

Capítulo 5

Guías de Ejercicios

5.1. Guía Plano Afín

1. Sean V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión dos, $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$, con

$$\begin{aligned} l_1 &= \langle \vec{v}_1 \rangle + \vec{w}_1 \\ l_2 &= \langle \vec{v}_2 \rangle + \vec{w}_2 \end{aligned}$$

Demuestre que $l_1 \parallel l_2$, si y sólo si, $\langle \vec{v}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2 \rangle$

2. Sean V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión dos, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de V y las rectas dadas por

$$\begin{aligned} l_1 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \langle \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \rangle \\ l_2 &= 2\vec{v}_1 + \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle \end{aligned}$$

Calcule $l_1 \cap l_2$.

3. Sean V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión dos, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de V .

Si $A = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$ y $B = 4\vec{v}_1$.

Determine la ecuación cartesiana de la recta l_{AB} .

4. Sean V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión dos, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de V .

Si $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in m$ y $m \parallel l$ y $l = \vec{v}_1 + \langle \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \rangle$.

Determine la ecuación cartesiana de la recta m .

5. Sean V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión dos, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de V .

Si $A = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, C = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ y $D = \vec{v}_1$.

Determine la ecuación cartesiana de la recta m respecto a la base B , tal que $m \parallel l_{AC}$ y $D \notin m$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión dos sobre $\mathbb{K}$, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ base de V .
Sea l recta de ecuación $y = 2x + 1$ respecto a la base B , $t = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \langle \vec{v}_2 + 5\vec{v}_1 \rangle$.
Determine $l \cap t$.
7. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimension 2. sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ base de V .
Sea $A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $B = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $C = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $D = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.
8. Sean $A = (-1, 3)$, $B = (2, -7)$, $C = (2, -1)$ y $D = (4, 5)$ puntos en el plano de Moulton,.
Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.
9. Sean $A = (-3, 5)$, $B = (4, -2)$, $C = (1, 1)$ y $D = (0, 2)$ puntos en el plano de Moulton,.
Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.
10. Sean $A = (-3, 5)$, $B = (-2, 2)$, $C = (-1, 1)$ y $D = (0, 2)$ puntos en el plano de Moulton.
Calcular:
 - a) $l_{AB} \cap l_{CD}$.
 - b) Determinar un punto E tal que $l_{AB} \parallel l_{CE}$.
11. Sean $A = (1, 2)$, $B = (-2, 3)$ y $C = (1, 1)$ puntos en el plano de Moulton.
Determinar la ecuación de la recta m en el plano de Moulton que cumple con $m \parallel l_{AB}$ y $c\mathcal{I}m$.
12. Sean $A = (1, 2)$, $B = (-1, -1)$ y $C = (2, 5)$ puntos en el plano de Moulton.
Determinar la ecuación de la recta m en el plano de Moulton que cumple con $m \parallel l_{AB}$ y $c\mathcal{I}m$.
13. Sean $A = (1, 1)$ y $B = (3, 0)$ puntos en el plano $\mathbb{R}^2$.
Determine
 - a) La ecuación de la recta en el plano afín vectorial real que une A con B .
 - b) La ecuación de la recta en el plano afín de Moulton que une A con B .
14. Sean $A = (1, 2)$ y $B = (3, 5)$ puntos en el plano $\mathbb{R}^2$.
Determine
 - a) La ecuación de la recta en el plano afín vectorial real que une A con B .
 - b) La ecuación de la recta en el plano afín de Moulton que une A con B .
15. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (2x - y + 1, x + y)$.
Sea $l = \langle (1, 1) \rangle + \langle (2, 3) \rangle$ en el plano afín vectorial. Calcule $T(l)$.

16. Dada la recta de ecuación $l: \langle (2, 3) \rangle + (0, 1)$, en el plano vectorial real.

Encuentre la ecuación de $T(l)$, donde

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (4x - 2y + 1, 3x + 2y - 1) \end{aligned}$$

17. Sea

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightsquigarrow (x + 2y + 1, 3x - y + 4) \end{aligned}$$

Demuestre que T es una colineación en el plano afín vectorial real.

18. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (2x + y + 1, x - y + 6)$.

Demostrar que T es una colineación del plano afín vectorial $\mathbb{R}^2$.

19. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (x + 2, y + 2)$.

Demuestre que T no es una colineación en el plano de Moulton.

20. Sean $A = (1, 1)$, $B = (-2, 4)$ y $C = (6, 5)$ puntos en el plano de Moulton.

a) Determinar la ecuación de la recta m tal que $m \parallel l_{AB}$ y $c\mathcal{I}m$.

b) Determine el orden de $D = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid t_{\vec{v}}(l_{AB}) = m \}$, donde $t_{\vec{v}}$ es la traslación.

21. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (2x + 1, 2y + 5)$.

Determinar los puntos y rectas fijas f .

22. Sea f una dilatación en el plano vectorial real tal que $f(0, 0) = (1, 0)$, $f(0, 4) = (1, 3)$.

Determine $f(x, y)$

23. Sea T traslación en el plano vectorial real tal que $T(3, 1) = (1, 2)$.

Determine las trazas de T

24. Sea σ una homotecia en el plano vectorial real, tal que σ tiene razón tres y $\sigma(2, 1) = (1, 2)$.

Determine las trazas de σ

25. Sea σ una homotecia del plano afín $\mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$. Si el centro de σ es $(1, 2)$ y $\sigma(2, 1) = (3, -3)$.

Determinar $\sigma(x, y)$.

26. Sea T una traslación del plano afín vectorial $V = \mathbb{F}_5^2$ tal que $T(3, 5) = (-1, 7)$.

Sea σ una homotecia de centro $(8, 7)$ y razón 2

a) Determine $(T \circ \sigma)(x, y)$

b) Calcular $(T^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ T)(x, y)$

27. Determine $F \in D(\mathbb{R}^2)$ tal que $T \circ F = F \circ T$, en donde:

$$T : \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \rightsquigarrow (y, x) + (2, 3)$$

28. Sea $\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tal que el centro de σ es $(1, 2)$ y $\sigma(1, 3) = (1, 6)$. Sea τ traslación que cumple con $\tau(1, 0) = (0, 1)$.

Calcular $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}(x, y)$

29. Sea $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homotecia de centro $(1, 2)$ y razón 3. Sea $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ traslación tal que $\tau(0, 0) = (1, 1)$.

Calcular $(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1})(x, y)$.

30. Sea $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ traslación tal que $\tau(1, 1) = (2, 3)$. $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homotecia de razón 3 y $\sigma(4, 1) = (1, 4)$.

Determinar las trazas de $(\tau \circ \sigma)$ en el plano afín ectorial.

31. Sean $\Pi = \mathbb{F}_{11} \times \mathbb{F}_{11}$ plano afín, $f \in D(\Pi)$, tal que $f(6, 9) = (3, 3)$ y $f(10, 1) = (4, 1)$

a) Determine el conjunto de trazas de f

b) Se define $R = \{l \in \mathcal{L} \mid l \text{ es traza de } f\}$. Determine la cardinalidad de R

32. Sea $\sigma, \tau \in D(\mathbb{R}^2)$ tal que $\tau(1, 3) = (2, 2)$, $\sigma(-2, 0) = (-2, 0)$ y $\sigma(1, -1) = (3, 1)$.

Determine:

a) $(\tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1})(x, y)$

b) Las trazas de $(\tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1})$

33. Sean $\mathbb{K}$ cuerpo y Π el plano afín vectorial, f la homotecia de centro $\vec{v}$ y razón α y t traslación $t(\vec{0}) = \vec{u}$.

Calcule $(f \circ t \circ f^{-1} \circ t^{-1})(\vec{w})$

34. Sea $\Pi = \mathbb{R}^2$, $\sigma, \tau \in D(\mathbb{R}^2)$, tal que σ es homotecia de razón α y $\sigma(\vec{v}) = \vec{w}$ y τ traslación tal que $\tau(\vec{w}) = \vec{v}$.

Determine las rectas fijas y puntos fijos de $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$

35. Sea Π el plano afín, g traslación de Π y f colineación de Π .

a) Demuestre que $f^{-1} \circ g \circ f$ es una traslación de Π

b) Si $[l]$ es la dirección de g . Determine la dirección de traslación $f^{-1} \circ g \circ f$

36. Sea $\mathbb{F}_q$ cuerpo finito de q elementos, $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ el plano afín vectorial, l una recta en Π . Si $H = \{f \in D(\Pi) \mid f(l) = l\}$.

Calcule el orden de H

37. Sea $\mathbb{F}_q$ cuerpo finito de q elementos, $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ el plano afín vectorial, l_1, l_2 rectas de Π .
Si $H = \{f \in D(\Pi) \mid l_2, l_1 \text{ son traza de } f\}$.

Calcule el orden de H

38. Sea $\Pi = \mathbb{F}_{11} \times \mathbb{F}_{11}$ plano afín vectorial y $P \in \mathcal{P}, l \in \mathcal{L}$.

Si $H = \{f \in D(\mathbb{F}_{11}^2) \mid f(P) = P \wedge f(l) = l\}$.

Calcule el orden de H

39. Sea $\Pi = \mathbb{F}_{31} \times \mathbb{F}_{31}$ espacio afín vectorial. $\sigma \in \mathcal{D}(\Pi)$ una homotecia de razón 2. y centro $(1, 1)$

$$H = \{f \in D(\Pi) \mid f \circ \sigma = \sigma \circ f\}.$$

Calcule el orden de H

40. Sea $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. $\sigma \in \mathcal{D}(\Pi)$ una homotecia de razón -1 . y centro $(1, 1)$

$$H = \{f \in D(\Pi) \mid f \circ \sigma = \sigma \circ f\}.$$

Calcule el orden de H

41. Sea $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. $A, B \in \mathcal{P}$ distintos

$$X = \{f \in D(\Pi) \mid f(A) = B\}.$$

Calcule el orden de X

42. Sea t una traslación de $\mathbb{F}_7 \times \mathbb{F}_7$ tal que $t(1, 2) = (1, 0)$.

Determinar σ dilatación tal que $\sigma \circ t \circ \sigma^{-1} = t$

43. Sea $\Pi = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$, y $H_{(1,2)}$ el grupo de homotecias de centro $(1, 2)$.

Describir la tabla de $H_{(1,2)}$.

44. Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ plano afín. Si $\sigma \in D(\Pi), t \in T(\Pi)$.

Demuestre que $(\sigma \circ t \circ \sigma^{-1})$ es una traslación.

45. Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ plano afín. Si $\sigma \in \text{Aut}(\Pi), t \in T(\Pi)$.

Demuestre que $(\sigma \circ t \circ \sigma^{-1})$ es una traslación.

46. Sea Π plano afín, $\sigma \in D(\Pi)$, l recta de Π , $\sigma(l) = l$, $P \in \mathcal{P}$, $P \notin l$ y $\sigma(P) = P$.

Demostrar que $\sigma = Id$.

47. Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ un plano afín de orden n . Sea $l \in \mathcal{L}$, recta fija.

En $\mathcal{P}$ se define la siguiente relación

$$A \sim B \Leftrightarrow l_{AB} \parallel l$$

- a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- b) Determine el número de clases de equivalencia y cardinalidad de cada clase.

48. Sea $\mathbb{K}$ cuerpo y la relación $\sim$ sobre $\mathbb{K}^2$ plano afín vectorial dada por

$$\vec{u} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \exists \sigma \in D(\mathbb{K}^2), \sigma(\vec{w}) = \vec{u}, \sigma(\vec{v}) = \vec{v}$$

- a) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- b) Describir las clases de equivalencias.

49. Sea $\mathbb{K}$ cuerpo y la relación $\sim$ sobre $\mathbb{K}^2$ plano afín vectorial dada por

$$\vec{u} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{K}^2, t_{\vec{w}}(\vec{u}) = \vec{v}$$

- a) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- b) Describir las clases de equivalencias.

50. Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de puntos con cardinal n^2 , con $n > 1$ y $\mathcal{L}$ una colección de subconjuntos de $\mathcal{P}$ tales que

- a) Cada elemento de $\mathcal{L}$ contiene n puntos
- b) Si $P, Q \in \mathcal{P}$ distintos entonces existe única $l \in \mathcal{L}$ tal que $P, Q \in l$

Demstrar que $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ es un plano afín

51. Sea Π un plano afín. Demuestre que Π contiene al menos 3 pares de paralelas

52. ★ Sea $\Pi = \mathbb{F}_q^2$ el plano afín vectorial, P un punto, H_P el grupo de las homotecias de centro P .

$$\vec{u} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \exists \sigma \in H_P, \sigma(\vec{u}) = \vec{v}$$

Calcule el número de clases y la cardinalidad de cada clases.

53. ★ Sea $\Pi = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ plano afín vectorial. Calcular $|Aut(\Pi)|$.

54. ★ Sea $\Pi = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ plano afín vectorial. Calcular $|D(\Pi)|$.

55. ★ Sea A, B, C, D puntos distintos del plano afín vectorial real tal que $l_{AB} \parallel l_{CD}$.

- a) Demostrar que existe una única f dilatación tal que $f(A) = C$ y $f(B) = D$.
- b) Determine cuando f es homotecia y cuando f es traslación.

56. ★ Sea Π un plano afín $f \in Aut(\Pi)$, $g \in D(\Pi)$.

Demstrar que $f \circ g \circ f^{-1} \in D(\Pi)$.

57. ★ Determinar todas las transformaciones lineales invertible de $\mathbb{R}^2$, las cuales son colineación del plano de Moulton.

5.2. Guía Plano Projectivos

1. Comprobar que los tres puntos $\langle (1, 2, 2) \rangle$, $\langle (3, 1, 4) \rangle$ y $\langle (2, -1, 2) \rangle$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ son colineales, y determinar una ecuación de la recta que pasa por ellos.
2. Sean $A = \langle (1, 2, 1) \rangle$, $B = \langle (1, 1, 1) \rangle$ puntos del plano $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.
Determinar la ecuación cartesiana de l_{AB} .
3. Sean $A = \langle (3, 2, 1) \rangle$, $B = \langle (1, 1, 2) \rangle$ puntos del plano $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{19}^3)$.
Determinar la ecuación cartesiana de l_{AB} .
4. Sean $A = \langle (1, 2, 1) \rangle$, $B = \langle (0, 1, 2) \rangle$, $C = \langle (1, 1, 2) \rangle$, $D = \langle (1, 1, 1) \rangle$ puntos del plano $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.
Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.
5. Sean $A = \langle (1, 0, 1) \rangle$, $B = \langle (0, 1, 1) \rangle$, $C = \langle (1, 0, 2) \rangle$, $D = \langle (1, 1, 0) \rangle$ puntos del plano $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.
Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.
6. En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_3^3)$. Sean $l_1 = \langle (1, 2, 0), (0, 1, 1) \rangle$ y l_2 la recta de ecuación $2x + y + z = 0$.
Calcule $l_1 \cap l_2$.
7. En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_5^3)$. Sean $l_1 = \langle (1, 2, 1), (2, 0, 1) \rangle$ y l_2 la recta de ecuación $x + y + z = 0$.
Calcule $l_1 \cap l_2$.
8. Sean $A = \langle (1, 2, 1) \rangle$, $B = \langle (3, 2, 1) \rangle$, $C = \langle (1, \alpha, 4) \rangle$ puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.
Determine α de modo que A, B, C sean colineales.
9. En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$. Hallar el punto de intersección de la recta r que pasa por los puntos $\langle (3, 1, -2) \rangle$ y $\langle (1, -5, 3) \rangle$ y la recta de ecuación $x - 3y - 4z = 0$.
10. En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $\langle (1, 2, -2) \rangle$ y el punto de corte de las rectas $2x - 3y + 7z = 0$ y $5x + 2z = 0$.
11. En cada uno de los casos siguientes encontrar una ecuación de la recta del plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ que pasa por los dos puntos dados:
 - a) $\langle (-1, 1, 1) \rangle$, $\langle (1, 3, 2i) \rangle$
 - b) $\langle (1, -1, i) \rangle$, $\langle (i, 1, 1) \rangle$
 - c) $\langle (1, 1, 2i) \rangle$, $\langle (1, -2, 2i) \rangle$

12. Sea $\pi = \mathbb{R}^2$ el plano afín vectorial, la recta de ecuación $l : y = 2x + 1$ y $\bar{l} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ el sumergimiento de l .

Calcular la ecuación de $\bar{l}$.

13. Sea $\Pi = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ el plano afín vectorial, los puntos $A = (1, 1), B = (2, 1), C = (0, 0)$ y $D = (1, 3)$ y $\bar{\Pi}$ el sumergimiento de Π .

Si $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ los puntos correspondientes en $\bar{\Pi}$. Calcular $l_{\bar{AB}} \cap l_{\bar{CD}}$.

14. Sean $A = (-3, 5), B = (1, -4)$ puntos en el plano afín vectorial real y $\bar{A}, \bar{B}$ los puntos que se obtiene al sumergir $\mathbb{R}^2$ en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.

Determinar la ecuación de la recta que une $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

15. Sean $A = (1, \delta), B = (\delta, 1)$ puntos en el plano afín vectorial $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2(\delta)$ con $\delta^2 = \delta + 1$ y $\bar{A}, \bar{B}$ los puntos que se obtiene al sumergir $\mathbb{F}_4^2$ en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_4^3)$.

Determinar la ecuación de la recta que une $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

16. Sea V un espacio vectorial real y $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base.

Si A, B, C son tres puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(V)$ tal que

$$A = \langle xe_1 + ye_2 + e_3 \rangle, B = \langle e_1 + me_2 \rangle, C = \langle be_2 + e_3 \rangle$$

Demostrar que $A \in l_{BC}$ si y sólo si $y = mx + b$

17. Sea l un recta en el plan afín vectorial $\mathbb{Z}_7^2$ y $\bar{l}$ la correspondiente recta inducida en $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_7^3)$ tal que su ecuación cartesiana es $x - 2y + 3z = 0$.

Determinar la ecuación cartesiana de l .

18. Sea $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, tal que $f(\langle (x, y, z) \rangle) = \langle (x + y, x - y, z + x + y) \rangle$, se extiende de manera natural a los conjuntos.

Determine si f es una colineación en el plano proyectivo

19. Sea $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, $f(\langle (x, y, z) \rangle) = \langle (y, x, z) \rangle$ una colineación de plano proyectivo.

Determine los puntos fijos de f .

20. Sea $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{11}^3) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{11}^3)$, $f(\langle (x, y, z) \rangle) = \langle (3x - y, 2x + y, 2y - 5z) \rangle$ una colineación de plano proyectivo.

Determinar los puntos fijos de f .

21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $f(x, y, z) = (2x + y, 3y, z)$ una transformación lineal.

Si $\bar{f}$ la colineación inducida por f en el plano proyectivo.

Determine los puntos fijos de $\bar{f}$ si existe.

22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y, x + y, x + y - z)$ una transformación lineal.
Si $\bar{f}$ la colineación inducida por f en el plano proyectivo.
Determine los puntos fijos de $\bar{f}$.
23. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$, $f(x, y, z) = (x + y, z, 2x + y)$ una transformación lineal.
Si $\bar{f}$ la colineación inducida por f en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_5^3)$.
Determine los puntos fijos de $\bar{f}$.
24. Sea $g : \mathbb{Z}_{11}^3 \rightarrow \mathbb{Z}_{11}^3$, $g(x, y, z) = (x, y, z) + (x + y + z)(1, 2, 1)$ transformación lineal.
Si $\bar{g}$ es la colineación inducida por g en $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{11}^3)$.
Determinar los puntos fijos de $\bar{g}$.
25. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Sea $\bar{f}$ la colineación inducida por $f \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$. Determine los puntos fijos de $\bar{f}$.
26. Sea $f : \mathbb{F}_{11}^2 \rightarrow \mathbb{F}_{11}^2$, tal que $f(x, y) = (x + y, x - y)$ y $\bar{f}$ la colineación inducida por f en $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_{11}^3)$.
Determine los puntos y rectas fijas de $\bar{f}$.
27. Sea $f : \mathbb{F}_q^2 \rightarrow \mathbb{F}_q^2$, tal que $f(x, y) = (x + y, y)$ y $\bar{f}$ la colineación inducida en $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$.
Determine los puntos fijos de $\bar{f}$.
28. En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea r la recta de ecuación $3x - y + 2z = 0$ y consideremos el plano afín $\Pi^r = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \setminus r$.
Hallar la ecuación de la recta afín que pasa por los puntos $\langle (1, 2, -3) \rangle$ y $\langle (2, 1, 5) \rangle$, respecto base canónica.
29. Sea $\sigma : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$, tal que $\sigma(x, y) = (x, x + y)$ y $\bar{\sigma}$ la colineación inducida por σ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}^3)$.
Demostrar que $(\exists l \in \mathcal{L})(\forall Q \in \mathcal{L} / \bar{\sigma}(l) = l)$
30. Demuestre que $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$ es un plano proyectivo de orden q .
31. Demuestre que todo plano proyectivo tiene al menos 7 rectas.
32. Sea $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\sigma(x, y) = (x, x + y)$, y $\bar{\sigma}$ la colineación inducida por σ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.
Demostrar que existe l recta de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, tal que $\forall Q \in l, \bar{\sigma}(Q) = Q$.
33. ★ Considere el plano afín $\Pi = (\mathbb{Z}_3^2, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.
Construir el plano proyectivo asociado $\bar{\Pi}$.

34. ★ Considere el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2(\delta)$ con $\delta^2 = \delta + 1$ y el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}^3)$. Dada la recta $l = \langle (1, 0, 0), (0, 1, \delta) \rangle$.
Construir el plano afín asociado Π^l .
35. ★ Sea $T : \mathbb{F}_q^2 \rightarrow \mathbb{F}_q^2$, una traslación en el plano afín vectorial finito y $\overline{T}$ la colineación inducida en $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$.
Determine los puntos fijos de T y el número de rectas fijas.
36. ★ En $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$ el plano proyectivo, sea H el grupo de las perspectividad de eje l_∞ .
Calcular el orden de grupo H .
37. ★ Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal invertible, sea $\overline{f}$ la colineación inducida por f en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$
Demuestre que $\overline{f}$ tiene un punto fijo.
38. ★ Sea $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$, l recta del plano afín vectorial y G el grupo de las colineaciones de $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$ inducido por el grupo de las traslaciones de traza l . Luego G opera sobre los puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$.
Determine el número de órbitas o clases y la cardinalidad de cada clase
39. ★ Sea $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$, y G el grupo de las colineaciones de $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$ inducido por el grupo de las traslaciones de Π . Luego G opera sobre los puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$.
Determine el número de órbitas o clases y la cardinalidad de cada clase

5.3. Guía Planos Métricos

1. En $\mathbb{R}^2$ plano Euclidiano. Sean $A = (-2, 6)$, $B = (4, -4)$ y R_l la simetría de eje l .
Encuentre:
- La recta de tal manera que $R_l(A) = B$
 - Determine $R_l(x, y)$
2. En $\Pi = \mathbb{Z}_7^2$, plano métrico con $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$.
Sean $A = (5, 1)$, l la recta que une los puntos $B = (1, 1)$ y $C = (2, 4)$.
- Determine la ecuación de la recta m , tal que Alm y $m \perp l_{BC}$
 - Determine $R_m(x, y)$
3. En $\Pi = \mathbb{Z}_{13}^2$, plano métrico con $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2y_1y_2$.
Si $A = (5, 6)$, $b = (-1, -3)$ y R la simetría tal que $R(A) = B$.
Determine $R(x, y)$

4. En $(\mathbb{Z}_{11}^2, f)$ plano Euclidiano, con $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{Z}_{11}^2$.

Sean $A = (2, 3)$, $B = (-1, 5)$ y R_l simetría de eje l , tal que $R_l(A) = B$.

Determine $R_l(x, y)$.

5. Sea Π plano métrico, $\sigma \in \text{Aut}(\Pi)$, $l \in \mathcal{L}$.

Demostrar que $\sigma \circ R_l \circ \sigma^{-1} = R_{\sigma(l)}$

6. En $\mathbb{R}^2$ plano métrico, sean $P = (4, -3)$ y H_P la simetría puntual de centro P .

Determine $H_P(x, y)$.

7. En $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ plano Elíptico.

Hallar la intersección de las rectas l_1 y l_2 tal que l_1 une los puntos $\langle(2, 3, 1)\rangle$, $\langle(0, 1, 4)\rangle$ y l_2 tiene como polo al punto $\langle(6, 5, -1)\rangle$.

8. Sea $\mathbb{Z}_{13}^2$ plano Euclidiano con $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 5y_1y_2$.

Sea S la simetría tal que $S(2, 7) = (4, 9)$. Determine $S(8, 1)$

9. Sea $\mathbb{R}^2$ plano Euclidiano. Sea σ la rotación de centro $(-1, 1)$ y ángulo 30° . Determine $\sigma(x, y)$

10. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = cis\alpha \cdot z$, en donde $cis\alpha = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$. Compruebe que f es una rotación de centro $(0, 0)$ y ángulo α en $\mathbb{R}^2$.

Donde f esta dada por

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

11. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean l la recta de ecuación $x + 2y + z = 0$ y $P = \langle(-1, 1, -1)\rangle$.

Determine los vértices y lados del triángulo polar si uno de los lados es l y un vértice P .

12. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean $P = \langle(-1, 2, 3)\rangle$ y $l: 2x - 4y - 6z = 0$.

Determine los vértices y lados del triángulo polar que tiene como vértice al punto P y lado a la recta l .

13. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean l la recta de ecuación $2x + 4z = 0$ y $P = \langle(-2, 2, 1)\rangle$.

Determine los vértices y lados del triángulo polar si uno de los lados es l y un vértice P .

14. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean $A = \langle(1, 2, 1)\rangle$, $B = \langle(0, 1, 1)\rangle$, $P = \langle(1, 1, 1)\rangle$. Determine la ecuación de la recta m tal que PTm y $m \perp l_{AB}$

15. Expresé $R_{(1,1)}$, $R_{\text{eje } X}$, $R_{\text{eje } Y}$ mediante números complejos.

16. Sea Π plano Elíptico. Demostrar que $R_a(P) = P'$, entonces $R_a \circ H_p \circ R_a = H_{P'}$

17. Sea Π plano Elíptico. Si $P\mathcal{I}a$, entonces $R_a \circ H_P = H_P \circ R_a$
18. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea $P = \langle (0, 1, 1) \rangle$
 - a) Determine l y m tal que $l \perp m$ y $l \cap m = \{P\}$
 - b) Calcule $H_P(\langle (x, y, z) \rangle)$
19. En el semiplano de Poincaré, sea $P = (3, 1)$ y l la recta de ecuación $x = 2$.
Determine la recta m tal que $P\mathcal{I}m$ y $m \perp l$
20. En el semiplano de Poincaré, sea $l : x = 1, P = (2, 3)$.
Determine la ecuación de las paralelas hiperbólicas a l que pasan por P
21. En el semiplano de Poincaré, sean $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$, m la recta de ecuación $x = 1$.
Determine la ecuación de $R_l(m)$
22. En el semiplano de Poincaré, sean $l : |z| = 4$ y $P = 3i$.
Determine la ecuación de m tal que $P\mathcal{I}m$ y $m \perp l$
23. En el semiplano de Poincaré, sea $P = 1 + 2i$.
Calcule $H_P(z)$
24. En el semiplano de Poincaré. Sean $l : |z| = 5$ y $P = 3i - 4$.
Determine la ecuación de m tal que $P\mathcal{I}m$ y $m \perp l$
25. En el semiplano de Poincaré. Sean $P = -1 + 3i$ y $Q = 6 + 4i$.
 - a) Determine la ecuación de m tal que $P\mathcal{I}m$ y $Q\mathcal{I}m$
 - b) Calcule $R_m(z)$.
26. Dado el semiplano de Poincaré:
 - a) Si t traslación a lo largo de la recta $x = 5$. Determine $t(z)$ con $z \in \mathbb{C}$
 - b) Determine los elementos del grupo de rotaciones de centro i
27. ★ En Π plano métrico.
Demuestre que para todo $l \in \mathcal{L}$ y $P \in \mathcal{P}$ tal que $P\mathcal{I}l$ se tiene que $H_P(l) = l$.
28. ★ En Π plano métrico. Sean a, b, c rectas no concurrentes a un punto tales que $M\mathcal{I}u, v$; $A\mathcal{I}v, C\mathcal{I}u$ tal que $R_u(a) = u$ y $R_v(b) = c$.
Demuestre que existe w tal que $u \perp w, R_w(c) = (a)$ entonces $R_w = c$

5.4. Guía Espacios Afines

1. Sea (V, X) un espacio afín. Demostrar que $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall x, y \in X$

a) $-\vec{xy} = \vec{yx}$

b) $\overrightarrow{(\vec{b} \cdot x)(\vec{b} \cdot y)} = \vec{xy}$

c) $\vec{a} \cdot x = y \Leftrightarrow x = (-\vec{a}) \cdot y$

d) $\overrightarrow{(\vec{a} \cdot x)(\vec{b} \cdot y)} = -\vec{a} + \vec{xy} + \vec{b}$

e) $\vec{xy} \cdot z = \vec{xz} \cdot y = (\vec{xy} + \vec{xz}) \cdot x$

2. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$

$$\pi = S((1, 1, 1), < (1, 0, 1), (1, 2, 1) >)$$

Determine la ecuación de π respecto sistema canónica.

3. Sean $A = (1, 2, 3), B = (2, 3, 1), C = (3, 2, 1)$.

Determine la ecuación del plano que pasa por A, B, C respecto a la base canónica.

4. Sea $V = X = \mathbb{R}^4$. Determine la ecuación del subespacio afín respecto sistema canónica.

$$\pi = S((1, 0, 2, 1), < (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1) >)$$

5. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$

$$S_1 = ((1, 2, 1), \langle (1, 3, 1) \rangle) \text{ y } S_2 = ((0, 0, 0), \langle (1, 2, 3), (1, 0, 4) \rangle).$$

Determine la ecuación de las siguientes subespacios $S_1 \cap S_2$.

6. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$

$$S_1 = S((1, 1, 1), \langle (1, 0, 1), (1, 2, 1) \rangle) \text{ y } S_2 = S((1, 0, 1), \langle (1, 2, 3), (3, 0, 1) \rangle).$$

Determine la ecuación de las siguientes subespacios $S_1 \cap S_2$

7. Sean $V = X = \mathbb{R}^4$

$$S_1 = S((1, 0, 1, 1), \langle (1, 2, 1, 1) \rangle) \text{ y } S_2 = ((0, 1, 1, 0), \langle (1, 1, 2, 1) \rangle).$$

Determine la ecuación de las siguientes subespacios $S_1 \cap S_2$

8. Sean $V = X = \mathbb{R}^4$, S_1 y S_2 subespacios tales que

$$S_1 = S((1, 2, 3, 0), \langle (1, 3, 0, 1) \rangle) \text{ y } S_2 = S((0, 0, 0, 1), \langle (0, 2, 3, 4), (-1, 1, 6, 7) \rangle)$$

Determine:

a) $S_1 \cap S_2$

b) S_3 subespacio afín tal que $S_3 \parallel S_1$ y $S_3 \parallel S_2$

9. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$ y π el hiperplano que contiene a los puntos $(1, -1, 0)$, $(3, -1, 1)$ y $(0, 1, 1)$. Si l la recta que une los puntos $(1, 4, 1)$ y $(1, 2, 5)$.

Calcular $l \cap \pi$

10. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, 5, 1)$, $C = (1, 3, 2)$, $D = (1, 2, 3)$, $E = (2, 1, 3)$, l la recta que contiene los puntos A, B y π el plano que contiene los puntos C, D, E .

Determinar si $l \parallel \pi$.

11. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, $A = (1, 2, 1)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (2, 1, 1)$, $D = (1, 3, 5)$ y π el plano que contiene los puntos A, B, C .

Determinar la ecuación respecto sistema canónica del plano que es paralelo a π y contiene a D .

12. Sean $V = X = \mathbb{R}^4$

$$\pi_1 = S((1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0))$$

Determine la ecuación de π_2 respecto a sistema canónica si

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \wedge (1, 1, 1, 1) \in \pi_2$$

13. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 3, 2)$, $C = (2, 3, 1)$ y Π el plano que contiene los puntos A, B, C . Si $D = (1, 4, 5)$, $E = (2, 1, \alpha)$.

Determine α tal que $l_{ED} \parallel \Pi$

14. En $V = X = \mathbb{R}^3$, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ base de V

Sean $A = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, $B = \vec{v}_3 + 2\vec{v}_2$.

$$\pi = S(\vec{v}_2, \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \rangle).$$

Determine $L_{AB} \cap \pi$.

15. Sea V un espacio vectorial de dimensión tres. $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

$$S_1 = S(\vec{v}_1, \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_3 \rangle) \text{ y } S_2 = S(\vec{v}_2, \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \rangle).$$

Determine $S_1 \cap S_2$.

16. En $V = X = \mathbb{R}^4$, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ base de V . Sean

$$S = S(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \langle \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rangle), \quad B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4\}$$

Determine la ecuación cartesiana de S respecto a $(\vec{0}, B_1)$.

17. Sean $V = X = \mathbb{R}^2$, $S((0, 1), \langle (1, 1) \rangle)$ y $B = \{(0, 1), (1, 0)\}$ base de V , con $x_0 = (2, 1)$.
Determine la ecuación de S en (x_0, B) .
18. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, $x_0 = (1, 1, 1)$ y $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ base de V .
Determine la ecuación de cartesiana de $S((1, 2, 1), \langle (1, 0, 0), (2, 0, 1) \rangle)$ respecto al sistema (x_0, B) .
19. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, y π una recta cuya ecuación es $2x - 3 = \frac{y}{2} = 1 - z$ respecto al sistema canónico.
Determine la ecuación de π respecto al sistema $((1, 0, 1), \{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (0, 1, 0)\})$.
20. En $V = X = \mathbb{R}^3$, sea π un plano cuya ecuación con respecto al sistema canónico es $x - y + 2z = 1$.
Determinar la ecuación de π respecto al sistema
$$x_0 = (1, 2, 1) \text{ y } B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}.$$
21. Sea V un espacio vectorial y π hiperplano cuya ecuación es $x + y + z = 4$ respecto a la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.
Determine la ecuación de π respecto a la base $\overline{B} = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$.
22. Sean (V, X) un espacio afín de dimensión tres, (x_0, B) un sistema de coordenadas de X .
Sea S_1 subespacio de ecuación $x - y + z = 4$.
Determine la ecuación de $S_2 \parallel S_1$ y $(1, 2, 3) \in S_2$.
23. En $V = X = \mathbb{R}^3$. sea $S((1, 0, 0), \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle)$, $x_0 = (1, 0, 0)$.
Determinar una base B de $\langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ tal que
$$[(2, 1, 1)]_{(x_0, B)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [(1, 0, 1)]_{(x_0, B)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
24. En $V = X = \mathbb{R}^3$ un espacio afín. Sea $l = S((0, 0, 1), \langle (1, 1, 2) \rangle)$ recta respecto al sistema (x_0, B) , $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ base de V , con $x_0 = (0, 0, 0)$.
Sea Π el plano cuya ecuación cartesiana es $2x - 3y - 4z = 5$ respecto al sistema (x_1, B_1) , con $x_1 = (3, 2, 1)$ y $B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Calcule $[l \cap \Pi]_{(x_1, B_1)}$.
25. $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $f(z, w) = (\overline{z}, \overline{w})$
- Demostrar que f es una transformación semilineal.
 - Determinar todos los puntos de $L(c, f)$ si $c = (3, 1)$.
26. $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $f(z, w) = (3\overline{z} - \overline{w} + 1, \overline{z} + \overline{w} - 1)$

- a) Demostrar que f es una transformación semilineal.
 b) Determinar todo los puntos.

27. En $V = X = \mathbb{R}^3$, sean $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que σ_1 es una homotecia de razón 2 y centro $(1, 1, 0)$ y σ_2 homotecia la cual se sabe

$$\sigma_2(1, 1, 1) = (3, 3, 3), \quad \sigma_2(1, 0, 1) = (3, 0, 3)$$

Determinar el centro y razón de $\sigma_1 \circ \sigma_2^2 \circ \sigma_1^{-1}$.

28. En (V, X) espacio afín, sean $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $c \in X$ $r, s \in \mathbb{K}^*$ tales que
 Demostrar que

$$T_{\vec{a}} \circ M(c, r) \circ T_{\vec{b}} \circ M(c, s) = T_{\vec{a} + r\vec{b}} \circ M(c, rs)$$

29. En $V = X = \mathbb{R}^3$, sean $P_0 = (1, 0, 1)$, $P_1 = (0, 1, 1)$, $P_2 = (1, 0, 0)$, $P_3 = (-1, 1, 2)$, $Q_0 = (1, 2, 1)$, $Q_1 = (-1, 2, 0)$, $Q_2 = (0, 3, 4)$, $Q_3 = (1, -2, 5)$ y $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformación afín tal que

$$\sigma(P_0) = Q_0, \quad \sigma(P_1) = Q_1, \quad \sigma(P_2) = Q_2, \quad \sigma(P_3) = Q_3$$

Determine $\sigma(x, y, z)$.

30. Sea $S(x, \mathcal{U})$ y $S(y, \mathcal{U})$ dos subespacios afines. Demuestre que:

$$S(x, \mathcal{U}) \parallel S(y, \mathcal{U}) \Leftrightarrow \exists t \text{ traslación tal que } T(S(x, \mathcal{U})) = S(y, \mathcal{U})$$