

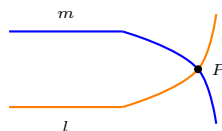
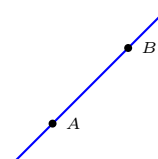
Capítulo 2

Plano Projectivo

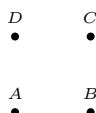
2.1. Axioma del Plano Projectivo

Un estructura de incidencia $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, se dice que Π es un **plano projectivo** si y sólo si cumple los siguientes axiomas

1. Sean $A, B \in \mathcal{P}$, con $A \neq B$ entonces $\exists! l \in \mathcal{L}$ tal que Al y B l
2. Sean $l, m \in \mathcal{L}$, con $l \neq m$ entonces $l \cap m \neq \emptyset$ (no existen rectas paralelas).



3. En el plano projectivo existen un cuadrilátero o cuadrángulo, es decir, no existen tres puntos que pertenezca a la misma recta y toda recta al menos tiene tres puntos distintos.



Observación: Por el axioma uno, dos rectas distintas inciden solamente en un punto. Sean $l, m \in \mathcal{L}$ distintas entonces $l \cap m = \{P\}$.

Definición 2.1 Todo conjunto de puntos que incide con una misma recta, se llaman **puntos colineales**.

Todo conjunto de rectas que pasan o inciden en un punto común se llaman rectas **concurrentes o coincidentes**.

Un conjunto de 3 puntos distintos no colineales A, B, C junto con las rectas l_{BC}, l_{CA}, l_{AB} de llama **triángulo**.

Un conjunto de 4 puntos distintos, 3 de ellos no colineales junto con las rectas de llama **cua-drilátero**.

Definición 2.2 Plano Proyectivo minimal es aquel plano proyectivo formado por el menor número de puntos y rectas que cumple con los axioma de plano proyectivo.

Propiedad 2.3 Todo plano proyectivo contiene al menos siete puntos.

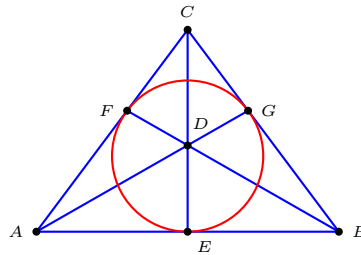
Demostración: Por axioma tres, sabemos que existen cuatro puntos que denotaremos por A, B, C y D

i) $l_{AB} \cap l_{CD} = \{E\}$, entonces $E \mathcal{I} l_{AB}$ y $E \mathcal{I} l_{CD}$

ii) $l_{AC} \cap l_{BD} = \{F\}$, entonces $F \mathcal{I} l_{AC}$ y $F \mathcal{I} l_{BD}$

iii) $l_{AD} \cap l_{BC} = \{G\}$, entonces $G \mathcal{I} l_{AD}$ y $G \mathcal{I} l_{BC}$

Note que, si $E = F$, $E \mathcal{I} l_{AB}$; $E \mathcal{I} l_{AC}$; lo que $l_{AE} = l_{AB} = l_{AC}$; lo que significa que tres puntos son colineales, lo cual no es posible, luego existe siete puntos y al menos siete rectas.



■

2.1.1. Plano Proyectivo Vectorial

Sea V un espacio vectorial de dimensión tres sobre $\mathbb{K}$.

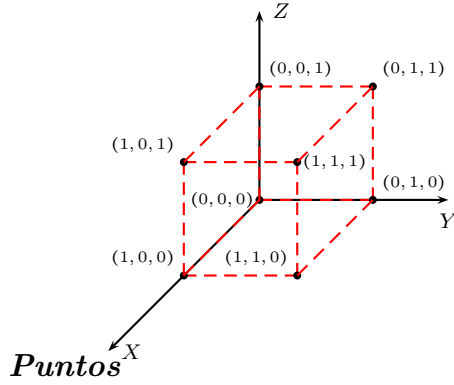
Se define el conjunto de los puntos y de las rectas por:

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{U} \leq V \mid \dim(\mathcal{U}) = 1\}, \quad \mathcal{L} = \{\mathcal{W} \leq V \mid \dim(\mathcal{W}) = 2\}$$

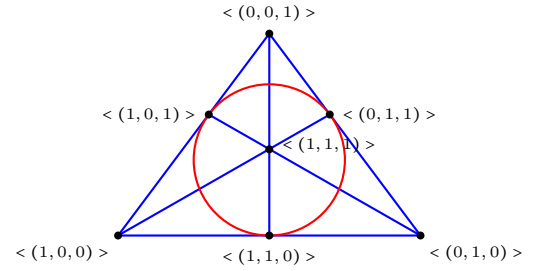
y la incidencia la contención.

Ejemplo 2.4 Sea $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ($\dim(V) = 3$).

Note que cada recta vectorial tiene dos puntos y los planos tiene cuatro puntos incluido el vector nulo.



$$\begin{aligned} P_1 &= \langle (1, 0, 0) \rangle \\ P_2 &= \langle (0, 1, 0) \rangle \\ P_3 &= \langle (0, 0, 1) \rangle \\ P_4 &= \langle (1, 1, 0) \rangle \\ P_5 &= \langle (1, 0, 1) \rangle \\ P_6 &= \langle (0, 1, 1) \rangle \\ P_7 &= \langle (1, 1, 1) \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} l_1 &= \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle \\ l_2 &= \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle \\ l_3 &= \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle \\ l_4 &= \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle \\ l_5 &= \langle (0, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle \\ l_6 &= \langle (0, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle \\ l_7 &= \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle \end{aligned}$$

Luego tenemos que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es un modelo el plano proyectivo minimal.

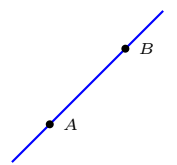
En general, con las notaciones anteriores se define el plano proyectivo asociado al espacio vectorial a

$$\mathbb{P}_2(V) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}).$$

Teorema 2.5 Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre $\mathbb{K}$, entonces $\mathbb{P}_2(V)$ es un plano proyectivo.

Demostración:

i) **Axioma uno:** Por dos puntos distintos pasa una única recta



Sea $A \neq B$ con $A = \langle \vec{v} \rangle$ y $B = \langle \vec{w} \rangle$, entonces $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independiente, en particular:

$$l = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Es única, ya que $AI m$ y $BI m$, entonces $\vec{v}, \vec{w} \in m$, de lo cual obtenemos

$$l = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \subset m.$$

como la dimensión es dos, se obtiene la igualdad.

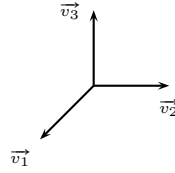
ii) **Axioma dos:** Si $l \neq m$ entonces $l \cap m \neq \emptyset$

Sean $l = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ y $m = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ con $l \neq m$, entonces $l + m = V$

$$\begin{aligned} \dim(l + m) &= \dim(l) + \dim(m) - \dim(l \cap m) \\ 3 &= 2 + 2 - \dim(l \cap m) \\ \dim(l \cap m) &= 1 \end{aligned}$$

En particular $l \cap m \neq \emptyset$

iii) **Axioma tres:** Existe un cuadrángulo.

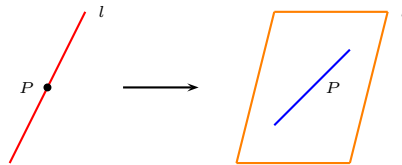


Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ base de V . En donde $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$ forman un cuadrángulo. Ya que dado tres vectores cualquiera, estos son linealmente independientes, luego no hay tres colineales.

Por lo tanto $\mathbb{P}_2(V)$ es un plano proyectivo. ■

Observación:

1. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión tres y $\mathbb{P}_2(V)$ el plano proyectivo construido a partir de V con $P\mathcal{I}l$ entonces $P \subseteq l$, gráficamente se tiene que:



2. Sea $l = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ recta del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(V)$, entonces la ecuación cartesiana de l con respecto a la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de V , tiene la forma:

$$l : ax + by + cz = 0$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Ejemplo 2.6 Dado los puntos del plano $A = \langle (1, 2, 4) \rangle$ y $B = \langle (-2, 1, 5) \rangle$ en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.

Determine la ecuación cartesiana de l_{AB}

Solución: Sea $l_{AB} = \langle (1, 2, 4), (-2, 1, 5) \rangle$.

Dado $(x, y, z) \in l_{AB}$ entonces:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \alpha(1, 2, 4) + \beta(-2, 1, 5) \\(x, y, z) &= (\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, 4\alpha + 5\beta)\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}x &= \alpha - 2\beta \\y &= 2\alpha + \beta \\z &= 4\alpha + 5\beta\end{aligned} \right|$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 4 & 5 & z \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 0 & 5 & y - 2x \\ 0 & 13 & z - 4x \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x + \frac{2}{5}(y - 2x) \\ 0 & 1 & y - 2x \\ 0 & 0 & z - 4x - \frac{13}{5}(y - 2x) \end{array} \right]$$

El sistema tiene solución si y sólo si

$$z - 4x - \frac{13}{5}(y - 2x) = 0$$

o bien

$$5z - 13y + 6x = 0$$

De otro modo los vectores los vectores $\{(x, y, z), (1, 2, 4), (-2, 1, 5)\}$ son linealmente dependientes, de lo cual tenemos que

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 4 & 5 & z \end{vmatrix} = (10 - 4)x - (5 + 8)y + (1 + 4)z$$

□

Ejemplo 2.7 En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_3^3)$.

Sean $l_1 = \langle (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}) \rangle$ y l_2 de ecuación $\bar{2}x + \bar{3}y - z = 0$.

Calcule $l_1 \cap l_2$

Solución: Sea $(x, y, z) \in l_1 \cap l_2$, por pertenecer a la primera recta l_1 tenemos:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \alpha(\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}) + \beta(\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}) \\(x, y, z) &= (\alpha, \bar{2}\alpha + \beta, \beta)\end{aligned}$$

Como también $(x, y, z) \in l_2$, satisface la ecuación, reemplazando tenemos que

$$\begin{aligned}2\alpha + 3(2\alpha + \beta) - \beta &= 0 \\8\alpha + 2\beta &= 0 \\\alpha &= -\beta\end{aligned}$$

luego

$$(x, y, z) = (\alpha, \alpha, -\alpha) = \alpha(1, 1, -1) = \alpha(1, 1, 2)$$

Por lo tanto $l_1 \cap l_2 = \{\langle(1, 1, 2)\rangle\}$. □

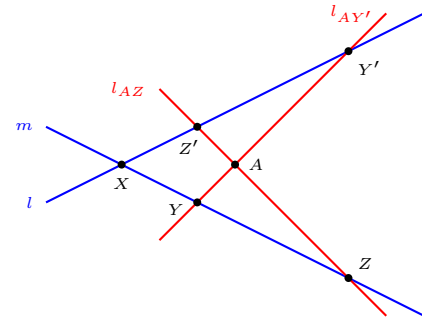
Teorema 2.8 *En el plano proyectivo, todas las rectas tienen el mismo número de puntos.*

Demostración: Sean $l, m \in \mathcal{L}, l \neq m$ entonces $l \cap m = \{X\}$ y $A \in \mathcal{P}$ con $A \not\in m$ y $A \not\in l$.

Sea $Z \in m$, luego $l_{ZA} \cap l = \{Z'\}$.

Construimos una función biyectiva

$$\begin{aligned} f: m &\rightarrow l \\ X &\rightsquigarrow X \\ Z &\rightsquigarrow Z' \end{aligned}$$



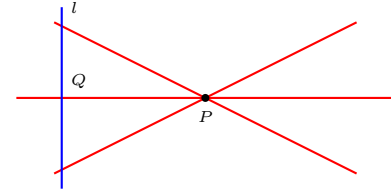
Con lo cual se obtiene que:

$$\#m = \#l$$
■

Corolario 2.9 *De la misma forma, por cada punto pasa la misma cantidad de rectas.*

Demostración:

Sea $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$, tal que $P \not\in l$. Notemos que toda recta que pasa por P tiene intersección con l y dado un punto en $Q \in l$ existe la recta l_{PQ} .



Definición 2.10 *Se dice que el **orden** del plano proyectivo Π es n si y sólo si cada recta contiene $n + 1$ puntos, en cuyo caso denotamos por $\#\Pi = n$.*

Ejemplo 2.11 $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_2^3)$ plano proyectivo minimal.

$$\begin{aligned} l_1 &= \{\langle(1, 0, 0)\rangle, \langle(0, 1, 0)\rangle, \langle(1, 1, 0)\rangle\}; \\ l_2 &= \{\langle(1, 0, 0)\rangle, \langle(0, 0, 1)\rangle, \langle(1, 0, 1)\rangle\}; \\ l_3 &= \{\langle(0, 1, 0)\rangle, \langle(0, 0, 1)\rangle, \langle(0, 1, 1)\rangle\}; \\ l_4 &= \{\langle(1, 1, 0)\rangle, \langle(0, 1, 1)\rangle, \langle(1, 0, 1)\rangle\}; \\ l_5 &= \{\langle(1, 0, 1)\rangle, \langle(1, 1, 1)\rangle, \langle(0, 1, 0)\rangle\}; \\ l_6 &= \{\langle(1, 0, 0)\rangle, \langle(1, 1, 1)\rangle, \langle(0, 1, 1)\rangle\}; \\ l_7 &= \{\langle(1, 1, 0)\rangle, \langle(0, 0, 1)\rangle, \langle(1, 1, 1)\rangle\}. \end{aligned}$$

Como cada recta contiene tres puntos, entonces $\#(\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_2^3)) = 2$.

Observación: En general, si $\mathbb{K}$ es cuerpo finito entonces $\#(\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)) = |\mathbb{K}|$, ya que el plano $\mathbb{K}^2$, por el argumento de la pendiente contiene $|\mathbb{K}| + 1$ rectas vectoriales.

Teorema 2.12 *Sea Π tiene un plano proyectivo de orden n , entonces*

$$\#\mathcal{L} = n^2 + n + 1 \text{ y } \#\mathcal{P} = n^2 + n + 1$$

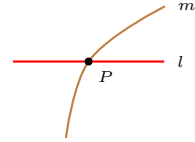
Demostración: Si Π tiene orden n , entonces cada recta contiene $n + 1$ punto y por cada punto P pasan $n + 1$ rectas.

Dado que por un punto P pasa $n + 1$ recta y cualquier punto Q distinto de P esta contenido en una recta que pasa por P , luego tenemos $(n + 1)^2$ pero el punto P lo hemos contado $n + 1$ ya que pertenece a todas las rectas y debemos contarle una vez.

$$\#\mathcal{P} = (n + 1)^2 - n = n^2 + n + 1.$$

Dada dos rectas distintas tiene intersección en un punto, y por cada punto pasa $n + 1$ rectas, luego la cantidad de recta es igual al numero de puntos de una recta por la cantidad de recta que pasa por ese punto, teniendo presente que la recta original, se contó tanta vez como punto tiene la recta, por ello

$$\#\mathcal{L} = (n + 1)^2 - n$$



■

Ejemplo 2.13 *Calcular el $\#\mathcal{P}$ y $\#\mathcal{L}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$, $\mathbb{K}$ cuerpo finito.*

Solución: El orden de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$ es $|\mathbb{K}|$. luego tenemos

$$\#\mathcal{P} = |\mathbb{K}|^2 + |\mathbb{K}| + 1 = \#\mathcal{L}$$

Para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ se tiene

$$\#\mathcal{P} = p^2 + p + 1 = \#\mathcal{L}$$

Teorema 2.14 (Bruck- Ryser 1946) *Si $n \equiv 1 \pmod{4}$ o bien $n \equiv 2 \pmod{4}$, entonces no existe un plano proyectivo de orden n , salvo que n se escriba como suma de dos cuadrados enteros.*

Observación: $n = 6$, no es suma de dos cuadrados enteros y $n \equiv 2 \pmod{4}$, luego no existe un plano proyectivo de orden 6, en cambio $10 = 3^2 + 1^2$ y $10 \equiv 2 \pmod{4}$.

Teorema 2.15 (Lam-Swiercz-Thiel 1988) *No existe un plano proyectivo de orden 10.*

2.1.2. Sub-Plano Projectivo

Un **sub-plano** Π_0 de Π , es un subconjunto de los elementos de Π que forman un plano proyectivo, teniendo la misma relación de incidencia, es decir, si $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ es un plano proyectivo entonces $\Pi_0 = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I})$ es un sub-plano de Π si y sólo si $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ y Π_0 es un plano proyectivo.

Además es **sub-plano es propio** si y sólo si $\Pi_0 \neq \Pi$.

Ejemplo 2.16 Como $\mathbb{R}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$, tenemos que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ es un sub-plano propio de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$

Solución: Dado una elemento $v \in \mathbb{R}^3$ no nulo, tenemos las rectas $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{C}^3$, aún más

$$\langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ y } \langle v \rangle_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}^3$$

donde

$$\langle v \rangle_{\mathbb{R}} = \{ tv \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \}, \quad \langle v \rangle_{\mathbb{C}} = \{ tv \in \mathbb{C}^3 \mid t \in \mathbb{C} \}.$$

Notemos que la recta

$$\mathbb{R}^3 \cap \langle (1, i, 2i) \rangle_{\mathbb{C}} = \phi, \quad \mathbb{R}^3 \cap \langle (3i, -i, 2i) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle (3, -1, 2) \rangle_{\mathbb{R}}.$$

que corresponde a los puntos del plano proyectivo.

Análogamente para los planos. □

Observación: En general, si $\mathbb{F}$ es un subcuerpo de $\mathbb{K}$ entonces tenemos que $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}^3)$ es un sub-plano de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$.

Teorema 2.17 Sea Π un plano proyectivo de orden n y Π_0 un sub-plano propio de orden m , entonces

$$n = m^2 \quad \underline{\vee} \quad n \geq m^2 + m$$

Demostración: Sea l un recta de Π_0 , luego tiene $n - m > 0$ puntos de $\mathcal{P} - \mathcal{P}'$. Además $\mathcal{L}'$ contiene $m^2 + m + 1$ elementos

De lo anterior tenemos que existen al menos $(n - m)(m^2 + m + 1)$ puntos que inciden con alguna recta de Π_0 , es decir,

$$n^2 + n + 1 \geq (n - m)(m^2 + m + 1) + m^2 + m + 1$$

simplificando tenemos

$$n^2 \geq nm^2 + nm - m^3$$

de otro modo

$$0 \geq (n - m)(m^2 - n)$$

por lo tanto $m^2 - n \leq 0$, es decir, $n = m^2$ o bien $n > m^2$

Si $n = m^2$ entonces tenemos que

$$1+n+n^2 = 1+m^2+m^4 = (m^2+1)^2 - m^2 = (m^2+m+1)(m^2-m+1) = (m^2-m)(m^2+m+1) + (m^2+m+1)$$

Lo que significa que cada punto del plano proyectivo, esta contenido en una recta del sub-plano. Si $n > m^2$, entonces existe un punto P , el cual no pertenece a ninguna recta del sub-plano, al considerar un punto del sub-plano, existe la recta que pasa por ambos punto, esta recta no puede contener otros punto del sub-plano.

Pero P , pasan $n + 1$ rectas, luego tenemos que $n + 1 \geq m^2 + m + 1$, cancelando obtenemos que $n \geq m^2 + m$. ■

Ejemplo 2.18 Sean $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ y $\mathbb{F}_8$; cuerpos de cardinal 2, 4, 8 respectivamente.

En el primer caso tenemos que el plano proyectivo $\Pi_2 = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_2^3)$ tiene orden 2 y

$$|\mathcal{P}_2| = 7, \quad |\mathcal{L}_2| = 7.$$

En el segundo caso tenemos que el plano proyectivo $\Pi_4 = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_4^3)$ tiene orden 4 y

$$|\mathcal{P}_4| = 21, \quad |\mathcal{L}_4| = 21.$$

En el último caso tenemos que el plano proyectivo $\Pi_8 = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_8^3)$ tiene orden 8 y

$$|\mathcal{P}_8| = 73, \quad |\mathcal{L}_8| = 73.$$

Notemos que en este caso Π_2 es un sub-plano de Π_4 y se cumple $4 = 2^2$, y además Π_2 es un sub-plano de Π_8 y se cumple $8 > 2^2 + 2 = 6$.

2.2. Plano Proyectivo y Plano Afín

Existen relaciones entre los planos afines y los planos proyectivos lo cual se estudiara en esta sección

2.2.1. Plano Proyectivo en el Plano Afín

Dado un plano proyectivo, se puede construir un plano afín, del siguiente modo

Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ un plano proyectivo y $l \in \mathcal{L}$

i) Los Puntos $\overline{\mathcal{P}}$

El conjunto de los puntos se definen del siguiente modo:

$$\overline{\mathcal{P}} = \{P \in \mathcal{P} \mid P \not\in l\} = \mathcal{P} - l$$

de otro modo los puntos son, los puntos que no inciden en l .

ii) **Las Rectas $\overline{\mathcal{L}}$**

Sea $m \in \mathcal{L} - \{l\}$, denotemos P_m el punto tal que $m \cap l = \{P_m\}$

$$m' = m - \{P_m\} = m - m \cap l$$

El conjunto de las rectas esta dado por:

$$\overline{\mathcal{L}} = \{m' \mid m \neq l\}$$

es decir, las rectas son, las rectas m distintas de la recta l extrayendo el punto P_m .

iii) **La relación de Incidencia $\overline{\mathcal{I}}$**

Sea $P \in \overline{\mathcal{P}}$, $m \in \overline{\mathcal{L}}$.

Se dice que P incide en m , lo que denotamos por $P\overline{\mathcal{I}}m$, si y sólo si $P\mathcal{I}m$

Ejemplo 2.19 Consideremos el plano proyectivo minimal $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_2^3)$.

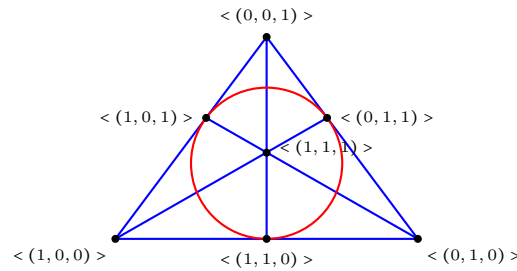
Construir la estructura de incidencia dada anteriormente al omitir la recta

$$l_4 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle .$$

Solución: Sabemos que las rectas del plano proyectivos son:

$$\begin{aligned} l_1 &= \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0) \rangle ; & l_2 &= \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle ; \\ l_3 &= \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle ; & l_4 &= \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle ; \\ l_5 &= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0) \rangle ; & l_6 &= \langle (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle ; \\ l_7 &= \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle . \end{aligned}$$

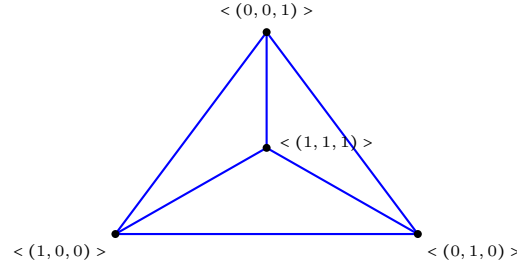
que graficamos del siguiente modo



Luego obtenemos

$$\begin{aligned} l_1 &= \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle ; & l_2 &= \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle ; \\ l_3 &= \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle ; & l_5 &= \langle (1, 1, 1), (0, 1, 0) \rangle ; \\ l_6 &= \langle (1, 0, 0), (1, 1, 1) \rangle ; & l_7 &= \langle (0, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle . \end{aligned}$$

Es un plano afín con cuatro punto y seis rectas, corresponde al plano afín minimal.



Teorema 2.20 $\Pi^l = (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{I}})$ es un plano afín.

Demostración: Veamos los axiomas de plano afín.

Axioma uno Si $A, B \in \overline{\mathcal{P}}, A \neq B$ entonces $\exists! l \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que $A \overline{\mathcal{I}} l$ y $B \overline{\mathcal{I}} l$

Si $A, B \in \mathcal{P}, A \neq B$, por axioma del plano proyectivo se tiene que existe única $m \in \mathcal{L}$ tal que $A \mathcal{I} m$ y $B \mathcal{I} m$, la recta $m \neq l$ ya que los puntos $A \mathcal{I} l$ y $B \mathcal{I} l$ luego se cumple.

Axioma dos Sean $P \in \overline{\mathcal{P}}, m \in \overline{\mathcal{L}}, P \mathcal{I} m$ entonces existe $m \parallel n \wedge P \mathcal{I} n$.

Si $m' = m \cup \{P_m\}$, con $m' \in \mathcal{L}$, luego tenemos la recta $l_{PP_m} \in \mathcal{L}$, claramente tenemos que $l' = l_{PP_m} - \{P_m\} \in \overline{\mathcal{L}}$ luego obtenemos

$$l' \cap m = \emptyset \wedge l' \parallel m$$

Axioma tres: Existe un triángulo.

En el plano afín Π existe cuadrángulo, los puntos A, B, C, D no son colineales. Si son cero o un punto en la recta l listo.

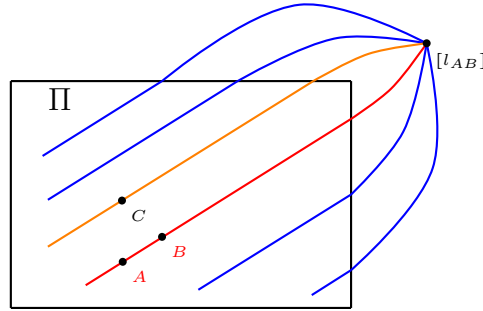
Si hay dos punto en la recta l , supongamos que son C, D , luego la recta L_{AC} tiene otro punto E , que no pertenece a l , A, B, E no son colineales. toda recta tenia al menos tres puntos, luego ahora tiene al menos dos puntos, por lo tanto

Π^l es un plano afín.

■

2.2.2. Plano Afín en el Plano Proyectivo

Dado un plano afín, también se puede construir un plano proyectivo, de modo que el plano afín se inyecta en el proyectivo.



Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ un plano afín, se construye el plano proyectivo del siguiente modo:

i) **Los Puntos $\overline{\mathcal{P}}$**

Sea $l \in \mathcal{L}$, denotamos por $[l]$ es el haz de rectas, formada por las rectas paralelas a l .

El conjunto de los puntos se definen del siguiente modo:

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{[l] \mid l \in \mathcal{L}\}$$

de otro modo los puntos son, los puntos anteriores unidos con los haces de rectas.

ii) **Las Rectas $\overline{\mathcal{L}}$**

Dado $m \in \mathcal{L}$, tenemos que

$$\overline{m} = m \cup \{[m]\}$$

y la recta $l_\infty = \{[l] \mid l \in \mathcal{L}\}$.

El conjunto de las rectas esta dado por:

$$\overline{\mathcal{L}} = \{\overline{m} \mid m \in \mathcal{L}\} \cup \{l_\infty\}$$

es decir, las rectas, son las rectas del plano afín unido un punto que corresponde al haz de rectas paralelas a ella o bien la recta que contiene todos los haces de rectas paralelas.

iii) **La relación de Incidencia $\overline{\mathcal{I}}$**

Sea $P \in \overline{\mathcal{P}}$, $l \in \overline{\mathcal{L}}$.

Se dice que P incide en l , lo que denotamos por $P\overline{\mathcal{I}}l$, si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface:

- a) $P \in \mathcal{P} \wedge l \in \mathcal{L} \wedge P\mathcal{I}l$
- b) $P = [m] \wedge l \in \mathcal{L} \wedge m \parallel l$
- c) $P = [m] \wedge l = l_\infty$

Observación: Veamos primero un ejemplo antes de probar que es un plano proyectivo.

Ejemplo 2.21 Sea $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. el plano afín minimal.
 Construir el plano proyectivo, donde esta inyectado el plano afín

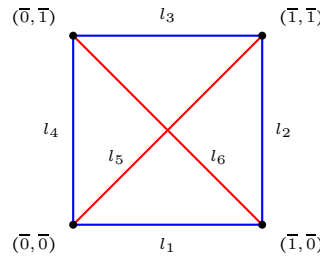
Solución: Las ecuaciones de las rectas de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ son

$$\begin{aligned} l_1 : y = 0 & \quad l_4 : x = 0 \\ l_2 : x = 1 & \quad l_5 : y = x \\ l_3 : y = 1 & \quad l_6 : y = x + 1 \end{aligned}$$

y los haces de rectas paralelas son:

$$[l_1] = \{l_1, l_3\}, \quad [l_2] = \{l_2, l_4\}, \quad [l_5] = \{l_5, l_6\}.$$

representado por



En consecuencia, el plano proyectivo esta dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), [l_1], [l_2], [l_5]\} \\ \mathcal{L} &= \{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3, \bar{l}_4, \bar{l}_5, \bar{l}_6, l_\infty\} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), [l_1]\} \\ \bar{l}_2 &= \{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), [l_2]\} \\ \bar{l}_3 &= \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}), [l_1]\} \\ \bar{l}_4 &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), [l_2]\} \\ \bar{l}_5 &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), [l_5]\} \\ \bar{l}_6 &= \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), [l_5]\} \\ l_\infty &= \{[l_1], [l_2], [l_5]\} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.22 Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ el plano afín, tal que se definen el conjunto de los puntos por:

$$\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{[l] \mid l \in \mathcal{L}\}$$

y el conjunto de las rectas esta dado por:

$$\overline{\mathcal{L}} = \{\overline{m} \mid m \in \mathcal{L}\} \cup \{l_\infty\}$$

y la relación de incidencia es la definida anteriormente entonces $\overline{\Pi} = (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{I}})$ es un plano proyectivo

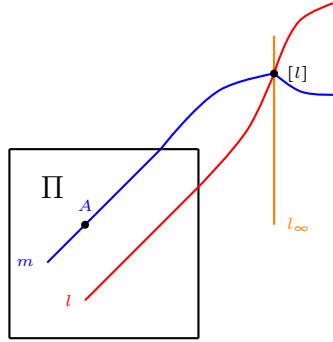
Demostración: Veamos los axiomas de plano proyectivos.

Axioma uno Si $A, B \in \overline{\mathcal{P}}, A \neq B$ entonces $\exists! l \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que $A \overline{\mathcal{I}} l$ y $B \overline{\mathcal{I}} l$

Caso uno Si $A, B \in \mathcal{P}, A \neq B$, por axioma del plano afín se tiene que $\exists! l \in \mathcal{L}$ tal que $A \mathcal{I} l$ y $B \mathcal{I} l$, luego se cumple.

Caso dos Si $A \in \mathcal{P} \wedge [l] \in \overline{\mathcal{P}}$.

Sea $l \in [l]$ y $A \mathcal{I} l$ entonces, por axioma dos del plano afín tenemos que $\exists! m \in \mathcal{L}$ tal que $A \mathcal{I} m$ y $m \parallel l$ por lo tanto $m \in [l]$ entonces $[l] \overline{\mathcal{I}} \overline{m}$ y $A \overline{\mathcal{I}} \overline{m}$.

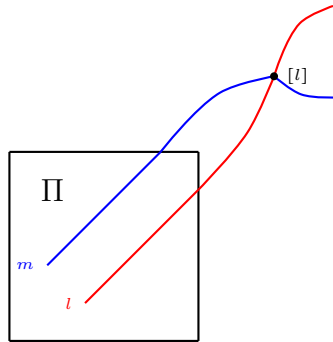


Caso tres $[l], [m] \in \overline{\mathcal{P}}$, por definición $\exists! l_\infty \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que $[l] \overline{\mathcal{I}} l_\infty$ y $[m] \overline{\mathcal{I}} l_\infty$

Axioma dos Sean $l, m \in \overline{\mathcal{L}}, l \neq m$ entonces $l \cap m \neq \emptyset$.

Caso uno: Si $l = l' \cup \{[l']\}$ y $m = m' \cup \{[m']\}$, con $l', m' \in \mathcal{L}$.

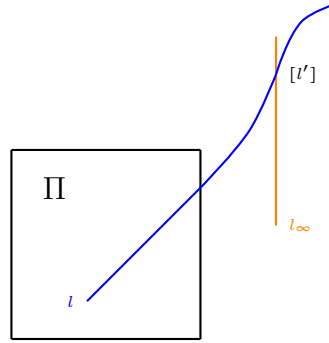
Si $l' \parallel m'$, luego tenemos que $[l'] = [m']$, por lo tanto $l \cap m \neq \emptyset$. En el otro caso, suponemos que l' no es paralela a m' , por ello tenemos que $l' \cap m' \neq \emptyset$ y de lo cual se obtiene $l \cap m \neq \emptyset$.



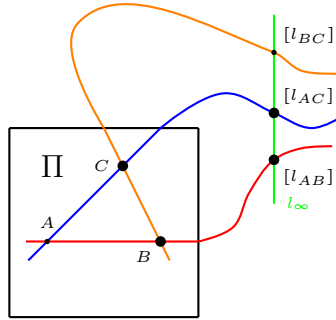
Caso dos: Sea $l = l' \cup \{[l']\}$ y $m = l_\infty$

Por definición tenemos que $[l']\overline{\mathcal{L}}l_\infty \wedge [l']\overline{\mathcal{L}}l$, de lo cual se obtiene

$$l \cap l_\infty \neq \emptyset$$



Axioma tres: Existe un cuadrángulo.



En el plano afín Π existe tres puntos A, B, C no colineales, consideremos los puntos $C, B, [l_{AC}]$, $[l_{AB}]$ ellos forman un cuadrángulo. Note que las rectas l_{AC} y la recta l_{AB} no son paralelas, luego a la única recta que pertenecen es l_∞ y las otras rectas son $\overline{l_{CB}}, \overline{l_{AC}}$ y $\overline{l_{AB}}$, todas distintas y no paralelas, por lo tanto

$\overline{\Pi}$ es un plano proyectivo.

Por la construcción del Plano Proyectivo obtenemos el sumergimiento del Plano Afín □

Observación: De esta manera entendemos que $\Pi \subset \overline{\Pi}$.

2.2.3. Plano Afín Vectorial y el Plano Proyectivo Vectorial

Ahora veamos el caso particular, del Plano Afín Vectorial y el Plano Proyectivo Vectorial.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y Π el plano afín asociado al espacio vectorial $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, donde los puntos son vectores, las rectas son rectas afines y la incidencia es la pertenecía.

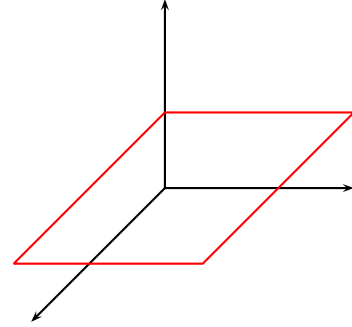
Y el plano proyectivo esta dado por $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3) = \overline{\Pi} = (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}, \mathcal{I})$, donde

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}} &= \{\mathcal{U} \leq \mathbb{K}^3 \mid \dim(\mathcal{U}) = 1\} \\ \overline{\mathcal{L}} &= \{\mathcal{W} \leq \mathbb{K}^3 \mid \dim(\mathcal{W}) = 2\} \end{aligned}$$

y la incidencia es la contención.

Sea $\pi_0 : z = 0$ el plano XY y $\pi_1 : z = 1$, consideremos los siguientes conjuntos de punto y recta. Para la construcción del plano proyectivo, en el plano afín, tenemos que agregar puntos, para ello a cada haz de rectas afines, escogemos como representante la recta vectorial, mirada en el plano π_0 , de esta manera, el nuevo conjunto corresponde a los puntos en π_1 unido a las rectas vectoriales en el plano π_0 .

$$\begin{aligned} f : \quad \overline{\mathbb{K}^2} &\rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3) \\ (x, y) &\rightsquigarrow \langle (x, y, 1) \rangle \\ [\langle (x, y) \rangle] &\rightsquigarrow \langle (x, y, 0) \rangle \end{aligned}$$



Notemos que la intersección de una recta vectorial con π_1 es vacío, cuando la recta esta contenida en el plano XY o en caso contrario es un punto.

$$\mathcal{P}' = \{l \cap \pi_1 \mid l \in \mathcal{P} \wedge l \cap \pi_0 \neq l\}.$$

De esta manera tenemos la correspondencia entre puntos afines y proyectivos.

Ahora veamos las rectas proyectiva. A cada recta del plano afín $l : \langle (x, y) \rangle + (a, b)$, mirada en π_1 corresponde a $l' : \langle (x, y, 0) \rangle + (a, b, 1)$ agregamos la correspondiente recta vectorial en π_0

$$l'' : \langle (x, y, 0) \rangle + (a, b, 1) \cup \{\langle (x, y, 0) \rangle\} \leftrightarrow \langle (x, y, 0), (a, b, 1) \rangle$$

y el conjunto de todos los recta vectoriales en π_0 .

$$\begin{aligned} f : \quad \mathcal{L}' &\rightarrow \overline{\mathcal{L}} \\ \langle (x, y) \rangle + (a, b) &\rightsquigarrow \langle (x, y, 0), (a, b, 1) \rangle \\ l_\infty &\rightsquigarrow \pi_0 \end{aligned}$$

La intersección de una plano vectorial con π_1 es vacío, cuando la plano es el plano π_0 o en caso contrario es una recta

$$\mathcal{L}' = \{\mathcal{U} \cap \pi_1 \mid \mathcal{U} \in \mathcal{L} \wedge \mathcal{U} \neq \pi_0\}.$$

La incidencia esta definida por la pertenecía

$$A \in \mathcal{P}', \quad m \in \mathcal{L}' \text{ entonces } A \in m.$$

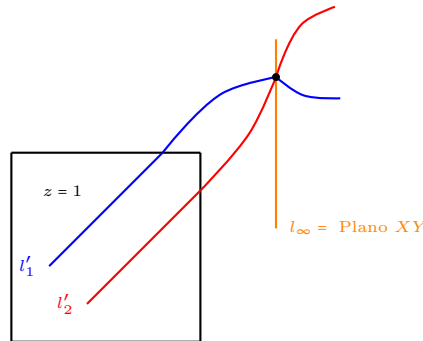
De esta manera tenemos $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ es un plano afín, y existe una correspondencia bi-unívoca con el plano afín vectorial Π .

Ejemplo 2.23 En plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean las rectas

$$l_1 : 2x + 3y + 4z = 0 \quad y \quad l_2 : 4x + 6y + 9z = 0.$$

i) Comprobar que tiene un punto en común.

ii) Al mirar las rectas en el Plano Afín, son paralelas



La intersección de ellas corresponde al sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ 4x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

Notemos que $l_1 \cap l_2$ es un punto en el plano proyectivo $\langle (-3, 2, 0) \rangle$, contenido en el plano π_0 . En el plano afín, tenemos que realizar la intersección con el plano $\pi_1 : z = 1$ y corresponde a dos rectas paralelas, y esta dada por

$$\begin{aligned} l_1 \cap \pi_1 &= l'_1 : 2x + 3y + 4 = 0 \\ l_2 \cap \pi_1 &= l'_2 : 4x + 6y + 9 = 0 \end{aligned}$$

De lo cual tenemos que $l_1 \parallel l_2$.

Ejemplo 2.24 Sean $\Pi = \mathbb{R}^2$, $A = (2, 3)$ y $B = (-2, 2)$. Encuentre la ecuación de la recta $\overline{l_{AB}}$ en el plano proyectivo.

Solución: Veamos dos posibles desarrollos para determinar la ecuación.

Solución uno:

$$\begin{aligned} l_{AB} &= \langle A - B \rangle + \langle A \rangle \\ l_{AB} &= \langle (4, 1) \rangle + (2, 3) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (x, y) &= \alpha(4, 1) + (2, 3) \\ \begin{cases} x &= 4\alpha + 2 \\ y &= \alpha + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

En donde se obtiene que la recta $l_{AB} : x - 4y = -10$, del cual se obtiene la recta $\overline{l_{AB}} : x - 4y + 10z = 0$

Solución dos:

$$\begin{aligned} l_{AB} &\rightsquigarrow \overline{l_{AB}} \\ (2, 3) &\rightsquigarrow \langle (2, 3, 1) \rangle \\ (-2, 2) &\rightsquigarrow \langle (-2, 2, 1) \rangle \end{aligned}$$

En donde $\overline{l_{AB}} = \langle (2, 3, 1), (-2, 2, 1) \rangle$ por lo tanto

$$(x, y, z) = \alpha(2, 3, 1) + \beta(-2, 2, 1),$$

luego los vectores son linealmente dependiente

$$0 = \begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ y & 3 & 2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 4y + 10z$$

Por lo tanto

$$\overline{l_{AB}} : x - 4y + 10z = 0$$

□

2.3. Plano Projectivo Dual

El principio de la dualidad, es que toda propiedad sobre puntos y rectas es una propiedad sobre rectas y puntos.

Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ un plano proyectivo y se define Π^* el plano dual, donde los puntos son rectas y las rectas son puntos. De otro modo tenemos la estructura de incidencia dada por $\Pi^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^* &= \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^* &= \mathcal{P} \\ \mathcal{I}^* : l \mathcal{I}^* P &\Leftrightarrow P \mathcal{I} l \end{aligned}$$

Teorema 2.25 Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ un plano proyectivo.

El plano dual $\Pi^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ es un plano proyectivo, llamado plano proyectivo dual.

Demostración: Verifiquemos las axiomas del plano proyectivo.

Axioma uno: Por dos puntos distintos pasa una única recta.

Sea $l, m \in \mathcal{P}^*$ luego $l, m \in \mathcal{L}$, entonces por axioma dos:

$$\begin{aligned} l \cap m &\neq \emptyset \\ l \cap m &= \{P\} \end{aligned}$$

Luego $PIl \wedge PIm$ entonces $l\mathcal{I}^*P \wedge m\mathcal{I}^*P$, de este modo tenemos

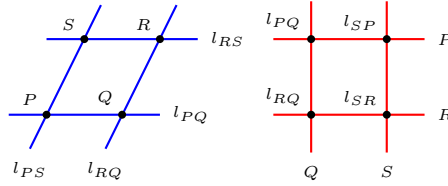
$$(\exists! P \in \mathcal{L}^*)(l\mathcal{I}^*P \wedge m\mathcal{I}^*P)$$

Axioma dos: Sea $P, Q \in \mathcal{L}^*$ tal que $P \neq Q$, entonces $P \cap Q \neq \emptyset$.

Si $P, Q \in \mathcal{L}^*$ entonces $P, Q \in \mathcal{P}$ luego existe única $l \in \mathcal{L}$ tal que $PIl \wedge QIl$, es decir, $(l \mathcal{I}^*P \wedge l \mathcal{I}^*Q)$, por lo tanto

$$(\exists! P \in \mathcal{L}^*)(l\mathcal{I}^*P \wedge m\mathcal{I}^*Q)$$

Axioma tres: Existe un cuadrángulo, en Π existe un cuadrángulo.



Por lo tanto

Π^* es un plano proyectivo

■

Observación: Recordemos el propiedad

“En el plano proyectivo, todas las rectas tienen el mismo número de puntos.”

por dualidad ahora tenemos

“En el plano proyectivo, por todos los puntos pasan el mismo número de rectas.”

2.4. Colineaciones en el Plano Proyectivo

Definición 2.26 Sean Π plano proyectivo y f una función biyectiva. Se dice que f es **colineación** de Π , si se cumple:

i) $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ y $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ son biyectiva.

ii) Preserva incidencia:

Para todo P, l se tiene que si $P \in l$ entonces $f(P) \in f(l)$.

Observación: Análogamente tenemos que

$$\text{Aut}(\Pi) = \{f \mid f \text{ es una colineación de } \Pi\}$$

Propiedad 2.27 Sea Π un plano proyectivo.

$(\text{Aut}(\Pi), \circ)$ es un grupo, llamado grupo de las colineaciones del plano proyectivo Π .

Extensión de transformaciones lineales a $\mathbb{P}_2(V)$. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión tres.

Sea $\mathbb{P}_2(V)$ el plano proyectivo construido a partir de V . Si $f \in \text{GL}(V)$, entonces existe una función $\bar{f}$ definida por

$$\begin{aligned} \bar{f}: \mathbb{P}_2(V) &\rightarrow \mathbb{P}_2(V) \\ \langle \vec{v} \rangle &\rightsquigarrow \langle f(\vec{v}) \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &\rightsquigarrow \langle f(\vec{v}), f(\vec{w}) \rangle \end{aligned}$$

Propiedad 2.28 Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión tres, $\mathbb{P}_2(V)$ el plano proyectivo y $f \in \text{GL}(V)$ entonces $\bar{f} \in \text{Aut}(\mathbb{P}_2(V))$.

Ejemplo 2.29 Determine, si es que existen, los puntos fijos de $\bar{f}$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (x + y, x - z, z)$$

Solución: Sea B base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde el $\det([f]_B) \neq 0$, por lo tanto $f \in \text{GL}(\mathbb{R}^3)$, entonces existe $\bar{f} \in \text{Aut}(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3))$.

$$\begin{aligned} \bar{f}(\langle (x, y, z) \rangle) &= \langle (x, y, z) \rangle \\ \langle f(x, y, z) \rangle &= \langle (x, y, z) \rangle \\ \langle (x + y, x - z, z) \rangle &= \langle (x, y, z) \rangle \\ (x + y, x - z, z) &= \lambda(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} x + y = \lambda x \\ x - z = \lambda y \\ z = \lambda z \end{array} & \text{o bien} \quad \begin{array}{l} (1 - \lambda)x + y = 0 \\ x - \lambda y - z = 0 \\ (1 - \lambda)z = 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} (1 - \lambda) & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & (1 - \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en donde:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

del cual se obtiene

$$(1 - \lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 1) = 0$$

entonces

$$\lambda = 1 \quad \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \lambda = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Para cada valor $\bar{f}$ tiene un punto fijo, por ejemplo para $\lambda = 1$ el punto fijo es $\langle (1, 0, 1) \rangle$, los otros de deja para ejercicio del lector.

Por lo tanto, $\bar{f}$ tiene tres puntos fijos. $\square$

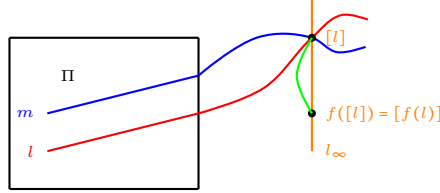
Observación: Si $f \in \text{GL}(V)$, entonces $\bar{f}$ tiene a lo más tres puntos fijos en el plano proyectivo.

Ejercicio 2.30 Determine, si es que existen, los puntos fijos de $\bar{f}$, para

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightsquigarrow (x - y, x + y, x - z + y)$$

2.5. Colineaciones en el Sumergimiento

Teorema 2.31 Sean Π un plano afín, $f \in \text{Aut}(\Pi)$ y $\overline{\Pi}$ el plano proyectivo en el cual se sumerge Π , entonces existe única $\overline{f} \in \text{Aut}(\overline{\Pi})$ tal que $\overline{f}|_{\Pi} = f$.



Demostración: Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ plano afín y $\overline{\Pi} = (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{I}})$ el correspondiente plano proyectivo y $f \in \text{Aut}(\Pi)$.

Sean $l, m \in \mathcal{L}$, sabemos que si $m \parallel l$, entonces $f(m) \parallel f(l)$. Por lo anterior tenemos que está bien definida

$$\overline{f}[l] = [f(l)]$$

Luego definimos $\overline{f}(P) = f(P)$, con $P \in \mathcal{P}$ y con ello tenemos

$$\begin{array}{ccc} \overline{f}: \overline{\mathcal{P}} & \rightarrow & \overline{\mathcal{P}} \\ \overline{A} & \rightsquigarrow & \overline{f}(\overline{A}) \end{array}$$

en donde

$$\overline{f}(\overline{A}) = \begin{cases} f(A) & A \in \mathcal{P} \\ [f(l)] & A = [l] \end{cases}$$

Veamos en las rectas, sea $l \in \mathcal{L}$, luego tenemos que

$$\overline{f}(\overline{l}) = \{\overline{f}(\overline{P}) \mid \overline{P} \in \overline{l}\}$$

de donde obtenemos

$$\begin{array}{ccc} \overline{f}: \overline{\mathcal{L}} & \rightarrow & \overline{\mathcal{L}} \\ \overline{l} & \rightsquigarrow & \overline{f}(\overline{l}) \end{array}$$

Ambas son biyectivas y respetan incidencia. ■

Teorema 2.32 Sea $\mathcal{A}$ un plano afín, Entonces existe un único plano proyectivo Π tal que $\mathcal{A}$ es isomorfo a Π^l para alguna recta $l \in \Pi$.

Demostración: Por la sección anteriores tenemos la construcción del plano proyectivo y al considerar la recta $l = l_\infty$ obtenemos lo pedido. ■

Propiedad 2.33 Dos planos Π^l y Π^m son isomorfos si y sólo si existe un isomorfismo entre los planos proyectivos Π y Π' , de modo que envía l en m .

Demostración: Sea $\theta : \Pi^l \rightarrow \Pi'^m$ un isomorfismo de planos afines.

Construimos la $\psi : \Pi \rightarrow \Pi'$, del siguiente modo.

Sea $P \in \mathcal{P}$, si $P \not\mathcal{I} l$, $\psi(P) = \theta(P)$, en caso contrario escogemos otra recta h tal que $P \mathcal{I} h$, notemos que todas las recta que inciden en P tiene un único punto en común, $\psi(P) = \theta(h) \cap m$. con ello esta bien definida en los puntos y es biyectiva.

Sea $h \in \mathcal{L}$, luego $\psi(h) = \theta(h)$ para todo $h \neq l$, y en el otro caso $\psi(l) = m$.

Corresponde a una isomorfismo, que preserva incidencia por construcción.

Inversamente supongamos que $\psi : \Pi \rightarrow \Pi'$ es un isomorfismo de plano proyectivo. tal que $\psi(l) = m$.

Claramente la restricción es una función biyectiva entre los puntos y las rectas de cada uno de los planos afines.

La función ψ preserva incidencia, luego la restricción también, por ultimo dada dos rectas paralelas $h, k \in \Pi^l$, significa que el punto de intersección pertenece a l , por ello, el punto de intersección $\psi(h), \psi(k)$ pertenece a m y por ende son paralelas en Π'^m . ■

Observación: Sabemos que las dilataciones un plano afín son de dos tipos homotecia y traslaciones, aplicando el teorema anterior veamos como se extiende estas dilataciones.

Ejemplo 2.34 Sea $\overline{\Pi}$ el plano proyectivo en el que esta sumergido Π plano afín y f una homotecia en Π .

Determinar los puntos fijos y las rectas fijas de $\overline{f}$.

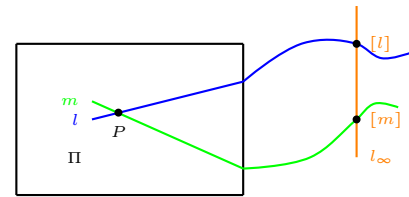
Solución: Sea P el punto fijo por la homotecia f , además para todo $l \in \mathcal{L}$ entonces $f(l) \parallel l$, de lo cual se obtiene que

$$f[l] = [f(l)] = [l]$$

Luego todos los haces de rectas están fijas por $\overline{f}$. Es decir, $\overline{f}$ fija P y todas las haces de rectas paralelas $[l]$. Así tenemos que $\overline{f}(l_\infty) = l_\infty$.

Finalmente, sea $l \in \mathcal{L}$, tal que $P \not\mathcal{I} l$, luego $P \mathcal{I} f(l)$ y $f(l) \parallel l$, por axioma del plano afín $f(l) = l$.

De este modo tenemos que $\overline{f}$ fija l_∞ y toda recta $l \in \mathcal{L}$ tal que $P \not\mathcal{I} l$. □



Ejemplo 2.35 Sea $\overline{\Pi}$ el plano proyectivo en el que esta sumergido Π plano afín y t una traslación en Π .

Determinar los puntos fijos y rectas fijas de $\overline{t}$.

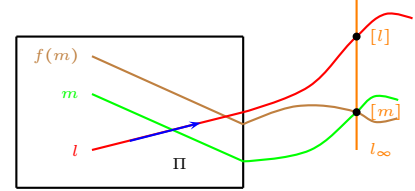
Solución:

Análogamente a lo anterior, tenemos que:

$$t[l] = [t(l)] = [l]$$

luego los únicos puntos fijos de $\bar{t}$ son los haces de rectas.

Además $\bar{t}$ fija las mismas rectas que fija t incluyendo l_∞ .



□

Ejemplo 2.36 Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y Π el plano Afín Vectorial $\mathbb{K}^2$ y $\bar{\Pi} = \mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$ el Plano Proyectivo Vectorial donde esta sumergido Π .

Dada la traslación $t(x) = \vec{x} + \vec{w}$ en Π , explicitar $\bar{t}$

Solución: Sea $t(x, y) = (x + a, y + b)$, la traslación dada y definimos

$$\mathcal{L}' = \{U \leq \mathbb{K}^3 \mid \dim U = 1 \wedge \Pi_1 \cap U \neq \emptyset\}.$$

Trasladando a Π_1 obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{t}: \quad \mathcal{L}' &\rightarrow \mathcal{L}' \\ <(x, y, 1)> &\rightsquigarrow <(x + a, y + b, 1)> \end{aligned}$$

Dada la recta que pasa por los puntos $(c, d), (u, v)$, luego la recta que une los puntos en forma vectorial es $l = <c - u, d - v> + (u, v)$, y el correspondiente representante en plano Π_0 es

$$l' = <c - u, d - v, 0>.$$

De esta manera tenemos que la recta que pasa por $t(c, d), t(u, v)$, esta dada por

$$t(l) = <c - u, d - v> + (u + a, v + b),$$

la representante en plano Π_0 es $l' = <c - u, d - v, 0>$

$$\begin{aligned} \bar{t}: \quad \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} \\ <(x, y, 1)> &\rightsquigarrow <(x + a, y + b, 1)> \\ <(x, y, 0)> &\rightsquigarrow <(x, y, 0)> \end{aligned}$$

extendiendo linealmente los elementos de la recta, obtenemos que $\bar{t}(x, y, z) = (\alpha x + az, \beta y + bz, \gamma z)$, que al restringir tenemos que $\bar{t}|_\Pi = t$, luego

$$\bar{t}(x, y, z) = (x + az, y + bz, z)$$

Ejercicio 2.37 En las condiciones del ejemplo anterior.

Determinar los puntos y rectas fijas si existen en el plano proyectivo

Ejemplo 2.38 Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y Π el plano Afín Vectorial $\mathbb{K}^2$ y $\overline{\Pi} = \mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$ el Plano Proyectivo Vectorial donde está sumergido Π .

Dada la homotecia $h(\vec{x}) = \alpha \vec{x} + (1 - \alpha)\vec{w}$ en Π , explicitar $\overline{h}$

Solución: Sea $h(x, y) = (\alpha x + (1 - \alpha)a, \alpha y + (1 - \alpha)b)$, la homotecia dada y definimos

$$\mathcal{L}' = \{U \leq \mathbb{K}^3 \mid \dim U = 1 \wedge \Pi_1 \cap U \neq \emptyset\}.$$

Trasladando obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{h}: \quad \mathcal{L}' &\rightarrow \mathcal{L}' \\ <(x, y, 1)> &\rightsquigarrow <(\alpha x + (1 - \alpha)a, \alpha y + (1 - \alpha)b, 1)> \end{aligned}$$

Dada la recta que pasa por los puntos $(c, d), (u, v)$, el representante en el plano Π_0 es

$$l' = <c - u, d - v, 0>.$$

De esta manera tenemos que, la recta que pasa por $h(c, d), h(u, v)$, esta definida por

$$h(l) = <\alpha(c - u), \alpha(d - v)> + h(u, v),$$

el representante en el plano Π_0 es $l' = <\alpha(c - u), \alpha(d - v), 0>$

$$\begin{aligned} \overline{t}: \quad \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} \\ <(x, y, 1)> &\rightsquigarrow <(\alpha x + (1 - \alpha)a, \alpha y + (1 - \alpha)b, 1)> \\ <(x, y, 0)> &\rightsquigarrow <(\alpha x, \alpha y, 0)> \end{aligned}$$

de lo anterior y teniendo presente que debe cumplir que al restringir $\overline{t}|_{\Pi} = t$, se obtiene

$$\overline{t}(x, y, z) = (\alpha x + (1 - \alpha)az, \alpha y + (1 - \alpha)bz, z)$$

□

Ejercicio 2.39 En las condiciones del ejemplo anterior.

Determinar los puntos y rectas fijas si existen en el plano proyectivo

2.6. Problemas Misceláneos

Ejemplo 2.40 En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$. Hallar el punto de intersección de la recta m que pasa por los puntos $<(3, 1, 2)>$ y $<(1, 5, -3)>$ y la recta l de ecuación $x - 3y - 4z = 0$.

Solución: Veamos la ecuación de la recta proyectiva que pasa por los puntos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -13x + 11y + 14z = 0.$$

Despejando $x = 3y + 4z$ y reemplazamos

$$\begin{aligned} -13(3y + 4z) + 11y + 14z &= 0 \\ -14y - 19z &= 0 \end{aligned}$$

de este modo tenemos que una solución particular la obtenemos de $y = 19$, $z = -14$ y con ella $x = 1$.

$$P = \langle (1, 19, -14) \rangle$$

□

Ejemplo 2.41 Sea $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2(\delta)$ con $\delta^2 = \delta + 1$ y el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_4^3)$. Dada las rectas $l_1 = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$ y l_2 la recta de ecuación $\delta x + y + \delta z = 0$. Calcule $l_1 \cap l_2$

Solución: Veamos la ecuación de la recta proyectiva que pasa por los puntos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z = 0$$

Despejando $y = -\delta x - \delta z$ y reemplazamos

$$\begin{aligned} x + \delta x + \delta z + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

de este modo tenemos que una solución particular la obtenemos de $x = 1$, $z = -1$ y con ella $y = 0$.

$$P = \langle (1, 0, 1) \rangle$$

□

Ejemplo 2.42 Sea $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2(\delta)$ con $\delta^2 = \delta + 1$ y el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_4^3)$. Dada las rectas $l_1 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, \delta) \rangle$ y l_2 la recta de ecuación $\delta x + y + z = 0$. Calcule $l_1 \cap l_2$

Solución: Veamos la ecuación de la recta proyectiva que pasa por los puntos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \delta \end{vmatrix} = x + \delta y + z = 0$$

Despejando $z = \delta x + y$ y reemplazamos

$$\begin{aligned} x + \delta y + \delta x + y &= 0 \\ (1 + \delta)x + (1 + \delta)y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

de este modo tenemos que una solución particular la obtenemos de $x = 1$, $y = 1$ y con ella $z = 1 + \delta$.

$$P = \langle (1, 1, 1 + \delta) \rangle$$

□

Ejemplo 2.43 En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_5^3)$, sean los puntos

$$K = \langle (2, 3, 2) \rangle, L = \langle (3, 1, 1) \rangle, R = \langle (2, 1, 3) \rangle, P = \langle (2, 3, 0) \rangle, Y = \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

1. Determine si el punto L incide en la recta l_{KR} .
2. Determine si el punto $Z = \langle (2, 0, 1) \rangle$ incide en las rectas l_{KL} y l_{PY} .

Solución: (a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 7 = 15 = 0 \in \mathbb{Z}_5$$

Luego L incide en la recta l_{KR} .

Solución: (b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 = 0$$

incide en ambas rectas.

□

Ejemplo 2.44 Sean $A = (1, 1 - i)$, $B = (1 + i, 1)$ puntos en el plano afín vectorial $\mathbb{C}^2$ y $\overline{A}, \overline{B}$ los puntos que se obtiene al sumergir $\mathbb{C}^2$ en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$. Determinar la ecuación de la recta que une $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

Solución: la ecuación de la recta que pasa por A, B , la pendiente es $m = \frac{1-(1-i)}{1+i-1} = 1$, reemplazando el punto obtenemos $y = x - i$.

Por ello la ecuación en el plano proyectivo es

$$x - y - iz = 0$$

y pasa por los puntos proyectivos $\overline{A} = \langle (1, 1 - i, 1) \rangle$, $\overline{B} = \langle (1 + i, 1, 1) \rangle$.

□

Ejemplo 2.45 En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea la recta de ecuación $l : 3x - y + z = 0$ y consideremos el plano afín $\Pi^l = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \setminus l$.

Hallar la ecuación de la recta afín que pasa por los puntos $\langle (1, 2, -3) \rangle$ y $\langle (2, 1, 2) \rangle$, respecto base canónica.

Solución: Consideremos $l' : 3x - y + z = 1$ recta proyectiva trasladada, los puntos de la recta vectorial que pertenecen al plano son:

$$\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right); \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

Los puntos del plano son:

$$\left(-\frac{1}{2}, -1\right); \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

Y la ecuación tiene pendiente $m = \frac{1/7+1}{2/7+1/2} = \frac{16}{11}$ y

$$y = \frac{16}{11}x - \frac{3}{11}$$

□

Ejemplo 2.46 En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea la recta de ecuación $k : x - 3y + 2z = 0$ y consideremos el plano afín $\Pi^k = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \setminus k$.

Hallar la ecuación de la recta afín que pasa por los puntos $\langle (1, 2, -3) \rangle$ y $\langle (2, 1, 2) \rangle$, respecto base canónica.

Solución: Consideremos $k' : x - 3y + 2z = 1$ recta proyectiva trasladada, los puntos de la recta vectorial que pertenecen al plano son:

$$\left(-\frac{1}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{3}{11}\right); \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Los puntos del plano son:

$$\left(-\frac{1}{11}, -\frac{2}{11}\right); \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Y la ecuación tiene pendiente $m = \frac{1/3+2/11}{2/3+1/11} = \frac{17}{25}$ y

$$y = \frac{17}{25}x + \frac{3}{25}$$

□

Ejemplo 2.47 En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea la recta de ecuación $l : x - 3y + z = 0$ y el plano afín $\Pi^l = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \setminus l$.

Hallar la ecuación de la recta afín, en el plano afín Π^l , que pasa por los puntos $\langle (2, 2, 3) \rangle$ y $\langle (3, 1, 2) \rangle$, respecto base canónica.

Solución: (a) Consideremos $l' : x - 3y + z = 1$ recta proyectiva trasladada, los puntos de la recta vectorial que pertenecen al plano son:

$$(-2, -2, -3); \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

Los puntos del plano son:

$$(-2, -2); \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Y la ecuación tiene pendiente $m = \frac{1/2+2}{3/2+2} = \frac{5}{7}$ y

$$y = \frac{5}{7}x - \frac{4}{7} \text{ o bien } 5x - 7y = 4.$$

Solución: (b) Consideremos $l' : x - 3y + z = 1$ recta proyectiva trasladada, El plano que contiene a las rectas vectoriales es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x + 5y - 4z$$

En el plano afín l' corresponde a

$$\begin{vmatrix} x - 3y + z & = & 1 \\ x + 5y - 4z & = & 0 \end{vmatrix}$$

O en el plano $\mathbb{R}^2$ esta dada por

$$x + 5y - 4(1 - x + 3y) = 0 \iff 5x - 7y = 4.$$

□

Ejemplo 2.48 En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea la recta de ecuación $m : x - 3y + z = 0$ y el plano afín $\Pi^m = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \setminus m$.

1. Determinar la ecuación de la recta l que pasa los puntos $\langle (2, 2, 3) \rangle$ y $\langle (3, 1, 2) \rangle$ en Π .
2. Determinar la ecuación de la recta l_1 , sumersión de l , en el modelo del plano afín $\Pi^m = \mathbb{R}^2$.
3. Dada $k : 3x - y + 2z = 0$ y k_1 sumersión de k en plano afín, determine si $l_1 \parallel k_1$.

Solución: (a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A \langle (2, 2, 3) \rangle$ y $B \langle (3, 1, 2) \rangle$ en Π . Corresponde al plano que contiene a las rectas vectoriales, es decir,

$$(x, y, z) \in \langle (2, 2, 3), (3, 1, 2) \rangle \iff \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x + 5y - 4z = 0$$

La ecuación es

$$x + 5y - 4z = 0$$

(b) En el plano afín, l_1 corresponde a

$$\begin{vmatrix} x - 3y + z & = & 1 \\ x + 5y - 4z & = & 0 \end{vmatrix}$$

luego, en el plano $\mathbb{R}^2$ esta dada por

$$x + 5y - 4(1 - x + 3y) = 0 \iff 5x - 7y = 4.$$

La ecuación en el plano afín es $5x - 7y = 4$ y su pendiente es $5/7$.

(c) Para la segunda tenemos

$$k : 3x - y + 2(1 - x + 3y) = 0 \iff x + 5y = -2.$$

y su pendiente es $-1/5 \neq 5/7$, luego no son paralelas. □

Ejemplo 2.49 En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$ y sea $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = ((2 - i)\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, i \cdot \bar{z}).$$

1. Demostrar f es semilineal biyectiva

2. Demostrar que f induce naturalmente $\bar{f}$ una colineación de Π .

Solución: Sea $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, dada por $f(x, y, z) = ((2 - i)\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, i \cdot \bar{z})$.

(a) Es semilineal ya que:

$$\begin{aligned} f((x, y, z) + \alpha(a, b, c)) &= f(x + \alpha a, y + \alpha b, z + \alpha c) \\ &= ((2 + i)\overline{x + \alpha a} + \overline{y + \alpha b}, \overline{y + \alpha b} + \overline{z + \alpha c}, i\overline{z + \alpha c}) \\ &= ((2 + i)\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, i\bar{z}) + \bar{\alpha}((2 + i)\bar{a} + \bar{b}, \bar{b} + \bar{c}, i\bar{c}) \\ &= f(x, y, z) + \bar{\alpha}f(a, b, c). \end{aligned}$$

La inversa es

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) = (a, b, c) &\iff ((2 + i)\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, i\bar{z}) = (a, b, c) \\ &\iff ((2 - i)x + y, y + z, -iz) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \\ &\iff z = i\bar{c}, y = \bar{b} - i\bar{c}, x = \frac{2 + i}{5}(\bar{a} - \bar{b} + i\bar{c}) \\ &\iff f^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{2 + i}{5}(\bar{a} - \bar{b} + i\bar{c}), \bar{b} - i\bar{c}, i\bar{c}\right). \end{aligned}$$

Luego f es biyectiva y semilineal.

(b) Por lo anterior tenemos que $f(a(x, y, z)) = \bar{a}f(x, y, z)$. Luego esta bien definida a nivel de puntos y biyectiva.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \langle x, y, z \rangle & \rightsquigarrow & \langle f(x, y, z) \rangle \end{array}$$

Además tenemos que $f(a(x, y, z) + b(u, v, w)) = \bar{a}f(x, y, z) + \bar{b}f(u, v, w)$, luego esta bien definida y es biyectiva a nivel de recta y también preserva incidencia.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ \langle x, y, z \rangle, \langle u, v, w \rangle & \rightsquigarrow & \langle f(x, y, z), f(u, v, w) \rangle \end{array}$$

De este modo f es una colineación. □

Ejemplo 2.50 En el plano proyectivo $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$ y

$$f(<(x, y, z)>) = <(3\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, \bar{z})>.$$

Mostrar f una colineación.

Solución: (a)

Sea $g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, dada por $g(x, y) = (3\bar{x} + \bar{y}, \bar{y})$ es semilineal ya que:

$$\begin{aligned} g((x, y) + \alpha(a, b)) &= g(x + \alpha a, y + \alpha b) \\ &= (3\overline{x + \alpha a} + \overline{y + \alpha b}, \overline{y + \alpha b}) \\ &= (3\bar{x} + \bar{y}, \bar{y}) + \bar{\alpha}(3\bar{a} + \bar{b}, \bar{b}) \\ &= g(x, y) + \bar{\alpha}g(a, b). \end{aligned}$$

Luego g es semilineal y es biyectiva ya que su inversa es $g^{-1}(x, y) = (\frac{x-y}{3}, y)$. Luego $k(x, y) = (3\bar{x} + \bar{y}, \bar{y}) + (0, 1)$ es una colineación del plano afín vectorial.

$$\tilde{k}(x, y, 1) = (3\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + 1, 1)$$

Que induce la colineación en el plano proyectivo

$$f(<(x, y, z)>) = \bar{k}(<(x, y, z)>) = <(3\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, \bar{z})>.$$

Solución: (b) Sea $g: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, dada por $g(x, y, z) = (3\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, \bar{z})$. es semilineal ya que:

$$\begin{aligned} g((x, y, z) + \alpha(a, b, c)) &= g(x + \alpha a, y + \alpha b, z + \alpha c) \\ &= (3\overline{x + \alpha a} + \overline{y + \alpha b}, \overline{y + \alpha b} + \overline{z + \alpha c}, \overline{z + \alpha c}) \\ &= (3\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, \bar{z}) + \bar{\alpha}(3\bar{a} + \bar{b}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{c}) \\ &= g(x, y, z) + \bar{\alpha}g(a, b, c). \end{aligned}$$

La inversa es

$$\begin{aligned} g((x, y, z)) = (a, b, c) \quad & (3\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, \bar{z}) = (a, b, c) \\ & (3x + y, y + z, z) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \\ & z = \bar{c}, \quad y = \bar{b} - \bar{c}, \quad x = \frac{1}{3}(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) \\ g^{-1}(a, b, c) &= (\frac{1}{3}(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}), \bar{b} - \bar{c}, \bar{c}). \end{aligned}$$

Luego g es biyectiva y semilineal.

De este modo tenemos que $g(a(x, y, z)) = \bar{a}g(x, y, z)$. Función bien definida y biyectiva a nivel de puntos

$$g: \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ <(x, y, z)> & \rightsquigarrow & <g(x, y, z)> \end{array}$$

Por otra parte tenemos que $g(a(x, y, z) + b(u, v, w)) = \bar{a}g(x, y, z) + \bar{b}g(u, v, w)$
 Función bien definida y biyectiva a nivel de recta y preserva incidencia

$$g: \begin{array}{c} \mathcal{L} \\ \langle (x, y, z), (u, v, w) \rangle \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathcal{L} \\ \langle g(x, y, z), g(u, v, w) \rangle \end{array} \rightsquigarrow$$

Luego g es una colineación. □

Ejemplo 2.51 En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ y sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, una transformación lineal biyectiva tal que

$$f(x, y, z) = (3x, 2x + y + z, 3z).$$

y $\bar{f}$ la colineación inducida por f en plano proyectivo.

1. Determinar los puntos fijos de $\bar{f}$ en Π .
2. Determinar cuatro rectas fijas de $\bar{f}$ en Π .

Solución: (a) Determinar los puntos fijos de la colineación es equivalente a determinar

$$f(x, y, z) = a(x, y, z)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (3-a)x & = & 0 \\ 2x + (1-a)y + z & = & 0 \\ (3-a)z & = & 0 \end{array} \right.$$

que el sistema tenga solución no trivial significa que

$$\left| \begin{array}{ccc} 3-a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 3-a \end{array} \right| = (3-a)^2(1-a) = 0$$

Si $a = 3$, luego $2x - 2y + z = 0$, de ello tenemos que

$$(x, y, -2x + 2y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, 2)$$

Toda las rectas del plano $\langle (1, 0, -2), (0, 1, 2) \rangle$ están fijas, ya que

$$f(x, y, 2y - 2x) = (3x, 2x + y + 2y - 2x, 6y - 6x) = (3x, 3y, 6y - 6x) = 3(x, y, 2y - 2x)$$

Para $a = 1$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x & = & 0 \\ 2x + z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

tenemos que $x = 0 = z$, luego la recta es $\langle (0, 1, 0) \rangle$.

(b) Algunas rectas proyectivas fijas, planos vectoriales, son:

1. $f(<(1, 0, -2), (0, 1, 2)>) = <3(1, 0, -2), 3(0, 1, 2)> = <(1, 0, -2), (0, 1, 2)>$,
2. $f(<(1, 0, -2), (0, 1, 0)>) = <3(1, 0, -2), (0, 1, 0)> = <(1, 0, -2), (0, 1, 0)>$,
3. $f(<(0, 1, 0), (0, 1, 2)>) = <(0, 1, 0), 3(0, 1, 2)> = <(0, 1, 0), (0, 1, 2)>$,
4. $f(<(1, 0, 0), (0, 1, 0)>) = <(3, 1, 0), (0, 1, 0)> = <(1, 0, 0), (0, 1, 0)>$.

□

Ejemplo 2.52 En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean la recta de ecuación $m : x - 3y + 2z = 0$, los puntos $A = <(2, 1, 3)>$, $B = <(3, 1, 2)>$ y el plano afín $\Pi^m = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \setminus m$.

1. Determinar la ecuación cartesiana de la recta l_1 , sumersión de l_{AB} , en el modelo del plano afín $\Pi^m = \mathbb{R}^2$.
2. Dada $k : 3x - y + 2z = 0$ y k_1 sumersión de k en plano afín, determine si $l_1 \parallel k_1$.

Ejemplo 2.53 En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$ y sea $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (2\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + i \cdot \bar{z}, \bar{z}).$$

1. Demostrar f es semilineal biyectiva
2. Determinar un punto fijo y una recta fija de $\bar{f}$ en Π .

Ejemplo 2.54 Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y los conjuntos de puntos y rectas dada por:

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{U} \leq \mathbb{K}^3 \mid \dim(\mathcal{U}) = 1\}, \quad \mathcal{L} = \{\mathcal{W} \leq \mathbb{K}^3 \mid \dim(\mathcal{W}) = 2\}$$

y la incidencia la contención (plano proyectivo vectorial).

Demuestre que $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$ satisface:

1. El segundo axioma de plano proyectivo.
2. El tercer axioma de plano proyectivo.

Solución: El segundo axioma de plano proyectivo.

Si $l \neq m$ entonces $l \cap m \neq \emptyset$

Sean $l = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ y $m = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ con $l \neq m$, entonces $l \not\subseteq l + m \subseteq \mathbb{K}^3$

$$\begin{aligned} \dim(l + m) &= \dim(l) + \dim(m) - \dim(l \cap m) \\ 3 &= 2 + 2 - \dim(l \cap m) \\ \dim(l \cap m) &= 1 \end{aligned}$$

En particular $l \cap m \neq \emptyset$.

El tercer axioma de plano proyectivo.

Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{K}^3$. Entonces $\{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ forman un cuadrángulo. Para ello notemos que $e_1, e_2 \notin \langle e_3, e_1 + e_2 + e_3 \rangle$. Ya que

$$e_1 \neq ae_3 + b(e_1 + e_2 + e_3) \text{ y } e_2 \neq ae_3 + b(e_1 + e_2 + e_3), \quad a, b \in \mathbb{K}.$$

Del mismo modo $e_1, e_1 + e_2 + e_3 \notin \langle e_2, e_3 \rangle$. Ya que

$$e_1 \neq ae_2 + be_3 \text{ y } e_1 + e_2 + e_3 \neq ae_2 + be_3, \quad a, b \in \mathbb{K}.$$

□

Ejemplo 2.55 *Demuestre que todo plano proyectivo tiene al menos 7 rectas.*

Solución: Por axioma tres, sabemos que existen cuatro puntos que denotaremos por A, B, C y D , además por cada par de punto existe una recta que no contiene a los otros

- i) $l_{AB} \cap l_{CD} = \{E\}$, entonces $E \notin l_{AB}$ y $E \notin l_{CD}$
- ii) $l_{AC} \cap l_{BD} = \{F\}$, entonces $F \notin l_{AC}$ y $F \notin l_{BD}$
- iii) $l_{AD} \cap l_{BC} = \{G\}$, entonces $G \notin l_{AD}$ y $G \notin l_{BC}$

Note que, si $E = F$, $E \notin l_{AB}$; $E \notin l_{AC}$; lo que $l_{AE} = l_{AB} = l_{AC}$; lo que significa que tres puntos son colineales, lo cual no es posible, luego existe siete puntos. a las anteriores seis rectas, existe l_{EF} que es distinta a las anteriores. □

Ejemplo 2.56 *Demostrar que en un plano proyectivo todas las rectas tienen la misma cantidad de puntos que inciden en ella.*

Demostración: Dada las rectas l, k distintas y sea P un punto que no incide en ninguna de ellas, la existencia del cuadrángulo, garantiza la existencia del punto P .

Dado $Q \in l$, luego existe única recta l_{PQ} y la intersección de l_{PQ} con k es un único punto. Inversamente dado R un punto que incide en k , existe la recta l_{PR} y con ella el punto intersección $l_{PR} \cap l$.

Teniendo presente la unicidad de la intersección y que dado dos puntos define una única recta, se tiene que una función es la inversa de la otra.

$$\begin{array}{ccc} f & l & \longleftrightarrow k \\ & Q & \rightarrow l_{PQ} \cap k \\ & l_{PR} \cap k & \leftarrow R \end{array}$$

De lo anterior tenemos que $\#(l) = \#(k)$. □