Capítulo 5

Polinomios

5.1 Nociones Básicas

Definición 5.1.1 Sea $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Un polinomio en la variable x con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde a_i con i desde 0 hasta n son los **coeficientes del polinomio** y n es un número natural Además si $a_n \neq 0$, se dice que n es el **grado del polinomio**, solamente esta definido el grado cuando el polinomio es distinto de 0. $\Diamond$

Notación: Un polinomio lo denotamos por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \;\vee\; p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

El grado del polinomio $p(x)$ lo denotamos por

$$gr(p(x)) = n = deg(p(x)),$$

cuando $a_n \neq 0$.

El conjunto de todos los polinomios con coeficiente en $\mathbb{K}$ lo denotamos por $\mathbb{K}[x]$

Ejemplo 5.1.2 Los siguientes son algunos ejemplos de polinomios

a $p(x) = 5x^8 - \sqrt{2}x^3 + 20x - 4 \in \mathbb{R}[x]$.

b $q(x) = (2 - i)x^4 - (4 + \sqrt{3}i) \in \mathbb{C}[x]$.

c $r(x) = 3x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 4 \in \mathbb{Z}[x]$.

$\square$

Ejemplo 5.1.3 Los siguientes son algunos ejemplos de los grados del polinomio correspondiente

a $p(x) = 5x^8 - \sqrt{2}x^3 + 20x - 4 \in \mathbb{R}[x]$ y su grado es 8.

b El polinomio $p(x) = 3x^6 - 2x^2 - 5$, tiene grado 6.

c $q(x) = (2-i)x^4 - (4+\sqrt{3}i) \in \mathbb{C}[x]$ y su grado es 4.

d $r(x) = 3x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 4 \in \mathbb{Z}[x]$ y su grado es 5

$\square$

Definición 5.1.4 Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Los **términos** de $p(x)$ son $a_i x^i$ con $i = 0, ..., n$.
2. a_i es el **coeficiente** del término $a_i x^i$
3. El coeficiente $a_n \neq 0$ recibe el nombre de **coeficiente principal** o coeficiente director del polinomio.
4. a_0 es el **coeficiente constante** del polinomio.
5. El polinomio se llama constante si y sólo si $p(x) = a_0$.
6. El polinomio se llama lineal si y sólo si $gr(p(x)) = 1$.
7. El polinomio se llama cuadrático si y sólo si $gr(p(x)) = 2$.

$\Diamond$

Ejemplo 5.1.5 Algunos ejemplos de tipo o elementos de un polinomio.

a $p(x) = 8x^2 - 20x - 4 \in \mathbb{R}[x]$ y es un polinomio cuadrático.

b $q(x) = (1-5i)x^4 - (4+\sqrt{3}i)x + 2 - i \in \mathbb{C}[x]$ y el coeficiente constante es $2 - i$.

c $r(x) = 4x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ y el coeficiente del término cúbico es 5

$\square$

5.2 Álgebra Polinomial

Definición 5.2.1 Sean $p(x) = a_n x^n + \cdots a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$, entonces

I **Igualdad** $p(x) = q(x)$ si y sólo si

a. $p(x)$ y $q(x)$ tienen el mismo grado.

b. Los coeficientes de los respectivas términos deben ser iguales.

II **Suma** supondremos que $n > m$, entonces se define

$$p(x)+q(x) = a_n x^n + \cdots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m + (a_{m-1}+b_{m-1})x^{m-1} + \cdots + (a_0 + b_0),$$

donde

$$gr(p(x) + q(x)) = max(gr(p(x)), gr(q(x)))$$

III **Producto**

$$p(x)\cdot q(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \cdots + c_0,$$

donde $r = m + n$ y además

$$c_i = \sum_{j+k=n} a_j \cdot b_k.$$

Por otra parte

$$gr(p(x)\cdot q(x)) = gr(p(x)) + gr(q(x)).$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 5.2.2 Determine el valor de α de modo que los polinomios sean iguales.

a $8x^2 - 20x - 4 = 8x^2 + \alpha x - 4$, son iguales cuando $\alpha = -20$.

b $4x^5 + 2x^4 - x^4 + 2 = 4x^5 + \alpha x^4 + 2$, son iguales cuando $\alpha = 1$.

c $x^4 - 4x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - \alpha)$, para ningún valor de α son iguales ya que $2\alpha = 2 \wedge 2 + \alpha = 4$.

$\square$

Proposición 5.2.3 *Sean $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$, entonces.*

I ***Suma***

a Asociatividad.

$$p(x) + [q(x) + r(x)] = [p(x) + q(x)] + r(x)$$

b Conmutatividad.

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

c Neutro existe $0 \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$p(x) + 0 = p(x) = 0 + p(x).$$

d Inverso

Dado $p(x) \in \mathbb{K}[x], \exists q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$p(x) + q(x) = 0 = q(x) + p(x),$$

donde $q(x) = -p(x) = -\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i$.

II ***Producto***

a Asociatividad.

$$p(x)\cdot[q(x)\cdot r(x)] = [p(x)\cdot q(x)]\cdot r(x)$$

b Conmutatividad).

$$p(x)\cdot q(x) = q(x)\cdot p(x)$$

c *Neutro existe* $1 \in \mathbb{K}[x]$ *tal que*

$$1 \cdot p(x) = p(x) \cdot 1 = p(x)$$

d *Los únicos polinomios que tienen inverso multiplicativo son los polinomios constantes y no nulos.*

III ***Distributividad***

a) $r(x)(p(x) + q(x)) = r(x)p(x) + r(x)q(x)$,

b) $(p(x) + q(x))r(x) = p(x)r(x) + q(x)r(x)$,

Ejemplo 5.2.4 Determine el valor de A, B, C de modo que los polinomios sean iguales.

$$5x^2 - 2x - 3 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

$\square$

Solución. dado la igualdad polinomial

$$5x^2 - 2x - 3 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

desarrollemos el polinomio de la izquierda

$$\begin{aligned} A(x-1)^2 + B(x-1) + C &= A(x^2 - 2x + 1) + B(x-1) + C \\ &= Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C \\ &= Ax^2 + (-2A + B)x + (A - B + \end{aligned}$$

coeficiente tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} A &=& 5 \\ -2A + B &=& -2 \\ A - B + C &=& 3 \end{array}\right|$$

Luego tenemos que $A = 5, B = 8, C = 6$.**Observación:** En resumen, con esta propiedades se tiene que $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Una propiedad adicional que tenemos en $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es la de cancelación

Proposición 5.2.5 *Sean* $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, *no nulo y* $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$, *entonces*

$$p(x)q(x) = p(x)r(x) \Rightarrow q(x) = r(x)$$

Proposición 5.2.6 *Sean* $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$, *no nulos entonces*

1. $gr(p(x) + q(x)) \leq \max\{gr(p(x)), gr(q(x))\}$.
2. $gr(p(x) \cdot q(x)) = gr(p(x)) + gr(q(x))$.

5.3 División Polinomial

Teorema 5.3.1 *Sea* $p(x), q(x)$ *dos polinomios en* $\mathbb{K}[x]$ *con* $q(x) \neq 0$ *y* $\mathbb{K}$ *un cuerpo* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, *entonces existen polinomios* $s(x)$ *y* $r(x)$ *(únicos) en* $\mathbb{K}[x]$ *tal que se cumple lo siguiente*

$$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$, *o bien* $gr(r(x)) < gr(q(x))$

Ejemplo 5.3.2 Sean $q(x) = 2x^4 + 3x^5 + 2x - 1$ y $p(x) = -2x^5 + 6x^7 + 2$.
Para dividir $p(x)$ por $q(x)$ primero debemos ordenar el polinomio de mayor a menor en los exponente

$$p(x) = 6x^7 - 2x^5 + 2 \qquad q(x) = 3x^5 + 2x^4 + 2x - 1$$

A continuación, buscamos un término que multiplicado $q(x)$ se obtenga el mismo término principal de $p(x)$, en este caso es $2x^2$, para finalmente restar

$$6x^7 - 2x^5 + 2 - 2x^2[3x^5 + 2x^4 + 2x - 1] = -4x^6 - 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 2$$

Para continuar con el proceso. Este proceso concluye debido a que el grado disminuye en cada una de las etapas □

Definición 5.3.3 Sean $p(x), q(x), r(x), s(x)$ polinomios en $\mathbb{K}[x]$.

a Si tenemos $p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$, diremos que $p(x)$ es el **dividendo**, $q(x)$ es el **divisor**, $r(x)$ es el **resto** y $s(x)$ es el **cociente**.

b Diremos que " $q(x)$ **divide** a $p(x)$" o "$p(x)$es **divisible** por $q(x)$" si y sólo si existe $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(x) = q(x)h(x)$.

c Si $p(x) = q(x)h(x)$ entonces la expresión $q(x)h(x)$ es una **factorización** de $p(x)$ y $q(x), h(x)$ son los **factores**.

◊

Ejemplo 5.3.4 Sean $q(x) = 3x^5 + 2x^4 + 2x - 1$ y $p(x) = 6x^7 - 2x^5 + 2$.
Determinar el cociente y el resto al dividir $p(x)$ por $q(x)$ □

Solución.

$$\begin{array}{cccc}
6x^7 - 2x^5 + 2 & : \; 3x^5 + 2x^4 + 2x - 1 & = & 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{9} \\
\underline{-(6x^7 + 4x^6 + 4x^3 - 2x^2)} & & & \\
-4x^6 - 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 2 & & & \\
\underline{-(-4x^6 - \frac{8}{3}x^5 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x)} & & & \\
\frac{2}{3}x^5 - 4x^3 + \frac{14}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 & & & \\
\underline{-(\frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{9}x^4 + \frac{4}{9}x + \frac{2}{9})} & & & \\
-\frac{4}{9}x^4 - 4x^3 + \frac{14}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{20}{9} & & &
\end{array}$$

Luego $s(x) = 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{9}$ y $r(x) = -\frac{4}{9}x^4 - 4x^3 + \frac{14}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{20}{9}$.

5.3.1 Ejercicios

Sea $p(x) = 3x^5 - 2x^3 - 1$ y $q(x) = 4x^2 + 2x - 3$.
Determinar el cociente y el resto al dividir $p(x)$ por $q(x)$

5.3.2 División Sintética

Debemos tener presente que la división sintética, es un arreglo mnemotécnico, que se obtiene a partir de la división habitual de polinomios, y en un caso particular en que el divisor tiene grado 1, es decir, sean $p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ y $q(x) = x - a$.

Veamos un ejemplo particular que se puede generalizar:

Sea $p(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$, entonces

1^{er} **paso**

$$\begin{array}{l}
b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 : x - a = b_3x^2 \\
\underline{-(b_3x^3 - ab_3x^2)} \\
(b_2 + b_3a)x^2 + b_1x + b_0
\end{array}$$

2^{do} **paso**

$$\begin{array}{l}
b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 : x - a = b_3x^2 + (b_3a + b_2)x \\
\underline{-(b_3x^3 - ab_3x^2)} \\
(b_3a + b_2)x^2 + b_1x + b_0 \\
\underline{-[(b_3a + b_2)x^2 - (b_3a + b_2)ax]} \\
(b_1 + (b_2 + b_3a)a)x + b_0
\end{array}$$

3^{er} **paso**

$$\begin{array}{l}
b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 : x - a = b_3x^2 + (b_3a + b_2)x + [b_1 + (b_2 + b_3a)a] \\
\underline{-(b_3x^3 - ab_3x^2)} \\
(b_3a + b_2)x^2 + b_1x + b_0 \\
\underline{-[(b_3a + b_2)x^2 - (b_3a + b_2)ax]} \\
(b_1 + (b_2 + b_3a)a)x + b_0 \\
\underline{-[(b_1 + (b_2 + b_3a)a)x - (b_1 + (b_2 + b_3a)a)a]} \\
(b_1 + (b_2 + b_3a)a)a + b_0
\end{array}$$

Como resultado de esto se tiene que

1. $q(x) = b_3x^2 + (b_2 + a \cdot b_3)x + [b_1 + (b_2 + a \cdot b_3) \cdot a]$.
2. $r(x) = b_0 + [b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a$.

Esquemáticamente la división sintética corresponde a:

1^{er} **paso**

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
a & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
 & & b_3 \cdot a & & \\
 & b_3 & b_2 + b_3 \cdot a & &
\end{array}$$

2^{do} **paso**

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
a & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
 & & b_3 \cdot a & (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a & \\
 & b_3 & b_2 + b_3 \cdot a & b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a &
\end{array}$$

3^{er} **paso**

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
a & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
 & & b_3 \cdot a & (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a & [b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a \\
 & b_3 & b_2 + b_3 \cdot a & b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a & b_0 + [b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a
\end{array}$$

Como resultado se obtiene

a	b_3	b_2	b_1	b_0
		$b_3 \cdot a$	$(b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a$	$[b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a$
	$\underbrace{b_3}_{coef.x^2}$	$\underbrace{b_2 + b_3 \cdot a}_{coef.x}$	$\underbrace{b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a}_{term.indep}$	$\underbrace{b_0 + [b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a}_{resto}$

Caso General,

a	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_1	b_0
		ac_{n-1}	ac_{n-2}		ac_1	ac_1
	b_n	$ac_{n-1} + b_{n-1}$	$ac_{n-1} + b_{n-1}$		$ac_1 + b_1$	$ac_0 + b_0$
	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$		$\Vert$	$\Vert$
	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}		c_0	r

es decir,

$$b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 = (x-a)\left(c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0\right) + r.$$

Ejemplo 5.3.5 Sea $p(x) = 3x^5 - 2x^3 - 1$ y $q(x) = x - 2$, encontraremos $s(x)$ y $r(x)$. □

Solución 1. Para dividir $p(x) = 3x^5 - 2x^3 - 1$ por $q(x) = x - 2$ usando división sintética, ordenemos del siguiente modo los datos

2	3	0	-2	0	0	-1
		$2 \cdot 3$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 10$	$2 \cdot 20$	$2 \cdot 40$
	3	6	10	20	40	79

Luego $q(x) = 3x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 20x + 40$, y $r(x) = 79$, de otro modo

$$3x^5 - 2x^3 - 1 = (x-2)\left(3x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 20x + 40\right) + 79$$

Ejemplo 5.3.6 Aplicar división sintética para dividir $p(x) = 4x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$ por $q(x) = 2x + 1$. □

Solución 2. Para dividir $p(x) = 4x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$ por $q(x) = 2x + 1$ usando división sintética, ordenemos del siguiente modo los datos

$-\frac{1}{2}$	4	0	-3	1	0	-1
		-2	1	1	-1	$\frac{1}{2}$
	4	-2	-2	2	-1	$-\frac{1}{2}$

Luego $4x^5 - 3x^3 + x^2 - 1 = (x + \frac{1}{2})(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1) - \frac{1}{2}$ de otro modo

$$\begin{aligned}
4x^5 - 3x^3 + x^2 - 1 &= (x + \tfrac{1}{2})(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1) - \tfrac{1}{2} \\
&= (x + \tfrac{1}{2})2 \cdot \tfrac{1}{2}(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1) - \tfrac{1}{2} \\
&= (2x+1)(2x^4 - x^3 - x^2 + x - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.3.7 Aplicar división sintética para dividir $p(x) = 3x^5 - 8x^4 - x^3 - x - 1$ por $q(x) = (x+1)(x-2)$. □

Solución 3. Para dividir $p(x) = 3x^5 - 8x^4 - x^3 - x - 1$ por $q(x) = (x+1)(x-2)$ usando división sintética, ordenemos del siguiente modo los datos

-1	3	-8	-3	0	-1	-1
		-3	11	-8	8	-7
	3	-11	8	-8	7	-8
2	3	-11	8	-8	7	
		6	-10	4	-8	
	3	-5	-2	-4	-1	

Luego ahora el resultado>

$$
\begin{aligned}
& 3x^5 - 8x^4 - x^3 - x - 1 \\
= \;& (x+1)(3x^4 - 11x^3 + 8x^2 - 8x + 7) - 8 \\
= \;& (x+1)[(x-2)(3x^3 - 5x^2 - 2x - 4) - 1] - 8 \\
= \;& (x+1)(x-2)(3x^3 - 5x^2 - 2x - 4) - 1(x+1) - 8 \\
= \;& (x+1)(x-2)(3x^3 - 5x^2 - 2x - 4) - (x+9)
\end{aligned}
$$

El cuociente es $3x^3 - 5x^2 - 2x - 4$ y el resto es $-x - 9$

Ejercicios

Realizar las siguientes divisiones sintéticas

1. $p(x) = x^5 - 11x^3 + 5x^2 + x - 3$ por $q(x) = x + 1$.
2. $p(x) = 3x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 3$ por $q(x) = 2x - 1$.

Definición 5.3.8 Sea $q(x)$ un factor de $p(x)$ en $\mathbb{K}[x]$ entonces

1. El polinomio $q(x)$ es un **factor propio** de $p(x)$ si y sólo si el $gr(p(x)) > gr(q(x)) > 0$
2. El polinomio $q(x)$ es un **factor impropio** de $p(x)$ si no es propio.
3. Se dice que $p(x)$ es un **polinomio irreducible** sobre $\mathbb{K}[x]$ si y sólo si $p(x)$ no tiene factores propios.
4. Un polinomio $p(x)$ es **reducible** sobre $\mathbb{K}[x]$ si tiene factores propios.

◊

Ejemplo 5.3.9

1. El polinomio $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+1)(x^2+2)$, luego es reducible en $\mathbb{R}[x]$.
2. El polinomio $x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$
3. El polinomio $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ es reducible en $\mathbb{C}[x]$

□

5.4 Funciones Polinomiales

Sean $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $D \subseteq \mathbb{K}$ entonces se define la función polinomial

$$\begin{array}{cccc} p & D & \to & \mathbb{K} \\ & a & \rightsquigarrow & p(a) \end{array}$$

que consiste en reemplazar la variable por la cantidad a y el grado de la función polinomial es el mismo del polinomio.

Definición 5.4.1 Sea $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$. Se llama **ecuación polinomial** a la proposición

$$p(a) = q(a)$$

y al conjunto $S = \{a \in \mathbb{K} \mid p(a) = q(a)\}$ el conjunto solución de la ecuación polinomial. ♢

Definición 5.4.2 Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.
Se dice que α es una **raíz** de $p(x)$ si y sólo si $p(\alpha) = 0$ ♢

Tenga presente que una ecuación polinomial lineal, tiene solamente una solución, la cual es una raíz.

Teorema 5.4.3 [del Resto]. *Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ de grado n y $a \in \mathbb{K}$, entonces existe un único polinomio $q(x)$ tal que*

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + p(a).$$

Ejemplo 5.4.4 Sea $p(x) = 3x^5 - 2x^3 - 1$ y $q(x) = x - 2$.
Luego

$$p(x) = (x - 2) \cdot s(x) + r(x),$$

donde

$$r(x) = p(2) = 3(2)^5 - 2(2)^3 - 1 = 96 - 16 - 1 = 79.$$

El resto de la división es 79. □

Corolario 5.4.5 [Teorema del Factor]. *Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$*
$p(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si a es una raíz de $p(x)$.

Corolario 5.4.6

1. *Un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces.*
2. *Dos polinomios de grado n son iguales si hay $n + 1$ elementos donde las funciones polinomiales son iguales.*

Teorema 5.4.7 *Sea $p(x) : a_n x^n + \cdots + a_0$, polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces existen los $r_i \in \mathbb{C}$ y son las raíces de $p(x)$ y se cumple*

$$p(x) = a_n \underbrace{(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)}_{n \text{ factores de grado } 1},$$

Teorema 5.4.8 *Sea $p(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{R}$, si $z = a + bi$ con $b \neq 0$ es raíz de la ecuación $p(x) = 0$, entonces $\overline{z} = a - bi$ también es una raíz de $p(x)$.*

Ejemplo 5.4.9 Encontrar todas las raíces de $p(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 22x - 40$, sabiendo que $x = -1 + 3i$ es una raíz de $p(x)$.
Como $x = -1 + 3i$ es una raíz, por teorema anterior sabemos que $x = -1 - 3i$ también es raíz de $p(x)$, luego

$-1+3i$	1	5	12	22	-40
		$-1+3i$	$(4+3i)(-1+3i)$	$(-1+9i)(-1+3i)$	$(-4-12i)(-1+3i)$
	1	$4+3i$	$-1+9i$	$-4-12i$	0

Volvemos a realizar división sintética

$-1-3i$	1	$4+3i$	$-1+9i$	$-4-12i$
		$1(-1-3i)$	$3(-1-3i)$	$-4(-1-3i)$
	1	3	-4	0

Ahora el polinomio se descompone de la siguiente manera

$$p(x) = (x - (-1 + 3i))(x - (-1 - 3i))(x^2 + 3x - 4).$$

las raíces del polinomio $x^2 + 3x - 4$ son $1, -4$, luego tenemos que

$$p(x) = (x - (-1 + 3i))(x - (-1 - 3i))(x - 1)(x + 4).$$

$\square$

Ejercicios

Determinar un polinomio de grado 4 con coeficiente en los reales, tal que $1 + i$ y $1 - 2i$ son raíces del polinomio.

Teorema 5.4.10 *Todo polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado mayor que 1 puede ser factorizado en factores lineales o cuadráticos irreducibles, donde factorización es única salvo orden de los factores.*

Definición 5.4.11 Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.
Se dice que la raíz c tiene **multiplicidad** t en $p(x)$ si y solo si $p(x) = (x - c)^t \cdot s(x)$, con $t \geq 1$ y $s(c) \neq 0$. $\lozenge$

Ejercicios

Determine la multiplicidad de $2, -2$ en $p(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 36x + 72$.

Ejercicios

Determine si 1 es una raíz multiple de $p(x) = x^5 - 3x^4 + 8x^2 - 9x + 3$.

Teorema 5.4.12 [Posibles Raíces Racionales]. *Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ primos relativos tal que $\frac{p}{q}$ es una raíz del polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, entonces se cumple que p divide a a_0 y que q divide a a_n.*

Ejemplo 5.4.13 Sea $p(x) = 2x^6 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6$.
Determinar las posibles raíces racionales de $p(x)$.
Si $\frac{p}{q}$ es una raíz de $p(x)$, entonces

a p divide a -6, por lo tanto $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

b q divide a 2, por lo tanto $q \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Luego las posibles raíces racionales están dadas por

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\},$$

□

Teorema 5.4.14 [Cotas de ceros reales para polinomios reales]. *Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, donde $a_n > 0$, y $p(x)$ se divide por $(x - r)$ usando división sintética, entonces:*

1. *Si $r \geq 0$ y todos los números de la última fila de la división sintética (coeficientes de cociente y residuo) son mayores e iguales a 0 entonces para todo t con t raíz de $p(x)$ se tiene que $t \leq r$*

2. *Si $r \leq 0$ y todos los números de la última fila de la división sintética alternan en signo (se admite $+0$ y -0) entonces para todo t, con t raíz de $p(x)$ se tiene que $t \geq r$*

Ejemplo 5.4.15 Sea $p(x) = 2x^6 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6$.
Determinar todas las raíces racionales de $p(x)$ □

Solución. Como las posibles raíces racionales son:

$$p/q \in P = \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\},$$

Evaluamos en $\frac{p}{q} = 1$,

$$p(1) = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 6 = 2 - 7 - 4 - 6 = 0.$$

Por tanto $\frac{p}{q} = 1$ es una raíz de $p(x)$, ahora realizamos división sintética.

1	2	0	0	-7	4	7	-6
		$2 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$-5 \cdot 1$	$-1 \cdot 1$	$6 \cdot 1$
	2	2	2	-5	-1	6	0

$$p(x) = (x - 1)(2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - x + 6),$$

Ahora veremos si $\frac{p}{q} = 1$ es una raíz multiple

1	2	2	2	-5	-1	6
		$2 \cdot 1$	$4 \cdot 1$	$6 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$0 \cdot 1$
	2	4	6	1	0	$6 \neq 0$

Luego $\frac{p}{q} = 1$ es una raíz simple, y no hay mayores a 1 raíces,

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c} \frac{1}{2} & 2 & 2 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ \hline & & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{13}{8} & -\frac{21}{16} \\ & 2 & 3 & \frac{7}{2} & -\frac{13}{4} & -\frac{21}{8} & \frac{75}{16} \neq 0 \end{array}$$

No hay más raíces positiva racionales de $p(x)$.

Ahora veremos las raíces negativas de

$$q(x) = 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

Consideremos ahora a $p/q = -1$, luego

$$\begin{aligned} q(-1) &= 2(-1)^5 + 2(-1)^4 + 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - (-1) + 6 \\ &= -2 + 2 - 2 - 5 + 1 + 6 \\ &= -7 + 7 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como -1 es raíz, hacemos división sintética:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c} -1 & 2 & 2 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ \hline & & 2(-1) & 0(-1) & 2(-1) & (-7)(-1) & 6(-1) \\ & 2 & 0 & 2 & -7 & 6 & 0 \end{array}$$

Luego hemos factorizado

$$p(x) = (x-1)(x+1)(2x^4 + 2x^2 - 7x + 6)$$

Para determinar si existe otras raíces negativas, argumentamos de la siguiente forma, para ello sea

$$s(x) = 2x^4 + 2x^2 - 7x + 6$$

Si $-a \in P$ un número negativo

$$s(-a) = 2a^4 + 2a^2 + 7a + 6 > 0$$

con lo cual obtenemos que no existe raíces negativas.

Ejercicios

Determinar las raíces racionales de los polinomios

a) $p(x) = 8x^6 + 20x^5 - 2x^4 - 25x^3 - 13x^2 + 5x + 3$

b) $p(x) = 4x^3 - 20x^2 - 23x + 6$

Definición 5.4.16 [Variación de signo]. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, cuando los términos de $p(x)$ se ordenan en orden creciente de potencias, decimos que ocurre una **variación de signo**, si dos términos consecutivos tienen signos opuestos. Los términos que el coeficiente es cero se ignoran. $\Diamond$

Ejemplo 5.4.17 Sea $p(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 + x + 5$, podemos observar que en $p(x)$ hay dos variaciones de signo, ahora si reemplazamos x por $-x$ se obtiene

$$\begin{aligned} p(-x) &= 2(-x)^5 - (-x)^4 - (-x)^3 - x + 5 \\ &= -2x^5 - x^4 + x^3 - x + 5 \end{aligned}$$

luego tenemos tres variaciones en $p(-x)$. Estas variaciones las denotamos como:

$$\nu(p(x)) = 2, \quad \nu(p(-x)) = 3.$$

□

Teorema 5.4.18 [Regla de los signos]. *Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces*

1. *El número de raíces reales positivas de $p(x)$, contados cada uno, tantas veces como indique su multiplicidad, es igual o menor que $\nu(p(x))$ en un número par.*

2. *El número de raíces reales negativas de $p(x)$, contados, cada uno, tantas veces como indique su multiplicidad es igual o menor que $\nu(p(-x))$ en un número par.*

Ejemplo 5.4.19 Sea $p(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 + x + 5$, por el ejemplo anterior tenemos que

$$\nu(p(x)) = 2, \quad \nu(p(-x)) = 3.$$

Por lo tanto el polinomio $p(x)$ tiene 2 o 0 raíces positiva y 3 o 1 raíces negativas □

Ejercicios

Determinar las posibles raíces positivas y negativas de polinomio

$$p(x) = x^5 - x^3 + x + 1.$$

Teorema 5.4.20 *Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $p(a)p(b) < 0$ entonces existe $\alpha \in [a, b]$ un raíz del polinomio.*

Ejercicios

Para cada uno de los polinomios, determinar si existe una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

1. $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 5$

2. $p(x) = \frac{3}{2}x^3 + x^2 + x - \frac{1}{2}$

5.5 Descomposición de fracciones parciales

Sean $p(x), q(x)$ dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Si el $gr(p(x)) \geq gr(q(x))$, dividimos $p(x)$ por $q(x)$ para obtener $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$, luego dividiendo por $q(x)$ obtenemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde $r(x) = 0$ o $gr(r(x)) < gr(q(x))$.

Por ejemplo:

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x^2 - x - 1 + \frac{-6x + 2}{x^2 - 2x + 1}.$$

Por lo anterior podemos suponer que en el cuociente $p(x)/q(x)$, tenemos que $gr(p(x)) < gr(q(x))$

Definición 5.5.1 Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, diremos que $p(x)/q(x)$ es una **fracción propia** si el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. $\diamondsuit$

Teorema 5.5.2 [Descomposición en fracciones parciales]. *Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios reales, entonces cualquier fracción propia $p(x)/q(x)$ se puede descomponer en la suma de* ***fracciones parciales*** *como sigue:*

1. *Si $q(x)$ tiene un factor lineal, de la forma $ax+b$, no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales de $p(x)/q(x)$, contiene un término de la forma*

$$\frac{A}{ax + b},$$

donde A es una constante.

2. *Si $q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces, de la forma $(ax + b)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales de $p(x)/q(x)$ contiene términos de la forma:*

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k},$$

donde $A_1, A_2, \ldots, a_k$ son constantes.

3. *Si $q(x)$ tiene un factor irreducible de la forma $ax^2 + bx + x$, no repetido, la descomposición en fracciones parciales de $p(x)/q(x)$ contiene un término de la forma*

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

donde A y B son constantes.

4. *Si $q(x)$ contiene un factor irreducible repetido k veces, de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales de $p(x)/q(x)$ contiene términos de la forma*

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k},$$

donde $A_1, \ldots, A_k$ y $B_1, \ldots, B_k$ son constantes.

Ejemplo 5.5.3 a. Determine la forma de la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{7}{(x - 1)^2(x + 3)}$$

solución
$$\frac{7}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$
b. Determine la forma de la descomposición en fracciones parciales de
$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+x+3)}$$
solución
$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+3}$$
Note que el polinomio x^2+x+3 es irreducible en $\mathbb{R}[x]$.
c. Determine la forma de la descomposición en fracciones parciales de
$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+3)^2}$$
solución
$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+3)^2}$$

□

Ejemplo 5.5.4
$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)}$$

□

Solución 1. Por teorema se tiene
$$\begin{aligned} \tfrac{5x+7}{(x-1)(x+3)} &= \tfrac{A}{x-1} + \tfrac{B}{x+3} \\ &= \tfrac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \end{aligned}$$
luego igualamos los numeradores,
$$\begin{aligned} 5x+7 &= A(x+3)+B(x-1) \\ &= (A+B)x+(3A-B) \end{aligned}$$
de donde
$$\left.\begin{aligned} A+B &= 3 \\ 3A-B &= 7 \end{aligned}\right|$$
donde se obtiene que $A=3$ y $B=2$.

Por tanto
$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3}$$

Ejemplo 5.5.5
$$\frac{x^3-4x^2+9x-5}{(x^2-2x+3)^2}$$

□

Solución 2. Note que $\Delta(x^2-2x+3)=-5<0$, por ello es irreducible el polinomio, por teorema se tiene

$$\begin{aligned}\tfrac{x^3-4x^2+9x-5}{(x^2-2x+3)^2} &= \tfrac{Ax+B}{(x^2-2x+3)}+\tfrac{Cx+D}{(x^2-2x+3)^2}\\ &= \tfrac{(Ax+B)(x^2-2x+3)+Cx+D}{(x^2-2x+3)^2}\end{aligned}$$

luego, igualamos los numeradores,

$$\begin{aligned}x^3-4x^2+9x-5 &= (Ax+B)(x^2-2x+3)+Cx+D\\ &= Ax^3+(B-2A)x^2+(3A-2B+C)x+(3B+D)\end{aligned}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{rcr} A &=& 1\\ -2A+B &=& -4\\ 3A-2B+C &=& 9\\ 3B+D &=& -5\end{array}\right|$$

resolviendo se obtiene que $A=1, B=-2, C=2, D=1$.

Por tanto, se obtiene que

$$\frac{x^3-4x^2+9x-5}{(x^2-2x+3)^2}=\frac{x-2}{(x^2-2x+3)}+\frac{2x+1}{(x^2-2x+3)^2}$$

Ejercicios

Descomponga en fracciones parciales

1. $\frac{7x+6}{x^2+x-6}$
2. $\frac{5x+7}{x^2+2x-3}$
3. $\frac{6x^2-14x-27}{(x+2)(x-3)^2}$
4. $\frac{x^2+11x+15}{(x-1)(x+2)^2}$
5. $\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}$
6. $\frac{3x^3-6x^2+7x-2}{(x^2-2x+2)^2}$

5.6 Guía Ejercicios

1. Hallar los valores de A, B, C, D, en cada caso, de modo que los polinomios sean iguales

   a) $2x^2-3x-1=A(x-1)^2+B(x-1)+C$

   b) $x^3-3x^2+2x-7=A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D$

2. Hallar el cuociente y el residuo de las siguientes divisiones

   a) $(2x^3 + 11x^2 + 22x + 15) : (2x + 3)$
   b) $(4x^5 - x^4 + 12x^3 + 2x^2 + x + 5) : (4x^3 - x^2 + 1)$
   c) $(13x^3 + 3x + 10x^5 - 16 - 18x^2 - 4x^4 + 2x^3) : (3 + 2x^2)$
   d) $(x^6 + 1) : (x^2 + 1)$

3. Sea $p(x) = x^9 + x^8 + x + 1$

   Factoricé $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$

4. Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}^+$ para que el polinomio $p(x) = -x^3 - k^2x^2 + x + k$, tenga solamente una raíz en $[0, 1]$

5. Sea $p(x) = 9x^8 - 24x^7 + 4x^6 + 40x^5 - 70x^4 + 88x^3 - 68x^2 + 24x - 3$. Factorizar $p(x)$ en $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$, si se sabe que $1, i, \sqrt{3}$,son raíces de $p(x)$.

6. Sabiendo que $(x - 2)^2$ es un factor de $x^3 + 2px + q$. Determinar p, q.

7. Obtener un polinomio $p(x)$ del menor grado posible, tal que $p(1) = 0 = p(1 - i)$

   a) $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$
   b) $p(x)$ en $\mathbb{C}[x]$

8. Demuestre que, si $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, entonces $p(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ es divisible por $x(x - 1)(2x + 1)$.

9. Determinar si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas.

   a El polinomio $8x^{4n} + x^2 + 60$ no tiene raíces reales, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   b El polinomio $2x^{n+1} - 4x^n + 1$ tiene al menos una raíz en $]1, 2[$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   c El polinomio $x^{8n} - x + 1$ tiene raíces racionales, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   d 1 es una raíces de multiplicidad 2 del polinomio $x^6 - x^5 - x + 1$

10. Sea $p(x) = x^7 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{5}{3}x^5 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$. Factoricé al máximo $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.

11. Sea $p(x) = 3x^4 - 7x^3 + 6kx^2 + 12k^2x - 2$. Determine el $k \in \mathbb{R}$, de modo que $(x - 1)^2$ sea un divisor de $p(x)$, y factorizar $p(x)$.

12. Encuentre los valores de k para los cuales $2x^3 - kx^2 + 6x - 3k$, es divisible por $x + 2$.

13. Sea $p(x) = x^4 + ax^3 - bx^2 + 8x + c$. Determine el valor de la constante $a, b, c \in \mathbb{R}$, de modo que 2 sea una raíz doble de $p(x)$ y al dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ el resto es -1.

14. Factoricé en $\mathbb{C}[x]$, el polinomio $p(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 16x + 24$, sabiendo que $p(2i) = 0$.

15. Sea $p(x) = 3x^5 - 20x^4 + 33x^3 + 28x^2 - 118x + 60$, se sabe que una de las raíces es $2 + i$.

a) Factoricé $p(x) = q(x) * r(x)$, donde $gr(q(x)) = 3$ y $gr(r(x)) = 2$.

b) Determinar las posibles raíces racionales de $p(x)$.

16. Sea $p(x) = 2x^5 - 13x^4 + 8x^3 + 50x^2 + ax + b$. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que 7 sea una raíz de $p(x)$, y al dividir $p(x)$ por $(x+2)$ el resto es -100.

17. Hallar un polinomio de grado menor tal que $p(x) = p(x-1)$, y $p(0) = \frac{1}{2}$.

18. Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que el polinomio $4x^4 + ax^2 + bx - 4$, sea divisible por $2x^2 + 3x - 2$.

19. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^3 + ax - b$, sabiendo que -2 es una raíz de $p(x)$ y que al dividir $p(x)$ por $(x-2)$ el resto es 2.

20. Sea $p(x) = x^5 - 2x^4 - ax^2 + bx + c$. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $(x+1)$ sea un factor de $p(x)$, $p(3) = -6$ y al dividir $p(x)$ por x el resto es 3.

21. Sea $p(x) = x^5 + 3x^4 - ax^3 - 6x^2 + 4bx - 12a$.

    a Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $\sqrt{2}i$ sea un raíz de $p(x)$.

    b Determine las raíces del polinomio $p(x)$.

22. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que 2 sea una raíz de multiplicidad 2 del polinomio $p(x) = ax^2(x^2-1) - 7x(x^2-4) - 8b$

23. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que -1 sea una raíz de doble del polinomio $p(x) = ax^4 - bx^3 + 2x^2 + 3$

24. Determinar todas las raíces del polinomio $p(x) = 6x^8 - x^7 - 55x^6 + 9x^5 - 15x^4 + 4x^3 + 220x^2 - 36x - 36$.

    Sabiendo que $\sqrt{2}, \sqrt{2}i$, son raíces de $p(x)$.

    a Descomponer en factores irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

    b Descomponer en factores irreducibles en $\mathbb{C}[x]$.

25. Sea $p(x) = ax^4 - x^3 + 2x^2 + 3a$.

    Hallar $a \in \mathbb{R}$, tal que -1 es una raíz de $p(x)$.

26. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que $p(x) = ax^4 + bx + 1$, tenga como raíz a -1 y que al dividir por $(x+2)$ da resto -8.

27. Sea $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + mx^2 - 12x - 12$. Si $(x+2i)$ es un factor de $p(x)$ y -1 es una raíz

    Determinar $m \in \mathbb{R}$, y factoricé.

28. Determine los cero racionales de

    a) $x^3 + 4x^2 + 9x + 6$.

b) $2x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6$.

29. Determine los valores de $m \in \mathbb{R}$, para que la ecuación $x^3 + 2x^2 + mx - 3 = 0$, tenga al menos una raíz racional.

30. Sea $p(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 9$

    a Existe una raíz en el intervalo $[1, 2]$ de $p(x)$.

    b Encontrar todas las raíces de $p(x)$.

31. Factorizar $p(x) = 2x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 4x^3 - 6x^2 + x + 3$ en $\mathbb{R}[x]$

32. Obtener un polinomio de grado 6 con coeficiente entero que tenga a $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{2}$ como raíces.

33. Encontrar cota superior e inferior para

    a) $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$.

    b) $x^4 - x^2 + 3x + 2$.

34. Sea $p(x) = 2x^2 - 5x + 3$ y $q(x) = x - c$.

    Determinar $c \in \mathbb{R}$, tal que al dividir $p(x)$ por $q(x)$ da resto 10.

35. Encontrar las raíces del polinomio $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36$, si las suma de dos de sus raíces es cero.

36. Encontrar las raíces del polinomio $4x^3 + 20x^2 - 23x + 6$ si dos raíces son iguales.

37. Determinar a y b tal que -1 es un cero doble del polinomio, $x^4 + ax^3 + (a+b)x^2 + bx + 1$.

38. Dado el polinomio

$$p(x) = 6x^6 - 20x^4 + 5x^5 + 20x^3 - 108x^2 + 15x + 18$$

    Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

    a) Existe al menos una raíz de $p(x)$ en intervalo $[0, 1]$.........................

    b) El resto al dividir $p(x)$ por $(x + 1)$ es 144.........................

    c) El resto al dividir $p(x)$ por $(x^2 - 1)$ es $40x - 104$ ....

    d) -3 es una cota inferior de las raíces de $p(x)$.........................

39. Dadas $a, b \in \mathbb{R}$ y el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 - 5x + b$.

    a Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, Si el resto al dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ es -8 y $p(-2) = 4$

    b Factorizar $p(x)$.

40. Dado el polinomio

$$p(x) = 4x^6 - 33x^4 - 4x^5 + 9x^3 + 56x^2 - 2x - 12$$

Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

a) Existe al menos una raíz de $p(x)$ en intervalo $[0, 1]$.........................
b) El resto al dividir $p(x)$ por $(x + 1)$ es 36.........................
c) El resto al dividir $p(x)$ por $(x^2 - 1)$ es 36 ....
d) -3 es una cota inferior de las raíces de $p(x)$.........................

41. Dadas $a, b \in \mathbb{R}$ y el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 - 5x + b$.

a) Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, tal que el resto al dividir $p(x)$ por $x^2 - 2x - 3$ es 12
b) Factorizar $p(x)$.

42. Determinar A, B, C, D en los reales tal que

$$x^3 + x^2 - 3 = A(x^2 + 1)(x - 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)^2$$

43. Dadas $a, b \in \mathbb{R}$ y el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 - 5x + b$.

a Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, tal que el resto al dividir $p(x)$ por $x^2 - 3x + 2$ es 8
b Factorizar $p(x)$.

44. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que 2 sea una raíz de multiplicidad 2 del polinomio $p(x) = ax^2(x^2 - 2) - x(x^2 - 4) - 8b$

45. Determinar $a, b \in \mathbb{R}^*$, de modo que $(x - 2)^2$ divida al polinomio

$$p(x) = ax(x^3 + 16) - bx^2\,(x - 5) - 2ab$$

46. Determinar si existe $a, b \in \mathbb{R}^*$, de modo que $(x + 2)^2$ divida al polinomio

$$p(x) = ax(x^3 - 4) + bx^2\,(2x - 3) - 2ab$$

47. Sea $p(x) = x^4 - 3x^2 + bx + c$. Determinar el valor de las constantes $b, c \in \mathbb{R}$, de modo que -2 es una raíz de $p(x)$ y de resto 2 al dividir $p(x)$ por $(x - 1)$

48. Sea $p(x) = 3x^4 - 7x^3 + 6kx^2 + 12k^2x - 2$. Determine el $k \in \mathbb{R}$, de modo que $(x - 1)^2$ sea un divisor de $p(x)$.