego $\mathcal{L}$ es función.

Ejemplo 3.2.3 Determinar si la siguiente relación es una función

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x + 1\}$$

$\square$

Solución 2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{P}$. Luego tenemos que

$$b^2 = 4a + 1 \quad \wedge \quad c^2 = 4a + 1$$

Reemplazando tenemos

$$b^2 = c^2$$

$$b = c \quad \vee \quad b = -c$$

podemos considerar los pares ordenados $(1, 5)$ y $(1, -5)$ ambos puntos pertenece a $\mathcal{P}$ pero $5 \neq -5$, luego $\mathcal{P}$ no es una función.

Ejemplo 3.2.4 Determinar si la siguiente relación es una función

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

$\square$

Solución 3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{H}$. Luego tenemos que $a \in \mathbb{R}_0^+, b, c \in \mathbb{R}^-$ además

$$b^2 - 3a^2 = 1 \quad \wedge \quad c^2 - 3a^2 = 1$$

Reemplazando tenemos

$$b^2 - 3a^2 = c^2 - 3a^2$$

$$b^2 = c^2$$

$$b = c \quad \vee \quad b = -c$$

pero $b < 0$ y $c < 0$, luego es imposible que $b = -c$ por lo tanto tenemos que

$$b = c.$$

Así $\mathcal{H}$ es una función.

[inlineexercise] 3.2.5 Determine si los siguientes conjunto son funciones

a $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 2\ \}$

b $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4\ \}$

c $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \wedge y \geq 3\ \}$

d $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dfrac{(x + 1)^2}{4} + \dfrac{(y - 1)^2}{9} = 1\ \}$

e $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dfrac{(x + 1)^2}{4} + \dfrac{(y - 1)^2}{9} = 1 \wedge y \leq 1\ \}$

Observación: Tenga presente que una función es un conjunto, luego la igual de funciones es una igual de conjuntos.

3.2.1 Dominio y Recorrido

Definición 3.2.6 Dominio y Recorrido de una Función. Sea f una función real. Se define el **Dominio** de f igual a

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists y \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}.$$

Se define el **Recorrido** de f igual a

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}$$

$\Diamond$

A continuación revisaremos los ejemplos anteriores.

Ejemplo 3.2.7 Determinar dominio y recorrido de

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

$\square$

Solución 1. Sea $x \in Dom(\mathcal{L})$, luego existe $y \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y) \in \mathcal{L}$, es decir,

$$2x + 3y = 1.$$

Despejando obtenemos que

$$y = \frac{1 - 2x}{3}.$$

De lo anterior tenemos que:

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $y = \frac{1-2x}{3} \in \mathbb{R}$ tal que

$$2(x) + 3\frac{1 - 2x}{3} = 1,$$

de lo cual, $(x, \frac{1-2x}{3}) \in \mathcal{L}$.

Luego

$$Dom(\mathcal{L}) = \mathbb{R}$$

Para el recorrido tenemos que un desarrollo similar, dado por $y \in \mathbb{R}$, luego $x = \frac{1-3y}{2}$ el cual es un número real, por lo tanto tenemos que el recorrido es:

$$Rec(\mathcal{L}) = \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.2.8 Determinar dominio y recorrido de la siguiente función

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

$\square$

Solución 2. Sea $x \in Dom(f) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, luego existe $y \in \mathbb{R}^-$ tales que $(x, y) \in f$, es decir,

$$y^2 - 3x^2 = 1.$$

Despejando obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} y^2 &=& 1+3x^2. \\ y^2 &=& 1+3x^2. \\ |y| &=& \sqrt{1+3x^2} \\ y &=& -\sqrt{1+3x^2}, \quad y<0 \end{array}$$

De lo anterior tenemos que:
Dado $x \in \mathbb{R}_0^+$ existe $y = -\sqrt{1+3x^2} \in \mathbb{R}^-$ tal que

$$(-\sqrt{1+3x^2})^2 - 3(x)^2 = 1,$$

es decir, $(x, -\sqrt{1+3x^2}) \in f$.
Luego

$$Dom(f) = \mathbb{R}_0^+$$

Para el recorrido tenemos que un desarrollo similar, dado por $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} y^2 - 3x^2 &=& 1 \\ 3x^2 &=& y^2 - 1 \quad (*) \\ |x| &=& \sqrt{\frac{y^2-1}{3}} \\ x &=& \sqrt{\frac{y^2-1}{3}}, \quad x \geq 0 \end{array}$$

luego la restricción $(*)$ esta dada por $y^2 - 1 \geq 0$, por lo tanto $|y| \geq 1$ con lo cual $y \leq -1$. De este modo $x = \sqrt{\frac{y^2-1}{3}}$ es un número real y por lo tanto tenemos que el recorrido es:

$$Rec(f) =]\infty, -1]$$

Ejemplo 3.2.9 Dada la relación $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y(x-4) = 2x+5\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Determine el dominio y el recorrido de la función. □

Solución 3. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $(x,y) \in f$, por lo tanto tenemos

$$y(x-4) = 2x+5$$

Cuando $x \neq 4$ tenemos que existe un único valor de $y = \frac{2x+5}{x-4}$

Para $x = 4$, reemplazando y tenemos que $0 = 13$, lo que es una contradicción, luego el dominio de f es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

Sea $y \in Rec(f)$, luego existe $x \in \mathbb{R} - \{4\}$ tal que $(x,y) \in f$,

$$\begin{array}{rl} y(x-4) = & 2x+5 \\ yx - 4y = & 2x+5 \\ yx - 2x = & 5+4y \\ x(y-2) = & 5+4y \end{array}$$

Para $y = 2$, reemplazamos obtenemos que $0 = 13$, lo es falso.

Por lo cual tenemos que $y \neq 2$, y por ende podemos despejar el valor de:

$$x = \frac{5+4y}{y-2}.$$

Recordemos que $x \in Dom(f)$, para ello notemos lo siguiente

$$\frac{5+4y}{y-2} = 4 \Leftrightarrow 5+4y = 4y-8 \Leftrightarrow 5 = -8$$

es decir,

$$\frac{5+4y}{y-2} \neq 4 \Leftrightarrow 5 \neq -8$$

Luego el recorrido de la función es $Rec(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Ejemplo 3.2.10 Dada la función $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Determine el dominio y el recorrido. □

Solución 4. Ya que $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\}$,
Como la expresión $y = \sqrt{x}$ está bien definida solamente cuando $x \in \mathbb{R}_0^+$.
Luego

$$Dom(f) = \mathbb{R}_0^+.$$

Sea $y \in Rec(f)$, luego existe $x \in Dom(f) = \mathbb{R}_0^+$, tal que $(x,y) \in f$.

$$\begin{array}{rcl} y & = & \sqrt{x} \\ y^2 & = & x \text{ con } x \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}$$

sabemos que $y^2 \geq 0$ es siempre verdadero.

Por lo tanto el recorrido de f es $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$

Ejemplo 3.2.11 Dada la relación $f = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} \mid y(x-1) = x^2-1\}$

a Para $A = \mathbb{R}$, determine si f es una función.

b Determine $A \subseteq \mathbb{R}$ maximal, tal que f es función, además su $Dom(f)$ y $Rec(f)$

□

Solución 5. Veremos si es función.
Si $x \neq 1$, tenemos que $y = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, luego el valor de y es único.
Si $x = 1$, se tiene que $0 = 0$, luego todo los valores de y satisfacen, de otro modo $(1,y) \in f$, para todo $y \in \mathbb{R}$, por ende no es función.

El conjunto maximal tal que f es función esta dado por $A = \mathbb{R} - \{1\}$, y en este caso el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Para determinar el recorrido, sea $y \in Rec(f)$, con $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, tal que $(x,y) \in f$, luego tenemos que

$$\begin{array}{rl} y = & \frac{x^2-1}{x-1} \\ y = & (x+1) \\ y-1 = & x \end{array}$$

Falta analizar que $y - 1 = x \neq 1$, es decir,

$$y-1 = 1 \Leftrightarrow y = 2$$

de otro modo

$$y-1 \neq 1 \Leftrightarrow y \neq 2$$

Por lo tanto el recorrido de la función es: $\mathbb{R} - \{2\}$.

3.2.2 Notación Funcional

Sea f una función de números real, luego existe el Dominio de f y el Recorrido de f, además a cada $x \in Dom(f)$ existe un único elemento y en el recorrido, el cual denotamos por $y = f(x)$. Luego la función, la podemos codificar del siguiente modo:

$$\begin{array}{rccl} f: & Dom f & \longrightarrow & B \\ & \text{variable} & \longmapsto & \text{único valor asociada} \end{array}$$

Donde B es llamado "Conjunto de llegada" y es un subconjunto de los Número Reales que contiene al recorrido, de otro modo $Rec(f) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, la variable habitualmente empleada es x, por último note que el valor asociado debe pertenecer a B.

En los ejemplos usaremos los ejercicios anteriores.

En el primer ejemplo tenemos que

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

podemos escribirlo usando la notación:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1-2x}{3} \end{array}$$

En el siguiente ejemplo tenemos que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

podemos escribirlo usando la notación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow &]-\infty, 0[\\ & x & \longmapsto & -\sqrt{1+3x^2} \end{array}$$

El el tercer ejemplo se tiene que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y(x - 4) = 2x + 5\}.$$

en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{2x+5}{x-4} \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ & x & \longmapsto & \frac{2x+5}{x-4} \end{array}$$

En el cuarto ejemplo se tiene que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\},$$

en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

En el último ejemplo se tiene que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x-1) = x^2 - 1, x \neq 1\},$$

en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ & x & \longmapsto & \frac{x^2-1}{x-1} \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

Observación: La igualdad de funciones corresponde solamente a una igualdad de conjuntos, pero ahora es importante, revisar esta noción de igualdad de funciones con esta nueva notación.

Definición 3.2.12 Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ se dice que $f = g$ si y sólo si se cumple que:

a $A = C$

b $(\forall x \in A)(f(x) = g(x))$

o bien, dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, y para cada elemento del dominio tiene idénticas imágenes. $\Diamond$

Ejemplo 3.2.13 Sean $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ y $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x^2+x}{x} \end{array}$

En este caso tenemos que $f \neq g$ ya que $Dom(f) \neq Dom(g)$. $\square$

3.2.3 Ejercicios Resueltos

Ejemplo 3.2.14 Sea $\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & [1, 9[\\ & x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{|x| - 2} - 1 \end{array}$

Determine el dominio de la función. $\square$

Solución 1. Para determinar el dominio de la función, primero debemos restringirla, es decir, determinar para qué valores de x la imagen son números reales.

$$\begin{array}{rcl} |x| - 2 & \geq & 0 / + 2 \\ |x| & \geq & 2 \\ x \geq 2 & \vee & x \leq -2 \end{array}$$

entonces

$$x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

Como la función tiene como conjunto de llegada el intervalo $[1, 9[$, debemos encontrar los valores de x para los cuales la imagen está en este conjunto.

$$\begin{array}{rcl} y \in [1, 9[& \Leftrightarrow & 1 \leq y < 9 \\ \sqrt{|x| - 2} - 1 \in [1, 9[& \Leftrightarrow & 1 \leq \sqrt{|x| - 2} - 1 < 9 / + 1 \\ & \Leftrightarrow & 2 \leq \sqrt{|x| - 2} < 10 / ()^2 \\ & \Leftrightarrow & 4 \leq |x| - 2 < 100 / + 2 \\ & \Leftrightarrow & 6 \leq |x| < 102 \end{array}$$

Luego tenemos

$$\begin{array}{rcl} 6 \leq |x| & \Leftrightarrow & x \leq -6 \vee 6 \leq x \\ |x| < 102 & \Leftrightarrow & -102 < x \wedge x < 102 \end{array}$$

De lo cual tenemos

$$x \in]-102, -6] \cup [6, 102[.$$

Entonces el dominio de f

$$Dom(f) = (]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[) \cap (]-102, -6] \cup [6, 102[)$$

Por lo tanto

$$Dom(f) =]-102, -6] \cup [6, 102[.$$

Ejemplo 3.2.15 Sea $\begin{array}{rccc} f: &]-\infty, -2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1. \end{array}$

Determine el recorrido de f. $\square$

Solución 2. Sean $x \in]-\infty, -2[$ $y \in Rec(f)$, luego

$$\begin{array}{rll} y = & f(x) & \\ y = & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1 & / - 1 \\ y - 1 = & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} & /()^2,\ y - 1 \geq 0 \\ (y-1)^2 = & \frac{1}{|x|-1} & \\ |x| - 1 = & \frac{1}{(y-1)^2} & / + 1,\ y \neq 1 \\ |x| = & \frac{1}{(y-1)^2} + 1 & \end{array}$$

Como $x \in]-\infty, -2[$, tenemos que $|x| = -x$ y nos queda

$$\begin{array}{rll} -x = & \frac{1}{(y-1)^2} + 1 & / \cdot (-1) \\ x = & -1 - \frac{1}{(y-1)^2} & \end{array}$$

por otro lado tenemos que $x \leq -2$, entonces

$$\begin{array}{rll} -1 - \frac{-1}{(y-1)^2} \leq -2 & \Leftrightarrow \frac{-1}{(y-1)^2} \leq -1 & / \cdot (-1) \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{(y-1)^2} \geq 1 & \\ & \Leftrightarrow 1 \geq (y-1)^2 & /\sqrt{} \\ & \Leftrightarrow 1 \geq |y-1| & \\ & \Leftrightarrow -1 \leq y - 1 \leq 1 & \\ & \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2 & \end{array}$$

antes de concluir debemos considerar las anteriores restricciones, luego el recorrido de la función nos queda:

$$Rec(f) = [0, 2] \cap]1, +\infty[=]1, 2].$$

Ejemplo 3.2.16 Sea $f(x) = 1 - x - x^2$ una función real.
Determine el dominio máximo y su recorrido de f. $\square$

Solución 3. Como la expresión $f(x) = 1 - x - x^2$, siempre esta bien definida o siempre podemos evaluar, luego $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Ahora, para encontrar el recorrido de f. Sea $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{array}{rcl} y &=& f(x) \\ y &=& 1 - x - x^2 \\ x^2 + x + (y-1) &=& 0 \end{array}$$

La cual es una ecuación de segundo grado, para determinar si existe x debemos calcular su discriminante es $1 - 4(y-1) \geq 0$, luego aplicando la formula de segundo grado tenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5-4y}}{2}$$

Entonces, la única restricción es el discriminante

$$\begin{array}{rl} 5 - 4y & \geq 0 \\ \frac{5}{4} & \geq y \end{array}$$

Luego

$$Rec(f) =]-\infty, \frac{5}{4}]$$

Ejemplo 3.2.17 Sea $\begin{array}{rccl} f: & A \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 2 + x & si \quad x \leq 1 \\ x^2 + 1 & si \quad x > 1 \end{cases} \end{array}$

Determinar A igual al dominio máximo y el recorrido de la función. □

Solución 4. El dominio máximo de ésta función es $\mathbb{R}$.

Como f es una función definida en tramos, para determinar el recorrido consideraremos primero el tramo en que la función está definida para todos los $x \leq 1$ y la llamaremos f_1, es decir

$$\begin{array}{rccc} f_1 &]-\infty, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2 + x \end{array}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que existe $x \leq 1$, tal que

$$y = 2 + x \Leftrightarrow y - 2 = x$$

como $x \leq 1$, luego

$$y - 2 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 3$$

Por lo tanto

$$Rec(f_1) =]-\infty, 3]$$

Ahora veremos que pasa con el recorrido cuando $x > 1$. Llamaremos f_2 al segundo tramo de la función, es decir,

$$\begin{array}{rccc} f_2 &]1, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que existe $x > 1$, tal que

$$y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = x^2,$$

de lo cual $y-1 \geq 0$ y $\sqrt{y-1}=|x|$, pero $x>1$

$$\sqrt{y-1}>1 \Leftrightarrow y-1>1$$

De este modo tenemos

$$Rec(f_2)=]-\infty,2[$$

Finalmente el recorrido de la función f es

$$Rec(f)=Rec(f_1)\cup Rec(f_2)=]-\infty,3]$$

3.2.4 Representación Gráfica

La gráfica de una función $f:A\longrightarrow B$, se define como el conjunto de pares ordenados siguiente:

$$Graf(f)=\{(x,f(x))\in A\times B \mid y=f(x), x\in A\}\subset\mathbb{R}^2$$

Note que hemos vuelto a la notación de relación de números reales.

La representación gráfica de f, se llama curva y se consigue **marcando** los puntos del conjunto en el producto cartesiano $A\times B$ y en el caso real en el plano cartesiano.

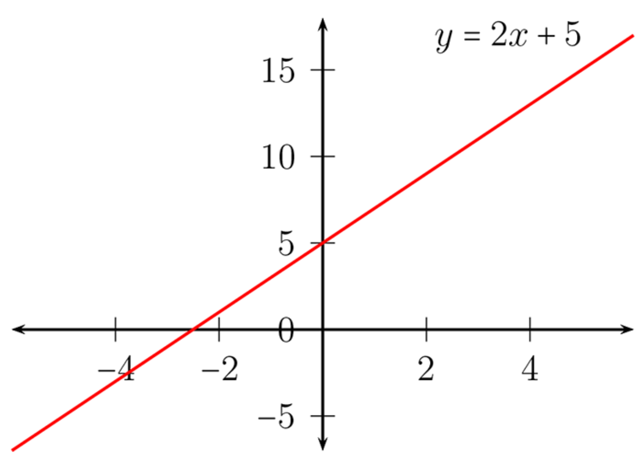
De lo anterior, tenemos en el eje x los elementos del dominio y en el eje y los elementos del conjunto de llegada.

Observación: Se dice que x es un cero de f, si y sólo si $f(x)=0$. Geométricamente los ceros de una función son los puntos en que la gráfica intersecan o corta al eje x.

Ejemplo 3.2.18 En la función real $f(x)=2x+2$, se tiene que -1 es un cero de f y por lo tanto el punto $(-1,0)$ pertenece a la intersección del gráfico de f con el eje x. □

Ejemplo 3.2.19 Graficar la función $f(x)=2x+5$. □

Solución 1. Para graficar la función podemos hacer una tabla, que contengan las variables independiente y dependiente, asignándole posibles valores a la variable independiente obtenemos los valores de la variable dependiente al reemplazar los valores dados y así podemos representar algunos puntos en el plano. Además conociendo que la curva, en este caso, se trata de una recta, luego nos bastan dos puntos, ellos pueden ser $(0,5),(1,7)\in f$.



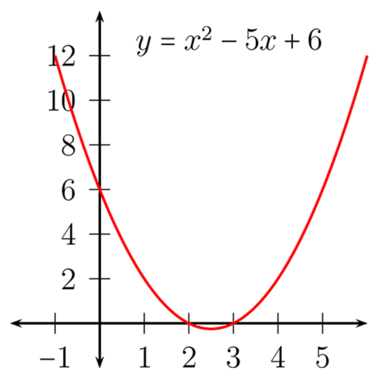
Observación: La gráfica de una función, nos ayuda a poder determinar el dominio y el recorrido de ella

Ejemplo 3.2.20 Graficar la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$. □

Solución 2. Para graficar, usamos el hecho que $y = x^2 - 5x + 6$ es una parábola, para determinar los elementos distinguidos completemos cuadrado y obtenemos

$$(x - \frac{5}{2})^2 = 4\frac{1}{4}(y + \frac{1}{4}),$$

cuyo vértice es $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, para tener una mejor gráfica, construyamos una tabla con algunos valores, para ello



x	y
0	6
1	2
2	0
3	0
4	2

Usando la gráfica podemos constatar que el dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $[-\frac{1}{4}, \infty[$.

Revisemos el recorrido para ello consideremos la ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 - y = & \ 0 \\ x = & \ \tfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6-y)}}{2} \\ x = & \ \tfrac{5 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \end{aligned}$$

Luego la única restricción es que el discriminante debe ser no negativo, es decir

$$1 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto el recorrido de f es $[-\frac{1}{4}, \infty[$.

3.3 Modelación

Modelar matemáticamente una situación de la vida cotidiana se refiere a identificar en un problema una expresión matemática concreta que represente algunos aspecto del problema, de modo que esta expresión nos permita obtener información actual o futura.

Esta expresión matemática puede expresarse mediante un enunciado o mediante una ecuación. En el siguiente ejemplo encontramos una situación la cual se puede modelar mediante una función.

Ejemplo 3.3.1 Cuando hablamos del impuesto a la venta de ciertos artículos, nos referimos a una situación de la vida diaria, la cual podemos modelar de la siguiente forma; si x representa el valor del artículo en pesos sin impuesto y T es el impuesto a la venta del articulo, el cual es de un 19

$$T(x) = \frac{19}{100} \cdot x$$

con $x > 0$
Es decir, si tenemos un artículo cuyo valor es de 200 sin IVA, el impuesto a la venta se puede calcular usando la expresión matemática encontrada:

$$T(200) = \frac{19}{100} \cdot 200 = 38$$

□

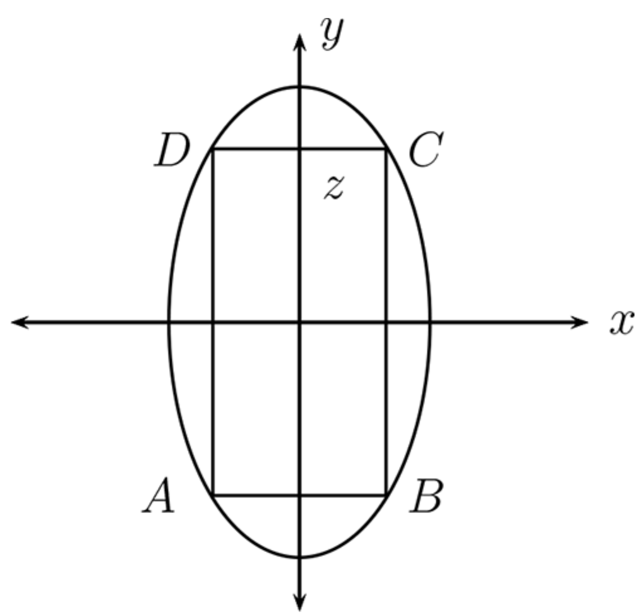
Observación: En el caso que el impuesto ya este incluido en el valor, tenemos que la función no es la misma, ya que

$$P = x + 0,19x = 1,19x$$

Luego si pagamos $200, el costo del producto sin impuesto es $1,19x = 200$, o bien $x = \frac{200}{1.19} \approx 168.1$ y el impuesto es

$$0,19\frac{200}{1.19} \approx 31,9.$$

Cuando las personas pagan y le extiende una factura tenemos el primer caso, y el segundo posibilidad es cuando se extiende una boleta, donde no figura los impuestos, sólo el valor final.
Ejemplo 3.3.2 Considere un rectángulo ABCD con sus lados paralelos a los ejes, inscrito en la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$. Sea z la distancia entre un lado vertical del rectángulo y el eje y.



Determine el área del rectángulo en función de z, expresando claramente el dominio. □

Solución 1. El área del rectángulo, es el producto de las longitudes de los lados, para ello sean

$$|\overline{AB}| = 2z \wedge |\overline{BC}| = 2y$$

Luego el área del rectángulo en función de z y de y es la siguiente:

$$A = 2z \cdot 2y = 4zy$$

Como el punto C pertenece a la elipse entonces satisface la ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$, despejamos y

$$\begin{array}{rll} 9z^2 + 4y^2 = & 36 & \\ 4y^2 = & 36 - 9z^2 & /(\frac{1}{4}) \\ y^2 = & \frac{36}{4} - \frac{9}{4}z^2 / \sqrt{} & \frac{36}{4} - \frac{9}{4}z^2 > 0 \\ |y| = & \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{9}{4}z^2} & \\ |y| = & \frac{1}{2}\sqrt{36 - 9z^2} & \\ |y| = & \frac{1}{2}\sqrt{9(4 - z^2)} & \end{array}$$

Como y representa una distancia, entonces el valor es positivo

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2}$$

donde $4 - z^2 > 0$.

Por lo tanto, el área en función de z queda determinada como sigue

$$A(z) = 4z \cdot \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2} = 6z\sqrt{4 - z^2}$$

Ahora veremos cual es el dominio.

$$\begin{array}{rll} 4 - z^2 & \geq 0 & \\ 4 & \geq z^2 & / \sqrt{} \\ 2 & \geq |z| & \end{array}$$

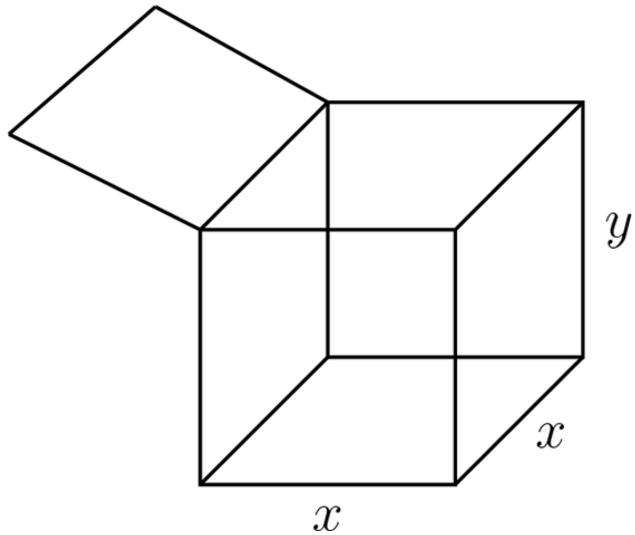
$$-2 \leq z \leq 2$$

Como z es una distancia entonces

$$Dom(A) =]0, 2[.$$

Los extremos no se incluye, ya que las linea, no forma un rectángulo

Ejemplo 3.3.3 Se desea construir una caja con tapa de base cuadrada con área no mayor de 100 cm^2 como en la figura, de volumen 252 cm^3. Si el costo de la tapa es \$2 por cm^2, la base \$ 5 por cm^2 y el costo de los lados es de \$3 por cm^2, exprese el costo C como función de x y el dominio de C



□

Solución 2. Dado que el volumen es $V = 252cm^3$, luego $x^2y = 252$, ahora veremos el costo por lado

El costo de la tapa es de \$ 2 por cm^2. La tapa tiene x^2cm^2, por lo tanto el costo de la tapa es $\$2x^2$.

El costo de la base es de \$5 por cm^2. La base tiene x^2cm^2, por lo tanto el costo de la base es $5x^2$.

El costo de los lados es de \$3 por cm^2. Cada lado tiene $xycm^2$, por lo tanto el costo de los lados es de \$ $12xy$.

El costo total de la caja es:

$$C = 2x^2 + 5x^2 + 12xy$$

pero $y = \frac{252}{x^2}$

Entonces la función queda determinada como

$$C(x) = 7x^2 + 12x \cdot \frac{252}{x^2}$$

$$C(x) = 7x^2 + \frac{3024}{x}$$

donde el dominio de C es $]0, 10]$

3.3.1 Ejercicios Propuestos

1 Si el radio basal r de un cono circular recto aumenta en un $x\%$, mientras que su altura h disminuye en un 20% formule una función en términos de x que permita obtener en qué porcentaje varían:

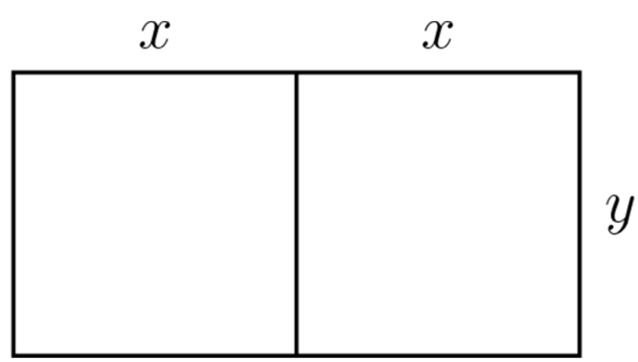
i El área basal del cono.

ii Si el radio aumenta en 15% ¿en qué porcentaje varían el área basal y el volumen del cono?

2 Una caja rectangular con la parte superior abierta tiene un volumen de $10m^3$. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material de la base tiene un costo de 10 dólares por m^2, el material de las caras laterales tiene un costo de 6 dólares por m^2.

Expresar el costo de los materiales en función del ancho de la base.

3 En una parcela, se desea encerrar dos porciones de terreno de igual área (como en la figura) con una malla de longitud L. Expresar el área de la parcela en función de x.



4 El área de una piscina rectangular con bordes es de $18cm^2$. Si el borde superior e inferior miden $\frac{1}{3}m$ y los bordes laterales miden $\frac{1}{4}m$. Expresar el área comprendida entre los bordes en función de uno de los lados de la piscina.

5 La asistencia media en un cine en el que la entrada vale \$1200 es de 100 personas. El empresario cree que cada vez que se reduce el precio en \$80, el número de espectadores aumenta en 20.

i Determine la recaudación R en función del precio p.

ii ¿Qué precio y número de espectadores producirán la mayor asistencia?

iii ¿Cuál es la recaudación máxima por sesión?

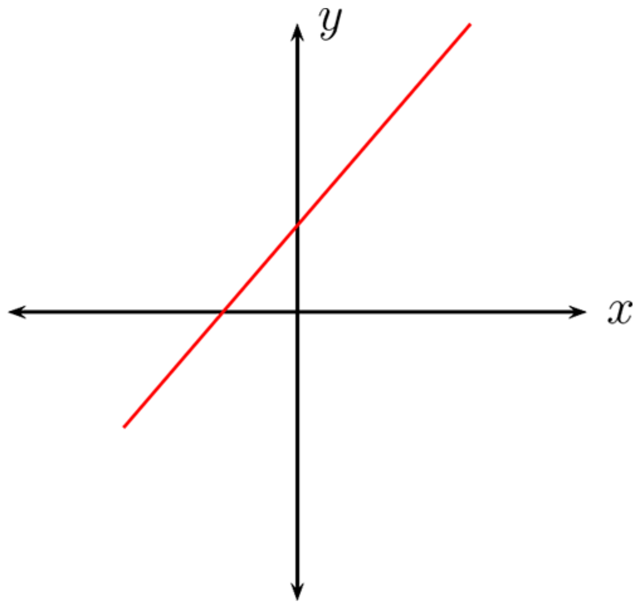
3.4 Tipos de Funciones

Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow B$ una función real.

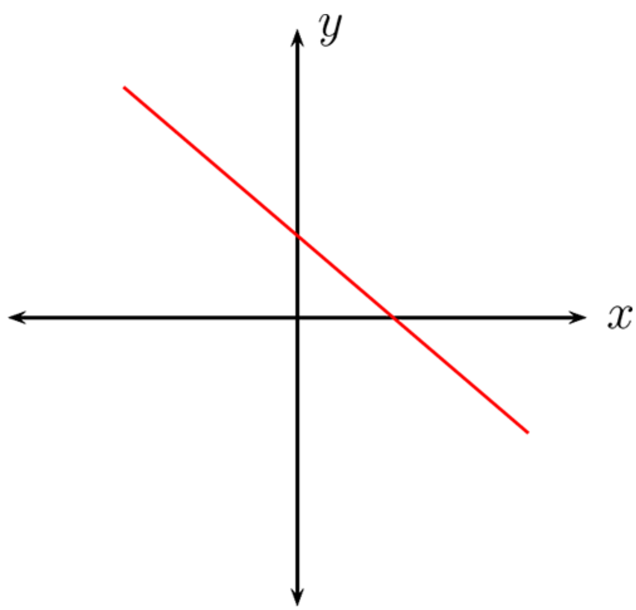
Una clasificación de las funciones reales es la siguiente:**Funciones Lineales**Son funciones de la forma $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & mx+b \end{array}$ con $m, b \in \mathbb{R}$.

La gráfica de las funciones lineales, corresponde a una recta de pendiente m.

Si $m > 0$ y $b \neq 0$ su gráfica tiene la siguiente forma:



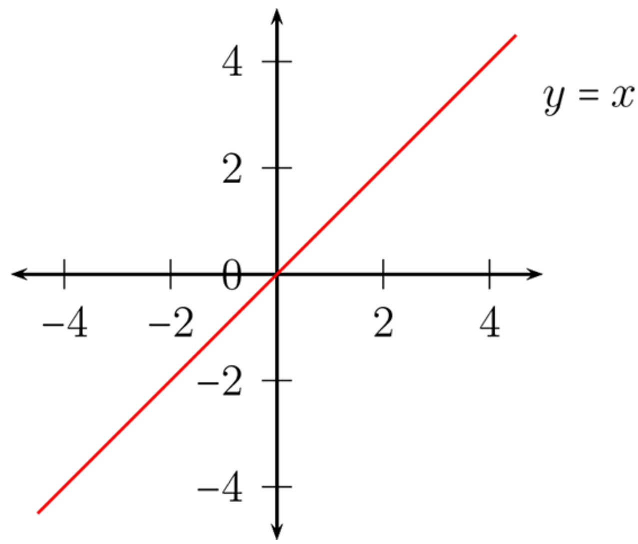
Si $m < 0$ y $b \neq 0$, se gráfica es del siguiente tipo:



Si $m = 1$ y $b = 0$, entonces llamaremos a esta función Identidad y se define como:

$$\begin{array}{rccc} Id: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & Id(x) = x \end{array}$$

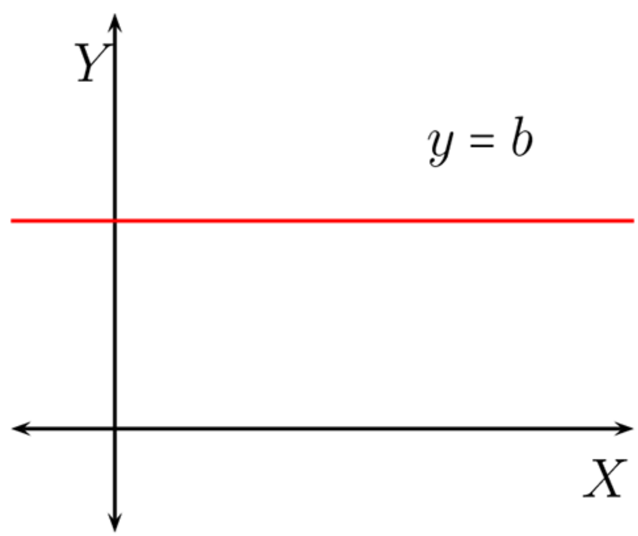
Su gráfica :



Si $m=0$ y $b\neq 0$,entonces la función se llama función constante b y se denota por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & b \end{array}$$

Gráficamente de pendiente cero:



Funciones Cuadráticas: Son funciones del tipo $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array}$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

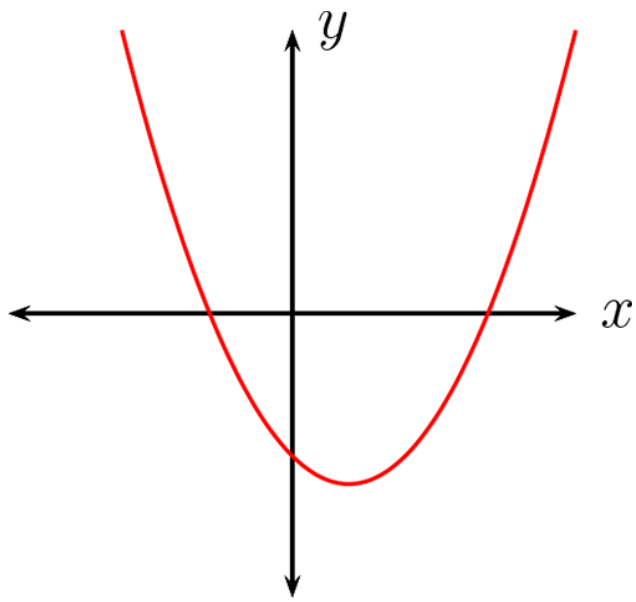
La gráfica de la función cuadrática $y=ax^2+bx+c$, corresponde a una parábola.

Para conocer la gráfica de una parábola es útil calcular su vértice

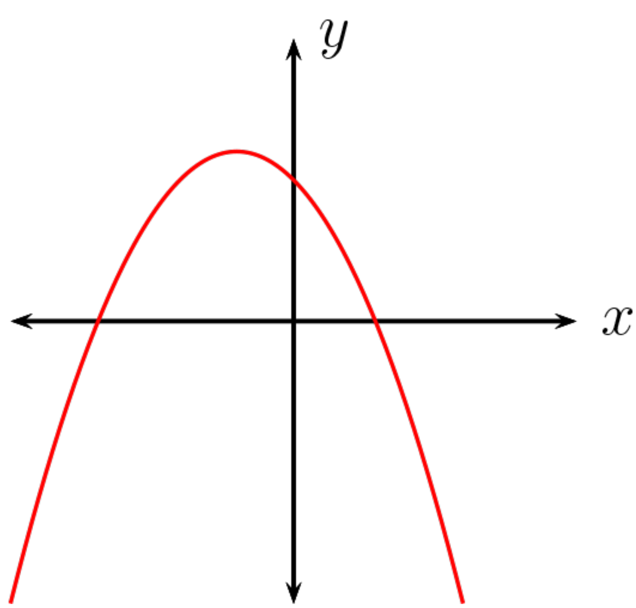
$$V=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\triangle}{4a}\right)$$

donde $\triangle = b^2 - 4ac$, es el discriminante de la ecuación, de segundo grado o polinomio de segundo grado y las intersecciones con el eje X, cuya existencia depende del valor del discriminante si es negativo o no es. El nombre de Δ se debe a que discrimina si la función cuadrática tiene intercepto en eje X o no hay, de otro modo, si la ecuación tiene o no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Cuando $a > 0$ su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia arriba.



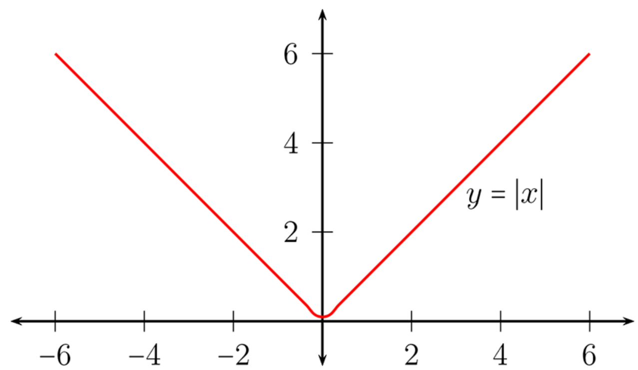
Cuando $a < 0$ su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia abajo.



Función Valor Absoluto: Esta esta dada por:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

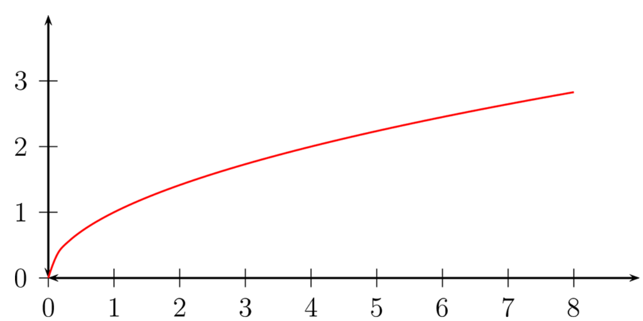
La gráfica de la función es la siguiente:



Función Raíz Cuadrada: Esta función esta dada por:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

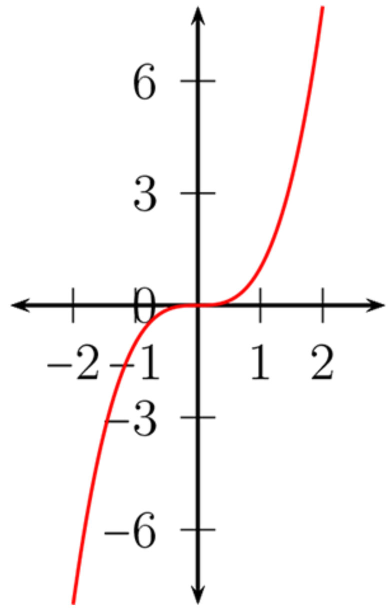
La gráfica de la función es la siguiente:



Función Cúbica: Esta función esta dada por:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

Gráficamente:



Función Parte Entera: Dado un número real x, se puede descomponer en una suma separando su parte entera

$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \ \mid \ m \leq x\}$$

luego la parte decimal se define

$$d(x) = x - [x]$$

o bien

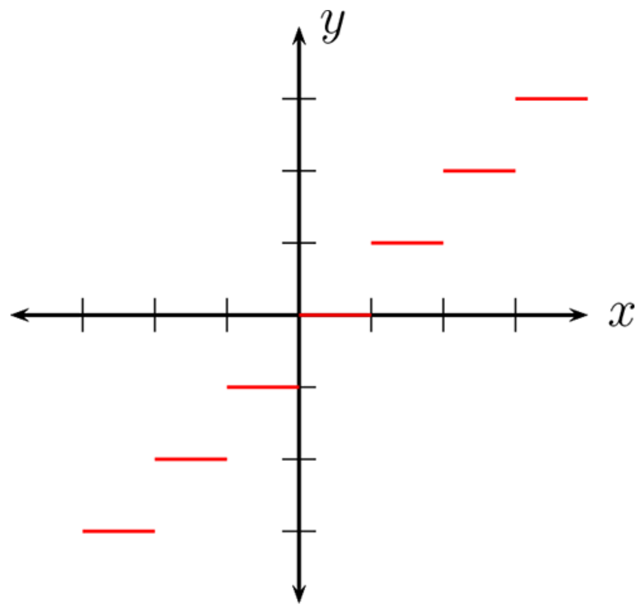
$$x = [x] + d(x)$$

donde $[x]$ es un número entero y $d(x)$ un número decimal, $0 \leq d(x) < 1$.

Luego la función parte entera se define como:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Su gráfica:



Ejercicios Propuestos Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Determine el conjunto A igual al dominio máximo de f y el recorrido para ese dominio.

a $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

b $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

c $f(x) = x^2 + x - 1$

d $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

e $f(x) = \sqrt{\frac{x}{|x|-1}}$

f $f(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{1+x^2}$

3.5 Álgebra de Funciones

Una forma de construir nuevas funciones es a través del algebra de funciones, aunque las definiciones que daremos en este apunte son mas bien operativa que estricta, por ello en algunos textos se encontraran definiciones diferentes y posiblemente en algunos casos incompatibles

3.5.1 Álgebra de Funciones

Definición 3.5.1 Sean f y g funciones tales que $D = Dom(f) \cap Dom(g) \neq \phi$ entonces se pueden definir nuevas funciones.

1 La suma de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f+g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

2 La diferencia de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f-g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-g(x) \end{array}$$

3 El producto de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f\cdot g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array}$$

4 El producto por una escalar se define como:

$$\begin{array}{rccc} \alpha f: & Dom(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\alpha f)(x)=\alpha f(x) \end{array}$$

5 Si $D'=\{x\in D \mid g(x)\neq 0\}\neq \phi$ entonces, cociente de f con g se define por

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & D' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

6 Sean A,B,C,D subconjuntos de números reales y $f:A\longrightarrow B$ y $g:C\longrightarrow D$ dos funciones tales que

$$E=\{x\in A \mid f(x)\in C\}\neq \phi.$$

Entonces, se define la compuesta de f y g dada por:

$$\begin{array}{rccc} (g\circ f): & E & \longrightarrow & D \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Claramente tenemos que $E=Dom(g\circ f)$

$\Diamond$

Observación: Un caso particular, donde la definición de compuesta se cumple, es cuando tenemos que $B\subseteq C$ o $Rec(f)\subseteq C$, entonces $Dom(g\circ f)=Dom(f)=E$.

Ejemplo 3.5.2 Sean

$$\begin{array}{rccc} f: & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x+1 \end{array}$$

Encontrar la suma, la resta, el producto y el cociente de f con g. $\square$

Solución 1. El dominio de f es $Dom(f) = [-2,2]$ y el de g es $Dom(g) = \mathbb{R}$. Luego

$$Dom(f) \cap Dom(g) = [-2,2] \neq \phi$$

La suma de f y g

$$\begin{array}{rrcl} (f+g): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} + (3x+1) \end{array}$$

La diferencia

$$\begin{array}{rrcl} (f-g): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} - (3x+1) \end{array}$$

El producto

$$\begin{array}{rrcl} (fg): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} \cdot (3x+1) \end{array}$$

El cociente

$$\begin{array}{rrcl} \left(\dfrac{f}{g}\right): & [-2,2] - \{-\frac{1}{3}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1} \end{array}$$

Ejemplo 3.5.3 Sea

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Encontrar $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ □

Solución 2. Sabemos que $Recf \subseteq Domf$, luego $Dom(f \circ f) = Domf$, calculemos ahora la imagen.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

luego tenemos

$$\begin{array}{rccc} f \circ f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

La otra compuesta la obtenemos

$$(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f(x) = \frac{1}{x}$$

así tenemos

$$\begin{array}{rccc} f \circ f \circ f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Ejemplo 3.5.4 Sean f y g funciones dadas por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x-2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x + \sqrt{x} \end{array}$$

Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$. □

Solución 3. Primero veremos el dominio de la función

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) & = & \{x\in Domf \mid f(x)\in Domg\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in \mathbb{R} \mid x-2\in \mathbb{R}^+\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in \mathbb{R} \mid x-2>0\} \\ Dom(g\circ f) & = &]2,+\infty[. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (g\circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & g(x-2) \\ & = & 5(x-2)+\sqrt{x-2} \\ & = & 5x-10+\sqrt{x-2}. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rrcl} g\circ f: &]2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x-10+\sqrt{x-2} \end{array}$$

Ahora veremos el dominio de la otra función

$$\begin{array}{rcl} Dom(f\circ g) & = & \{x\in Domg \mid g(x)\in Domf\} \\ Dom(f\circ g) & = & \{x\in \mathbb{R}^+ \mid 5x+\sqrt{x}\in \mathbb{R}\} \\ Dom(f\circ g) & = & \mathbb{R}^+. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (f\circ g)(x) & = & f(g(x)) \\ & = & f(5x+\sqrt{x}) \\ & = & 5x+\sqrt{x}-2. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rrcl} f\circ g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x+\sqrt{x}-2 \end{array}$$

Ejemplo 3.5.5 Sean f y g funciones dadas por

$$\begin{array}{rrcl} f: & [1,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5-\sqrt{x-1} \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}+2 \end{array}$$

Determinar $g\circ f$ y $f\circ g$. □

Solución 4. Primero veremos el dominio de la función

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) & = & \{x\in Domf \mid f(x)\in Domg\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in [1,\infty[\mid 5-\sqrt{x-1}\in \mathbb{R}_0^+\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in [1,\infty[\mid 5-\sqrt{x-1}\geq 0\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in [1,\infty[\mid 5\geq \sqrt{x-1}\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in [1,\infty[\mid 26\geq x\} \\ Dom(g\circ f) & = & [1,26]. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (g\circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & g(5-\sqrt{x-1}) \\ & = & \sqrt{5-\sqrt{x-1}}+2 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rrcl} g\circ f: & [1,26] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{5-\sqrt{x-1}}+2 \end{array}$$

Ahora veremos el dominio de la otra función

$$\begin{array}{rcl} Dom(f\circ g) & = & \{x\in Domg \mid g(x)\in Domf\} \\ Dom(f\circ g) & = & \{x\in \mathbb{R}_0^+ \mid \sqrt{x}+2\in [1,\infty[\} \\ Dom(f\circ g) & = & \{x\in \mathbb{R}_0^+ \mid \sqrt{x}+2\geq 1\} \\ Dom(f\circ g) & = & \{x\in \mathbb{R}_0^+ \mid \sqrt{x}\geq -1\} \\ Dom(f\circ g) & = & \mathbb{R}_0^+. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (f\circ g)(x) & = & f(g(x)) \\ & = & f(\sqrt{x}+2) \\ & = & 5-\sqrt{\sqrt{x}+2-1}. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rrcl} f\circ g: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5-\sqrt{\sqrt{x}+1} \end{array}$$

Ejemplo 3.5.6 Sean f y g dos funciones definidas por

$$\begin{array}{rrcl} f: & [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 3x+4 & si & x\in[0,2[\\ x+1 & si & x\in[2,4] \end{array}\right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g: & [2,12] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & g(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x^2 & si & x\in[2,5[\\ 4 & si & x\in[5,12] \end{array}\right. \end{array}$$

Determine $(g\circ f)$ □

Solución 5. Primero veremos su dominio

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) & = & \{x\in Domf \mid f(x)\in Domg\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in [0,4] \mid f(x)\in [2,12]\} \end{array}$$

Para el primer caso $x\in[0,2[$ tenemos

$$\begin{array}{c} 2\leq f(x)\leq 12 \\ 2\leq 3x+4\leq 12 \\ -2\leq 3x\leq 8 \\ -\frac{2}{3}\leq x\leq \frac{8}{3} \end{array}$$

lo cual ocurre siempre.

Para el segundo caso $x \in [2,4]$ tenemos

$$\begin{aligned} 2 \leq f(x) &\leq 12 \\ 2 \leq x+1 &\leq 12 \\ 1 \leq x &\leq 11 \end{aligned}$$

lo cual ocurre siempre. Luego

$$Dom(g \circ f) = [0,4].$$

ahora calcularemos la imagen por la compuesta

Primer caso: Sea $x \in [0,2[$

$$(g \circ f)(x) = g(3x+4)$$

Caso 1A) $3x+4 < 5 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

$$g(3x+4) = (3x+4)^2$$

lo cual esta definida en el intervalo $[0, \frac{1}{3}[$.

Caso 1B) $3x+4 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

$$g(3x+4) = 4$$

esta definida en el intervalo de $[\frac{1}{3}, 2[$

Segundo caso: Sea $x \in [2,4]$

$$(g \circ f)(x) = g(x+1)$$

Caso 2A) $x+1 < 5 \Leftrightarrow x < 4$

$$g(x+1) = (x+1)^2$$

en el intervalo $[2,4[$

Caso 2B) $x+1 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 4$, luego $x = 4$

$$g(f(4)) = g(5) = 4$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (3x+4)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 4 & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x < 2 \text{ o } x = 4 \\ (x+1)^2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

Ejemplo 3.5.7 Sean f y g dos funciones,

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & si \quad x > 1 \\ x^3 & si \quad x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x > 0 \\ 2x+1 & si \quad x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

Determine $(g \circ f)$ □

Solución 6. Primero veremos su dominio

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) & = & \{x\in Dom f \ \mid \ f(x)\in Dom g\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in \mathbb{R} \ \mid \ f(x)\in \mathbb{R}\} \\ Dom(g\circ f) & = & \mathbb{R} \end{array}$$

Veremos a continuación la imagen.

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

Para el primer caso $x > 1$ tenemos

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x-1})$$

pero tenemos que $\sqrt{x-1} > 0$, luego se tiene que:

$$g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 = x-1$$

En el segundo caso tenemos que $x < 1$ luego

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3)$$

Debemos analizar

Caso A) $x^3 > 0 \Longleftrightarrow x \in]0,1]$, luego tenemos que

$$g(x^3) = (x^3)^2 = x^6$$

Caso B) $x^3 \leq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, 0]$, luego tenemos que

$$g(x^3) = 2x^3 + 1$$

Así tenemos

$$(g\circ f)(x) \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} x-1 & si & x > 1 \\ x^6 & si & x \in]0,1] \\ 2x^3+1 & si & x \leq 0 \end{array} \right.$$

3.5.2 Ejercicios Propuestos

a Dadas las siguientes funciones

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{|x|}{x^2} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rrcl} g: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1-x^2 \end{array}$$

Determine:

a $Dom(g\circ f)$

b $(g\circ f)(x)$

b Dadas las siguientes funciones

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{|x|}{x^2} \end{array} \quad \text{y} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & si \quad |x| \leq 1 \\ x^2+1 & si \quad |x| > 1 \end{cases} \end{array}$$

Determine $(g \circ f)$

c Exprese la función $f(x) = \sqrt[5]{(x+x^4)^2}$ como la composición de tres funciones básicas.

d Encuentre una función $h(x)$ de manera que $(g \circ h)(x) = x$ siendo $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

e Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$ encontrar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

f Sean f y g funciones tales que $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$

Sea

$$A(h) = \frac{f(x+h) - (f \circ g)(x+h)}{(f \cdot g)(x+h) - \frac{f(x+h)}{g(x+h)}}$$

a Calcule $A(h)$ en función de h y x.

b Calcule $A(1)$ y $A(-1)$.

c Graficar la función

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x-1| + |2x+3| \end{array}$$

g Graficar $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$

h Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; \quad x \geq 1 \\ x^2 - 1 & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x+3 & ; \quad x < 2 \\ 2x^2 + x - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Encontrar $(g \circ f)(x)$

3.6 Clasificaciones de las Funciones

3.6.1 Funciones Biyectivas

Definición 3.6.1 Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **inyectiva** si y sólo si

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Es decir, f es inyectiva si y sólo si todo $y \in Rec(f)$ tiene una y sólo una preimagen en el $Dom(f)$. $\diamondsuit$

Ejemplo 3.6.2 Sean a y b en $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y f definida por:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva. $\square$

Solución 1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x)=f(y) & \Longrightarrow & ax+b & = & ay+b \\ & \Longrightarrow & ax & = & ay \\ & \Longrightarrow & x & = & y \end{array}$$

Luego f es inyectiva.

Ejemplo 3.6.3 Sea f una función definida por:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{3x+2}{x-2} \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva. $\square$

Solución 2. Sean $x, y \in \mathbb{R}-\{2\}$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x)=f(y) & \Longrightarrow & \dfrac{3x+2}{x-2} & = & \dfrac{3y+2}{y-2} \\ & \Longrightarrow & (3x+2)(y-2) & = & (3y+2)(x-2) \\ & \Longrightarrow & 3xy+2y-6x-4 & = & 3xy+2x-6y-4 \\ & \Longrightarrow & 2y-6x & = & 2x-6y \\ & \Longrightarrow & 8y & = & 8x \\ & \Longrightarrow & y & = & x \end{array}$$

Luego f es inyectiva.

Ejemplo 3.6.4 Sea f una función definida por:

$$\begin{array}{rrcl} f: & [1,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+2x-2 \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva. $\square$

Solución 3. Sean $x, y \in [1,\infty[$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x)=f(y) & \Longrightarrow & x^2+2x-2 & = & y^2+2y-2 \\ & \Longrightarrow & x^2-y^2+2x-2y & = & 0 \\ & \Longrightarrow & (x+y)(x-y)+2(x-y) & = & 0 \\ & \Longrightarrow & (x-y)(x+y+2) & = & 0 \\ & \Longrightarrow & x-y=0 & \vee & x+y+2=0 \\ & \Longrightarrow & x=y & \vee & x+y=-2 \end{array}$$

Como $x, y \geq 1$, luego $x+y \geq 2$, por lo tanto, $x+y=-2$ es falso, así tenemos que $x=y$, con lo cual f es inyectiva.

Ejemplo 3.6.5 Sea la función

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x^2 & si & x>2 \\ x+2 & si & x\leq 2 \end{array}\right. \end{array}$$

Determine si f es inyectiva. $\square$

Solución 4. Sean $x,y\in\mathbb{R}$ tales que $f(x)=f(y)$.
Primer caso: $x,y\in]2,\infty[$

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & y^2 \\ |x| & = & |y| \\ x & = & y \end{array}$$

Segundo caso: $x,y\in]-\infty,2]$

$$\begin{array}{rcl} x+2 & = & y+2 \\ x & = & y \end{array}$$

Tercero Caso: $x\in]2,\infty[, y\in]-\infty,2]$, para este caso, veremos si es posible que $f(x)=f(y)$, para ello calculemos el recorrido.

Si $x>2$ y $u=f(x)$

$$u=x^2\Leftrightarrow\sqrt{u}=x$$

donde $u\geq 0\wedge\sqrt{u}>2$, por lo tanto $u>4$. Así tenemos que $f(x)>4$,

Si $x\leq 2$ y $v=f(y)$

$$v=y+2\Leftrightarrow v-2=y$$

donde $v-2\leq 2$, por lo tanto $v\leq 4$, con lo cual $f(y)\leq 4$.

Es decir, $4<f(x)=f(y)\leq 4$. que es imposible, recuerde que $(F\Rightarrow F)\equiv V$, luego en los tres caso la proposición es verdadera.

Con lo cual f es inyectiva.

Ejemplo 3.6.6 Sea la función

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} \sqrt{x-1} & si & x>1 \\ x^3 & si & x\leq 1 \end{array}\right. \end{array}$$

Determine si f es inyectiva. $\square$

Solución 5. Sean $x,y\in\mathbb{R}$ tales que $f(x)=f(y)$.
Primer caso: $x,y\in]1,\infty[$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x-1} & = & \sqrt{y-1} \\ x-1 & = & y-1 \\ x & = & y \end{array}$$

Segundo caso: $x,y\in]-\infty,1]$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 \\ x & = & y \end{array}$$

Tercero caso: $x \in]1, \infty[, y \in] - \infty, 1]$, para este caso, veremos si es posible que $f(x) = f(y)$, para ello calculemos el recorrido.

Si $x > 1$ y $u = f(x)$

$$u = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow u^2 + 1 = x$$

donde $u \geq 0 \wedge u^2 + 1 > 1$, por lo tanto $u > 0$.

Así tenemos que $Rec(f_1) =]0, \infty[$.

Si $x \leq 1$ y $v = f(y)$

$$v = y^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{v} = y$$

donde $\sqrt[3]{v} \leq 1$, por lo tanto $v \leq 1$, con lo cual $Rec(f_2) =] - \infty, 1]$.

Es decir, hay elementos en común en los recorridos, por ejemplo $u = v = \frac{1}{2}$. Así tenemos que $x = \frac{5}{4}, y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, tiene igual imagen. Con lo cual f no es inyectiva.

Ejemplo 3.6.7 Dada la función g definida por

$$\begin{array}{rl} g: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x) = \frac{x}{x^2+5} \end{array}$$

Determinar si g es inyectiva y en caso de que no lo sea redefinir la función para que sea inyectiva. $\square$

Solución 6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) = g(b)$ entonces tenemos que

$$\begin{array}{rcl} g(a) & = & g(b) \\ \frac{a}{a^2+5} & = & \frac{b}{b^2+5} \\ a(b^2+5) & = & b(a^2+5) \\ ab^2 + 5a & = & ba^2 + 5b \\ ab^2 - ba^2 & = & 5b - 5a \\ ab(b-a) & = & 5(b-a) \\ ab(b-a) - 5(b-a) & = & 0 \\ (b-a)(ab-5) & = & 0 \\ a = b & \vee & ab - 5 = 0 \end{array}$$

Si $a = 1, b = 5$, tenemos que $f(1) = f(5) = \frac{1}{6}$.

Por lo tanto g no es inyectiva.

Luego para redefinir el dominio de g de modo que sea inyectiva, se debe verificar que se cumpla que:

$$a = b \wedge ab \neq 5$$

$$\begin{array}{rcl} a = b & \wedge & (ab > 5 \vee ab < 5) \\ (a = b \wedge ab > 5) & \vee & (a = b \wedge ab < 5) \\ a^2 > 5 & \vee & a^2 < 5 \\ |a| > \sqrt{5} & \vee & |a| < \sqrt{5} \\ (a > \sqrt{5} \vee a < -\sqrt{5}) & \vee & (-\sqrt{5} < a \wedge a < \sqrt{5}) \\ a \in] - \infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, \infty[& \vee & a \in] - \sqrt{5}, \sqrt{5}[\end{array}$$

Pero $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$ pertenecen al dominio de inyectividad.

Así algunas posibles redefinición de la función

$$\begin{array}{rrcl} g_1: & [-\sqrt{5},\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{x^2+5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g_2: &]-\infty,-\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{x^2+5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g_3: & [\sqrt{5},\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{x^2+5} \end{array}$$

Definición 3.6.8 Una función $f : A \longrightarrow B$, se dice **epiyectiva** o **sobreyectiva** si y sólo si $Rec(f) = B$. $\Diamond$

Definición 3.6.9 Una función $f : A \longrightarrow B$, se dice **biyectiva** si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva. $\Diamond$

Proposición 3.6.10 *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones, entonces*

i f y g son inyectivas implica que $g \circ f$ es inyectiva.

ii f y g son sobreyectivas implica que $g \circ f$ es sobreyectiva.

Demostración. i. Sean f y g dos funciones inyectivas y $x_1, x_2 \in Dom(g \circ f) = A$ tales que

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x_1) &= (g\circ f)(x_2) \\ g(f(x_1)) &= (g(f(x_2))) \\ f(x_1) &= f(x_2) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

ya que f y g son inyectivas.

ii. Sean f y g dos funciones epiyectivas luego el $Recf = B$ y $Recg = C$

Sea $x \in C$, como g es sobreyectiva $\exists y \in B$ tal que $g(y) = x$, además f es sobreyectiva, luego $\exists z \in A$ tal que $f(z) = y$. Entonces

$$\begin{aligned} (g\circ f)(z) &= g(f(z)) \\ (g\circ f)(z) &= g(y) \\ (g\circ f)(z) &= x \end{aligned}$$

Por lo tanto $Rec(g \circ f) = C$, es decir, $g \circ f$ es sobreyectiva. $\blacksquare$

Ejemplo 3.6.11 Sea $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x} \end{array}$

a) Determinar si f es inyectiva.

b) Determinar si f es sobreyectiva. $\square$

Solución 7. Verificaremos que f sea inyectiva

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Sean $a, b \in Domf$ tal que

$$\begin{array}{rcll} f(a) & = & f(b) & \\ \frac{a-1}{a} & = & \frac{b-1}{b} & \\ ba-b & = & ab-a & /-ab \\ -b & = & -a & /\cdot(-1) \\ b & = & a & \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Verificar si f sobreyectiva. Esto sucede si y sólo si

$$Rec(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Sea $y \in Recf$, luego existe $x \in Domf$ tal que

$$\begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ y & = & \frac{x-1}{x} \\ xy-x & = & -1 \\ x(y-1) & = & -1 \\ x & = & \frac{-1}{y-1} \end{array}$$

Así tenemos que

$$Rec(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Por lo tanto f es sobreyectiva.

Ejemplo 3.6.12 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x > 0 \\ x^2 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Determinar si f es biyectiva. □

Solución 8.

a Verificar si f es inyectiva.

Si $x, y > 0$ se tiene que

$$\begin{array}{rl} f(x) = & f(y) \\ -x = & -y \\ x = & y \end{array}$$

Si $x, y \leq 0$

$$\begin{array}{rl} f(x) = & f(y) \\ x^2 = & y^2 \\ x = & y \end{array}$$

Si $x > 0, y \leq 0$ y $f(x) = f(y)$, se tiene que $-x = y^2$ lo cual es una contradicción, pues $-x < 0, y^2 \geq 0$ luego no puede ser que $f(x) = f(y)$, es decir, que si $(F \Rightarrow F) \equiv V$.

Por lo tanto, f es inyectiva.

b Verificar si f es sobreyectiva.

Lo veremos en dos etapas:

a) Si $x > 0$, se tiene que $f(x) = y = -x$, luego $x = -y \in \mathbb{R}$ y como $x > 0$ entonces $-y > 0$, luego $y < 0$, $Recf_1 =]\infty, 0[$.

b) Si $x \leq 0$, se tiene que $f(x) = y = x^2 \in \mathbb{R}$ y $|x| = \sqrt{y} \in \mathbb{R} \;\; \forall y \geq 0$ y como $x \leq 0$ entonces $x = -\sqrt{y} \leq 0$, así la única condición para y es que $y \geq 0$, $Recf_2 = [0, \infty[$.

Luego

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = \mathbb{R}$$

Por lo tanto f es sobreyectiva.

En consecuencia, f es biyectiva.

3.6.2 Función Inversa

Definición 3.6.13 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, diremos que f es **invertible** si y sólo si existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$(\forall b \in B)((f \circ g)(b) = b), \;\wedge\; (\forall a \in A)((g \circ f)(a) = a).$$

La función g se llama función **inversa** de f y se denota por f^{-1}. $\Diamond$

Proposición 3.6.14 *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones invertibles entonces*
i) $g \circ f$ es una función invertible y además se tiene

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

ii) f^{-1} es una función invertible y además se tiene

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Demostración. Verifiquemos la primera compuesta

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g(f(x))) \\
&= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) \\
&= f^{-1}(Id(f(x)) \\
&= f^{-1}(f(x)) \\
&= Id(x) \\
&= x
\end{aligned}$$

La otra compuesta

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= (g \circ f) \circ (f^{-1}(g^{-1}(x))) \\
&= g(f(f^{-1}(g^{-1}(x)))) \\
&= g(Id(g^{-1}(x))) \\
&= g(g^{-1}(x)) \\
&= Id(x) \\
&= x
\end{aligned}$$

Luego $(g\circ f)^{-1}=Id \quad f^{-1}\circ g^{-1}=Id$

Como $f\circ(f^{-1})=Id$ y $(f^{-1})\circ f=Id$, entonces f^{-1} es invertible y además

$$\begin{array}{rl} f\circ(f^{-1}) & =Id \\ f\circ(f^{-1}) & =Id/\circ(f^{-1})^{-1} \\ f & =(f^{-1})^{-1} \end{array}$$

Luego

$$h=f=(f^{-1})^{-1}$$ ■

Proposición 3.6.15 *Sea $f:A\longrightarrow B$ una función entonces*

$$f \text{ es invertible si y sólo si } f \text{ es biyectiva.}$$

Si f es biyectiva la inversa está definida por

$$\begin{array}{rrl} f^{-1}: & B\longrightarrow & A, \\ & y\longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

donde $f^{-1}(y)=x$ es el único elemento en A, tal que $y=f(x)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que f^{-1} existe, entonces se cumple que $Dom(f^{-1})=B$ y para todo elemento en su dominio se tiene que, si $x=y$, entonces $f^{-1}(x)=f^{-1}(y)$.

Ahora el $Dom(f^{-1})=B$ si y sólo si el recorrido de f es igual a B, es decir, f es sobreyectiva.

Demostraremos que f es inyectiva y para esto se debe cumplir que

$$(\forall a,b\in A)(f(a)=f(b)\Longrightarrow a=b)$$

Sean $a,b\in A$ tal que $f(a)=f(b)$ por la primera hipótesis f^{-1} es función. Luego

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(f(a)) & = & f^{-1}(f(b)) \\ a & = & b \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Dado $x\in A$, luego $f(x)\in B$ y por lo tanto $x=f^{-1}(f(x))$, con ello f^{-1} es biyectiva.

$\Leftarrow$ Supongamos que f es biyectiva y $f^{-1}=\{(x,y)\in B\times A \mid (y,x)\in f\}$ la relación inversa, por ser f epiyectiva tenemos que $Dom(f^{-1})=B$, entonces debemos demostrar que si $(x,w)\in f^{-1}$ y $(x,t)\in f^{-1}$ entonces $w=t$.

Como $(x,w)\in f^{-1}$ y $(x,t)\in f^{-1}$ entonces $(w,x)\in f$ y $(t,x)\in f$. Es decir,

$$f(w)=x=f(t)$$

pero f es inyectiva se tiene que

$$w=t$$ ■

Observación: Sea $f:[a,b]\longrightarrow[c,d]$ una función invertible y $f^{-1}:[c,d]\longrightarrow[a,b]$ su función inversa, entonces las gráficas $y=f(x)$ e $y=f^{-1}(x)$ son curvas simétricas con respecto a la diagonal $y=x$.

Ejemplo 3.6.16 Sea

$$\begin{array}{rrl} f: & A \longrightarrow & B \\ & x \longmapsto & \sqrt{x^3-1} \end{array}.$$

Determine el dominio máximo de f y el recorrido de modo que sea biyectiva y luego determine f^{-1}. $\square$

Solución 1. La función tiene como dominio el intervalo $[1,\infty[$ pues

$$\begin{array}{rcll} x^3-1 & \geq & 0 & \\ x^3 & \geq & 1 & /\sqrt[3]{} \\ x & \geq & 1 & \end{array}$$

Su recorrido queda determinado por

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x^3-1} & = & y & /()^2, y \geq 0 \\ x^3-1 & = & y^2 & \\ x^3 & = & y^2+1 & /\sqrt[3]{} \\ x & = & \sqrt[3]{y^2+1} & \end{array}$$

Entonces el recorrido de f es el intervalo $[0,\infty[$.

Ahora debemos verificar si f es inyectiva, para esto se debe cumplir que

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Sean $a, b \in Dom f$ tal que $f(a) = f(b)$ luego

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{a^3-1} & = & \sqrt{b^3-1} & /()^2 \\ a^3-1 & = & b^3-1 & /+1 \\ a^3 & = & b^3 & /\sqrt[3]{} \\ a & = & b & \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Si $B = [0,\infty[$, entonces f es sobreyectiva.

De este modo tenemos que

$$\begin{array}{rrl} f: & [1,\infty[\longrightarrow & [0,\infty[\\ & x \longmapsto & \sqrt{x^3-1} \end{array}.$$

es biyectiva y la inversa de f y queda determinada por

$$\begin{array}{rrl} f^{-1}: & [0,\infty[\longrightarrow & [1,\infty[\\ & x \longmapsto & f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \end{array}$$

Ejemplo 3.6.17 Sea

$$\begin{array}{rcl} f: A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x}} \end{array}$$

Determine A, B maximales tales exista f^{-1} y en cuyo caso determine $\square$

Solución 2. El dominio de f es el intervalo $]-\infty, 1[$ pues

$$\begin{array}{rcl} 1-x & > & 0 \\ 1 & > & x \end{array}$$

El recorrido de f es

$$\begin{array}{rcll} y & = & \frac{1}{\sqrt{1-x}} & /()^2, y > 0 \\ y^2 & = & \frac{1}{1-x} & \\ y^2 - y^2x & = & 1 & \\ 1 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2-1}{y^2} & = & x, & y \neq 0 \end{array}$$

$$Rec(f) =]0, +\infty[$$

Veremos si f es inyectiva.

$$\begin{array}{rcll} f(a) & = & f(b) & \\ \frac{1}{\sqrt{1-a}} & = & \frac{1}{\sqrt{1-b}} & \\ \sqrt{1-b} & = & \sqrt{1-a} & /()^2 \\ 1-b & = & 1-a & /-1 \\ b & = & a & \end{array}$$

El recorrido ya está calculado y es $Recf =]0, +\infty[$, luego f es sobreyectiva.

En consecuencia

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 1[& \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x}} \end{array}$$

es biyectiva. Entonces existe la inversa de f y esta dada por:

$$\begin{array}{rl} f^{-1} :]0, +\infty[& \longrightarrow]-\infty, 1[\\ x & \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \end{array}$$

Ejemplo 3.6.18 Sea la función

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x > 2 \\ x+2 & si & x \leq 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine la inversa de f. □

Solución 3. Por ejemplo Ejemplo 3.6.5 tenemos demostrado que f es biyectiva.

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{x} & si & x > 4 \\ x-2 & si & x \leq 4 \end{array} \right. \end{array}$$

3.6.3 Características de las Funciones

Existe ciertas características que cumple algunas funciones, las cuales las evidenciaremos en esta sección, todas ellas nos permiten graficar y deducir información de ellas.

Definición 3.6.19 [Crecientes y Decrecientes]. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función real. Se dice que:

a f es **creciente** en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b))$$

b f es **decreciente** en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b))$$

c f es **estrictamente creciente** en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b))$$

d f es **estrictamente decreciente** en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) > f(b))$$

$\diamond$

Ejemplo 3.6.20 La función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, pues

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)(x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y})$$

$\square$

Ejemplo 3.6.21 La función $f(x) = mx + b$ es estrictamente decreciente si $m < 0$. Sean $u, v \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} u < v \Longrightarrow \qquad mu &> mv \\ mu + b &> mv + b \\ f(u) &> f(v) \end{aligned}$$

Análogamente si $m > 0$ entonces f es creciente. $\square$

Proposición 3.6.22 *Si f es una función estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente, entonces f es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que f es una función estrictamente creciente, es decir:

$$(\forall a, b \in Dom(f))(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b))$$

y supongamos que f no es inyectiva, por lo tanto existirán $a, b \in Dom(f)$ tales que

$$f(a) = f(b) \wedge a \neq b$$

donde

$$a > b \vee a < b (\Rightarrow\Leftarrow)$$

La demostración es análoga si f es estrictamente decreciente. $\blacksquare$

[inlineexercise] 3.6.23 La función $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ y la función $-x^2$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$

Proposición 3.6.24 *Si f y g son funciones estrictamente crecientes tales que $Rec(f) \subset Dom(g)$ entonces $g \circ f$ es una función estrictamente creciente definida en $Dom(f)$.*

Demostración. Por definición anterior sabemos que si $Rec(f) \subseteq Dom(g)$ entonces $Dom(g \circ f) = Dom(f)$.

Luego, sean $x, y \in Dom(g \circ f)$ tales que $x < y$ entonces como f es estrictamente creciente se tiene que

$$f(x) < f(y)$$

y como g también es estrictamente creciente se tiene

$$g(f(x)) < g(f(y))$$

luego

$$x < y \Rightarrow (g \circ f)(x) < (g \circ f)(y)$$ ■

Definición 3.6.25 [Función Periódica de Período p]. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $p > 0$ diremos que f es una **función periódica** de período p, si y sólo si p es el menor número positivo que cumple

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

♢

Observación: Con ésta propiedad tenemos que:

$$f(0 + p) = f(0) = f(p)$$

$$f(2p) = f(p + p) = f(p)$$

$$f(0) = f(-p + p) = f(-p)$$

luego, la funciones periódicas no son biyectiva

Definición 3.6.26 Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **monótona** si sólo si es creciente o decreciente en el dominio de f ♢

Definición 3.6.27 [Funciones Pares e impares]. Sean A, B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $(\forall x \in A)(-x \in A)$ y $f : A \longrightarrow B$ una función. Se dice que

a f es **par** si y sólo si $(\forall x \in A)(f(-x) = f(x))$

b f es **impar** si y sólo si $(\forall x \in A)(f(-x) = -f(x))$

♢

Ejemplo 3.6.28 Dada la función real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 8$. Demostrar que f es una función par. □

Solución 1. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(-x) = 4(-x)^4 - 3(-x)^2 + 8 = 4x^4 - 3x^2 + 8 = f(x)$$

Luego f es una función par.

Ejemplo 3.6.29 Dada la función real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x$. Demostrar que f es una función impar. $\square$

Solución 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(-x) = 3(-x)^5 - 4(-x)^3 + 2(-x) = -3x^5 + 4x^3 - 2x = -f(x)$$

Luego f es una función impar.

3.6.4 Ejercicios Propuestos

1 Para cada una de las siguientes funciones.

a. Determine el dominio y el recorrido

b. Determine si son inyectivas y sobreyectivas. Si no lo son, redefinirlas, de modo que sean funciones biyectivas.

i $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

ii $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1+|x|}}$

iii $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

iv $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

v $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}+1}$

2 Demuestre que

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x^3 \end{array}$$

es una función inyectiva

3 Sea

$$\begin{array}{rcl} f :]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

Determine si f es biyectiva.

4 Sea

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x & si & -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 & si & 0 < x \leq 2 \end{array} \right.$$

a ¿Es f inyectiva?. Justifique.

b Encuentre $f^{-1}(x)$.

c Grafique $y = f^{-1}(x)$

5 Sea $f(x) = \frac{5x+3}{x-4}$

a Determine si f es una función biyectiva. Justifique.

b Si es biyectiva, calcule $f^{-1}(x)$.

6 Sea $f(x) = x^2 + x + 3$. Determine el dominio y recorrido de manera que f sea una función biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.

7 Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 2 + \sqrt{x} & si \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Determine un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que f sea biyectiva.

8 Sean

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 + 3x \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 3x + 1 \end{array}$$

a Demuestre que g es biyectiva.

b Encuentre una función h indicando su dominio tal que $g \circ h = f$.

c ¿Es f biyectiva? Si no lo es restringir f de modo que sea biyectiva y encontrar f^{-1}.

3.7 Funciones Exponenciales

Teorema 3.7.1 *Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$, entonces para cada a existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = a^x$$

y cumple con las siguientes propiedades.
Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $x, y, \in \mathbb{R}$. Entonces

a $a^0 = 1$

b $a^{(x+y)} = a^x a^y$

c $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

d $a^{yx} = (a^x)^y = (a^y)^x$

e $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

f $(ab)^x = a^x b^x$

g $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

h *Si $0 < a < 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función decreciente.*

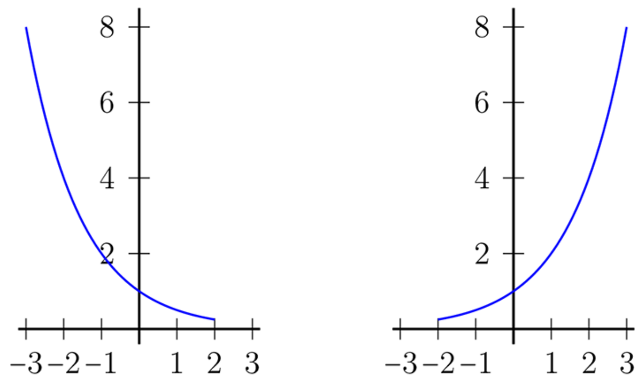
i *Si $a > 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función creciente*

Definición 3.7.2 Para cada $a \in \mathbb{R}^+$, la función

$$\begin{array}{rl} \exp_a : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto a^x \end{array}$$

se llama función **exponencial** en base a. $\Diamond$

Su gráfica es la siguiente:



$0 < a < 1$ $\qquad$ $a > 1$

Ejemplo 3.7.3 Algunos ejemplos numéricos

a $(3^3)(3^4) = 3^{3+4} = 3^7$

b $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

c $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

d $(3^x)^4 = 3^{4x}$

e $(\frac{1}{3})^{-x} = (3^{-1})^{-x} = 3^x$

$\square$

3.7.1 Funciones Logarítmicas

Teorema 3.7.4 *Sea $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ entonces la función exponencial en base a es biyectiva, por lo tanto existe la función inversa.*

Definición 3.7.5 La función inversa de la exponencial en base a se llama función **logaritmo** en base a y la denotaremos como $\log_a$, es decir:

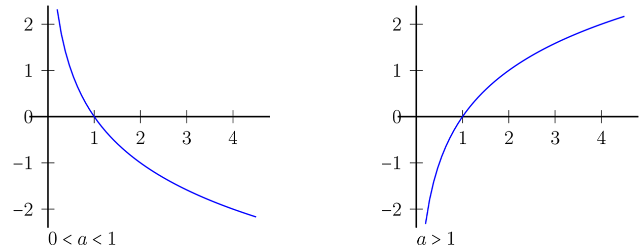
$$\log_a x = y \Longleftrightarrow \exp_a(y) = x$$

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ podemos definir la función como:

$$\begin{array}{rl} \log_a : & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \log_a(x) = y \end{array}$$

$\Diamond$

Las Gráfica correspondiente son:



Ejemplo 3.7.6 De algunos cálculos numéricos

a $\log_{10} 10^3 = 3$, pues $10^3 = 1000$

b $\log_2 1 = 0$, pues $2^0 = 1$

$\square$

Proposición 3.7.7 *Sean* $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x, y \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$ *entonces*

1 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3 $\log_a(x^r) = r \log_a x$

4 $\log_a(1) = 0$

5 $\log_a(a^r) = r$

6 $\log_a(x) = \log_a(y) \Longleftrightarrow x = y$

7 Si $0 < a < 1$ *entonces* $\log_a$ *es una función decreciente.*

8 Si $a > 1$ *entonces* $\log_a$ *es una función creciente.*

Demostración. Sea $u = \log_a x$ y $v = \log_a y$ entonces $a^u = x$ y $a^v = y$

Para (1) tenemos que

$$\log_a(xy) = \log_a(a^u a^v) = \log_a a^{u+v} = u + v$$

Luego

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

En (2)

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(a^u a^{-v}) = \log_a a^{u-v} = u - v$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

En (3)

$$\log_a x^r = \log_a(a^u)^r = \log_a a^{ru} = ru$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

Las propiedades siguientes quedan como tarea para el lector. ■

Ejemplo 3.7.8

a $\log_{10} x^2 y = 2\log_{10} x + \log_{10} y$

b $\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$

□

Teorema 3.7.9 [Cambio de Base]. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demostración. Sea $u = \log_a x, v = \log_b x$, entonces $a^u = x$ y $b^v = x$ así tenemos que

$$\begin{array}{rcl} a^u &=& b^v \\ \log_a a^u &=& \log_a b^v \\ u &=& v \log_a b \\ \log_a x &=& \log_b x \log_a b \\ \log_b x &=& \frac{\log_a x}{\log_a b} \end{array}$$

■

Ejemplo 3.7.10 Resolver la siguientes ecuaciones

a $y = \log_2 8$.Luego $2^y = 8$, por lo tanto $y = 3$.

b $\log_a \frac{1}{16} = 4$.
Lo cual significa que $a^4 = \frac{1}{16}$, de este modo se tiene $a = \frac{1}{2}$

c $\log_a x = -2$.
Traduciendo tenemos $3^{-2} = y$, luego $\frac{1}{9} = y$.

□

3.7.2 Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Una ecuación que contiene una o más funciones logarítmicas con una o más incógnitas se llama ecuación logarítmica. Análogamente para las ecuaciones exponenciales.
Ejemplo 3.7.11 Resolver la ecuación

$$\log(x-2) + \log(x+1) + 1 = \log 40$$

□

Solución 1. Primeros veremos la restricción, esta son,

$$x - 2 > 0 \wedge x + 1 > 0$$

Entonces $\mathcal{R} = [2, +\infty[$

Ahora despejemos la variable, teniendo presente las propiedades de logaritmo

$$\begin{array}{rcl}
\log(x-2) + \log(x+1) + 1 &=& \log 40 \\
\log(x-2) + \log(x+1) + \log 10 &=& \log 40 \\
\log(x-2)(x+1)10 &=& \log 40 \\
(x-2)(x+1)10 &=& 40 \\
(x-2)(x+1) &=& 4 \\
x^2 - x - 6 &=& 0 \\
(x+2)(x-3) &=& 0 \\
x = -2 &\vee& x = 3
\end{array}$$

pero $x = -2$, por restricción no es admisible. Por lo tanto el conjunto solución es $\{3\}$.

Ejemplo 3.7.12 Resolver la ecuación

$$\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$$

$\square$

Solución 2. Veamos el conjunto restricción

$$4^{x-2} + 9 > 0 \wedge 2^{x-2} + 1 > 0$$

Entonces $\mathcal{R} = \mathbb{R}$.

Luego resolviendo la ecuación nos queda

$$\begin{array}{rcl}
\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) &=& 1 + \log(2^{x-2} + 1) \\
\log 2(4^{x-2} + 9) &=& \log 10(2^{x-2} + 1) \\
2(4^{x-2} + 9) &=& 10(2^{x-2} + 1) \\
2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 &=& 0
\end{array}$$

Consideremos la variable auxiliar $u = 2^x$, reemplazando obtenemos la ecuación cuadrática.

$$\begin{array}{rcl}
u^2 - 20u + 64 &=& 0 \\
(u-16)(u-4) &=& 0 \\
u = 16 &\vee& u = 4 \\
2^x = 16 &\vee& 2^x = 4 \\
x = 4 &\vee& x = 2
\end{array}$$

Luego el conjunto solución de la ecuación es $\{2, 4\}$

3.7.3 Inecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Debemos tener presente que para resolver inecuaciones con logaritmo o exponenciales es importante recordar que cuando la base es menor que 1, exponencial y logaritmo son decreciente y en el caso que la base sea mayor que 1, se tiene que es creciente.

Ejemplo 3.7.13 Resolver la inecuación

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \leq 2$$

□

Solución 1. Primero veremos la Restricciones

$$x^2 - 1 > 0$$

$$(x+1)(x-1) > 0$$

Por lo tanto

$$x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[= \mathcal{R}$$

Veremos los elementos que la satisface

$$\begin{array}{rl} \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) & \leq 2 \ / \exp_{\frac{1}{2}} \downarrow \\ x^2 - 1 & \geq \frac{1}{4} \\ x^2 - \frac{5}{4} & \geq 0 \\ (x - \frac{\sqrt{5}}{2})(x + \frac{\sqrt{5}}{2}) & \geq 0 \end{array}$$

$$x \in \left]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[= S_1$$

Luego la solución de la inecuación es:

$$S = \mathcal{R} \cap S_1$$

$$x \in \left]-\infty, \frac{-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

Ejemplo 3.7.14 Resuelva la siguiente inecuación

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2-4) > -2$$

□

Solución 2. El conjunto restricción para la inecuación cumple con:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 4 > 0 & \wedge & \log_5(x^2-4) > 0 \\ x^2 > 4 & \wedge & x^2 - 4 > 1 \\ |x| > 2 & \wedge & |x| > \sqrt{5} \end{array}$$

Luego $x \in]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[= \mathcal{R}$.

Ahora resolvamos la inecuación,

$$\begin{array}{rcl} \log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2-4) & > & -2 \ / \exp_{\frac{1}{3}} \downarrow \\ \log_5(x^2-4) & < & (\frac{1}{3})^{-2} \ / \exp_5 \uparrow \\ x^2 - 4 & < & 5^9 \\ |x| & < & \sqrt{5^9+4} \\ -\sqrt{5^9+4} & < x < & \sqrt{5^9+4} \end{array}$$

Luego el conjunto solución es:

$$S =]-\sqrt{5^9+4}, \sqrt{5^9+4}[\cap\mathcal{R} =]-\sqrt{5^9+4}, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, \sqrt{5^9+4}[.$$

Ejemplo 3.7.15 Resolver la inecuación

$$\log_{3x}(9x) + \log_3(x^3) \leq 2$$

□

Solución 3. El conjunto restricción de la inecuación es $\mathbb{R}^+ - \{\frac{1}{3}\}$

$$\begin{array}{rcl} \log_{3x}(9x) + \log_3(x^3) & \leq & 2 \\ \frac{\log_3(9x)}{\log_3(3x)} + \log_3(x^3) & \leq & 2 \\ \frac{\log_3 9 + \log_3 x}{\log_3 3 + \log_3 x} + 3\log_3(x) & \leq & 2 \end{array}$$

Sea $u = \log_3 x$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \frac{2+u}{1+u} + 3u & \leq & 2 \\ \frac{2u+3u^2}{1+u} & \leq & 0 \\ \frac{u(2+3u)}{1+u} & \leq & 0 \end{array}$$

Resumamos en una tabla

		-1		$-2/3$		0	
$1+u$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
u	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2+3u$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

Luego tenemos $u \leq -1 \ \vee -\frac{2}{3} \leq u \leq 0$, reemplazando

$$\begin{array}{rcl} \log_3 x \leq -1 & \vee & -\frac{2}{3} \leq \log_3 x \leq 0 \ / \exp_3 \uparrow \\ x \leq 3^{-1} & \vee & 3^{-\frac{2}{3}} \leq x \leq 1 \end{array}$$

Pero, por restricción tenemos que $x > 0$ y $x \neq \frac{1}{3}$ entonces

$$0 < x < \frac{1}{3} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \leq x \leq 1$$

El conjunto solución es

$$S = \left]0, \frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}, 1\right]$$

3.7.4 Ejercicios Propuestos

1 Exprese como un solo logaritmo.

a $\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\log\frac{1}{2} - \log 15$

b $1 + \log_3 a + \frac{1}{2}\log_3 a^3 - 4\log_3 a^6$

c $2\log y - \frac{1}{4}\log(c-x) + \frac{1}{2}\log(x-2y+c)$

2 Resolver las siguientes ecuaciones.

a $7^{2x} - 7^{x+1} - 8 = 0$

b $2^{2x+1} + 2^{x+3} = 10$

c $5^{2x+2} + 1 = (10 + 5^x)5^x$

d $\dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \frac{1}{3}$

e $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \left(\dfrac{27}{8}\right)^{(x-1)} = \dfrac{\log 4}{\log 8}$

f $\log x^5 + \log^2 x + 6 = 0$

g $(\log_2 x)(\log_2 x + 1) = 2$

h $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$

i $3 \log_5 x - \log_5 32 = 2 \log_{25}(\frac{x}{2})$

j $\log_5(5^x - 7) - \log_{25} 324 = 2 - x$

k $\log \sqrt{7 - x}) = \log \sqrt{\log(100) + 10} - \log \sqrt{x + 1}$

l $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4(|x| - 1) = 2$

m $\log_{1/3}(x) + \log_9(x) = 1$

n $\log_x(5x^2)(\log_5 x)^2 = 1$

3 Resolver las siguientes ecuaciones.

a $a^{x^2} a^x = a^{3x+1}$ con $a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$

b $a^{x^2+2x} = a^{6x-3}$ con $a \in]1, \infty[$

c $b^{5x-6} = b^{x^2}$ con $b \in]0, 1[$

d $\dfrac{\log_2 x}{(\log_2 a)^2} - \dfrac{2 \log_a x}{\log_{1/2} a} = (\log_{\sqrt[3]{a}} x)(\log_a x)$ con $a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$

e $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + (\log_{2x} 2)(\log_{1/2} 2x) = 0$

4 Resolver las siguientes inecuaciones.

a $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \leq 2$

b $\log_3(x^2 - 3x - 4) < 1$

c $\log_{\frac{x}{3}}(x(4 - x)) \leq 1$

d $\log_4 x + \log_4(x + 1) < \log_4(2x + 6)$

e $\log_{1/2} x + \log_{1/2}(2x) > 1$

f $\dfrac{\log_2(x - \frac{1}{2})}{\log_2 x} < 2$

g $\log_9(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1))<0$

h $7^{2x}-7^{x+1}-8\leq 0$

i $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(x+1))>1$

j $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4(|x|-1)<2$

k $\log_x(3x-5)<2$

l $\log_x(3x+5)\leq 2$

m $\log_{x+3}(x^2-x)<2$

5 Hallar la función inversa de

$$y=\log_b x-\log_b(1+x),\quad b>0$$

6 Demostrar que

$$\log_b(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})=-\log_b(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})$$

7 Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl}\log_{12}x\left(\dfrac{1}{\log_x 2}+\log_2 y\right) & = & \log_2 x\\ \log_2 x\log_3(x+y) & = & 3\log_3 x\end{array}\right|$$

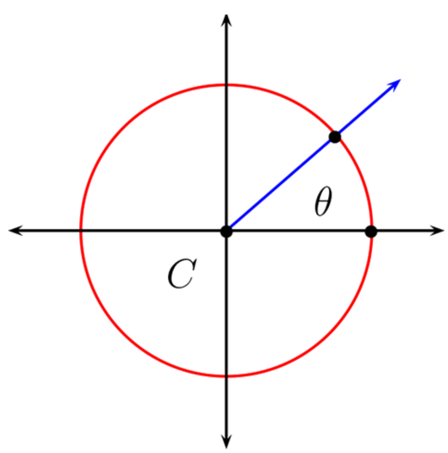
Capítulo 4

Trigonometría

En este capítulo trabajaremos con las funciones trigonométricas, es decir, con la función **seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante**, que en sus inicio estaban definida como proporciones en un triángulo rectángulo, de este hecho proviene el nombre del capítulo Trigonometría que significa "medida triángulo"

4.1 Introducción

Un concepto previo y muy importante para introducir las funciones trigonométricas es el de **ángulo**, que es una figura geométrica plana que consiste en un sector del plano limitado por dos semirrectas con el punto extremo en común. Para medir un ángulo, situamos el punto extremo en el centro de circunferencia y uno de los lados en el semi-eje positivo X, decimos que el ángulo es positivo si se mide en sentido del contrario al movimiento del manecillas del reloj en caso contrario es ángulo es negativo.



Existen varias formas de medir un ángulo, entre las más conocida están: **Radianes, Sexagesimal y Centesimal,** cada una de ella consiste en dividir, la circunferencia en 2π, 360 o 400 partes iguales respectivamente.

Proposición 4.1.1 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, donde β es el ángulo medido en grados sexagesimales y*

α el ángulo medido en radianes entonces

$$\frac{\beta}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Observación: Por medio de esta relación obtenemos

$$\theta = \frac{180 \cdot \alpha}{\pi} \quad y \quad \alpha = \frac{\pi \cdot \theta}{180}$$

4.2 Funciones Trigonométricas

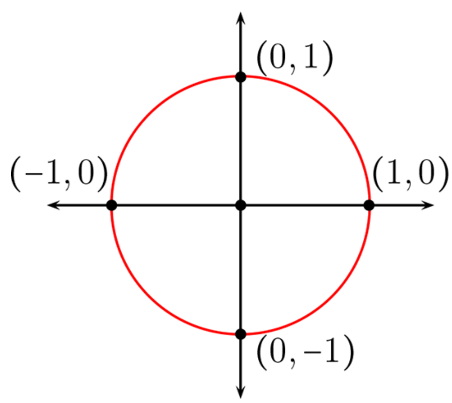
Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia unitaria de centro en el origen, es decir, de centro en $C = (0,0)$ y radio 1, entonces la ecuación que la define la circunferencia está dada por:

$$x^2 + y^2 = 1$$

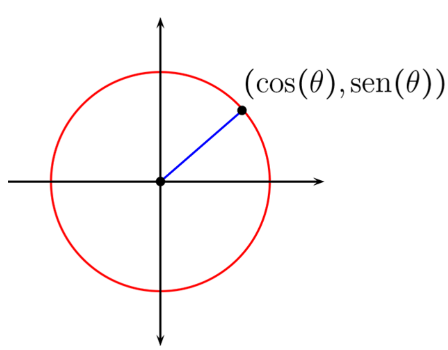
Así tenemos que

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Algunos puntos distinguidos de la circunferencia unitaria son $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$



Sea θ un ángulo, ubiquemos el lado inicial en el semieje X, luego el lado final del ángulo θ interseca la circunferencia en un punto, la primera coordenada se denota por $\cos(\theta)$, y la segunda por $\sin(\theta)$.



De esta manera se definen las primeras funciones trigonométricas.

Definición 4.2.1

a La función **seno**, esta definida por:

$$\begin{array}{rcccl} \sin & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & & \theta & \longmapsto & \sin(\theta) \end{array}$$

donde $\sin(\theta)$ representa la segunda coordenada del punto de intersección del lado final del ángulo θ con la circunferencia, cuando el lado inicial se encuentra en el semieje positivo.

b La función **coseno**, esta definida por:

$$\begin{array}{rcccl} \cos & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & & \theta & \longmapsto & \cos(\theta) \end{array}$$

donde $\cos(\theta)$ representa la primera coordenada del punto de intersección del lado final del ángulo θ con la circunferencia, cuando el lado inicial se encuentra en el semieje positivo.

$\Diamond$

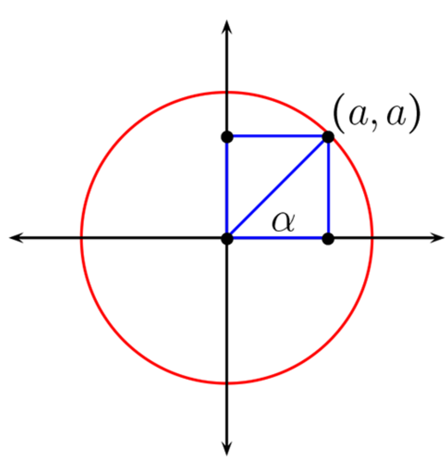
Los puntos distinguidos de la circunferencia nos permiten calcular algunos valores que a continuación listamos

$$\begin{array}{rcl} (1,0) & = & \big(\cos(0^\circ), \sin(0^\circ)\big) \\ (0,1) & = & \big(\cos(90^\circ), \sin(90^\circ)\big) \\ (-1,0) & = & \big(\cos(180^\circ), \sin(180^\circ)\big) \\ (0,-1) & = & \big(\cos(270^\circ), \sin(270^\circ)\big) \\ (1,0) & = & \big(\cos(360^\circ), \sin(360^\circ)\big) \end{array}$$

Podemos ordenar algunos de los valores de las funciones seno y coseno en la siguiente tabla

θ	$0^\circ \equiv 0$	$90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$	$180^\circ \equiv \pi$	$270^\circ \equiv \frac{3\pi}{2}$	$360^\circ \equiv 2\pi$
$\sin(\theta)$	0	1	0	-1	0
$\cos(\theta)$	1	0	-1	0	1

Otros valores los podemos obtener, al dibujar un cuadrado de lado a en el primer cuadrante.



Como el vértice pertenece a la circunferencia luego se tiene que

$$a^2 + a^2 = 1$$

y por lo tanto $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pero además el ángulo α es $\pi/4$, con lo cual tenemos que

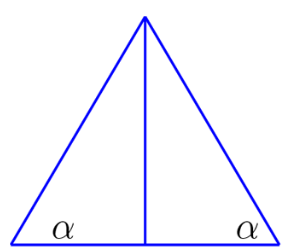
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

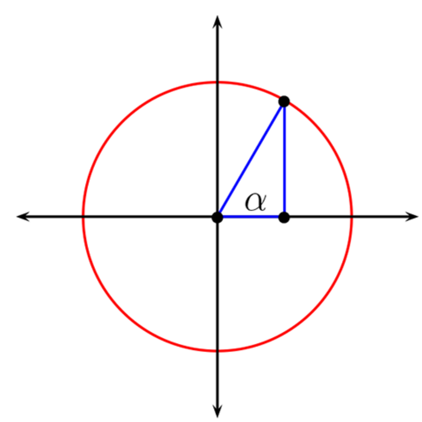
Ahora bien, este cuadrado lo podemos situar en diferentes cuadrante y ello nos permite calcular otros valores.

$$\begin{array}{rclrcl}
\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) & = & \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) & = & \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{array}$$

Para calcular otro valores, usaremos una propiedad de los triángulos equiláteros, los ángulos son todos iguales y la alturas son mediana.

Consideremos un triángulo equilátero, con lado de longitud 1 y el ángulo interior $\alpha = 60°$, luego usando pitágoras tenemos que la altura mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$.





Luego ubicamos el triángulo en la circunferencia unitaria y teniendo presentes la longitudes, obtenemos que las coordenadas tiene los siguiente valores:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

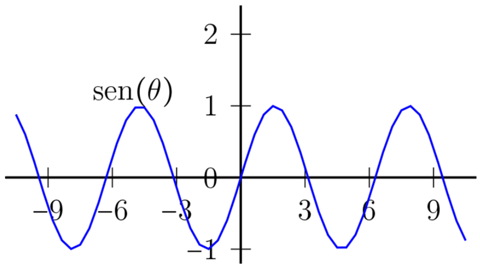
Realizando un reemplazo similar, es decir, ubicando el otro vértice del triángulo en el origen, obtenemos

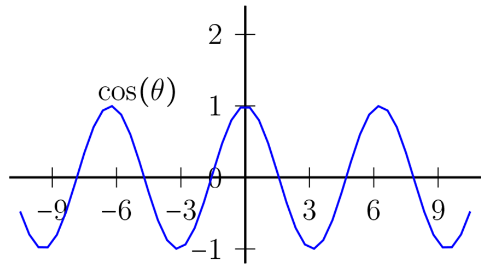
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

como resumen de los valores obtenidos hasta el momento ellos son:

sin	$0° \equiv 0$	$30° \equiv \frac{\pi}{6}$	$45° \equiv \frac{\pi}{4}$	$60° \equiv \frac{\pi}{3}$	$90° \equiv \frac{\pi}{2}$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$90° \equiv \frac{\pi}{2}$	$60° \equiv \frac{\pi}{3}$	$45° \equiv \frac{\pi}{4}$	$30° \equiv \frac{\pi}{6}$	$0° \equiv 0$

Las gráfica de las funciones *seno* y *coseno* son:





Proposición 4.2.2 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces tenemos*

a $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

b $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

c $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

Demostración. La ecuación de la circunferencia unitaria esta dada por:

$$x^2 + y^2 = 1$$

y además $x = \cos(\theta)$ e $y = \sin(\theta)$, son las coordenadas de un punto de la circunferencia, satisface la ecuación de la circunferencia y de este modo obtenemos

$$(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 \;=\; 1$$

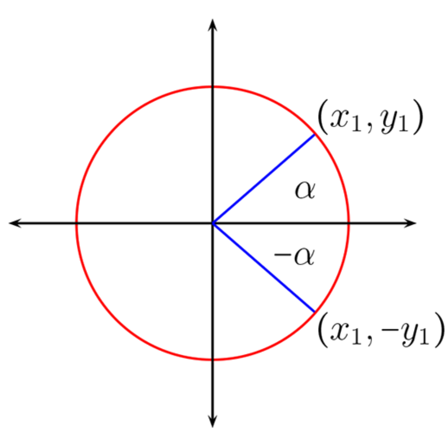
Despejando una de las funciones tenemos en

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) & ; & \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \\ |\cos(\theta)| = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} & ; & |\sin(\theta)| = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \end{array}$$

Para la segunda parte, es decir, para demostrar que la función *seno* es una función impar y la función *coseno* es una función par, veremos lo siguiente. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, luego grafiquemos los correspondiente puntos, $(x_1, y_1), (x_1, -y_1)$ en el plano



Se obtiene claramente que

$$(x_1, y_1) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)); \quad (x_1, -y_1) = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$$

de lo cual tenemos que

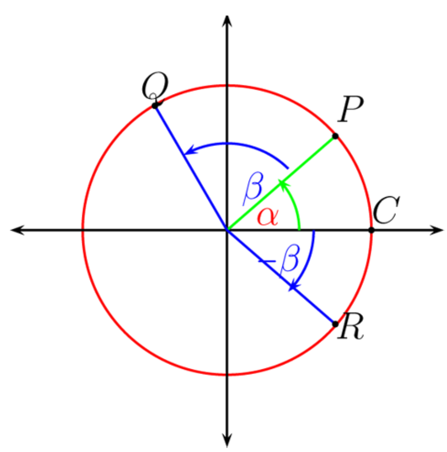
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \blacksquare$$

Definición 4.2.3 Una igualdad de funciones trigonométricas, en el dominio común es llamada una **identidad trigonométrica**. $\Diamond$

Teorema 4.2.4 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tenemos que:*

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) & = & \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \end{array}$$

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $C(1,0), P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, pertenecen a la circunferencia unitaria, tales que α es el ángulo que termina en el segmento $\overline{CP}$ y β que se encuentra entre los segmentos $\overline{CQ}$ y $\overline{CP}$.



Por lo tanto el ángulo que termina en el segmento $\overline{CQ}$ es $\alpha+\beta$ y escogemos R de modo que el ángulo que termina en $\overline{CR}$ es $-\beta$.

Además, si tenemos presente que la función *seno* es una función impar y *coseno* una función par. Luego se obtiene

$$\begin{array}{rcl} P & = & (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \\ Q & = & (\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)) \\ R & = & (\cos(-\beta), \sin(-\beta)) = (\cos(-\beta), \sin(-\beta)) = (\cos(\beta), -\sin(\beta)) \end{array}$$

Recordemos que, si los arcos son iguales entonces los segmentos son iguales y además la distancia entre dos puntos esta dada por:

$$dist(P, Q) = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

Basándonos en que el arco $\widehat{CQ}$ mide le mismo ángulo que el arco $\widehat{PR}$ de la circunferencia unitaria, luego sus distancia al cuadrado son iguales tenemos $dist^2(C,Q) = dist^2(P,R)$, las veremos por separado

$$\begin{array}{rcl} dist^2(C,Q) & = & (1-\cos(\alpha+\beta))^2 + (0-\sin(\alpha+\beta))^2 \\ & = & 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) \\ & = & 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 \end{array}$$

Note que $\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma) = 1$.

La otra distancia

$$\begin{array}{rl} & dist^2(P,R) \\ = & (\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha) + \sin(\beta))^2 \\ = & \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin^2(\beta) \\ = & -2\cos(\alpha)\cos(\beta) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + 2 \end{array}$$

Igualando tenemos

$$\begin{array}{rcl} dist^2(C,Q) & = & dist^2(P,R) \\ 2 - 2\cos(\alpha+\beta) & = & -2\cos(\alpha)\cos(\beta) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + 2 \\ \cos(\alpha+\beta) & = & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{array}$$

De este modo se obtiene que

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Además, también obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha-\beta) & = & \cos(\alpha+-\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) & = & \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) & = & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot - \sin(\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) & = & \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{array} \quad \blacksquare$$

Corolario 4.2.5 *Sea $\beta \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos que se cumple:*

$$\begin{array}{llll} 1) & \cos(\frac{\pi}{2}+\beta) = -\sin(\beta) & 2) & \cos(\frac{\pi}{2}-\beta) = \sin(\beta) \\ 3) & \cos(\pi-\beta) = -\cos(\beta) & 4) & \cos(\pi+\beta) = -\cos(\beta) \\ 5) & \cos(\frac{3\pi}{2}+\beta) = \sin(\beta) & 6) & \cos(\frac{3\pi}{2}-\beta) = -\sin(\beta) \\ 7) & \cos(2\pi-\beta) = \cos(\beta) & 8) & \cos(2\pi+\beta) = \cos(\beta) \end{array}$$

La demostración son directas, basta con aplicar la identidad del teorema anterior y los valores conocidos de las funciones seno y coseno

Teorema 4.2.6 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ entonces tenemos que:*

$$\begin{array}{rcl} \sin(\alpha+\beta) & = & \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha-\beta) & = & \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) \end{array}$$

Demostración. En la parte (2) del corolario tenemos que $\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin(\beta)$, realizando es cambio de variable $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$ tenemos

$$\cos(\alpha) \;=\; \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Y esto nos permite calcular:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\\
&= \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\
&= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\beta)+\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\beta)\\
&= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta))\\
&= \sin(\alpha)\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cos(\alpha)\\
&= \sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha).
\end{aligned}$$

■

Corolario 4.2.7 *Sea $\beta\in\mathbb{R}^2$, entonces tenemos que se cumple:*

1) $\sin(\frac{\pi}{2}+\beta)=\cos(\beta)$	2) $\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos(\beta)$
3) $\sin(\pi-\beta)=\sin(\beta)$	4) $\sin(\pi+\beta)=-\sin(\beta)$
5) $\sin(\frac{3\pi}{2}+\beta)=-\cos(\beta)$	6) $\sin(\frac{3\pi}{2}-\beta)=-\cos(\beta)$
7) $\sin(2\pi-\beta)=-\sin(\beta)$	8) $\sin(2\pi+\beta)=\sin(\beta)$

Observación: Tenga presente que en general $\cos(2\alpha)$ es distinto de $2\cos(\alpha)$, de la misma manera $\sin(2\alpha)$ es distinto de $2\sin(\alpha)$, es decir,

$$\cos(2\alpha)\neq 2\cos(\alpha) \qquad \sin(2\alpha)\neq 2\sin(\alpha)$$

lo que si es verdadero es

Proposición 4.2.8 *Sea $\alpha\in\mathbb{R}^2$, entonces tenemos que se cumple:*

1. $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha)=1-2\sin^2(\alpha)$
3. $\cos(2\alpha)=-1+2\cos^2(\alpha)$

Demostración. Sea $\alpha\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha)\\
&= \cos(\alpha)\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\sin(\alpha)\\
&= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) && (1)\\
&= (1-\sin^2(\alpha))-\sin^2(\alpha)\\
&= 1-2\sin^2(\alpha) && (2)
\end{aligned}$$

o de otra forma

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\\
&= \cos^2(\alpha)-(1-\cos^2(\alpha))\\
&= -1+2\cos^2(\alpha) && (3)
\end{aligned}$$

■

Observación: Para conocer otros valores de las funciones trigonométricas seno, coseno podemos usar las identidades trigonométricas obtenidas.

Ejemplo 4.2.9 Calcule el valor de $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ $\square$

Solución 1. El calculo lo podemos realizar en grados o radianes

$$\begin{array}{rcl} \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) & = & \sin(210^\circ) \\ \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) & = & \sin(180^\circ + 30^\circ) \\ \sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6})\cos(\pi) & = & \sin(180^\circ)\cos(30^\circ) + \sin(30^\circ)\cos(180^\circ) \end{array}$$

Como $\sin(\pi) = 0$ y $\cos(-1)$ reemplazando obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) & = & \sin(\pi)\cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6})\cos(\pi) \\ & = & 0 \cdot \cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6}) \cdot -1 \\ & = & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ & = & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Ejemplo 4.2.10 Calcular los valores de

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$\square$

Solución 2. Para ello usamos un desarrollo similar, solo hacemos notar que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

luego tenemos

$$\begin{array}{rcl} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) & = & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ & = & \frac{\sqrt{1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & = & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{array}$$

con lo cual obtenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Para el otro valor tenemos,

$$\begin{array}{rcl} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) & = & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & = & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

con lo cual obtenemos

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ahora definiremos las otras funciones trigonométricas

Definición 4.2.11

1 La función *tangente*

$$\begin{array}{rcccl} \tan & : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \alpha & \longmapsto & \tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{A} = \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2 La función *cotangente* se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccc} \cot & : & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \alpha & \longmapsto & \cot(\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{B} = \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3 La función *secante*

$$\begin{array}{rcccc} \sec & : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \alpha & \longmapsto & \sec(\alpha) := \frac{1}{\cos(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{A} = \mathbb{R} - \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

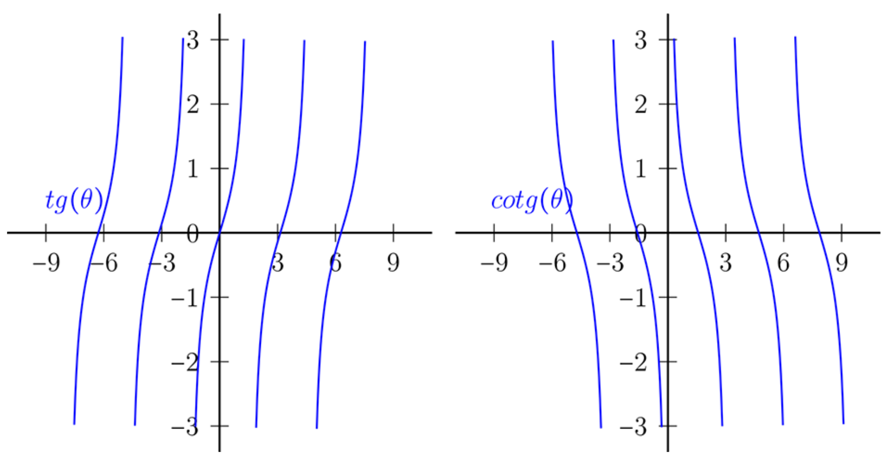
4 Y por último la función *cosecante*

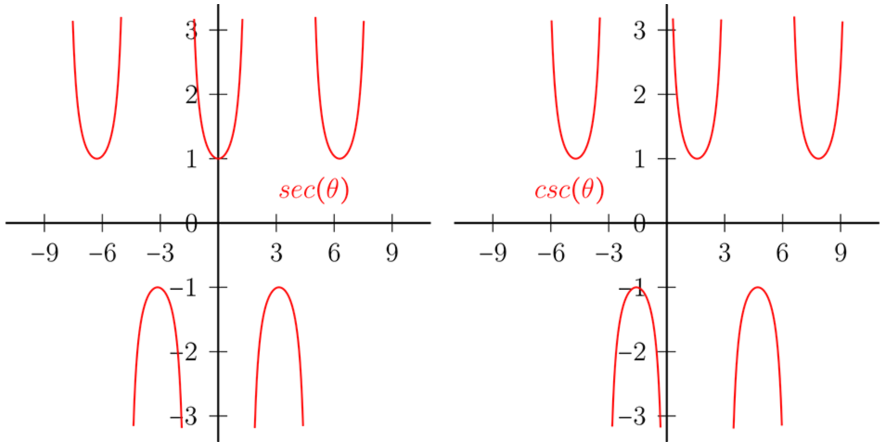
$$\begin{array}{rcccc} \csc & : & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \alpha & \longmapsto & \csc(\alpha) := \frac{1}{\sin(\alpha)} \end{array}$$

Donde $\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$\diamondsuit$

Las gráficas de esta funciones son las siguientes:





Proposición 4.2.12 *La función tangente al igual que la función seno es una función impar,*

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

además tenemos

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Demostración.

a Tomemos $\tan(-\alpha)$ tenemos:

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha)$$

Además podemos obtener la siguiente formula

b

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}\end{aligned}$$

Amplifiquemos por $\frac{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}$, entonces

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}\\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}+\frac{\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}-\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}\\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1-\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}\\ &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}\end{aligned}$$

■

Observación: Para conocer el valor de las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante en ángulo, nos basta saber su valor en el primer cuadrante, algunos de los cual podemos resumir en la siguiente tabla

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
$\cot(\theta)$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec(\theta)$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	$\nexists$
$\csc(\theta)$	$\nexists$	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

4.2.1 Identidades Trigonométricas

Basándonos en las seis funciones antes definidas **seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante** tenemos la siguiente lista de identidades trigonométricas básicas:

1 $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

2 $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$

3 $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$

4 $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

5 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

6 $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

7 $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

8 $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

9 $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

10 $\mid \sin(\frac{\alpha}{2}) \mid = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

11 $\mid \cos(\frac{\alpha}{2}) \mid = \sqrt{\frac{\cos(\alpha)+1}{2}}$

12 $\mid \sin(\alpha) \mid = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$

13 $\mid \cos(\alpha) \mid = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$

14 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

15 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

16 $\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$

17 $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

18 $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$

19 $\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)+1}{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}$

20 $1+\cot^2(\alpha) = \csc(\alpha)$

21 $\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}$

22 $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big]$

23 $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big]$

24 $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big]$

25 $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\big]$

26 $\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

27 $\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

28 $\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

29 $\cos(\alpha)-\cos(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cdot\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

30 $\mid\tan(\frac{\alpha}{2})\mid = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$

31 $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

32 $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

Ejemplo 4.2.13 Compruebe la siguiente identidad trigonométrica

$$\frac{\sin^3(\alpha)+\sin(3\alpha)}{\cos^3(\alpha)-\cos(3\alpha)} = \cot(\alpha)$$

□

Solución. La justificación la haremos comenzando por el lado izquierdo de la igualdad y obtendremos el lado derecho, para lo cual consideremos lo siguiente, simplifiquemos las expresiones

a

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin(2\alpha)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\cos(2\alpha)$$

Por identidades 6 y 7 tenemos

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha), \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$$

entonces

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha)\\ &= \big[2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\big]\cos(\alpha) + \sin(\alpha)[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)]\\ &= 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\big[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big]\end{aligned}$$

b Por otro lado

$$\begin{aligned}\sin^3(\alpha) + \sin(3\alpha) &= \sin^3(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\big[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big]\\ &= \sin^3(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha)\\ &= 3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)\end{aligned}$$

c

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha)$$

Ocupando lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha)\\ &= \big[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big]\cos(\alpha) - \big[2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\big]\sin(\alpha)\\ &= \cos^3(\alpha) - \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

entonces

d

$$\begin{aligned}\cos^3(\alpha) - \cos(3\alpha) &= \cos^3(\alpha) - \big[\cos^3(\alpha) - \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)\big]\\ &= \cos^3(\alpha) - \cos^3(\alpha) + \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) + 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)\\ &= 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Tomando en consideración todos los resultados obtenidos y reemplazando en lo que deseamos demostrar tenemos

$$\begin{aligned}\tfrac{\sin^3(\alpha)+\sin(3\alpha)}{\cos^3(\alpha)-\cos(3\alpha)} &= \tfrac{3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)}{3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)}\\ &= \tfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\\ &= \cot(\alpha)\end{aligned}$$

Lo cual concluye la justificación.

4.2.2 Ejercicios Propuestos

Demostrar las siguientes identidades

1 $\dfrac{1}{\sin(x)\cos(x)} - \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{1 - \sin^2(x)}$

2 $\dfrac{\sin(x) + \tan(x)}{\cot(x) + \csc(x)} = \sin(x)\tan(x)$

3 $\dfrac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} - \cot(x) = \csc(x)$

4 $\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)} - \dfrac{1+\cos(x)}{\sin(x)} = -2\cot(x)$

5 $\dfrac{\cos(x)}{1-\tan(x)} + \dfrac{\sin(x)}{1-\cot(x)} = \sin(x)+\cos(x)$

6 $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos(x)} = 2$

7 $\dfrac{\cos(3x)}{\sin(x)} + \dfrac{\sin(3x)}{\cos(x)} = 2\cot(2x)$

8 $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \tan(x).$

9 $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$

10 $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

11 $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}.$

12 $\cot(2x) = \dfrac{\cot^2(x)-1}{2\cot(x)}$

13 $\sin(4x) = 4\sin(x)\cos(x) - 8\sin^3(x)\cos(x)$

14 $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$

15 $\cos(3x) + \sin(2x) = \sin(4x) + \cos(3x)(1 - 2\sin(x))$

16 $\sin(3x) - \sin(x) - \sin(5x) = (1 - 2\cos(2x))\sin(3x)$

17 $\tan^2(x) + \sec^2(y) = \sec^2(x) + \tan^2(y)$

18 $\dfrac{\tan(x)+\cot(y)}{\cot(x)+\tan(y)} = \dfrac{\tan(x)}{\tan(y)}.$

4.3 Funciones Trigonométricas Inversas

La existencia de la función inversa para las funciones trigonométricas están basada en el siguiente teorema:

Teorema 4.3.1

a La función $\sin : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ *es una función biyectiva.*

b La función $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *es una función biyectiva.*

c La función $\tan :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *es una función biyectiva.*

Como las funciones son biyectiva existe su inversa, por razones de no confundir la inversa con las anteriores funciones trigonométricas, es que las inversa se llama usando el prefijo *arco*, ya que es un trozo o un arco de la circunferencia que se considera.

Al igual que con cualquier otra función, debe tenerse cuidado en el dominio-recorrido en que esta definida cada una de las funciones inversas

Definición 4.3.2

a La función arcoseno dada por: $\arcsin : [-1,1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es la función inversa de la función seno

b La función arcocoseno dada por: $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ es la función inversa de la función coseno.

c La función arcotangente dada por: $\arctan : \mathbb{R} \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es la función inversa de la función tangente.

$\Diamond$

No olvidemos que, el decir que una función es la inversa de otra, nos entrega la siguiente información, por ejemplo tenemos que:

a $\sin(x) = a$ si y sólo si $x = \arcsin(a)$, con $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], a \in [-1,1]$

b $\cos(x) = a$ si y sólo si $x = \arccos(a)$, con $x \in [0,\pi], a \in [-1,1]$

c $\tan(x) = a$ si y sólo si $x = \arctan(a)$, con $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], a \in \mathbb{R}$

Usando lo anterior obtenemos los valores de las funciones Trigonométricas Inversas:

	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(a)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos(a)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

4.3.1 Ecuaciones Trigonométricas

El resolver una ecuaciones trigonométricas, al igual que las ecuaciones de funciones de números reales, consiste en determinar todos los valores en el universo (restricción o dominio común) que al ser reemplazado en la incógnitas satisfacen o cumplen la igualdad.

De otro modo, es resolver una ecuación que contiene al menos una función trigonométrica en cuyo argumento esta la incógnita.

Ejemplo 4.3.3 Resolver

$$2\sin(x) - 1 = 0$$

$\square$

Solución 1. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$2\sin(x) - 1 = 0$$

luego despejando obtenemos

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la solución básica o en $[0, 2\pi]$ es

$$x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

es decir,

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Para resolver las ecuaciones, recurrimos a la siguiente propiedad.

Proposición 4.3.4 *Sean $x, a \in \mathbb{R}$ entonces:*

a Si $a \in [-1, 1]$ entonces

$$\sin(x) = a \quad \textit{si y sólo si} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,(x = 2k\pi + \arcsin(a) \vee x = (2k+1)\pi - \arcsin(a))$$

b Si $a \in [-1, 1]$ entonces

$$\cos(x) = a \quad \textit{si y sólo si} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,(x = \arccos(a) + 2k\pi \vee x = -\arccos(a) + 2k\pi)\,.$$

c Si $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$\tan(x) = a \quad \textit{si y sólo si} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,(x = \arctan(a) + k\pi)\,.$$

Algunos ejemplos de interés, donde aplicaremos la propiedad anterior en la resolución de los distintos tipos de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 4.3.5 Resolver

$$5\sin(x) - 3 = 0$$

□

Solución 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$5\sin(x) - 3 = 0$$

luego despejando obtenemos

$$\sin(x) = \frac{3}{5}$$

Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi \vee x = -\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + (2k+1)\pi$$

es decir,

$$S = \left\{\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ejemplo 4.3.6 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ constante. Comprueba que la ecuación

$$\sin(ax) = \cos(bx)$$

tiene como solución

$$(a-b)x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad (a+b)x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ $\square$

Solución 3. Sabemos que $\cos(bx) = \sin(\frac{\pi}{2} - bx)$ reemplazando tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sin(ax) & = & \cos(bx) \\ \sin(ax) & = & \sin\left(\frac{\pi}{2} - bx\right) \end{array}$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\begin{array}{rcl} \sin(ax) - \sin(\frac{\pi}{2} - bx) & = & 0 \\ 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - bx + ax}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - bx - ax}{2}\right) & = & 0 \end{array}$$

es decir,

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + (a-b)x}{2}\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - (a+b)x}{2}\right) = 0$$

con lo cual, existe $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\frac{\pi}{2} + (a-b)x}{2} & = & \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad \frac{\frac{\pi}{2} - (a+b)x}{2} = k\pi \\ (a-b)x & = & \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad (a+b)x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}$$

Ejemplo 4.3.7 Resolver

$$\sin(7x) = \cos(3x)$$

$\square$

Solución 4.

$$\begin{array}{rcl} \sin(7x) & = & \cos(3x) \\ \sin(7x) & = & \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sin(7x) - \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) & = & 0 \\ 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 3x + 7x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 3x - 7x}{2}\right) & = & 0 \end{array}$$

es decir,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0$$

con lo cual,

$$\begin{array}{rcl} \frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi & \vee & \frac{\pi}{4} - 5x = k\pi \\ x = \frac{(1+4k)\pi}{8} & \vee & x = \frac{(1-4k)\pi}{10} \end{array}$$

$$S = \left\{\frac{(1+4k)\pi}{8} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(1-4k)\pi}{10} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ejemplo 4.3.8 Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, resolver la ecuación

$$A\sin(x) + B\cos(x) = C$$

$\square$

Solución 5.

$$\begin{array}{rcl} A\sin(x) + B\cos(x) & = & C \\ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x) & = & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{array}$$

Como tenemos que

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$$

Es un punto del plano que pertenece a la circunferencia, luego existe $\alpha \in [0, 2\pi[$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ y } \sin(\alpha) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

reemplazando tenemos

$$\begin{array}{rcl} \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(x) & = & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \cos(\alpha)\sin(x) + \sin(\alpha)\cos(x) & = & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin(\alpha + x) & = & \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{array}$$

la ecuación tiene solución si y sólo si $\left|\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \leq 1$ y están dadas por

$$\alpha + x = \arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) + 2k\pi \vee \alpha + x = -\arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) + (2k' + 1)\pi$$

Ejemplo 4.3.9 Encuentre todas las soluciones para la siguiente ecuación

$$\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 1$$

$\square$

Solución 6. Dada $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 1$$

luego calculamos $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) & = & 1 \quad /\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Busquemos en una solución de

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \sin(\alpha) = \frac{1}{2}$$

una solución es: $\alpha = \frac{\pi}{3}$, es decir,

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) & = & \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x) & = & \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Como

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{luego} \quad \frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por propiedad anterior obtenemos

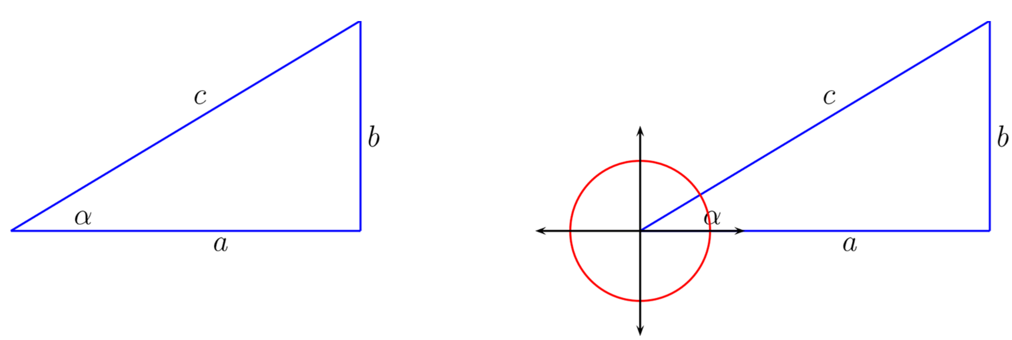
$$\begin{array}{rcl} \frac{\pi}{3} + 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} & \text{o} & \frac{\pi}{3} + 2x = -\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{(12k-1)\pi}{12} \ , \ k \in \mathbb{Z} & \text{o} & x = \frac{(4k+1)\pi}{4} \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

4.4 Funciones Trigonométricas en Triángulos

En esta sección veremos la utilidad de las funciones, para determinar los valores de los ángulos y la longitud de los lados en un triángulo cualquiera.

4.4.1 Triángulo Rectángulo

Sean $\alpha, a, b, c \in \mathbb{R}^+$, tales que son las longitudes de un triángulo rectángulo, y α es el ángulo de unos de los lados como en la figura.



Podemos construir una circunferencia unitaria, con centro en el ángulo α y por Thales tenemos

$$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{a}{c} = \frac{cat.ady.}{hip.}$$

donde *cat.ady.* representa la longitud de cateto adyacente e *hip* es la longitud de la hipotenusa desde el ángulo α.

Otra proporciones

$$\frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{b}{c}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{cat.op.}{hip.}$$

donde *cat.op.* representa la longitud de cateto opuesto e *hip.* es la longitud de la hipotenusa en el triángulo desde el ángulo α. y también tenemos otra proporciones

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$$

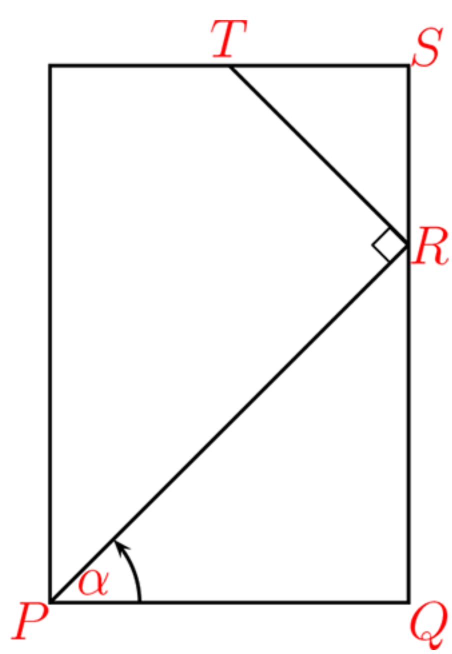
$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{cat.op.}{cat.ady.}$$

La otras funciones las podemos describir por las siguientes proporciones:

$$\cot(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{cat.ady.}{cot.op.} \qquad \sec(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{hip.}{cat.ady.} \qquad \csc(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{hip.}{cat.op.}$$

Los resultados anteriormente obtenidos nos sirven para poder resolver ejercicios como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.1 En el rectángulo siguiente se ha inscrito la figura



donde $\overline{RS} = 1cm$, $\overline{RQ} = 2cm$ y el $\measuredangle PRT = \frac{\pi}{2}$.

Determine α de manera que $\overline{PR}$ sea el doble de $\overline{TR}$. □

Solución. De la figura anterior, obtenemos

$$\beta = \measuredangle\, TRS = \alpha$$

Para ello, notemos que $\measuredangle\, PRQ = \frac{\pi}{2} - \alpha$ y $\measuredangle\, TRS = \beta$ de donde tenemos

$$\beta + \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} - \alpha \;\;=\;\; \pi$$

Luego $\beta = \alpha$. Entonces

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \tfrac{\overline{RS}}{\overline{TR}} = \tfrac{1}{\overline{TR}}$$

Por lo tanto

$$\overline{TR} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

Por otro lado tenemos

$$\sin(\alpha) = \tfrac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \tfrac{2}{\overline{PR}}$$

De lo cual

$$\overline{PR} = \frac{2}{\sin(\alpha)}$$

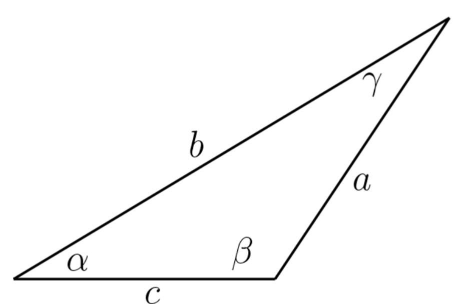
Como debe tenerse que $\overline{PR} = 2\overline{TR}$ obtenemos

$$\tfrac{2}{\sin(\alpha)} = 2\tfrac{1}{\cos(\alpha)} \quad \text{de lo cual,} \quad \tan(\alpha) = 1$$

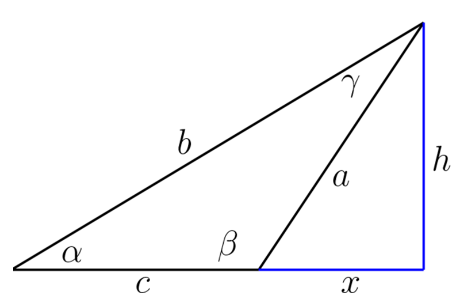
De este modo tenemos $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

4.4.2 Teorema del Seno

Sean α, β, γ los ángulos internos de un triángulos arbitrario y a, b, c las longitudes de los lados como en la figura.



Tracemos una altura en el triángulo



Sabemos que

$$\sin(\alpha) = \frac{cat.op.}{hip.} = \frac{h}{b}$$

y además

$$\sin(\pi - \beta) = \frac{cat.op}{hip.} = \frac{h}{a}$$

pero

$$\sin(\pi - \beta) = \sin(\beta)$$

Despejando h e igualando tenemos

$$h = b\sin(\alpha) = a\sin(\beta)$$

Por lo tanto

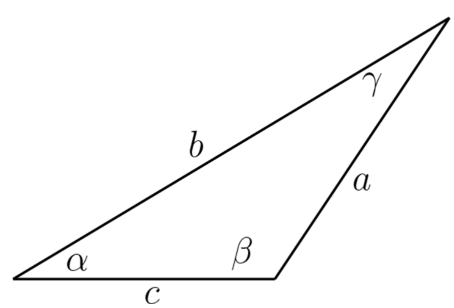
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

con un proceso similar obtenemos

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Igualando las dos expresiones obtenemos el teorema del seno

Teorema 4.4.2 [Teorema Ley del Seno]. *Sean $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$, los ángulos interiores, y la longitudes de los lados de un triángulo, como en la figura*



entonces se cumple que

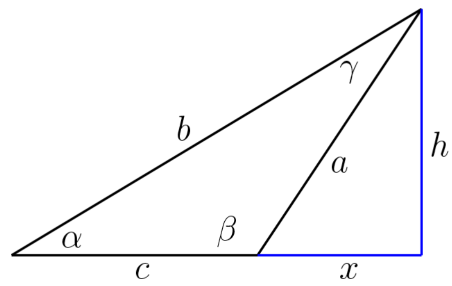
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

o de igual manera

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

4.4.3 Teorema Ley del Coseno

Sean α, β, γ los ángulos internos de un triángulos arbitrario y a, b, c las longitudes de los lados y además tracemos una altura como en la figura.



Usando el teorema de pitágoras en los triángulos tenemos

$$a^2 = h^2 + x^2$$

y en el otro tenemos

$$b^2 = h^2 + (c + x)^2$$

desarrollando el cuadrado de binomio,

$$b^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

reemplazando obtenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2cx$$

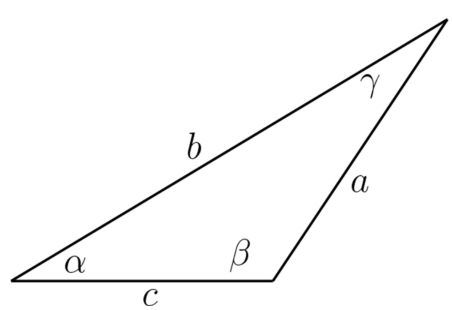
En el triángulo rectángulo se tiene

$$-\cos(\beta) = \cos(\pi - \beta) = \frac{x}{a}$$

luego tenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2c(-a\cos(\beta))$$

Teorema 4.4.3 [Ley del Coseno]. *Sean $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$, los ángulos interiores, y la longitudes de los lados de un triángulo, como en la figura*



entonces se cumple que

$$\begin{array}{rcl} a^2 & = & b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 & = & a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{array}$$

4.4.4 Resolución de Triángulos

Es el proceso mediante el cual se obtiene las longitudes de los lados y la medida de los tres ángulos de un triángulo.

Por congruencia de triángulo, tenemos que las únicas cuatro posibilidades en que se obtiene un único triángulo son las siguientes.

a Dados un lados y dos ángulos.

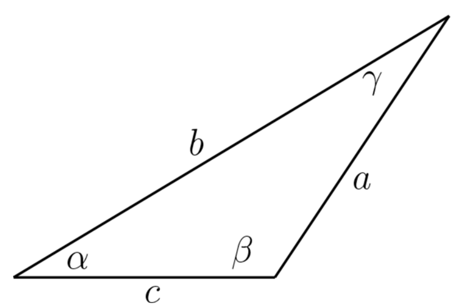
b Dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

c Dados dos lados y el ángulo opuesto al mayor.

d Dados los tres lados.

En caso contrario, puede ocurrir que hay más de una solución o no existe el triángulo que cumpla las condiciones descrita en el problema.

Veamos ahora cada una de las esta situación, para ellos tengamos presente las notación de acuerdo a la siguiente figura:



Ejemplo 4.4.4 [Primer Caso]. Con las notaciones de la figura, sean a, α, β conocidos. Determinar b, c, γ □

Solución 1. Como $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, luego $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.
Además por Ley de los Seno

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}, \qquad \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

de lo cual

$$c = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}, \qquad b = \frac{a\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

Ejemplo 4.4.5 [Segundo Caso]. Con las notaciones de la figura, sean a, b, γ conocidos. Determinar c, α, β □

Solución 2. Por la ley del Coseno tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

luego

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}$$

Además por Ley de los Seno

$$\sin(\alpha) = \frac{a\sin(\gamma)}{c}$$

tiene dos soluciones menores que 180° y esta son

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a\sin(\gamma)}{c}\right) \qquad \alpha = 180^\circ - \arcsin\left(\frac{a\sin(\gamma)}{c}\right)$$

Además

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma,$$

que nos entregan el mismo triángulo.

Ejemplo 4.4.6 [Tercer Caso]. Con las notaciones de la figura, sean a, c, γ, $a < c$ conocidos. Determinar b, α, β □

Solución 3. Por ley del seno y además $\frac{a\sin(\gamma)}{c} < 1$, luego

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a\sin(\gamma)}{c}\right)$$

de lo cual

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

Además por Ley de los Seno

$$b = \frac{c\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

Ejemplo 4.4.7 [Cuarto Caso]. Con las notaciones de la figura, sean a, b, c conocidos. Determinar α, β, γ □

Solución 4. Por la ley del Coseno tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

luego

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

análogamente

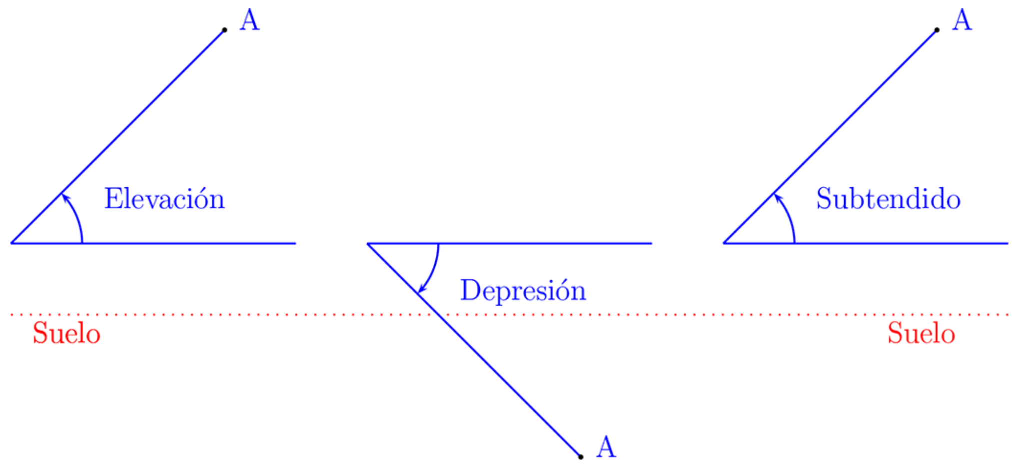
$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right), \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right).$$

Observación: Para poder resolver algunos problemas de planteo es necesario tener claro algunos términos empleado al referirnos a ciertos **ángulos**.

ángulo de elevación: Es el ángulo formado por la línea del horizonte del observador y la línea formada por el observador y el objeto observado sobre el horizonte.

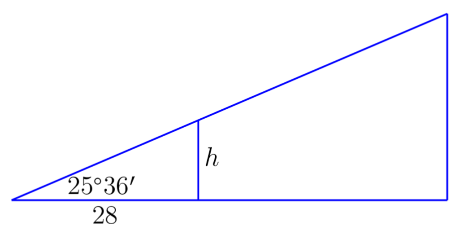
ángulo de depresión: Es el ángulo formado por la linea del horizonte del observador y la línea formada por el observador y el objeto observado bajo el horizonte.

ángulo subtendido: El ángulo subtendido por un objeto es el ángulo formado por la línea del horizonte del observador y la línea formada por el observador y el objeto observado.



Ejemplo 4.4.8 Cuando el sol esta a $25°36'$ sobre el horizonte un silo da una sombra de 28 metros. Calcular la altura del silo. □

Solución 5. Grafiquemos el problema,



Calculando tangente se obtiene que

$$\tan(25°36') = \frac{h}{28}$$

es decir, $h = 28\tan(25°36') = 28\tan(25,6°) \approx 13.4153$.

La altura del silo aproximadamente es $13.4153 mts$

4.5 Ejercicios Propuestos

Valor de la función trigonométrica

Calcule los siguientes valores, expresando el resultado con la función trigonométrica evaluada en un ángulo en $[0, \pi/2]$.

a $\cos(\frac{109\pi}{30})$

b $\sin(\frac{109\pi}{30})$

c $\tan(\frac{163\pi}{90})$

d $\cot(\frac{272\pi}{45})$

e $\sec(\frac{109\pi}{30})$

f $\csc(\frac{163\pi}{90})$

g $\sec(\frac{272\pi}{45})$

h $\sin(7\pi)$

i $\sec(7\pi)$

j $\tan(9\pi)$

Identidades Trigonométricas Compruebe las siguientes identidades.

1 $\cos(\alpha)\sec(\alpha) = 1$

2 $\sin(\alpha)\sec(\alpha) = \tan(\alpha)$

3 $\frac{\csc(\alpha)}{\sec(\alpha)} = \cot(\alpha)$

4 $(1+\cos(\alpha))(1-\cos(\alpha)) = \sin^2(\alpha)$

5 $\frac{\sin(\alpha)}{\csc(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{\sec(\alpha)} = 1$

6 $(\tan(\alpha)+\cot(\alpha))\tan(\alpha) = \sec^2(\alpha)$

7 $\tan(\alpha)\cot(\alpha) = 1$

8 $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

9 $\cos^2(\alpha)(\sec^2(\alpha) - 1) = \sin^2(\alpha)$

10 $1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

11 $(1+\sin(\alpha))(1-\sin(\alpha)) = \frac{1}{\sec^2(\alpha)}$

12 $(1-\sin^2(\alpha))(1+\tan^2(\alpha)) = 1$

13 $\frac{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 1 + \tan(\alpha)$

14 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta) + \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta) = \cos(\alpha)$

15 $\frac{1}{1+\sin(\alpha)} + \frac{1}{1-\sin(\alpha)} = 2\sec^2(\alpha)$

16 $\sec^2(\alpha) + \csc^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)\csc^2(\alpha)$

17 $\tan(\alpha) + \cot(\alpha) = \sec(\alpha)\csc(\alpha)$

18 $\frac{\cos(\alpha)}{1-\sin(\alpha)} - \frac{1-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\tan(\alpha)$

19 $\cot(2\alpha) = \frac{1}{2}[\cot(\alpha) - \tan(\alpha)]$

20 $\frac{\sin^3(\alpha)+\sin(3\alpha)}{\cos^3(\alpha)-\cos(3\alpha)} = \cot(\alpha)$

21 $\csc^4(\alpha) - \cot^4(\alpha) = \csc^2(\alpha)[\sin^2(\alpha) + 2\cos^2(\alpha)]$

22 $\frac{1-\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)} = \tan(\alpha)$

23 $\tan(\frac{\alpha}{2}) + \cot(\frac{\alpha}{2}) = 2\csc(\alpha)$

24 $\frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \cos(2\alpha)$

25 $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$

26 $\frac{2\tan(\alpha)}{\tan(\alpha)+\cot(\alpha)} + \cos(2\alpha) = 1$

27 $\frac{\sin(2\alpha)-\frac{1}{\sec(\alpha)}}{1-\sin(\alpha)+\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)} = \cot(\alpha)$

28 $\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$

29 $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$

30 $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big]$

31 $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big]$

32 $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big]$

33 $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)\big]$

34 $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

35 $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

36 $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

37 $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Ecuaciones Trigonométricas

1 $\sin(\alpha) = 1[\textit{Resp. } \alpha \in \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

2 $\sin^2(\alpha) - 2\cos(\alpha) + \frac{1}{4} = 0[\textit{Resp. } \alpha \in \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

3 $\cos^2(\alpha) + 2\sin(\alpha) + 2 = 0[\textit{Resp. } \alpha \in \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

4 $\sec(\alpha)\cos^2(\alpha) = \sqrt{3}\sin(\alpha)[\textit{Resp. } \alpha \in \{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

5 $\sin(5\alpha - \frac{23\pi}{180}) = \cos(2\alpha + \frac{5\pi}{18})[\textit{Resp. } \alpha \in \{\frac{\pi}{20} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

6 $2\csc^2(\alpha) = 3 + \cot^2(\alpha)[\textit{Resp. } \alpha \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

7 $3\cos^2(\alpha) = 3 - \sin^2(\alpha)[\textit{Resp. } \alpha \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

8 $2(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) = 1[\textit{Resp. } \alpha \in \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}]$

9 $\sec^2(\alpha)+\tan^2(\alpha)=7$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

10 $\csc(\alpha)\sin^2(\alpha)=\frac{1}{3}\sqrt{3}\cos(\alpha)$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{6}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

11 $\frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}=\frac{1}{2}$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{12}+2k\pi\mid,\frac{5\pi}{12}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

12 $\frac{1}{\cot^2(\alpha)+\frac{1}{\csc^2(\alpha)}}=2-\frac{1}{\sec^2(\alpha)}$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

13 $1+\frac{1}{\cot^2(\alpha)}=\frac{\cot(\alpha)}{1-\sin^2(\alpha)}$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

14 $\sin(\alpha)-\frac{1}{\cot^2(\alpha)}=1$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

15 $\frac{2}{\sec^2(\alpha)}=2+\frac{\tan(\alpha)-\cot(\alpha)}{\tan(\alpha)+\cot(\alpha)}$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

16 $\frac{2}{\csc^2(\alpha)}=\frac{\cot^2(\alpha)-1}{1+\cot^2(\alpha)}$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

17 $\frac{2\sin^2(\alpha)-1}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}=\sec(\alpha)$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{1258\pi}{1125}+2k\pi,\frac{4229\pi}{2250}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

18 $\frac{\sin(\alpha)}{\csc(\alpha)-\cot(\alpha)}+\frac{1}{\sec(\alpha)}=2$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

19 $\frac{\cot(\alpha)}{1+\tan(\alpha)}-\frac{1}{1+\cot(\alpha)}=2\tan(\alpha)$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{7663\pi}{9000}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

20 $\tan^2(\alpha)=2\cot^2(\alpha)$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

21 $\frac{1}{\sec^2(\alpha)}-4\sin^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)-3$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

22 $\sin(\alpha)\cos(\alpha)=\frac{1}{4}\sqrt{3}$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

23 $2\sin(\alpha)\cos(\alpha)=\cos(\alpha)$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{-3\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

24 $-\tan(\alpha)=\cos(2\alpha)$[*Resp.* $\alpha\in\{2k\pi,\pi+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

25 $\sqrt{3}\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)=1$[*Resp.* $\alpha\in\{\frac{-\pi}{12}+2k\pi,\frac{13\pi}{12}\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

26 $\frac{1-\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)}=1-\sin(2\alpha)$[*Resp.* $\alpha\in\{k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$]

27 $2\cos^2(x)-3\cos(x)=2$[*Resp.* $S_0=\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\}$]

28 $\sin(x)\sec(x)+\sqrt{2}\sin(x)-\sec(x)-\sqrt{2}=0$[*Resp.* $S_0=\{\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\}$]

29 $\sqrt{3}\sec^2(x)+2\tan(x)-2\sqrt{3}=0$[*Resp.* $S_0=\{\frac{2\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{8\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\}$]

30 $\tan(x)-\sin(2x)=0$[*Resp.* $S_0=\{0,\frac{\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4}\}$]

31 $\sin(2x)+\sin(4x)=2\sin(3x)$[*Resp.* $S_0=\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\}$]

32 $\tan^2(x)+\sec^2(x)=7$[*Resp.* $S_0=\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\}$]

33 $\cos(6x) - 3\cos(3x) = -2$[*Resp.* $S_0 = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$]

Ejercicios de Planteo

1 Desde un barco se observan 2 puntos de la costa en direcciones que forman un ángulo de 135°. Si la distancia desde el barco a cada uno de esos puntos es de 20 y 5 millas, respectivamente, entonces. ¿Cuál es la distancia entre ambos puntos?

[*Resp.* 23.76*millas*]

2 Desde un vehículo que se desplaza por una carretera en linea recta, se divisa sobre la cima de un cerro, que se encuentra ubicado en la misma dirección del vehículo una antena repetidora de T.V. en un ángulo de elevación de 35°. Momentos antes de entrar al puente y cuando se ha avanzado 0.8km desde el punto anterior la antena se observa con un ángulo de elevación de 42°. ¿Cuál es la menor distancia la que pasara respecto de la base de la altura?

[*Resp.* 3.82mts]

3 Al poco rato de haber despegado 2 aviones se cruzan en el aire cuando son las 16 : 00 hrs. Uno se dirige en linea recta hacia una isla ubicada a 68° al noreste, mientras el otro va a una ciudad ubicada al este. Si el primero se desplaza con una velocidad de 650 km/hrs y el segundo a 820 km/hrs. ¿Qué distancia habrá entre ellos a las 17 : 15 hrs?

[*Resp.* 1800.87mts]

4 Durante una carrera de atletismo, 3 jueces A, B, C se ubican en 3 puntos distintos de la pista de forma oval de modo que, medidas las distancias que hay entre ellos de línea recta al juez A dicta 100mts de B, este dicta 140mts de C, y este ultimo dicta 160mts del juez A. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo que se forman al unir los puntos que representan la posición de los jueces?

[*Resp.* $\alpha = 60°, \beta = 78°5'$ o $101°5'$ y $\gamma = 41°5'$ o $18°5'$]

5 Calcular el ancho de una calle (incluido vereda) si una escalera de 22mts de largo al apoyarla contra la pared forma un ángulo de 18° con el suelo y al apoyarla contra la pared del frente sin cambiar el punto de apoyo forma un ángulo de 24° con el suelo.

[*Resp.* 20.9mts]

6 ¿A que altura se encuentra un volantín si el hilo que lo sostiene mide 120mts y el ángulo de elevación del volantín es de 40°?

[*Resp.* 76.8mts]

7 Un observador ve una torre con un ángulo de elevación de 40°, si se acerca a 100mts hacia la torre el ángulo de elevación seria de 62°. Calcular la altura de la torre si el instrumento que sirvió para medir los ángulos de elevación se encuentra a 1.6mts del suelo.

[*Resp.* 150.19mts]

8 El asta de una bandera de $6mts$ de longitud esta ubicado sobre el techo de una casa. Desde un punto en el plano de la base de la casa los ángulos de elevación a la punta y a la base del asta son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$ respectivamente. Hallar la altura de la casa.

[*Resp.* $8.2mts$]

9 El piloto de un avion observa que el ángulo de depresión a una luz situada exactamente abajo de su linea de vuelo es de $\frac{\pi}{6}$. Un minuto mas tarde el ángulo de depresión es de $\frac{\pi}{4}$. Si esta volando horizontalmente a una velocidad de $900km/hrs$. Hallar

   a La altura a la que esta volando.

   b La distancia de la luz al primer punto de observación.

[*Resp. a)* $h = 19.88km$ *b)* $d = 39.76$]

10 Un navío sale exactamente rumbo al este a una velocidad uniforme. A las $7:00$ hrs se observa desde el barco, un faro hacia el norte a 10.32 millas de distancia y a las $7:30$hrs el faro esta a $18°13'$ al oeste del norte. Hallar la velocidad a la que se mueve el navío y el rumbo de este a las $10:00$ horas.

[*Resp.* $v = 6.6\ mill/hrs\ d = 19.8\ millas$]

11 Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte situado en una planicie que se encuentra desde una cierto lugar, el fuerte se ve con un ángulo de $10°$ y que desde otro lugar $200mts$ mas cerca del fuerte este se ve con un ángulo de $15°$. ¿Cuál es la altura del fuerte?, ¿Cuál es su distancia del segundo lugar de observación?

[*Resp.* $h = 98.22mts$ $d = 377.77mts$]

12 Un hombre observa desde un globo que las visuales a las bases de dos torres que están separadas por una distancia de 1 km, medido sobre un plano horizontal forman un ángulo de $70°$. Si el observador esta exactamente sobre la vertical del punto medio de la distancia de las dos torres. Calcular la altura del globo.

[*Resp.* $714.28km$]

13 Dos bollos son observados en la dirección sur desde lo alto de un acantilado cuya parte superior esta a $312mts$ sobre el nivel del mar. Hallar la distancia entre los bollos si sus ángulos de elevación medidos desde la punta del acantilado son $46°$ y $27°$ respectivamente.

[*Resp.* $321.09mts$]

14 Una escalera de $3mts$ de largo esta apoyada sobre la pared de un edificio estando su base a $1.5mts$ del edificio. ¿Que ángulo forma la escalera con el piso?

[*Resp.* $\frac{\pi}{3}$]

15 Los lados iguales del triángulo isosceles miden $40cm$ cada uno y los ángulos basales son de $25°$ cada uno. Resolver el triángulo y calcular su área.

[*Resp.* $604.8cm$]

16 Desde una determinada posición de un camino una persona observa la parte mas alta de una torre de alta tensión con un ángulo de elevación de 25°. Si avanza $45mts$ en linea recta hacia la base de la torre, divisa ahora su parte mas alta con un ángulo de elevación de 55°. Considerando que la vista del observador esta a $1.70mts$ del suelo. ¿Cuál es la altura de la torre?

[*Resp.* $32.31mts$]