Universidad de Valparaíso
CHILE
Tradición Excelencia Innovación

Geometría Afín

Daniel Jiménez Briones

Versión 3.1
Enero, 2019

Índice general

Introducción

La primera versión del presente apunte, corresponde a un trabajo de recopilación realizado por los alumnos Claudio Fierro Parraguez, Daniela Ogas Muñoz, Maximiliano Nuñez Gonzalez de la Carrera de Matemáticas de nuestra Universidad, durante el año 2016. Toda esta selección de material, se obtuvo de diferentes años en que dictó la asignatura de Geometría el profesor Patricio Riquelme Guajardo quienes nos permitió usar los apuntes de sus alumnos para dar forma a este proyecto.

Capítulo 1

Plano Afín

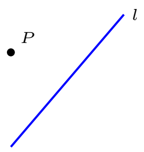
1.1. Introducción:

Definición 1.1 *Un triple* $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$*, se llama **estructura de incidencia** si y sólo si verifica* $\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}$ *conjuntos no vacío,* $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \phi$ *y* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$*.*

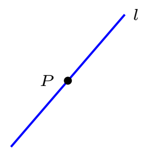
Notación: En el conjunto $\mathcal{P}$, sus elementos se llaman puntos y los designados con letra mayúscula P, Q, R. En el conjunto $\mathcal{L}$, sus elementos se laman rectas y los designados con letra minúscula l, m, t y la relación $\mathcal{I}$ de incidencia entre puntos y rectas y denotamos por

$$(P, l) \in \mathcal{I},\ P \text{ incide con } l,\ P\ \mathcal{I}\ l \qquad (P, l) \notin \mathcal{I},\ P \text{ no incide con } l,\ P\ \not{\mathcal{I}}\ l$$

Observación: Visualmente la incidencia se representa por



a) $P\ \not{\mathcal{I}}\ l$, P no incide con l.



b) $P\ \mathcal{I}\ l$, P incide con l.

Notación: Dada $l, m \in \mathcal{L}$

$$m \cap l \neq \phi \text{ si y sólo si } (\exists P \in \mathcal{P})(P\mathcal{I}m \wedge P\mathcal{I}l)$$

o bien

$$m \cap l = \phi \text{ si y sólo si } (\forall P \in \mathcal{P})(P\not{\mathcal{I}}m \vee P\not{\mathcal{I}}l)$$

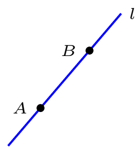
Definición 1.2 *Sean* $l, m \in \mathcal{L}$*.*
Se dice que l *es **paralela** a* m *y se denota por* $l \parallel m$*, si y sólo si,* $m \cap l = \phi\ \vee\ l = m$*.*

1.2. Axioma del plano afín

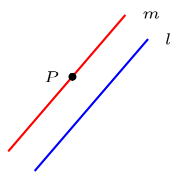
Un estructura de incidencia $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, se dice que Π es un plano afín si y sólo si cumple los siguientes axiomas

1.- Sean $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$ entonces $\exists!\ l \in \mathcal{L}$ tal que $A\mathcal{I}l$ y $B\mathcal{I}l$

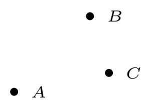
La única recta se denota por l_{AB}.



2.- Sean $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$. Si $P \not\mathcal{I} l$ entonces $\exists! m \in \mathcal{L}$ tal que $P\mathcal{I}m$ y $m \parallel l$ (quinto postulado de Euclides).



3.- Existen tres puntos no colineales (no existe una recta tal que contenga a estos tres puntos) y cada recta inciden al menos dos puntos.



Observación: Por axioma uno, dos rectas distintas inciden entre ellas en un punto o ninguno. Si existe un punto P tal que $P\ \mathcal{I}\ l$ y $P\ \mathcal{I}\ m$ denotamos por $l \cap m = \{P\}$ en caso contrario $l\ \cap\ m = \varnothing$

Teorema 1.3 *Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ un plano afín, entonces la relación de paralelismo es una relación de equivalencia.*

Demostración:

1. $\parallel$ es refleja, es decir, $(\forall l \in \mathcal{L})(l \parallel l)$, para ello tenemos que

$$l = l, \text{ luego } l \parallel l.$$

2. $\parallel$ es simétrica, es decir, $(\forall l, m \in \mathcal{L})(l \| m \Rightarrow m \parallel l)$

Consideremos dos rectas paralelas $l \parallel m$ luego se tiene que

$$l \cap m = \ \phi\ \vee\ l = m$$

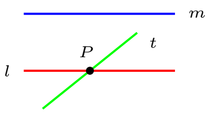
lo cual es equivalente a

$$m \cap l = \phi\ \vee\ m = l,$$

es decir, $m \parallel l$.

3. $\parallel$ es transitiva, es decir, $(\forall\ l, m, t \in \mathcal{L})(l \parallel m \wedge m \| t \Rightarrow l \parallel t)$.

   Lo cual demostraremos por el absurdo. Sean l, t, m tres rectas tales que $l \parallel m$, $m \parallel t$ y $l \nparallel t$, como $l \nparallel t$ luego, $l \neq t$ y $l \cap t = \{P\}$, pero por P pasan dos rectas paralelas a m contradicción (unicidad del axioma dos). Por lo tanto la relación de paralelismo es una relación de equivalencia.

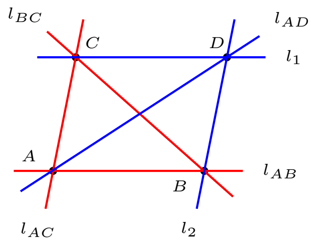


■

Definición 1.4 *Plano afín minimal es aquel plano formado por el mínimo número de puntos que cumplen con los tres axiomas.*

Propiedad 1.5 *Todo plano afín al menos contiene cuatro puntos.*

Demostración: Por axioma tres sabemos que existen tres puntos no colineales A, B, C, del cual por axioma uno, existen tres rectas que unen a estos tres puntos que los definiremos como l_{AB}, l_{BC}, l_{AC} respectivamente como se observa en la imagen.
Consideremos la recta l_{AB}, por axioma dos tenemos que existe una recta paralela a l_{AB} que la designaremos por l_1 y que pasa por el punto C, análogamente se prueba la existencia de una recta paralela a l_{AC} que pasa por B que llamaremos por l_2, como la recta $l_{AB} \bigcap l_{AC} \neq \varnothing$ entonces también lo hacen las rectas l_1 y l_2 en el punto D y para concluir determinaremos la existencia de la recta l_{AD} que pasa respectivamente por los puntos A, D.



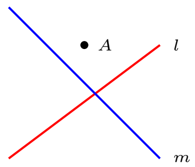
■

Observación: De lo anterior se concluye:

1. Todo Π plano afín contiene al menos cuatro puntos de manera que tres cualquiera no son colineales

2. Todo Π plano afín contiene a lo menos seis rectas en las que hay dos paralelas

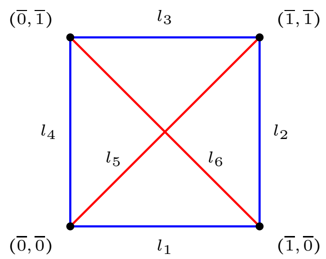
3. Dada dos rectas no paralelas, siempre existe un punto que no incide a ninguna de las rectas



Ejemplo 1.6 *Sea $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Determine las ecuaciones de las rectas y si existe paralelismo entre ellas.*

Solución: Las ecuaciones de las rectas de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ están dada por

$$\begin{array}{ll} l_1 : y = 0 & l_4 : x = 0 \\ l_2 : x = 1 & l_5 : y = x \\ l_3 : y = 1 & l_6 : y = x + 1 \end{array}$$

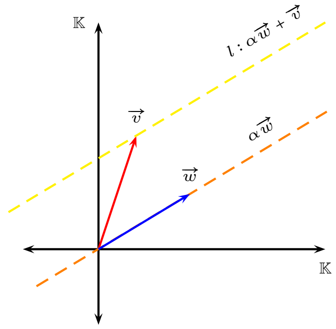


En consecuencia $l_1 \| l_3$, $l_2 \| l_4$ y $l_5 \| l_6$ (estas últimas son paralelas porque no hay ningún punto en común). $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es un modelo del **plano afín minimal** en donde $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es el espacio vectorial de dimensión dos. □

1.2.1. Plano Afín Vectorial

Teorema 1.7 *Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión dos*
Si los puntos son las vectores, las rectas son las rectas afines y la incidencia es la pertenecía entonces $\Pi = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, es un Plano Afín.

Demostración: Sean $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{V}$ con $\overrightarrow{w} \neq 0$, definamos la recta afines l en dirección $\overrightarrow{w}$ y trasladada en $\overrightarrow{v}$, por $l = \{\alpha\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$



Sea $l = \{\alpha\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ una recta afín, por comodidad se denotara por

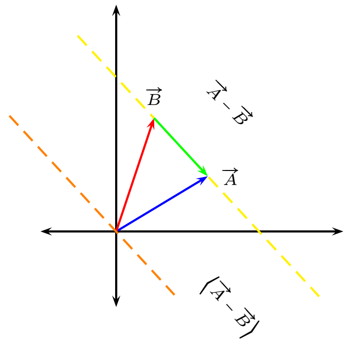
$$l : \langle \overrightarrow{w} \rangle + \overrightarrow{v}.$$

La **Incidencia** esta definida por $\overrightarrow{P}\ \mathcal{I}\ l$ es equivalente a $\overrightarrow{P} \in l$. De otro modo, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{P} = \alpha\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$.
Verifiquemos los axiomas del plano afín.

1. Sea $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \in \mathcal{V}$ con $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{B}$. Debemos demostrar que existe $m \in \mathcal{L}$ tal que $\overrightarrow{A}\ \mathcal{I}\ m$ y $\overrightarrow{B}\ \mathcal{I}\ m$. Para ello tenemos que $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$ y definamos

$$m = \left\{\alpha\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right) + \overrightarrow{A} \mid \alpha \in \mathbb{K}\right\},$$

luego tenemos que $\overrightarrow{A} = 0\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right) + \overrightarrow{A}$, entonces $\overrightarrow{A} \in m$, es decir, $\overrightarrow{A}\ \mathcal{I}\ m$. Análogamente $\overrightarrow{B} = (-1)\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right) + \overrightarrow{A}$, es decir, $\overrightarrow{B}\ \mathcal{I}\ m$.



Unicidad: Supongamos que $\exists t \in \mathcal{L}$ de modo que

$$t = \left\{\alpha\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \mid \alpha \in \mathbb{K}\right\}$$

tal que $\overrightarrow{A}\ \mathcal{I}\ t$ y $\overrightarrow{B}\ \mathcal{I}\ t$, luego existe un $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ distintos tales que

$$\begin{array}{rcl|} \overrightarrow{A} & = & \alpha_1\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{B} & = & \alpha_2\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \\ \hline \end{array}$$

de lo cual

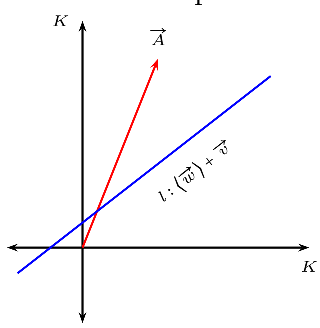
$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} & = & \alpha_1\overrightarrow{w} - \alpha_2\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} & \\ & = & \alpha_1\overrightarrow{w} - \alpha_2\overrightarrow{w} & \\ & = & (\alpha_1 - \alpha_2)\overrightarrow{w} & \\ \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} & = & \alpha_3\overrightarrow{w} & \text{con } \alpha_3 \neq 0 \\ \overrightarrow{w} & = & (\alpha_3)^{-1}\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right) & \end{array}$$

Por lo tanto $\left\langle\overrightarrow{w}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right\rangle$ y $\overrightarrow{A} \in t \cap m$, luego $t = m$.

2) Sean $\overrightarrow{A} \in \mathcal{V}$, $l \in \mathcal{L}$ y $\overrightarrow{A}\ \not{\mathcal{I}}\ l$. Por demostrar que existe una recta $m \in \mathcal{L}$ tal que $\overrightarrow{A}\ \mathcal{I}\ m \wedge m \parallel l$.

Sea $l : \left\langle\overrightarrow{w}\right\rangle + \overrightarrow{v}$ la recta debe tener la misma dirección y contener al vector $\overrightarrow{A}$, entonces la recta m de define como:

$$m : \left\langle\overrightarrow{w}\right\rangle + \overrightarrow{A}$$



Unicidad

Supongamos que $\exists t \in \mathcal{L}$ tal que $\overrightarrow{A}\mathcal{I}t$, $\overrightarrow{A}\mathcal{I}m$, el cual definiremos como $t :=< \overrightarrow{x} > + \overrightarrow{y}$, $m :=< \overrightarrow{w} > + \overrightarrow{A}$.

Ya que $\overrightarrow{A} \in t$ entonces $t = \langle \overrightarrow{x} \rangle + \overrightarrow{A}$ pero $t \parallel m$, entonces $\langle \overrightarrow{x} \rangle = \langle \overrightarrow{w} \rangle$ luego $m = \langle \overrightarrow{x} \rangle + \overrightarrow{A}$ es decir,

$$\begin{array}{rcl|} t & = & \langle \overrightarrow{w} \rangle + \overrightarrow{A} \\ m & = & \langle \overrightarrow{w} \rangle + \overrightarrow{A} \\ \hline \end{array}$$

en consecuencia $t = m$.

3) Por demostrar que existe un triángulo.

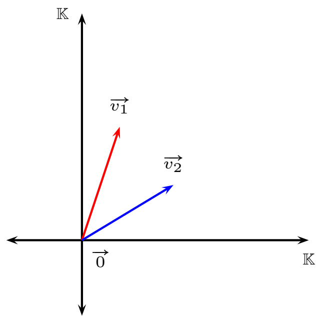
Sea $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ base de $\mathcal{V}$, y $\overrightarrow{0} \in \mathcal{V}$ entonces tenemos $\overrightarrow{0}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ no son colineales, ya si l contiene a los tres elementos $\overrightarrow{0} \in l$

$$l : \langle \overrightarrow{w} \rangle + \overrightarrow{0}$$

pero $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in l$

$$\overrightarrow{v_1} = \alpha_1 \overrightarrow{w} \ , \ \overrightarrow{v_2} = \alpha_2 \overrightarrow{w}$$

luego $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ son linealmente dependiente.



De este modo, existen tres puntos no colineales.

Por lo tanto $\Pi = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, es un Plano Afín ∎

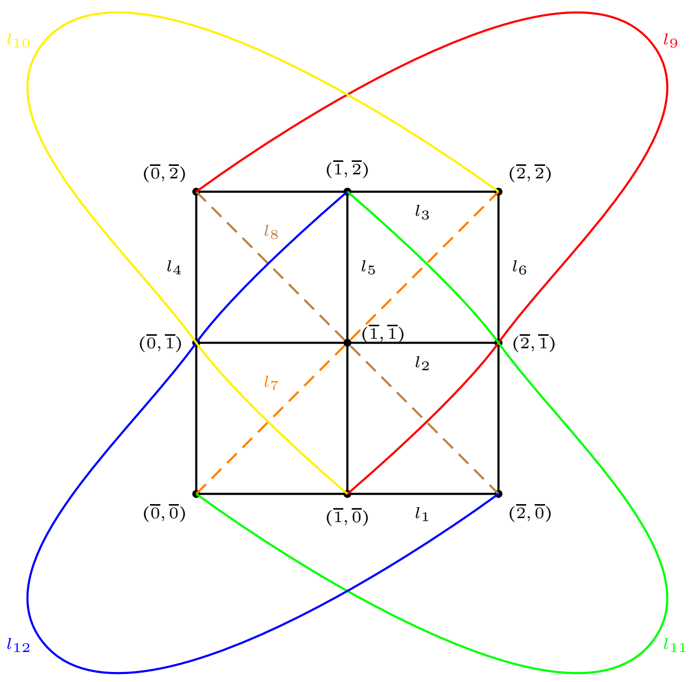
Ejemplo 1.8 *Sea $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Determine las ecuaciones de las rectas y si existe paralelismo entre ellas.*

Solución: Consideremos los puntos

$$\mathcal{P} = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{1},\overline{0}), (\overline{2},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1}), (\overline{1},\overline{1}), (\overline{2},\overline{1}), (\overline{0},\overline{2}), (\overline{1},\overline{2}), (\overline{2},\overline{2})\}$$

las ecuaciones de las rectas son:

$$\begin{array}{llll} l_1 : y = 0, & l_4 : x = 0, & l_7 : y = x, & l_{10} : y = 2x + 1, \\ l_2 : y = 1, & l_5 : x = 1, & l_8 : y = 2x + 3, & l_{11} : y = 2x, \\ l_3 : y = 2, & l_6 : x = 2, & l_9 : y = x + 2, & l_{12} : y = x + 1. \end{array}$$



Las rectas paralelas entre ellas son:

$$l_1 \| l_2 \| l_3 \ ; \ l_4 \| l_5 \| l_6 \ ; \ l_7 \| l_9 \| l_{12} \text{ y } l_8 \| l_{10} \| l_{11}$$

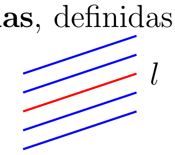
□

Definición 1.9 *Dados los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se dice que los puntos son **colineales** si y sólo si existe $l \in \mathcal{L}$ tal que $P_i \mathcal{I} l$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.*

1.3. Haces de Paralelas

Ya que la relación de paralelismo es una relación de equivalencia en el plano afín, este se divide en clases de equivalencias llamadas cada clase un **haz de paralelas**, definidas por:

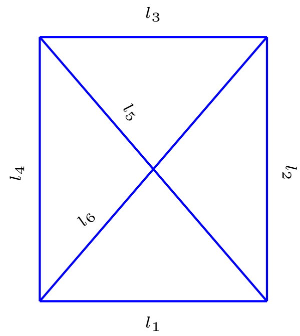
$$[l] = \{m \in \mathcal{L} \mid m \parallel l\}$$



Ejemplo 1.10 *El plano afín minimal contiene tres haces de paralelas.*

Solución: Por propiedad 1.1 y el ejemplo 1.1, sabemos que existen seis rectas las que definimos por l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 y l_6 entonces veamos las rectas que son paralelas.
En la figura tenemos que

$$\begin{array}{lcccc} l_1 \parallel l_3 & \longrightarrow [l_1] & = & \{l_1, l_3\} & = & [l_3] \\ l_2 \parallel l_4 & \longrightarrow [l_2] & = & \{l_2, l_4\} & = & [l_4] \\ l_5 \parallel l_6 & \longrightarrow [l_5] & = & \{l_5, l_6\} & = & [l_6] \end{array}$$



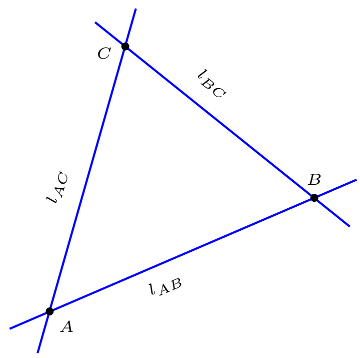
□

Teorema 1.11 *El plano afín contiene al menos tres haces de paralelas.*

Demostración: Por axioma tres existen $A, B, C \in \mathcal{P}$ (tres puntos no colineales)

$$\begin{array}{lcl} l_{AC} \cap l_{BC} \neq \varnothing & \Rightarrow & [l_{AC}] \neq [l_{BC}] \\ l_{BC} \cap l_{AB} \neq \varnothing & \Rightarrow & [l_{BC}] \neq [l_{AB}] \\ l_{AC} \cap l_{AB} \neq \varnothing & \Rightarrow & [l_{AC}] \neq [l_{AB}] \end{array}$$

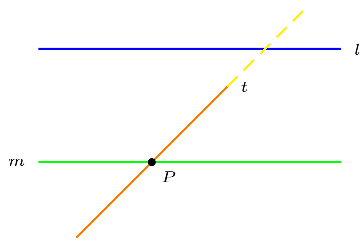
Por lo tanto $[l_{AC}] \neq [l_{AB}] \neq [l_{BC}] \neq [l_{AC}]$, en consecuencia existen al menos tres haces de paralelas.



■

Teorema 1.12 *Sean* Π *plano afín,* $l, m, t \in \mathcal{L}$ *tales que* $l \parallel m$ *y* $m \cap t = \{P\}$ *entonces* $l \cap t \neq \varnothing$*.*

Demostración: Por el absurdo, supongamos que $l \parallel m$ y $m \cap t \neq \varnothing \wedge l \cap t = \varnothing$, es decir, $l \parallel t$, entonces $l \parallel m$, $l \parallel t$ y $t \cap m = \{P\}$, en consecuencia por P pasan dos rectas paralelas a l, lo cual es una contradicción por unicidad de axioma dos.



■

Teorema 1.13 *Sea* Π *plano afín, entonces cada recta contiene el mismo número de puntos que inciden en ella.*

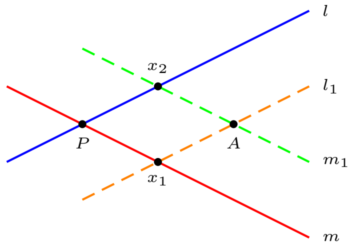
Demostración: Dada $l, m \in \mathcal{L}$, denotamos por $\mathcal{P}_l = \{P \in \mathcal{P} \mid P\mathcal{I}l\}$, debemos probar que $\#\mathcal{P}_l = \#\mathcal{P}_m$.
La demostración se realizara en dos caso,

i) Supongamos que $l \nparallel m$ entonces $l \cap m = \{P\}$

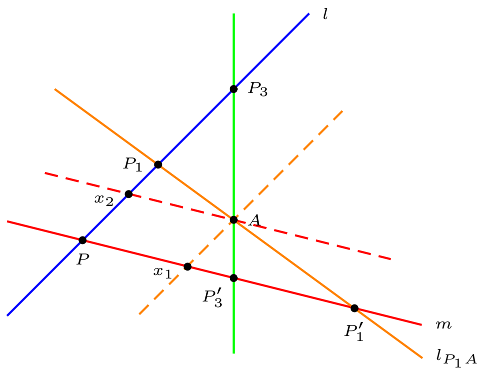
Sea $A \in \mathcal{P}$, $A \not\mathcal{I} l$ y $A \not\mathcal{I} m$. Por axioma dos sea $l_1 \in \mathcal{L}$ tal que $A\mathcal{I}l_1$ y $l_1 \parallel l$, de lo cual $l_1 \cap m = \{x_1\}$, nuevamente por axioma dos tenemos que $\exists!\ m_1 \in \mathcal{L}$ tal que $A\mathcal{I}m_1$ y $m_1 \parallel m$, luego $m_1 \cap l = \{x_2\}$.

Gracias a estos antecedentes podemos construir la siguiente función:

$$\begin{array}{cccc} f: & \{x_2, P\} & \longrightarrow & \{x_1, P\} \\ & x_2 & \longrightarrow & x_1 \\ & P & \longrightarrow & P \end{array}$$



Ahora veamos otros puntos. Sea $P_1\ \mathcal{I}\ l$ tal que $P_1 \neq P$ y $P_1 \neq x_1$. Unimos P_1 con A a través de la recta l_{AP_1}, entonces



luego tenemos $l_{AP_1} \nparallel m$, es decir, $l_{AP_1} \cap m \neq \phi$, luego, $l_{AP_1} \cap m = \{P_1'\}$.

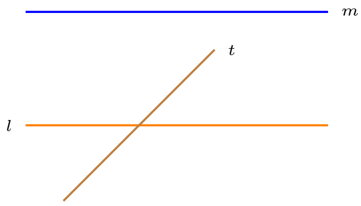
Por lo tanto

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{P}_l & \longrightarrow & \mathcal{P}_m \\ & P_1 & \longrightarrow & P_1' \\ & P & \longrightarrow & P \\ & x_2 & \longrightarrow & x_1 \end{array}$$

De modo que f es una función biyectiva, entonces el $\#\mathcal{P}_l = \#\mathcal{P}_m$

ii) Supongamos ahora que $l \parallel m$.

Sea $t \in \mathcal{L}$ tal que $t \cap l \neq \varnothing$, por teorema anterior:



Sabemos que $t \nparallel l$ y $t \nparallel m$ por la primera parte entonces

$$\#\mathcal{P}_t = \#\mathcal{P}_l \text{ y } \#\mathcal{P}_t = \#\mathcal{P}_m$$

del cual

$$\#\mathcal{P}_l = \#\mathcal{P}_m.$$

■

Notación: Dada $l \in \mathcal{L}$ y $P \in \mathcal{P}$, denotamos por

$$\mathcal{P}_l = \{Q \in \mathcal{P} \mid Q\mathcal{I}l\}; \qquad \mathcal{L}_P = \{m \in \mathcal{L} \mid P\mathcal{I}m\}.$$

Definición 1.14 *Se dice que el orden del plano Π es n si y sólo si cada recta contiene n puntos, y lo denotamos por $\#\Pi = n$*

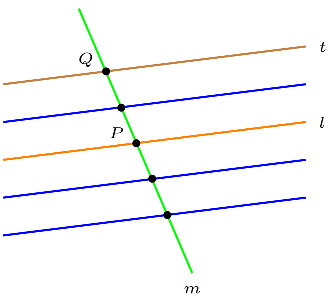
Ejemplo 1.15

1. *$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, es un plano afín de orden dos.*
2. *$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un plano afín de orden infinito.*

Observación: Los planos afines finitos, conocidos hasta ahora, son de la forma $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$, donde $\mathbb{F}_q$ es un cuerpo finito con q elementos y q potencia de un primo.

Teorema 1.16 *En un plano afín, todos los haces de rectas paralelas tienen la misma cantidad de rectas y esa cantidad es igual al orden del plano.*

Demostración: Sean $l, m \in \mathcal{L}$, con $l \cap m \neq \varnothing$ y $[l]$ haz de rectas paralelas de dirección l. Construimos la correspondencia de cada recta del haz, le asociamos la intersección con m



$$\begin{array}{rccc} f: & [l] & \longrightarrow & \mathcal{P}_m \\ & l & \longrightarrow & P \\ & t & \longrightarrow & Q \end{array}$$

Por lo tanto $\#[l] = \#\mathcal{P}_m$. En consecuencia todas las haces de paralelas tienen la misma cantidad de rectas ■

Teorema 1.17 *Sea Π un plano afín de orden n, entonces*

i) Por un punto P pasan $n+1$ rectas, $\#\mathcal{L}_P = n+1$.

ii) El plano afín contiene $n + 1$ haces de paralelas.

iii) El número de rectas en plano afín es $n^2 + n = \#\mathcal{L}$.

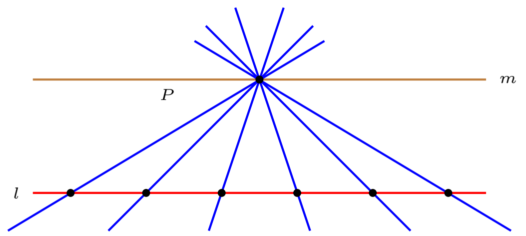
iv) La cantidad de puntos en el plano afín es $n^2 = \#\mathcal{P}$.

Demostración:

i) Sean $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$ tal que $P \not{\mathcal{I}} l$ en donde $\#\Pi = n \wedge \#[l] = n$.
Al unir cada punto de l con el punto P obtenemos n-rectas y por axioma dos

$$(\exists! m \in \mathcal{L})(P\mathcal{I}m \wedge m \parallel l)$$

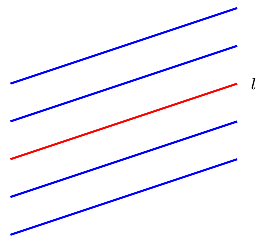
por lo tanto por P pasan $n + 1$ rectas.



ii) Dada un recta entonces existe una paralela que pasa por P y considerando el resultado anterior que por P pasan $n + 1$ rectas, entonces existen $n + 1$ haces de paralelas.

iii) Sea $l \in \mathcal{L}$, luego pertenece a únicos haz de paralelas $[l]$, cada haz tiene n rectas y por lo anterior hay $n + 1$ haces de paralelas, por lo tanto

$$\#\mathcal{L} = n(n + 1) = n^2 + n.$$



iv) Sea $[l]$ haz de paralelas, cada recta contiene n puntos y cada haz de paralelas contiene n rectas, por lo tanto

$$\#P = n \cdot n = n^2.$$

■

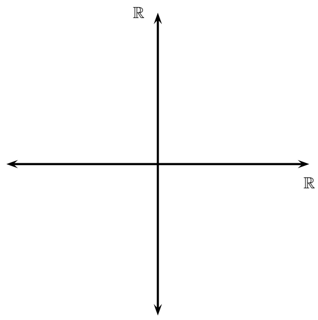
Ejemplo 1.18 *En el plano minimal tenemos que $\#l = 2$ entonces*

$$\#\mathcal{L} = 2^2 + 2 = 6 \text{ y } \#\mathcal{P} = 2^2 = 4$$

Del cual se concluye que el plano minimal esta constituido de cuatro puntos y seis rectas.

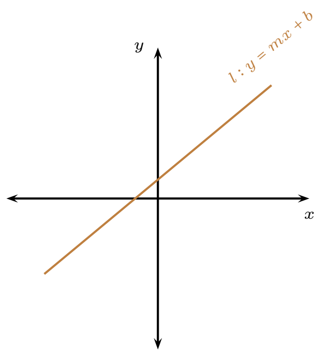
Plano de Moulton 1902

El Plano de Moulton (Forestra y Moulton, A simple non-Desarguesian plane geometry. Trans. Am. Math.) Soc, 3:192-95 es un ejemplo de un Plano Afín no trivial.
Consideremos el conjunto de puntos del plano afín $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$, los puntos del plano euclidianos.

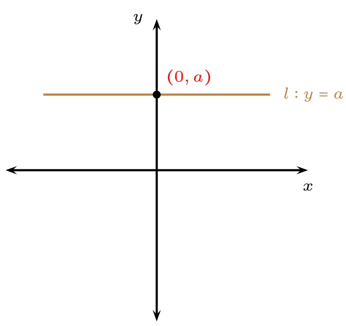


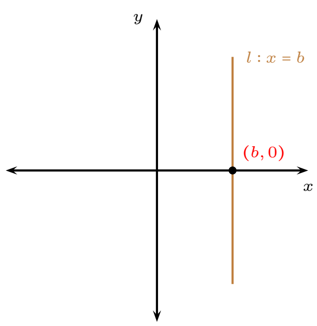
Ahora veamos las rectas que constituye el conjunto $\mathcal{L}$, son de cuatro tipos:

1. Las rectas de pendiente positiva $(m > 0)$ en el plano $\mathbb{R}^2$.



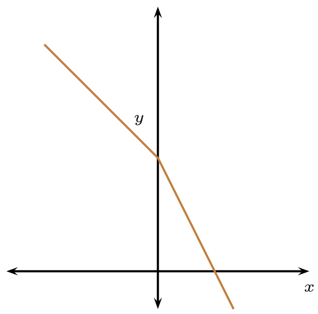
2. Las rectas con pendiente igual a cero o infinita en el plano $\mathbb{R}^2$.





3. Y las rectas definida de la siguiente forma con $(m < 0)$

$$l : y = \begin{cases} mx + b & ; \quad x \geq 0 \\ \dfrac{m}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$



Por último la incidencia $\mathcal{I}$ es la pertenecía.

Propiedad 1.19 *Con las notaciones anteriores* $\Pi = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *es un plano afín, llamado plano de Moulton.*

Demostración: Tenga presente los siguientes ejemplos para la demostración.

Ejemplo 1.20 *En el plano de Moulton.*
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(5,1)$ *y* $(7,4)$*.*

Solución Determinemos la pendiente de la recta que une estos dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{7-5} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto $m > 0$ el cual implica que la recta es la habitual, es decir

$$\frac{y-1}{x-5} = \frac{3}{2}$$

Despejando obtenemos

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

□

Ejercicio 1.21 *En el plano de Moulton.*
Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,0)$ *y* $(0,1)$*.*

Ejemplo 1.22 *En el plano de Moulton.*
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2,5)$ *y* $(1,-2)$

Solución Determinemos la pendiente de la recta que une estos dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5+2}{-2-1} = -\frac{7}{3}$$

Por lo tanto $m < 0$ el cual implica que debemos utilizar la definición de pendiente negativa, es decir,

$$l : y = \begin{cases} mx + b & ; \quad x \geq 0 \\ \\ \frac{m}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

reemplazando los puntos $(-2,5), (1,-2)$ tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 5 & = & -m + b \\ -2 & = & m + b \end{array}\right|$$

Sumando tenemos que $3 = 2b$, luego $b = \frac{3}{2}$, y restando tenemos que $-7 = 2m$, de lo cual $m = -\frac{7}{2}$
La recta pedida es:

$$l : y = \begin{cases} -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2} & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -\frac{7}{4}x + \frac{3}{2} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

□

Ejemplo 1.23 *En el plano de Moulton. Dada la recta*

$$l : y = \begin{cases} -2x + 1 & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -x + 1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2,5)$ *y es paralela* l.

Solución La recta paralela debe estar dada por:

$$l : y = \begin{cases} -2x + b & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

y pasa por $(2,5)$, luego $-4 + b = 5$, por ello $b = 9$.
La recta pedida es:

$$l : y = \begin{cases} -2x + 9 & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -x + 9 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

□

Ejercicio 1.24 *En el plano de Moulton.*
Determinar tres puntos en cuadrantes distintos que no sean colineales.

Ejercicio 1.25 *En el plano de Moulton considere los puntos*

$$A = (1,0), B = (0,1), C = (-2,1), D = (1,-1).$$

Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$

Ejercicio 1.26 *En el plano de Moulton considere los puntos*

$$A = (1,0), B = (-2,1), C = (1,-1).$$

Determinar l_C *tal que* $l_C \parallel l_{AB}$

Ejercicio 1.27 *En el plano de Moulton considere las rectas* l_1, l_2
Determine condiciones que permitan decidir cuando l_1 *es paralela a* l_2.

1.4. Colineación en el Plano Afín

Definición 1.28 *Sean* Π *plano afín y* f *una función biyectiva. Se dice que* f *es* ***colineación*** *de* Π, *si se cumple:*

i) $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ *y* $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ *son biyectiva.*

ii) Preserva incidencia:

$$\text{Para todo } P, l \text{ se tiene que si } P\mathcal{I}l \text{ entonces } f(P)\mathcal{I}f(l).$$

iii) Preserva paralelismo:

$$\text{Para todo } l, m \text{ se tiene que si } l \parallel m \text{ entonces } f(l) \parallel f(m).$$

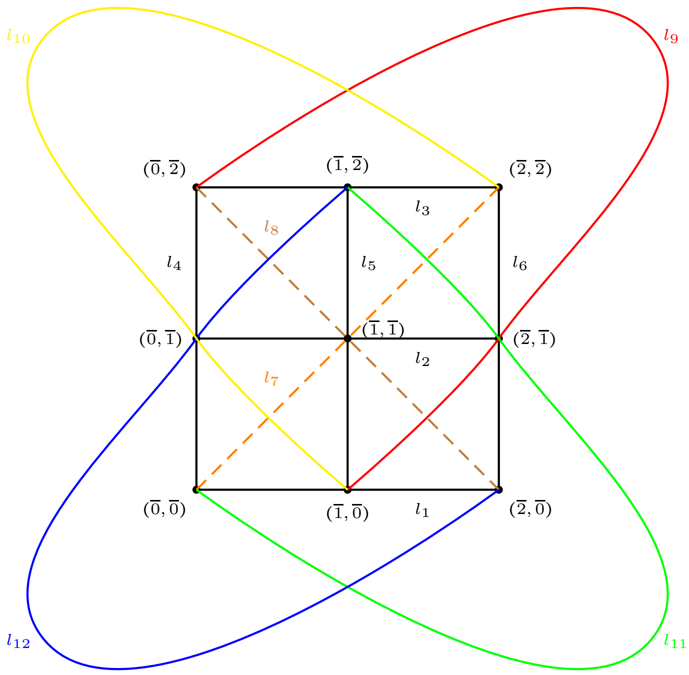
Ejercicio 1.29 *Sea* $\Pi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
Considere los movimientos rígidos del cuadrado, Determinar cual de ellas corresponde a colineación de Π.

Ejercicio 1.30 *Sea* $\Pi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
Determine el número de colineación de Π.

Ejemplo 1.31 *Sea* $\Pi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ *y la función*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & f(x,y) = (x+1, y+2) \end{array}$$

que se extiende a la rectas afines del siguiente modo $f(l) = \{f(P) \mid P\mathcal{I}l\}$.
Determine si f *es una colineación.*



Solución: Claramente f es biyectiva, $f^{-1}(x,y) = (x-1, y-2)$.
Veamos algunos ejemplos particulares primero:
Para ello sea

$$l_1 = \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{2},\overline{0})\}; l_2 = \{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{1}),(\overline{2},\overline{1})\}; l_3 = \{(\overline{0},\overline{2}),(\overline{1},\overline{2}),(\overline{2},\overline{2})\}.$$

Evaluando la función, tenemos

$$\begin{array}{rcl} l_1 = \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{2},\overline{0})\} & \longrightarrow & f(l_1) = \{(\overline{1},\overline{2}),(\overline{2},\overline{2}),(\overline{0},\overline{2})\} = l_3 \\ l_3 = \{(\overline{0},\overline{2}),(\overline{1},\overline{2}),(\overline{2},\overline{2})\} & \longrightarrow & f(l_3) = \{(\overline{1},\overline{1}),(\overline{2},\overline{1}),(\overline{0},\overline{1})\} = l_2 \end{array}$$

además debe cumplir con:

ii) Dado el punto $(\overline{0},\overline{0})\mathcal{I}l_1$, debe cumplir $f(\overline{0},\overline{0})\mathcal{I}f(l_1)$ lo cuales verdadero, ya que $(\overline{1},\overline{2})\mathcal{I}l_3$

iii) Dado las rectas l_1, l_3, se tiene que $l_1 \parallel l_3$, debe $f(l_1) \parallel f(l_3)$ lo cual también es verdadero, ya que $l_3 \parallel l_2$.

En general, tenemos que $l \in \mathcal{L}$, $l = \{a(x_1,x_2) + (y_1,y_2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\}$

i) Aplicando f a l tenemos

$$\begin{array}{rcl} f(l) & = & \{f(a(x_1,x_2) + (y_1,y_2)) \mid a \in \mathbb{Z}_3\} \\ & = & \{f(ax_1 + y_1, ax_2 + y_2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\} \\ & = & \{(ax_1 + y_1 + 1, ax_2 + y_2 + 2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\} \\ & = & \{a(x_1,x_2) + (y_1 + 1, y_2 + 2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\} \\ & = & \{a(x_1,x_2) + f(y_1,y_2) \mid a \in \mathbb{Z}_3\}. \end{array}$$

ii) Sea $P\mathcal{I}l$, luego tenemos que $l =< w > +P$, por lo anterior tenemos que $f(l) :< w > +f(P)$, de lo cual $f(P)\mathcal{I}f(l)$.

iii) Sea $l \parallel l'$, luego tenemos que $l =< w > +u$ y $l' =< w > +v$, por la primera parte tenemos que $f(l) :< w > +f(u)$, $f(l') :< w > +f(v)$, de lo cual $f(l) \parallel f(l')$.

De este modo f sea una colineación. □

Definición 1.32 *Sea* Π *un plano afín y* f *una colineación de* Π.

i) P es un **punto fijo** de f si y sólo si $f(P) = P$.

ii) l es **recta fija** de f si y sólo si $f(l) = l$.

Propiedad 1.33 *Sea* f *una colineación del plano afín* Π

1. *Si* l, m *son dos rectas no paralelas fijas por* f *entonces el punto intersección entre ellas es un punto fijo de* f

2. *Si* f *tiene fijo los puntos* A *y* B *entonces la recta* l_{AB} *esta fija por* f.

Ejemplo 1.34 *En el ejemplo anterior* $\Pi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$*, y la colineación*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & f(x, y) = (x + 1, y + 2) \end{array}$$

Determine los puntos y rectas fijas si existen.

Solución: Tenemos que f esta dada por

$$f(x, y) = (x + \overline{1}, y + \overline{2})$$

1. **Puntos fijos**

$$\begin{array}{rcl} f(x, y) & = & (x, y) \\ (x + \overline{1}, y + \overline{2}) & = & (x, y) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x + \overline{1} & = & x \\ y + \overline{2} & = & y \end{array}\right|$$

lo cual, tiene solución vacía, ya que $\overline{1} \neq 0$ y $\overline{2} \neq 0$, por lo tanto, f no tiene puntos fijos.

2. **Rectas fijas** Las rectas fijas de f, entonces $f(l) = l$, pues consideremos la recta $l = \{(\overline{0}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{0})\}$ tenemos que

$$l = \{(\overline{0}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{0})\} \text{ y } f(l) = \{(\overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{2})\}$$

Por lo tanto la recta l es una recta fija.

Note que $l = \{(x, y) \mid ax + by = c\}$ y $f(l) = \{(x, y) \mid ax + by = c + a + 2b\}$ luego debe tenerse que $a + 2b = 0$, se deja de ejercicio, determinar que las únicas rectas que cumple lo anterior son las paralelas a ellas.

□

Ejemplo 1.35 *Sea* $\Pi = \mathbb{R}^2$ *el plano vectorial afín y* f *una función definida como*

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \rightsquigarrow & f(x,y) = (2x+3y-1, x-2y+2) \end{array}$$

Demuestre que f *es colineación de* Π*.*

Demostración

i) f **es biyectiva**.

a) **Inyectiva**

$$(\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2)(f(a,b) = f(c,d) \Rightarrow (a,b) = (c,d))$$

$$(2a+3b-1, a-2b+2) = (2c+3d-1, c-2d+2)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a+3b-1 & = & 2c+3d-1 \\ a-2b+2 & = & c-2d+2 \end{array}\right|$$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumamos obtenemos que $b = d$, reemplazando en la primera ecuación se obtiene que $a = c$, luego $(a,b) = (c,d)$.

b) **Epiyectiva** Si $\Pi = \mathbb{R}^2$, basta demostrar que $\mathbb{R}^2 \subseteq Rec(f)$.
Dado un $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, debe existir $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(a,b) = (c,d)$

$$(2a+3b-1, a-2b+2) = (c,d)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a+3b-1 & = & c \\ a-2b+2 & = & d \end{array}\right|$$

Resolviendo el sistema se establece que:

$$b = \frac{c-2d+5}{7}; a = \frac{2c+3d-4}{7}$$

De este modo f es epiyectiva, entonces f es biyectiva.

ii) $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$.

Sea $l : \langle (a,b) \rangle + (c,d)$ recta, luego tenemos,

$$\begin{array}{rcl} l & = & \{\alpha(a,b) + (c,d) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ l & = & \{(\alpha a + c, \alpha b + d) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Evaluando se obtiene

$$f(l) = \{f(\alpha a + c, \alpha b + d) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$f(l) = \{(2\alpha a + 2c + 3\alpha b + 3d - 1, \alpha a + c - 2\alpha b + 2d + 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$f(l) = \{\alpha(2a+3b, a-2b) + (2c+3d-1, c-2d+2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Luego tenemos

$$f(l) = \langle (2a+3b, a-2b) \rangle + (2c+3d-1, c-2d+2).$$

iii) Si $P \,\mathcal{I}\, l$ entonces $f(P) \,\mathcal{I}\, f(l)$
Sea $l = \langle (a,b) \rangle + (c,d)$, si $P \,\mathcal{I}\, l$ entonces $P = \alpha_0(a,b) + (c,d)$

$$f(P) = \alpha_0(2a+3b, a-2b) + (2c+3d-1, c-2d+2)$$

en donde este punto $\alpha_0(2a+3b, a-2b) + (2c+3d-1, c-2d+2)$ incide con $f(l)$, por ello $f(P)\mathcal{I}f(l)$.

iv) Si $l \parallel m$ entonces $f(l) \parallel f(m)$

$$\begin{array}{rcl} l & = & \langle (a,b) \rangle + (c,d) \\ m & = & \langle (a,b) \rangle + (e,f) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(l) & = & \langle (2a+3b, a-2b) \rangle + (2c+3d-1, c-2d+2) \\ f(m) & = & \langle (2a+3b, a-2b) \rangle + (2e+3f-1, e-2f+2) \end{array}$$

Luego

$$f(l) \parallel f(m)$$

De este modo tenemos que f es colineación de Π □

Observación: Sean $l = \langle (a,b) \rangle + (c,d)$ y $m = \langle (x,y) \rangle + (z,w)$.

$$l \parallel m \text{ si y sólo si } \{(a,b),(x,y)\} \text{ son linealmente dependientes.}$$

Propiedad 1.36 *Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{K}$ entonces son colineación del plano afín vectorial*

1. *Las traslación $f(x) = x + v$.*
2. *Las transformación lineal invertible.*

Notación:

$$Aut(\Pi) := \{f : \Pi \longrightarrow \Pi \mid f \text{ es colineación } \} \subseteq Biy(\Pi).$$

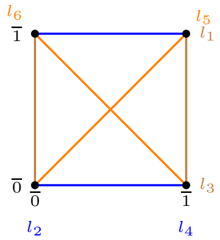
Propiedad 1.37 *Sea Π un plano afín.*
$(Aut(\Pi), \circ)$ *es un grupo, llamado grupo de las colineaciones del plano afín Π.*

1.5. Dilataciones del Plano Afín

Sean Π un plano afín y $f \in Aut(\Pi)$.
Se dice que f es **dilatación** de Π si y sólo si para todos $l \in \mathcal{L}$ se tiene que

$$f(l) \parallel l$$

Ejemplo 1.38 *Sean* $\Pi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *y* $f : \begin{array}{ccc} \Pi & \longrightarrow & \Pi \\ (x,y) & \rightsquigarrow & (x, y+\overline{1}) \end{array}$



$$\begin{array}{ll} f(l_1) = l_3, & f(l_1) \parallel l_1. \\ f(l_2) = l_2, & f(l_2) \parallel l_2. \\ f(l_3) = l_1, & f(l_3) \parallel l_3. \\ f(l_4) = l_4, & f(l_4) \parallel l_4. \\ f(l_5) = l_6, & f(l_5) \parallel l_5. \\ f(l_6) = l_5, & f(l_6) \parallel l_6. \end{array}$$

por ello f *es dilatación* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Ejemplo 1.39 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(x,y) = (3x, 3y)$.
Demuestre que f *es una dilatación en el plano afín vectorial*

Solución: Sea $l = < v > +w \in \mathcal{L}$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} f(l) &= \{f(tv+w) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{3tv + 3w \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= < v > +3w \end{aligned}$$

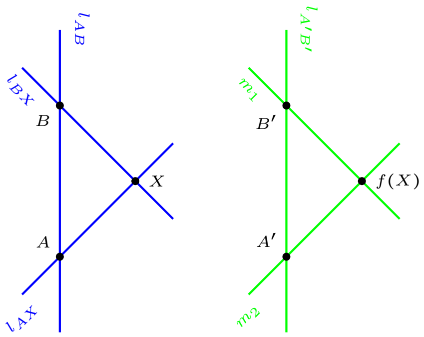
Además tenemos que $< v > +w \parallel < v > +3w$, por ello f es una dilatación. □

Notación: Sea Π un plano afín.

$$\mathcal{D}(\Pi) = \{f : \Pi \longrightarrow \Pi \mid f \text{ dilatación }\}.$$

Teorema 1.40 *Una dilatación está completamente determinada si se conoce la imagen de dos puntos.*

Demostración: Sean Π plano afín, y $A, B \in \mathcal{P}$ tales que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, con f dilatación.



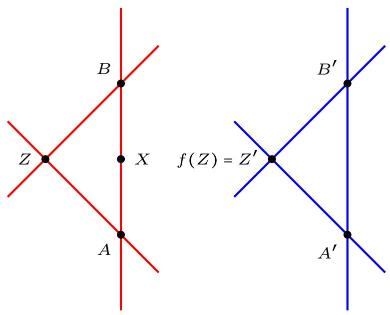
Sea $X \in \mathcal{P}$ de modo que $X \neq A \wedge X \neq B$

i) $X \not\mathcal{I} l_{AB}$
Primero unimos X con B a través de la recta l_{BX}, por B' trazamos m_1 tal que $m_1 \parallel l_{BX}$.

Después unimos X con A a través de la recta l_{AX}, por A' trazamos m_2 tal que $m_2 \parallel l_{AX}$.

De este modo tenemos que $\{f(X)\} = m_1 \cap m_2$

ii) $X \mathcal{I} l_{AB}$



Por el caso anterior, sabemos determinar la imagen de un punto que no es incidente a una recta l_{AB}, donde se conoce la imagen de A y B.

Sea $Z \in \mathcal{P}$, $Z \not\mathcal{I} l_{AB}$, como sabemos la imagen de A y B, luego sabemos la imagen de Z, es decir, $f(Z) = Z'$. Pero $X \not\mathcal{I}\ l_{AZ}$, por lo tanto $f(X)$ se puede determinar. ■

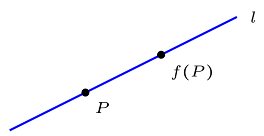
Observación: Al quedar completamente determinada la dilatación a través de la imagen de dos puntos, entonces al tener dos puntos fijos, se concluye que f es la identidad, es decir, $f = Id$. De otro modo $f \neq Id$, entonces f tiene a lo más un punto fijo.

Definición 1.41 *Sea f una dilatación en el plano afín Π.*

*Se dice que f es una **Homotecia** si y sólo si, f tiene un punto fijo y este se llama centro de la homotecia o $f = Id$.*

*Se dice que f es una **Traslación** si y sólo si, f no tiene puntos fijos o $f = Id$.*

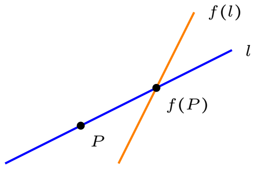
Definición 1.42 *Sean $l \in \mathcal{L}$ y f es una dilatación en el plano afín.*
*Se dice que l es **traza** de f si y sólo si $(\exists P \in \mathcal{P})(P\mathcal{I}l \Rightarrow f(P)\mathcal{I}l)$.*



Teorema 1.43 *Sean Π plano afín y f dilatación de Π.*

$$f(l) = l \text{ si y sólo si } l \text{ es traza de } f.$$

Demostración: Sea f una dilatación, luego $f \in \mathrm{Aut}(\Pi)$ y $f(l) = l$. Si $P \in \mathcal{P}$ tal que $P\ \mathcal{I}\ l$ luego $f(P)\ \mathcal{I}\ f(l)$, de lo cual $f(P)\ \mathcal{I}\ l$.
Veamos el recíproco.
Si l es traza de f luego $(\exists P \in \mathcal{P})(P\ \mathcal{I}\ l \Rightarrow f(P)\ \mathcal{I}\ l)$



Sea $Q\ \mathcal{I}\ l$, con $Q \neq P$, luego tenemos que $f(Q)\ \mathcal{I}\ f(l)$ y $f(P)\ \mathcal{I}\ f(l)$ es decir $f(P) \in l \cap f(l)$
Como f es dilatación, entonces $f(l) \parallel l\ \wedge\ l \cap f(l) \neq \varnothing$ en consecuencia $f(l) = l$, lo cual implica que l es traza de f. ■

Propiedad 1.44 *Sea f una homotecia distinta de la identidad y P centro de la homotecia f, entonces cada recta que pasa por P es una traza de f.*

Demostración: Sea $Q \in \mathcal{P}$ y $l_{PQ} \in \mathcal{L}$, luego tenemos $f(l_{PQ}) \parallel l_{PQ}$, pero $P\mathcal{I}l_{PQ}$ y $P\mathcal{I}f(l_{PQ})$, luego las rectas son iguales. ■

Propiedad 1.45 *Si f es una traslación distinta de la identidad entonces no tiene puntos fijos y el conjunto de todas las trazas es un haz de paralelas.*

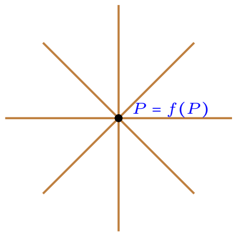
Demostración: Sea $P \in \mathcal{P}$, luego la recta $l_{Pf(P)}$ es una traza de f, es decir existen traza de f.
Sea l otra traza de f, luego ambas están fijas por f y si tiene un punto en común este seria un punto fijo lo que es una contradicción. ■

En el plano afín vectorial: Toda recta fija es una traza de la dilatación, además

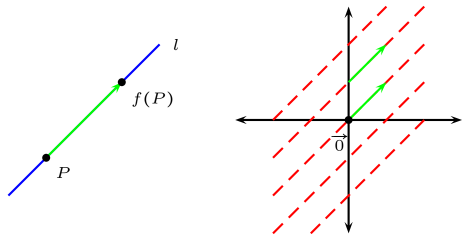
1. La traza de la homotecia, son las rectas que pasan por el punto fijo, dado que la homotecia tiene un punto fijo $f(P) = P = (a, b)$.

   Las trazas de la homotecia las podemos definir como:

$$\{m \in \mathbb{K} \mid y = m(x - a) + b\} \cup \{x = a\}$$

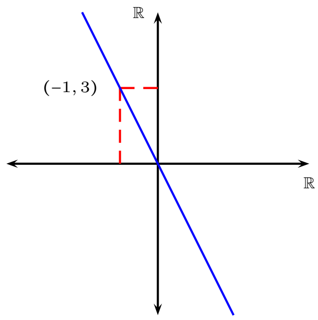


2. Las traslaciones no tienen puntos fijos. Además dejan fijas todas las rectas que tiene vector director $\overrightarrow{Pf(P)}$ y por ende el haz de paralelas formada por ellas.



Ejemplo 1.46 *Consideremos la homotecia en el plano afín vectorial*

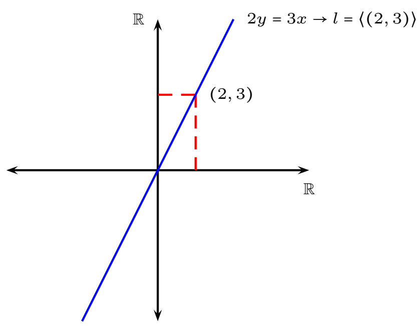
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (3x+2, 3y-6) \end{array}$$



Tiene un punto fijo $(-1,3)$, *las rectas fijas están dada por* $l_\infty : x = -1$ *ya que* $f(l_\infty) = l_\infty$ *y* $l_m : \langle(1,m)\rangle + (-1,3)$ *que cumple con* $f(l_m) = l_m$. □

Ejemplo 1.47 *Consideremos la traslación en el plano afín vectorial*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (x+2, y+3) \end{array}$$



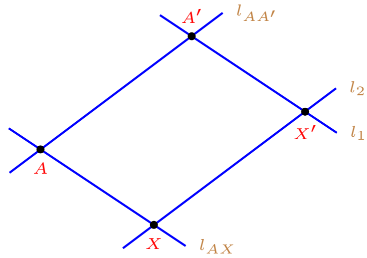
Tiene rectas fijas, pero dada las rectas $l : \langle (2,3)\rangle + (a,b)$ y $f(l) : \langle (2,3)\rangle + (a,b)$, además el haz de recta $[l]$, también esta fijo que $f([l]) = [l]$.

□

Teorema 1.48 *Una traslación está completamente determinada si se conoce la imagen de un punto.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{P}$ tal que $f(A) = A'$, como A, A' son distintos existe $l_{AA'}$ y $X \in \mathcal{P}$. tal que $X \mathcal{I} l_{AA'}$.

Definimos:
l_2 paralela a $l_{AA'}$ y $X \ \mathcal{I} \ l_2$ es una traza de f luego esta fija por f.
l_1 paralela a l_{AX} y $A' \ \mathcal{I} \ l_1$, note que $f(l_{AX}) = l_1$ es paralela y A' incide en ella.
Por lo tanto, l_1, l_2 no son paralela, luego $l_1 \cap l_2 = \{f(X)\}$.
De este modo tenemos que $f(A) = A'$ y $f(X) = X'$, dos imagen, por propiedad de dilatación, define una única dilatación.



■

Corolario 1.49 *Sea $\mathcal{T}(\Pi) = \{f \in \mathcal{D}(\Pi) \mid f$ traslación $\}$ es un grupo, llamado grupo de las traslaciones de Π*

Demostración: Es un subconjunto no vacío y la inversa es una traslación, ahora veamos la compuesta de dos traslaciones es una traslación o una homotecia, si tenemos que es una homotecia tendría un punto fijo despejando obtenemos que dos traslaciones tiene un punto en común luego son iguales y por ende es una traslación. ■

Corolario 1.50 *Sea $\mathcal{H}_P(\Pi) = \{f \in \mathcal{D}(\Pi) \mid f$ homotecia tal que $f(P)\}$ es un grupo, llamado grupo de las homotecias de Π que tienen centro en P.*

Demostración: Es un subconjunto no vacío y la inversa es una homotecia, ya que deja fija un punto, y la compuesta de dos homotecias de centro P, el punto P esta fijo, luego es una homotecia de cento P. ■

Observación: Denotemos $\mathcal{D}(\Pi) = \{f : \Pi \longrightarrow \Pi \mid f$ ditalación $\}$ en donde se tiene que $(\mathcal{D}(\Pi), \circ)$ es un grupo, llamado grupo de las dilataciones de Π, además $\mathcal{D}(\Pi) \leq Aut(\Pi)$ y $\mathcal{H}_P(\Pi) \leq Aut(\Pi)$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Aut}\,(\Pi) \arrow[d] & \\ & \mathcal{D}\,(\Pi) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{T}\,(\Pi) & & \mathcal{H}_P\,(\Pi) \end{tikzcd}$$

1.6. Dilataciones en un Plano Afín Vectorial

Recordemos que V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión dos y el plano afín está formado por $\mathcal{P} = V$, $\mathcal{L} = \{$ rectas afines $\}$ y la incidencia es la pertenencia.

1. **Traslaciones:** $f \in \mathcal{T}(V)$.

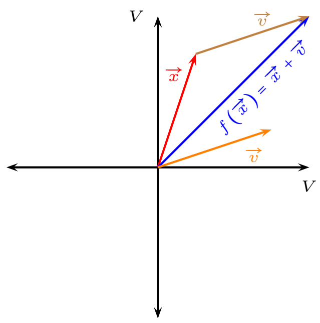
   Sea $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{0})$, aplicando el Teorema 1.48 tenemos que, si $\overrightarrow{x}$ linealmente independiente con $\overrightarrow{v}$, la imagen se obtiene de la intersección de las rectas

   $$l_1 :< \overrightarrow{v} > + \overrightarrow{x}, \quad l_2 :< \overrightarrow{x} > + \overrightarrow{v}$$

   cuya intersección es $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}$ de esta forma tenemos que, $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}$ una traslación en $\overrightarrow{v}$.

   Luego en general las traslaciones son funciones de la forma:

   $$\begin{array}{rccl} f: & V & \longrightarrow & V \\ & \overrightarrow{x} & \rightsquigarrow & f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v} \end{array}$$

   Notación: $\mathcal{T}(V) = \{t \in \mathcal{D}(\Pi) \mid t$ es una traslación$\}$, es decir, si $t \in \mathcal{T}(V)$, entonces existe un vector $\overrightarrow{v}$, tal que $t(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}$, incluimos el vector nulo $\overrightarrow{0}$ de las traslaciones posibles.

   Propiedad 1.51 *Sea $t \in \mathcal{T}(V)$, tal que $t(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}$, entonces*

   $$t^{-1}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}$$

Demostración: Sea $\vec{x}, \vec{y} \in V$ tal que:

$$\begin{array}{rcll} \vec{y} & = & t^{-1}(\vec{x}) & / \cdot t(izq.) \\ t(\vec{y}) & = & \vec{x} & \\ \vec{y} + \vec{v} & = & \vec{x} & / + (-\vec{v}) \\ \vec{y} & = & \vec{x} - \vec{v} & \end{array}$$

Por lo tanto $t^{-1}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{v}$

También se puede designara a la traslación de vector $\vec{v}$ como $t_{\vec{v}}$

$$t^{-1}_{\vec{v}}(\vec{x}) = t_{-\vec{v}}(\vec{x})$$

∎

Composición de traslaciones: Sea $t_{\vec{v}}, t_{\vec{w}} \in \mathcal{T}(V)$

$$\begin{array}{rcl} (t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}})(\vec{x}) & = & t_{\vec{v}}(\vec{x} + \vec{w}) \\ & = & (\vec{x} + \vec{w}) + \vec{v} \\ & = & \vec{x} + (\vec{w} + \vec{v}) \\ & = & t_{\vec{v}+\vec{w}}(\vec{x}) \end{array}$$

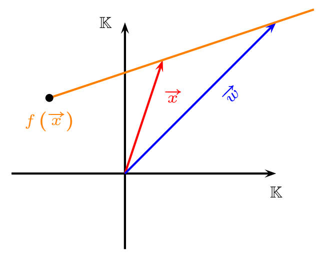
Propiedad 1.52 *$(\mathcal{T}(V), \circ)$ es un grupo abeliano, isomorfo a $(V, +)$*

Ejercicio 1.53 *Sea Π un plano afín vectorial, t una traslación y $f \in \mathcal{D}(\Pi)$ Demostrar que $f \circ t \circ f^{-1}$ es una traslación*

2. **Homotecias:**

   Sea $f \in D(\Pi)$ una homotecia, luego existe $\vec{w}$ tal que $f(\vec{w}) = \vec{w}$.

   Sea $\vec{x} \in V$, y $l \in \mathcal{L}$, tal que $\vec{x}, \vec{w} \in l$, sabemos que $f(l) \parallel l$, y $f(\vec{x}), \vec{w} \in f(l)$ y $\vec{x}, \vec{w} \in l$.
   Por lo tanto $\{\vec{x} - \vec{w},\ f(\vec{x}) - \vec{w}\}$ son linealmente dependiente, entonces:



$$\begin{array}{rcl} f(\vec{x}) - \vec{w} & = & \alpha(\vec{x} - \vec{w}) \\ f(\vec{x}) & = & \alpha\vec{x} - \alpha\vec{w} + \vec{w} \\ f(\vec{x}) & = & \alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{w} \end{array}$$

   con $1 \neq \alpha \neq 0$.

   Al considerar el teorema 8, y sabiendo que conocemos la imagen de $\vec{w}$, $\vec{x}$, para determinar la imagen de otro punto no colineal con $\vec{x}, \vec{w}$, tenemos trazar la recta l_1 paralela a $l_{\vec{x}\vec{z}}$ que pasa por $f(\vec{x})$ y la recta $l_2 = l_{\vec{x}\vec{z}}$ y la intersección es la imagen de $\vec{z}$

   Luego los vectores

$\{\overrightarrow{z}-\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{z})-f(\overrightarrow{x})\}$, $\{\overrightarrow{x}-\overrightarrow{w}, f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{w})\}$, $\{\overrightarrow{z}-\overrightarrow{w}, f(\overrightarrow{z})-f(\overrightarrow{w})\}$, también son linealmente dependiente, de lo cual se obtiene

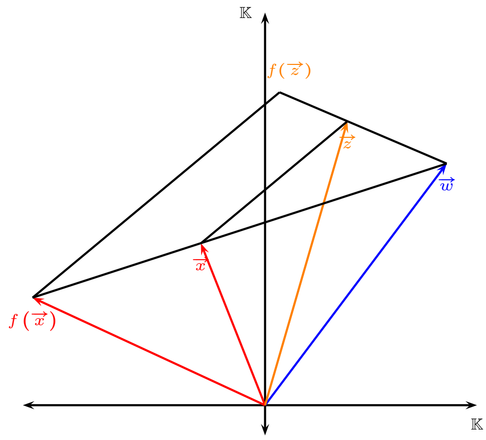
$$\begin{aligned}
\alpha(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{w}) &= f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{w})\\
\alpha_1(\overrightarrow{z}-\overrightarrow{x}) &= f(\overrightarrow{z})-f(\overrightarrow{x})\\
\alpha_2(\overrightarrow{z}-\overrightarrow{w}) &= f(\overrightarrow{z})-f(\overrightarrow{w})
\end{aligned}$$

Igualando obtenemos

$$\alpha(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{w})+\alpha_1(\overrightarrow{z}-\overrightarrow{x})-\alpha_2(\overrightarrow{z}-\overrightarrow{w})=0$$

reordenando tenemos

$$(\alpha-\alpha_1)(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{w})+(\alpha_1-\alpha_2)(\overrightarrow{z}-\overrightarrow{w})=0$$



Como los puntos son no colineales luego los vectores son linealmente independiente (solución única)

$$\alpha=\alpha_1=\alpha_2$$

El otro caso, es análogo.

Por ello, existe un único α y $\overrightarrow{w}$. ■

Definición 1.54 *Sea $f: V \to V$ una homotecia, dada por*

$$h_{\alpha,\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{x})=\alpha\overrightarrow{x}+(1-\alpha)\overrightarrow{w}.$$

*Se dice que, α es la **razón de la homotecia** y $\overrightarrow{w}$ es el **centro de la homotecia**.*

Propiedad 1.55 *Sea $f: V \to V$ una homotecia, tal que*

$$f(\overrightarrow{x})=\alpha\overrightarrow{x}+(1-\alpha)\overrightarrow{w}.$$

entonces

$$f^{-1}(\overrightarrow{x})=\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{x}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{w}$$

Demostración: Sea $f^{-1}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$, entonces:

$$\begin{array}{rcll}
\overrightarrow{y} & = & f^{-1}(\overrightarrow{x}) & / \circ f \\
f(\overrightarrow{y}) & = & \overrightarrow{x} & \\
\alpha\overrightarrow{y} + (1-\alpha)\overrightarrow{w} & = & \overrightarrow{x} & / + (\alpha - 1)\overrightarrow{w}) \\
\alpha\overrightarrow{y} & = & \overrightarrow{x} + (\alpha-1)\overrightarrow{w} & / \dfrac{1}{\alpha} \\
\overrightarrow{y} & = & \dfrac{1}{\alpha}\overrightarrow{x} + \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{w} &
\end{array}$$

Por ello tenemos

$$f^{-1}(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\overrightarrow{w}$$

■

Composición de homotecias de centro $\overrightarrow{w}$:

Sea f_1, f_2 dos homotecias de centro $\overrightarrow{w}$, entonces tenemos que:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(\overrightarrow{x}) & = & \alpha\overrightarrow{x} + (1-\alpha)\overrightarrow{w} \\
f_2(\overrightarrow{x}) & = & \beta\overrightarrow{x} + (1-\beta)\overrightarrow{w}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(f_1 \circ f_2)(\overrightarrow{x}) & = & f_1(\beta\overrightarrow{x} + (1-\beta)\overrightarrow{w}) \\
& = & \alpha(\beta\overrightarrow{x} + (1-\beta)\overrightarrow{w}) + (1-\alpha)\overrightarrow{w} \\
& = & \alpha\beta\overrightarrow{x} + \alpha\overrightarrow{w} - \alpha\beta\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w} - \alpha\overrightarrow{w} \\
& = & \alpha\beta\overrightarrow{x} + (1-\alpha\beta)\overrightarrow{w}
\end{array}$$

La composición de homotecias del mismo centro es otra homotecia del mismo centro y con razón el producto de las razones respectivas de las homotecias.

Definimos: Sea

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{0}} = \{f \in D(\Pi) \mid f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}\}$$
$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{w}} = \{f \in D(\Pi) \mid f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}\},$$

en donde $\mathcal{H}_{\overrightarrow{0}}$ es el conjunto de la homotecia de centro $\overrightarrow{0}$, incluida la identidad.

$(\mathcal{H}_{\overrightarrow{0}}, \circ)$ se denomina grupo de las homotecias de centro $\overrightarrow{0}$.

$$(\mathcal{H}_{\overrightarrow{0}}, \circ) \cong (\mathbb{K}^*, \cdot)$$

Observación: Sean $t(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{w}$ traslación y $h_\alpha(\overrightarrow{x}) = \alpha\overrightarrow{x}$ una homotecia de razón α y centro $\overrightarrow{0}$. luego

$$\begin{array}{rcl}
t \circ h_\alpha \circ t^{-1}(\overrightarrow{x}) & = & t \circ h_\alpha(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w}) \\
& = & t(\alpha(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w})) \\
& = & \alpha(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{w} \\
& = & \alpha\overrightarrow{x} + (1-\alpha)\overrightarrow{w}
\end{array}$$

corresponde a una homotecia de centro w y razón α.

Ejercicio 1.56 *Sea* Π *el plano afín vectorial, entonces*
Demostrar que

$$\mathcal{H}_{\overrightarrow{0}} \simeq \mathcal{H}_{\overrightarrow{w}}$$

3. **Forma General de una dilatación en un Plano Afín Vectorial**

Note que toda dilatación es compuesta de traslaciones y homotecias.

Sea $f \in D(\Pi)$, entonces existen $\alpha \neq 0$ y $\overrightarrow{v} \in V$

$$f_{\alpha,\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) = \alpha\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{x})$$

Observación:

a) Si $\alpha = 1$ entonces $f_{1,\overrightarrow{v}}$ es una traslación

b) Si $\alpha \neq 1$ entonces $f_{\alpha,\overrightarrow{v}}$ es una homotecia (que tiene un punto fijo), en particular:

$$\begin{array}{rcl} f_{\alpha,\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{w}) &=& \overrightarrow{w} \\ \alpha\overrightarrow{w} + v &=& \overrightarrow{w} \\ \alpha\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w} &=& -\overrightarrow{v} \\ (\alpha - 1)\overrightarrow{w} &=& -\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{w} &=& \dfrac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{v} \end{array}$$

En donde la funciones de la forma $f_{\alpha,\overrightarrow{0}}$ son transformaciones lineales invertibles con $\alpha \neq 0$, además notemos que:

$$(f_{1,\overrightarrow{v}} \circ f_{\alpha,\overrightarrow{0}})(\overrightarrow{x}) = \alpha\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v} = f_{\alpha,\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x})$$

Propiedad 1.57 *En el plano afín vectorial* V*.*

$$D(V) = \mathcal{T}(V) \circ \mathcal{H}_{\overrightarrow{0}}(V)$$

Ejemplo 1.58 *Sea*

$$\begin{array}{rcccl} T &:& \mathbb{R}^2 &\to& \mathbb{R}^2 \\ && (x,y) &\to& (y,x) + (1,1) \end{array}$$

Determine $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $T \circ F = F \circ T$

Solución: Sea F una dilatación luego existen $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo,$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x,y) = \alpha(x,y) + (a,b), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Veamos la compuesta

$$\begin{array}{rcl} (T \circ F)(x,y) &=& (F \circ T)(x,y) \\ T(\alpha x + a, \alpha y + b) &=& F(y+1, x+1) \\ (\alpha y + b + 1, \alpha x + a + 1) &=& (\alpha y + \alpha + a, \alpha x + \alpha + b) \end{array}$$

Igualando coordenada

$$\left.\begin{array}{rcl} b+1 & = & \alpha + a \\ a+1 & = & \alpha + b \end{array}\right|$$

del cual se obtiene $a = b$ y $\alpha = 1$, por lo tanto F es una traslación de la forma

$$F(x, y) = (x + a, y + a)$$

□

1.7. Colineaciones en un Plano Afín Vectorial

Recordemos que V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión dos y el plano afín está formado por $\mathcal{P} = V$, $\mathcal{L} = \{$ rectas afines $\}$ y la incidencia es la pertenencia.
El propósito de la sección es demostrar el teorema: toda colineación en el plano afín vectorial es la composición de una traslación con un transformación semi-lineal.

Definición 1.59 *Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{K}$. $f : V \to V$ es una transformación semi-lineal si y sólo si*

1. *Para todo $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ en V, $f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y})$*
2. *Existe $\sigma \in Aut(\mathbb{K})$ tal que para todo $\overrightarrow{x}$ en V, $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que*
$$f(\alpha\overrightarrow{x}) = \sigma(\alpha) f(\overrightarrow{x}).$$

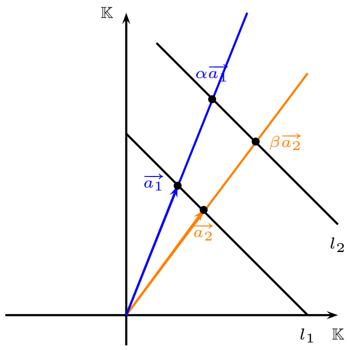
Ejercicio 1.60 *Sea $V = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $f(\overline{x}, \overline{y}) = (3\overline{x}, 2\overline{y})$*
Demostrar que f es semi-lineal.

Ejercicio 1.61 *Sea $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ semi-lineal biyectiva,*
Demostrar que f es una colineación en el plano afín vectorial

Ejercicio 1.62 *Sean $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ semi lineal biyectiva y $g : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ transformación lineal biyectiva,*
Demostrar que $g \circ f$, $f \circ g$ son semi-lineal biyectiva.

Teorema 1.63 *Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ base de $\mathbb{K}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ tales que $l_1 = < \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} > + \overrightarrow{a_1}$ y $l_2 = < \beta\overrightarrow{a_2} - \alpha\overrightarrow{a_1} > + \alpha\overrightarrow{a_1}$ con $l_1 \neq l_2$.*

$$l_1 \parallel l_2 \text{ si y sólo si } \alpha = \beta.$$



Demostración: Sea $l_1 \parallel l_2$ luego los vectores directores son linealmente dependiente

$$\{\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}, \beta\overrightarrow{a_2} - \alpha\overrightarrow{a_1}\}$$

es decir existe δ tal que

$$\begin{aligned} \delta(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}) &= \beta\overrightarrow{a_2} - \alpha\overrightarrow{a_1} \\ (\delta - \beta)\overrightarrow{a_2} + (\alpha - \delta)\overrightarrow{a_1} &= 0 \end{aligned}$$

solución única, así se tiene que $\alpha = \beta = \delta$.
En la otra dirección, supongamos que $\alpha = \beta$, $l_1 \neq l_2$ y $l_1 \cap l_2 \neq \phi$. Pero tenemos que

$$l_1 =< \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} > +\overrightarrow{a_1} \quad l_2 =< \alpha\overrightarrow{a_2} - \alpha\overrightarrow{a_1} > +\alpha\overrightarrow{a_1}.$$

Ya que el escalar es no nulo, tenemos

$$l_2 =< \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} > +\alpha\overrightarrow{a_1}.$$

luego los vectores directores son iguales. Por lo tanto $l_1 \parallel l_2$. ■

Propiedad 1.64 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ base de $\mathbb{K}^2$, y $\sigma \in Aut(\mathbb{K}^2)$*

$$l_1 \parallel l_2 \text{ si y sólo si } \sigma(l_1) \parallel \sigma(l_2)$$

Demostración: Sean $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \sigma(l_1) \parallel \sigma(l_2) &\Leftrightarrow \sigma(l_1) \cap \sigma(l_2) = \phi \vee \sigma(l_1) = \sigma(l_2) \\ &\Leftrightarrow \sigma^{-1}(\sigma(l_1) \cap \sigma(l_2)) = \phi \vee l_1 = l_2 \\ &\Leftrightarrow l_1 \cap l_2 = \phi \vee l_1 = l_2 \\ &\Leftrightarrow l_1 \parallel l_2 \end{aligned}$$

■

Corolario 1.65 *Sea $l \in \mathcal{L}$ recta vectorial y $\sigma \in Aut(\Pi)$ tal que $\sigma(l) = l$ entonces*

$$\sigma(l + \overrightarrow{v}) = l + \sigma(\overrightarrow{v})$$

Demostración: Sea $l \parallel l + \overrightarrow{v}$, por teorema anterior tenemos que $\sigma(l) \parallel \sigma(l + \overrightarrow{v})$, es decir, $l \parallel \sigma(l + \overrightarrow{v})$. Además $\sigma(\overrightarrow{v}) \in \sigma(l + \overrightarrow{v})$, es paralela y pasa por el punto, ya que la recta es única, se tiene

$$\sigma(l + \overrightarrow{v}) = l + \sigma(\overrightarrow{v})$$

■

Propiedad 1.66 *Sean* $\mathbb{K}$ *un cuerpo,* $\mu \in Aut(\Pi)$ *entonces existe una traslación, una transformación lineal biyectiva en el plano y una base* $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ *de* $\mathbb{K}^2$*, tal que si* $\delta = f^{-1} \circ t \circ \mu$*,* $\delta(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$*,* $\delta(\overrightarrow{a_1}) = \overrightarrow{a_1}$*,* $\delta(\overrightarrow{a_2}) = \overrightarrow{a_2}$*.*

Demostración: Sea $\mu \in Aut(V)$, supongamos

$$\mu(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{x},$$

luego $t_{-\overrightarrow{x}}(\mu(\overrightarrow{0})) = \overrightarrow{0}$.
Sea $\sigma = t_{-\overrightarrow{x}} \circ \mu \in Aut(V)$ y $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ base de $\mathbb{K}^2$, entonces $\{\sigma(\overrightarrow{a_1}), \sigma(\overrightarrow{a_2})\}$ es una base de $\mathbb{K}^2$.
Ya que $l_{\overrightarrow{0},\overrightarrow{a_1}} \parallel l_{\overrightarrow{0},\sigma\overrightarrow{a_1}}$ y $l_{\overrightarrow{0},\overrightarrow{a_2}} \parallel l_{\overrightarrow{0},\sigma\overrightarrow{a_2}}$, es decir

$$< \overrightarrow{a_1} >=< \sigma\overrightarrow{a_1} > \quad < \overrightarrow{a_2} >=< \sigma\overrightarrow{a_2} > .$$

Dadas las bases anteriores existe una única transformación lineal, luego una colineación, que envía una base en la otra base, es decir,

$$f(\overrightarrow{a_1}) = \sigma(\overrightarrow{a_1}) \qquad f(\overrightarrow{a_2}) = \sigma(\overrightarrow{a_2})$$

De lo cual se obtiene

$$\overrightarrow{a_1} = (f^{-1} \circ \sigma)(\overrightarrow{a_1}) \qquad \overrightarrow{a_2} = (f^{-1} \circ \sigma)(\overrightarrow{a_2})$$

Por lo tanto $\delta = f^{-1} \circ t \circ \mu$ es una colineación que fija $\overrightarrow{0}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$. ■

Propiedad 1.67 *Sean* $\mathbb{K}$ *un cuerpo,* $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ *base de* $\mathbb{K}^2$ *y* $g \in Aut(\Pi)$ *tal que fija los puntos* $\overrightarrow{0}$*,* $\overrightarrow{a_1}$*,* $\overrightarrow{a_2}$*, entonces*

$$g(\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2}) = g(\alpha\overrightarrow{a_1}) + g(\beta\overrightarrow{a_2})$$

además

$$g(\alpha\overrightarrow{a_1}) = \eta_\alpha\overrightarrow{a_1}, \quad g(\alpha\overrightarrow{a_2}) = \eta_\alpha\overrightarrow{a_2}.$$

Demostración: Sean $\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, puntos fijos por g, luego tenemos

$$g(< \overrightarrow{a_1} >) =< \overrightarrow{a_1} > \quad \text{y} \quad g(< \overrightarrow{a_2} >) =< \overrightarrow{a_2} >$$

ya que fija dos puntos de cada recta.
Consideremos las rectas

$$l_1 :< \overrightarrow{a_2} > +\alpha\overrightarrow{a_1} \quad \text{y } l_2 :< \overrightarrow{a_1} > +\beta\overrightarrow{a_2}$$

las rectas $l_1 \parallel < \overrightarrow{a_2} >$ y $l_2 \parallel < \overrightarrow{a_1} >$ y tiene un punto en común $\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2}$.
Por corolario anterior tenemos que

$$g(l_1) =< \overrightarrow{a_2} > +g(\alpha\overrightarrow{a_1}) \quad \text{y} \quad g(l_2) =< \overrightarrow{a_1} > +g(\beta\overrightarrow{a_2})$$

además

$$g(\alpha\overrightarrow{a_1}) \in < \overrightarrow{a_1} > \quad \text{y} \quad g(\beta\overrightarrow{a_2}) \in < \overrightarrow{a_2} >$$

luego la imagen del punto intersección debe pertenecer a la intersección de las imágenes.

$$g(\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2}) = g(\alpha\overrightarrow{a_1}) + g(\beta\overrightarrow{a_2})$$

Sea $l_4 :< \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} > +\overrightarrow{a_1}$, la recta contiene a los puntos $\overrightarrow{a_1}$ y $\overrightarrow{a_2}$, luego la recta esta fija por g. Consideremos la recta $l :< \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} > +\alpha\overrightarrow{a_1}$ es paralela a l_4. luego se tiene que

$$g(l) =< \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} > +g(\alpha\overrightarrow{a_1}) =< \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} > +\eta\overrightarrow{a_1}$$

Análogamente

$$g(l) =< \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} > +g(\alpha\overrightarrow{a_2}) =< \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} > +\xi\overrightarrow{a_2}$$

de lo cual obtenemos que $\eta = \xi$.

$\blacksquare$

Teorema 1.68 *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo,* Π *el plano afín vectorial entonces toda colineación es la composición de una traslación con una transformación semilineal.*

Demostración: Sea $\mu \in Aut(\Pi)$, por propiedad 1.66 se tiene que existen una traslación, una transformación lineal biyectiva en el plano y una base $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ de $\mathbb{K}^2$, tal que si $\delta = f^{-1} \circ t \circ \mu$, $\delta(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, $\delta(\overrightarrow{a_1}) = \overrightarrow{a_1}$, $\delta(\overrightarrow{a_2}) = \overrightarrow{a_2}$.
Por la propiedad 1.67 tenemos que

$$\delta(\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2}) = \delta(\alpha\overrightarrow{a_1}) + \delta(\beta\overrightarrow{a_2}),\ \delta(\alpha\overrightarrow{a_1}) = \eta(\alpha)\overrightarrow{a_1},\ \delta(\beta\overrightarrow{a_2}) >= \eta(\alpha)\overrightarrow{a_2}$$

Definamos

$$\eta : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ tal que } \eta(\alpha) \text{ cumple con } \delta(\alpha\overrightarrow{a_1}) = \eta(\alpha)\overrightarrow{a_1}$$

note que $\eta(1) = 1$ y $\eta(0) = 0$.
Es inyectiva, ya que $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$ entonces,

$$\begin{array}{rcl}
\eta(\alpha) & = & \eta(\beta) \\
\eta(\alpha)\overrightarrow{a_1} & = & \eta(\beta)\overrightarrow{a_1} \\
\delta(\alpha\overrightarrow{a_1}) & = & \delta(\beta\overrightarrow{a_1}) \\
\alpha\overrightarrow{a_1} & = & \beta\overrightarrow{a_1} \\
\alpha & = & \beta
\end{array}$$

Epiyectiva, sabemos la restricción de $\delta :< \overrightarrow{a_1} >\to< \overrightarrow{a_1} >$ es una biyección luego dado $\beta \in \mathbb{K}$, tenemos que $\beta\overrightarrow{a_1} \in< \overrightarrow{a_1} >$, luego existe $\alpha \in \mathbb{K}$, tal que $\delta(\alpha\overrightarrow{a_1}) = \beta\overrightarrow{a_1}$.
Para el producto, sea

$$l_5 :< \alpha\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} > -\beta\overrightarrow{a_2}$$

luego tenemos

$$\delta(l_5) =< \eta(\alpha)\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} > +\eta(-\beta)\overrightarrow{a_2}$$

pero $\beta\alpha\overrightarrow{a_1} \in l_5$ de lo cual tenemos $\delta(\beta\alpha\overrightarrow{a_1}) \in \delta(l_5)$

de este modo tenemos que

$$\eta(\beta\alpha)\overrightarrow{a_1} \in < \eta(\alpha)\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} > +\eta(-\beta)\overrightarrow{a_2}$$

luego tenemos

$$\eta(\beta\alpha)\overrightarrow{a_1} = -\eta(\alpha)\eta(-\beta)\overrightarrow{a_1}$$

por ello tenemos

$$\eta(\beta\alpha) = -\eta(\alpha)\eta(-\beta)$$

Además

$$\eta(-\beta) = \eta(-\beta \cdot 1) = -\eta(1)\eta(\beta) = -\eta(\beta)$$

de lo cual

$$\eta(\beta\alpha) = -\eta(\alpha)\eta(-\beta) = \eta(\alpha)\eta(\beta).$$

Finalmente para la aditiva $\eta(\alpha + \beta) = \eta(\alpha) + \eta(\beta)$.

$$l_6 :< \alpha\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} > +\beta\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$$

luego tenemos

$$\delta(l_6) =< \eta(\alpha)\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} > +\eta(\beta)\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$$

pero $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a_1} \in l_6$ de lo cual tenemos $\delta((\alpha + \beta)\overrightarrow{a_1}) \in \delta(l_6)$
de este modo tenemos que

$$\eta(\alpha + \beta)\overrightarrow{a_1} \in < \eta(\alpha)\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} > +\eta(\beta)\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$$

luego tenemos

$$\eta(\alpha + \beta)\overrightarrow{a_1} = (\eta(\alpha) + \eta(\beta))\overrightarrow{a_1}$$

por ello tenemos

$$\eta(\alpha + \beta) = \eta(\beta) + \eta(\alpha)$$

De lo cual tenemos que δ es semi lineal, y por ello $f \circ \delta$ es semilineal

$$\mu = t_{\mu(0)} \circ (f \circ \delta)$$

■

Ejemplo 1.69 *Sea $\mathbb{C}^2$ el plano afín vectorial complejo, τ identidad o conjugación compleja entonces*
Para todo $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{C}$ tal que $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ se tiene que

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, f(z, w) = (a_1\tau(z) + b_1\tau(w) + c_1, a_2\tau(z) + b_2\tau(w) + c_2)$$

es una colineación en plano afín vectorial complejo

1.8. Teoremas Clásicos Plano Afín Vectorial

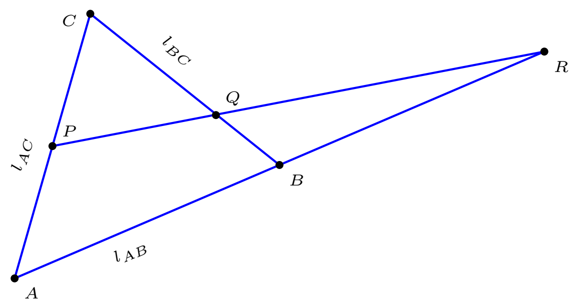
Definición 1.70 *En el plano afín vectorial* $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$*, se define la* ***razón afín*** *de* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *tres puntos colineales al escalar* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ *tal que cumple*

$$\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$$

Propiedad 1.71 *En el plano afín vectorial* $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$*, dados tres puntos colineales* A, B, C *entonces*

1. $(A, C, B) = \frac{1}{(A,B,C)}$
2. $(B, C, A) = \frac{1}{1-(A,B,C)}$
3. $(C, B, A) = \frac{(A,B,C)}{(A,B,C)-1}$

Teorema 1.72 (de Menelao) *Sean* A,B,C *puntos no colineales,* P, Q, R *puntos tales que* $P\mathcal{I}L_{AC}$*,* $Q\mathcal{I}l_{BC}$*,* $R\mathcal{I}l_{AB}$*, además* $\{A, B, C\} \cap \{P, Q, R\} = \phi$ *entonces*
P, Q, R *son colineales si y sólo si* $(P, C, A)(Q, B, C)(R, A, B) = 1$



Demostración: Traslademos el punto A al origen, y identifiquemos los puntos

$$A = \overrightarrow{0},\ B = \overrightarrow{b},\ C = \overrightarrow{c}$$

como no son colineales, los vectores $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ son linealmente independiente, de ello tenemos

$$P = \alpha\overrightarrow{c},\ R = \gamma\overrightarrow{b},\ l_{BC} =< \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} > + \overrightarrow{b},$$

es decir,

$$Q = \beta(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} = (1+\beta)\overrightarrow{b} - \beta\overrightarrow{c}$$

Por lo anterior tenemos

$$l_{PQ} =< (\alpha+\beta)\overrightarrow{c} - (1+\beta)\overrightarrow{b} > +\alpha\overrightarrow{c}$$

Si los puntos son colineales tenemos, $R \in L_{PQ}$, es decir,

$$\begin{array}{rcl} \gamma\overrightarrow{b} & = & \alpha\overrightarrow{c} + \eta((\alpha+\beta)\overrightarrow{c} - (1+\beta)\overrightarrow{b}) \\ 0 & = & -\gamma\overrightarrow{b} + \alpha\overrightarrow{c} + \eta((\alpha+\beta)\overrightarrow{c} - (1+\beta)\overrightarrow{b}) \\ 0 & = & -(\gamma+\eta+\eta\beta)\overrightarrow{b} + (\eta\alpha+\eta\beta+\alpha)\overrightarrow{c} \end{array}$$

así se obtiene

$$\gamma + \eta + \eta\beta = 0, \quad \eta(\alpha + \beta) + \alpha = 0.$$

despejando

$$\eta = -\frac{\gamma}{1+\beta} = -\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

luego tenemos que

$$\gamma = \frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+\beta}$$

Ahora veamos la razones afines

$$(P, C, A) = (\alpha\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{0}) = \frac{-\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

ya que $\overrightarrow{0} - \alpha\overrightarrow{c} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}(\overrightarrow{c} - \alpha\overrightarrow{c})$
Para las otras razones procedemos de forma similar

$$(Q, B, C) = ((1+\beta)\overrightarrow{b} - \beta\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \frac{1+\beta}{\beta}$$

$$(R, A, C) = (\gamma\overrightarrow{b}, \overrightarrow{0}, \overrightarrow{c}) = \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

luego tenemos

$$\begin{aligned}
(P,C,A)(Q,B,C)(R,A,B) &= \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}\cdot\frac{\frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+\beta}-1}{\frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+\beta}} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}\cdot\frac{\alpha(1+\beta)-\alpha-\beta}{\alpha(1+\beta)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}\cdot\frac{\alpha\beta-\beta}{\alpha(1+\beta)} = 1.
\end{aligned}$$

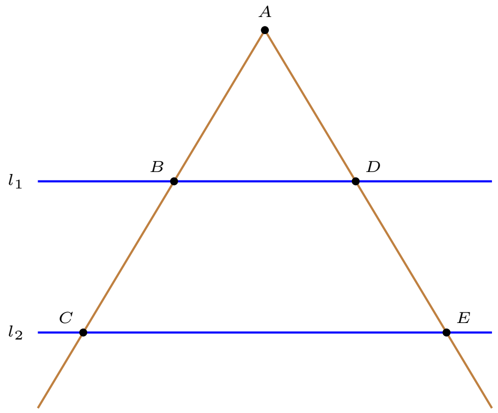
Para la demostración en el otro sentido note que

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}\cdot\frac{\gamma-1}{\gamma} = 1 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+\beta}.$$

lo que permite definir η y con ello, se obtiene que los puntos son colineales. ∎

Teorema 1.73 (de Thales)

$$l_1 \parallel l_2 \textit{ si y sólo si } (A, B, C) = (A, D, E)$$



Demostración: Traslademos el punto A al origen, y identifiquemos los puntos

$$A = \overrightarrow{0},\ B = \overrightarrow{b},\ C = \alpha\overrightarrow{b},\ D = \overrightarrow{d},\ E = \beta\overrightarrow{d}$$

con α, β no nulos y $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}$ linealmente independiente.
Calculemos las razones afines

$$(A, B, C) = \alpha, \quad (A, D, E) = \beta.$$

Ya que

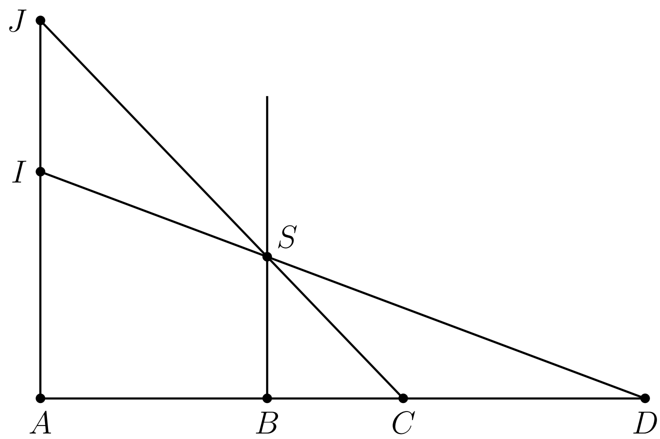
$$(\alpha\overrightarrow{c} - \overrightarrow{0} = \alpha(\overrightarrow{c} - 0),\ (\beta\overrightarrow{d} - \overrightarrow{0} = \beta(\overrightarrow{d} - 0).$$

Por teorema 1.63, se obtiene la equivalencia. ■

Definición 1.74 *Sean A, B, C, D cuatro puntos colineales, se llama la **birazón** a*

$$(A, B, C, D) = \frac{(C, B, A)}{(D, B, A)}$$

Propiedad 1.75 *Sean A, B, C, D, I, J, S puntos en el plano afín vectorial sobre $\mathbb{K}$, tales que A, I, J colineales, A, B, C colineales $AI = AB$ $BS \parallel IJ$ entonces $(A, B, C, D) = (A, I, J)$.*



Demostración: Traslademos el punto A al origen, y identifiquemos los puntos

$$A = \overrightarrow{0},\ I = \overrightarrow{i},\ J = \alpha\overrightarrow{i},\ B = \overrightarrow{b},\ C = \beta\overrightarrow{b},\ D = \gamma\overrightarrow{b},\ S = \lambda\overrightarrow{i} + \overrightarrow{b}$$

aplicando el teorema de Thales obtenemos

$$(C,S,J) = (C,B,A),\quad (D,S,I) = (D,B,A)$$

De la primera obtenemos que $(C,S,J) = (\beta\overrightarrow{b}, \lambda\overrightarrow{i} + \overrightarrow{b}, \alpha\overrightarrow{i})$, es decir,

$$\alpha\overrightarrow{i} - \beta\overrightarrow{b} = (C,B,A)(\lambda\overrightarrow{i} + \overrightarrow{b} - \beta\overrightarrow{b}) = (C,B,A)(\lambda\overrightarrow{i} + (1-\beta)\overrightarrow{b})$$

Como $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{i}$ son linealmente independiente, se tiene

$$\frac{\alpha}{\lambda} = (C,B,A) = \frac{-\beta}{1-\beta}$$

Análogamente, $(D,S,I) = (\gamma\overrightarrow{b}, \lambda\overrightarrow{i} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{i})$, de lo cual

$$\overrightarrow{i} - \gamma\overrightarrow{b} = (D,B,A)(\lambda\overrightarrow{i} + \overrightarrow{b} - \gamma\overrightarrow{b}) = (D,B,A)(\lambda\overrightarrow{i} + (1-\gamma)\overrightarrow{b})$$

Como $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{i}$ son linealmente independiente, se tiene

$$\frac{1}{\lambda} = (D,B,A) = \frac{-\gamma}{1-\gamma}$$

De lo anterior tenemos que

$$(A,B,C,D) = \frac{(C,B,A)}{(D,B,A)} = \alpha$$

Por otro lado

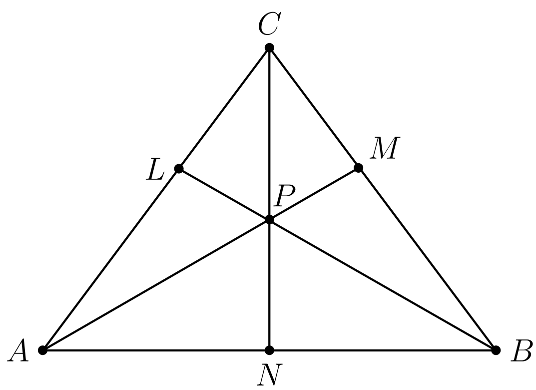
$$(A,I,J) = (\overrightarrow{0}, \overrightarrow{i}, \alpha\overrightarrow{i})$$

de lo cual tenemos

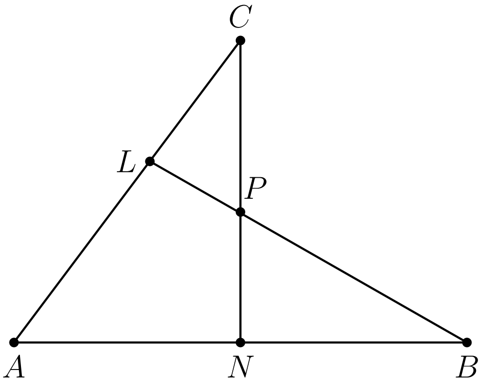
$$\alpha\overrightarrow{i} - \overrightarrow{0} = (A,I,J)(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{0}),$$

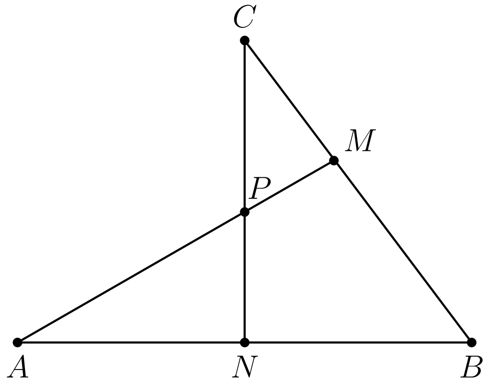
De lo cual $(A,I,J) = \alpha$. ■

Teorema 1.76 (de Ceva) *Sean los vértices de un triángulo ABC, con divisiones en L, M, N en las razones correspondiente $\lambda = (L,A,C)$, $\mu = (P,N,C)$, $\alpha = (B,A,N)$ entonces las rectas l_{AM}, l_{BL}, l_{CN} son concurrentes si y sólo si $\lambda\mu\alpha = -1$.*



Demostración: Apliquemos el teorema de Menelao a los siguientes casos





Luego tenemos

$$(L,C,A)(P,N,C)(B,A,N)=1, \qquad (M,C,B)(P,N,C)(A,B,N)=1$$

Teniendo presente la propiedad 1.71, y la hipótesis se obtiene $\lambda=(L,A,C),\ \mu=(P,N,C),\ \alpha=(B,A,N)$, luego

$$(L,C,A)=\frac{1}{\lambda},\ (B,A,N)=\frac{1}{1-\alpha},\ (A,B,N)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Reemplazando

$$\frac{1}{\lambda}(P,C,N)\frac{1}{1-\alpha}=1, \qquad \mu(P,C,N)\frac{\alpha}{\alpha-1}=1$$

Concluimos despejando e igualando obtenemos

$$(P,C,N)=\lambda(1-\alpha)=\frac{(\alpha-1)}{\alpha\mu}$$

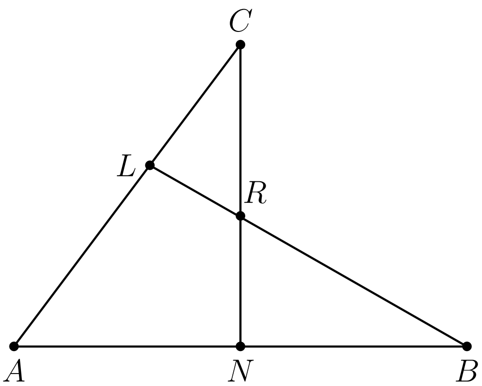
Así obtenemos

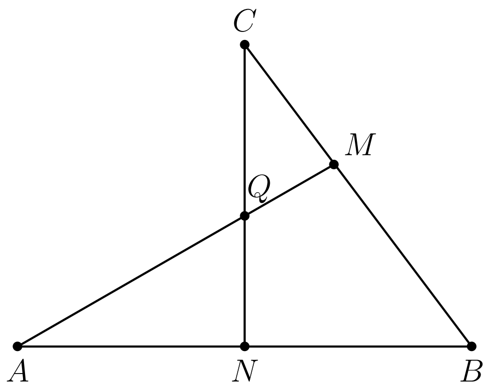
$$\alpha\lambda\mu=\frac{\alpha-1}{1-\alpha}=-1$$

En la otra dirección, Suponemos $\alpha\lambda\mu=-1$ y

$$l_{AM}\cap l_{BL}=P \qquad l_{AM}\cap l_{CN}=Q \qquad l_{BL}\cap l_{CN}=R.$$

Apliquemos el teorema de Menelao a los siguientes casos





$$(L,C,A)(R,N,C)(B,A,N)=1, \qquad (M,C,B)(Q,N,C)(A,B,N)=1$$

Teniendo presente la propiedad 1.71, y la hipótesis se obtiene $\lambda=(L,A,C)$, $\mu=(P,N,C)$, $\alpha=(B,A,N)$, luego

$$(L,C,A)=\frac{1}{\lambda},\ (B,A,N)=\frac{1}{1-\alpha},\ (A,B,N)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Reemplazando

$$\frac{1}{\lambda}(R,C,N)\frac{1}{1-\alpha}=1, \qquad \mu(Q,C,N)\frac{\alpha}{\alpha-1}=1$$

Despejando y reemplazando el $\mu=\frac{-1}{\alpha\lambda}$

$$(R,C,N)=\lambda(1-\alpha), \qquad (Q,C,N)=\frac{\alpha-1}{\mu\alpha}=\lambda(1-\alpha)$$

Los puntos esta a una misma razón afín luego son iguales. ■

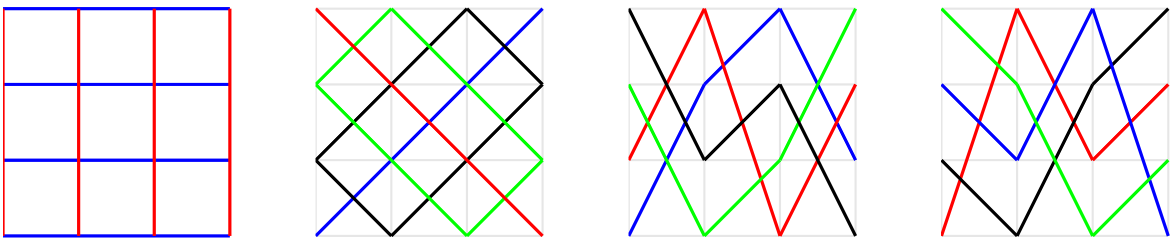
1.9. Ejemplos Misceláneos

Ejemplo 1.77 *Considere* $\mathbb{K}=\{a+b\delta \mid a,b\in\mathbb{Z}_2\}=\mathbb{Z}_2(\delta)$, *es un cuerpo con 4 elementos, donde* $\delta^2=\delta+1$ *y* Π *es el plano afín vectorial, es decir,*

$$\mathcal{P}=\mathbb{K}^2, \qquad \mathbb{L}=\{<w>+v \mid v,w\in\mathbb{K}^2, w\neq 0\} \ \ y \ \ I: \textit{pertenecía}$$

Graficar los puntos y las rectas en $\mathbb{K}^2$, *identificando los haces paralelas.*

Solución: $\mathbb{K}=\{0,1,\delta,1+\delta\}=\mathbb{Z}_2(\delta)$, cuerpo con 4 elementos
El número de: Puntos es $4^2=16$, Rectas $20=16+4$, Haces es 5 y cada haz contiene 4 rectas.



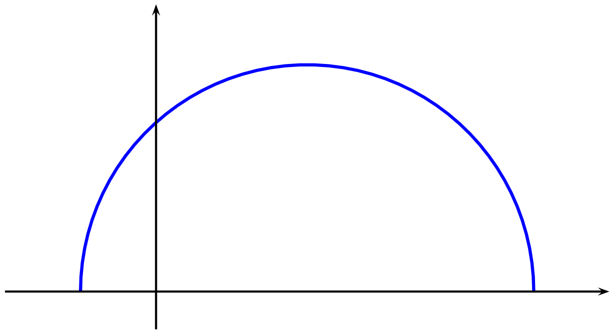
$[y=0]$ $[x=0]$ $\qquad$ $[y=x]$ $\qquad$ $[y=\delta x]$ $\qquad$ $[y=(\delta+1)x]$

□

Ejemplo 1.78 *Considere la estructura de incidencia dada por los puntos* $\mathcal{P}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ *semiplano superior, la recta* $c_{a,r}=\{(x,y)\in\mathcal{P} \mid (x-a)^2+y^2=r^2\}$ *una semicircunferencia con centro eje* x, *el conjunto de las rectas* $\mathcal{L}=\{c_{a,r} \mid a,r\in\mathbb{R}, r>0\}$ *y la incidencia es la pertenecía.*

Determine que axiomas de plano afín cumple $\Pi=(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$.

Solución:



Primer axioma, dado los puntos distintos $(a,b),(c,d) \in \mathcal{P}$ deben pertenecer a una única recta.

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2,$$

reemplazando tenemos $(a-h)^2 + b^2 = r^2$, $(c-h)^2 + d^2 = r^2$.
Restando las ecuaciones obtenemos que $2ah - 2ch = d^2 + c^2 - b^2 - a^2$, cuando $a = c$, tenemos que $b \neq d$ y positivos luego la ecuación no tiene solución, no cumple axioma 1.
Segundo axioma, dada la recta. $(x-h)^2 + y^2 = r^2$, y el punto (a,b) que no pertenece a la recta, entonces la recta

$$(x-h)^2 + y^2 = (a-h)^2 + b^2$$

es una recta paralela que pasa por el punto (a,b), no es única.
Tercer axioma, los puntos $(1,1),(1,2),(-1,1)$, no son colineales, no existe recta que une los puntos $(1,1),(1,2)$ □

Ejemplo 1.79 *En Π Plano de Moulton, sea los puntos $A = (-1,9)$, $B = (2,-3)$ y $C = (-2,5)$. Determinar la ecuación de la recta m, tal que $m \parallel l_{AB}$ y $C\mathcal{I}m$.*

Solución: La recta l_{AB} tiene pendiente negativa.

$$l_{AB} : y = \begin{cases} ax + b & ; \quad x \geq 0 \\ \\ \frac{a}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

luego, reemplazamos A y B y se tiene que $9 = -a/2 + b$ y $-3 = 2a + b$, de lo cual restando se obtiene que $a = -\frac{24}{5}$.
De este modo, la recta m esta dada por:

$$m : y = \begin{cases} -\dfrac{24}{5}x + c & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -\dfrac{12}{5}x + c & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Reemplazando el punto C obtenemos que $5 = \frac{24}{5} + c$, de lo cual tenemos que $c = \frac{1}{5}$.
Por lo anterior tenemos

$$m : y = \begin{cases} -\dfrac{24}{5}x + \dfrac{1}{5} & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -\dfrac{12}{5}x + \dfrac{1}{5} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

$\square$

Ejemplo 1.80 *En* Π *Plano de Moulton, sea* $T(x, y) = (2x, 2y - 2)$

1. *Determinar si* T *es una colineación en* Π.
2. *Determinar si* T *es una dilatación en* Π.

Solución: La función T es biyectiva, ya que $T(x, y) = (2x, 2y - 2)$, se tiene que $F(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + 1)$ es la inversa

$$(F \circ T)(x, y) = F(2x, 2y - 2) = (x, \frac{1}{2}(2y - 2) + 1) = (x, y)$$

$$(T \circ F)(x, y) = T(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + 1) = (x, 2(\frac{1}{2}y + 1) - 2) = (x, y)$$

Una es la inversa de la otra, luego T es biyectiva en puntos.
Veamos ahora los cuatro tipo de rectas: Rectas horizontal.

$$\begin{array}{rcl} T(\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}) & = & \{(2c, 2y - 2) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ T(\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}) & = & \{(2c, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

es decir, la recta es horizontal preserva incidencia, paralelismo y la imagen es paralela.

$$T : \ l : x = c \longrightarrow l' : x = 2c.$$

Rectas vertical

$$\begin{array}{rcl} T(\{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}) & = & \{(2x, 2c - 2) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ T(\{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}) & = & \{(z, 2c - 2) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

es decir, la recta es vertical preserva incidencia, paralelismo y la imagen es paralela.

$$T : \ l : y = c \longrightarrow l' : y = 2c - 2.$$

Rectas pendiente positiva.

$$\begin{array}{rcl} T(\{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}) & = & \{(2x, 2mx + 2b - 2) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ T(\{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}) & = & \{(z, mz + 2b - 2) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

es decir, la recta de pendiente es positiva e igual pendiente preserva incidencia, paralelismo y la imagen es paralela.

$$T: \ l : y = mx + b \longrightarrow l' : y = mx + 2b - 2.$$

Rectas pendiente negativa.

$$\begin{array}{rl} & T(\{(x, mx+b) \mid x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(y, my/2+b) \mid y \in \mathbb{R}^-\}) \\ = & \{(2x, 2mx+2b-2) \mid x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(2y, 2my/2+2b-2) \mid y \in \mathbb{R}^-\} \\ = & \{(t, mt+2b-2) \mid t \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(k, mk/2+2b-2) \mid k \in \mathbb{R}^-\} \end{array}$$

de otro modo la recta l es enviada en l'.

$$T: \ l : y = \begin{cases} mx+b & ; \quad x \geq 0 \\ \\ \frac{m}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases} \longrightarrow l' : y = \begin{cases} mx+2b-2 & ; \quad x \geq 0 \\ \\ \frac{m}{2}x + 2b-2 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Preserva incidencia, paralelismo y la imagen es paralela.
Luego T es una dilatación.
Ya que, las rectas por su tipo se mantiene, luego preserva incidencia, paralelismo y es paralela a la imagen. □

Ejemplo 1.81 *En el plano afín vectorial $V = \mathbb{C}^2$ y f una colineación definida por*

$$f(a+bi, c+di) = (a-bi, c-di).$$

Determinar los puntos y rectas fijas de f.

Solución: Los Puntos Fijos

$$(a+bi, c+di) = f(a+bi, c+di) = (a-bi, c-di).$$

Luego tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} a & = & a \\ b & = & -b \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{rcl} c & = & c \\ d & = & -d \end{array}\right|$$

Por ello tenemos que $b = 0, \ d = 0$.

$$\{(a+bi, c+di) \in \mathbb{C}^2 \mid b = 0, \ d = 0\} = \mathbb{R}^2$$

Las Rectas Fijas.
La rectas oblicuas $l_{m,w} = \{(z, mz+w) \mid z \in \mathbb{C}\}$

$$\begin{array}{rcl} f(\{(z, mz+w) \mid z \in \mathbb{C}\}) & = & \{(\overline{z}, \overline{mz+w}) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ f(\{(z, mz+b) \mid z \in \mathbb{C}\}) & = & \{(z, \overline{m}z + \overline{w}) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ f(l_{m,w}) & = & l_{\overline{m},\overline{w}} \end{array}$$

Las rectas verticales, $l_w = \{(w,z) \mid z \in \mathbb{C}\}$.

$$\begin{array}{rcl} f(\{(w,z) \mid z \in \mathbb{C}\}) & = & \{(\overline{w},\overline{z}) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ f(\{(w,z) \mid z \in \mathbb{C}\}) & = & \{(\overline{w},z) \mid z \in \mathbb{C}\} \\ f(l_w) & = & l_{\overline{w}} \end{array}$$

luego las rectas fijas, preservan pendiente e intercepto. Y esta son

$$\{l_{m,w}, l_w \mid m,w \in \mathbb{R}\}$$

$\square$

Ejemplo 1.82 *Sean f,g colineación en plano afín.*
Demostrar directamente que $g \circ f$ es una colineación.

Solución: Sean f,g dos colineación en plano afín.
De lo anterior tenemos que $f,g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ son biyectiva, luego $g \circ f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es biyectiva, además $f,g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ son biyectiva, por ello $g \circ f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es biyectiva.
Preserva Incidencia
Sabemos que g,f preservan incidencia, sean $P\mathcal{I}l$, aplicando la función f tenemos que $f(P)\mathcal{I}f(l)$ y ahora aplicando g tenemos que $g(f(P))\mathcal{I}g(f(l))$, es decir, $(g \circ f)(P)\mathcal{I}(g \circ f)(l)$.
Preserva Paralelismo
Dado m,l dos rectas paralelas distintas, tenemos $f(m) \parallel f(l)$, aplicando g se obtiene

$$g(f(m)) \parallel g(f(l))$$

De este modo tenemos que $g \circ f$ es una colineación. $\square$

Ejemplo 1.83 *Demostrar que todo plano afín, contiene al menos tres haces de rectas.*

Solución: Por el tercer axioma existe tres puntos no colineales A,B,C, por axioma 1 existen las rectas l_{AB}, l_{AC}, l_{BC}
Las rectas no pueden ser iguales, ya que significa que los puntos son colineales y además cada una de ella con la otra tiene una intersección.

$$l_{AB} \cap l_{AC} = \{A\}, \ l_{BC} \cap l_{AB} = \{B\}, \ l_{AC} \cap l_{BC} = \{C\}$$

Luego no pueden ser paralela dos a dos
De esta manera cada una de las rectas pertenece a un haz distintos de rectas. $\square$

Ejemplo 1.84 *En Π Plano de Moulton Real, sean $A = (-4,7), B = (3,-3), C = (-2,1)$ y $D = (1,-7)$.*
Determinar $l_{AB} \cap l_{CD}$.

Solución: Consideremos las rectas

$$l_{AB} : y = \begin{cases} ax + b & ; \quad x \geq 0 \\ \\ \frac{a}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases} \qquad l_{CD} : y = \begin{cases} cx + d & ; \quad x \geq 0 \\ \\ \frac{c}{2}x + d & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

luego, reemplazamos A y B se tiene que $7 = -2a + b$ y $-3 = 3a + b$,

$$\left.\begin{array}{rcr} -2a + b & = & 7 \\ 3a + b & = & -3 \end{array}\right|$$

de lo cual $a = -2,\ b = 3$ y en la otra reemplazamos C y D se tiene que $1 = -c + d$ y $-7 = c + d$,

$$\left.\begin{array}{rcr} -c + d & = & 1 \\ c + d & = & -7 \end{array}\right|$$

de lo cual $c = -4,\ d = -3$. De este modo tenemos

$$l_{AB} : y = \begin{cases} -2x + 3 & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -x + 3 & ; \quad x < 0 \end{cases} \qquad l_{CD} : y = \begin{cases} -4x - 3 & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -2x - 3 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Igualando tenemos

$$\begin{array}{ccc} \text{Caso } x \geq 0 & ; & \text{Caso } x < 0 \\ -2x + 3 = -4x - 3 & & -x + 3 = -2x - 3 \\ 2x = -6 & & x = -6 \\ x = -3 \geq 0 & & x = -6 < 0 \end{array}$$

Luego obtenemos que

$$l_{AB} \cap l_{CD} = \{(-6, 9)\}$$

□

Ejemplo 1.85 *En Π Plano de Moulton Real, sean $A = (-6, 6), B = (4, -8)$ y $C = (-2, 5)$. Determinar la ecuación de la recta l, tal que $l \parallel l_{AB}$ y $C\mathcal{I}l$.*

Solución: Consideremos las rectas

$$l_{AB} : y = \begin{cases} ax + b & ; \quad x \geq 0 \\ \\ \frac{a}{2}x + b & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

luego, reemplazamos A y B se tiene que $6 = -3a + b$ y $-8 = 4a + b$,

$$\left.\begin{array}{rcr} -3a + b & = & 6 \\ 4a + b & = & -8 \end{array}\right|$$

de lo cual $a = -2,\ b = 0$. De este modo tenemos

$$l_{AB} : y = \begin{cases} -2x & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

La recta paralela

$$l_C : y = \begin{cases} -2x + d & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -x + d & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

reemplazamos C y se tiene que $5 = 2 + d$ y $d = 3$,

$$l_C : y = \begin{cases} -2x + 3 & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -x + 3 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

□

Ejemplo 1.86 *Considere* $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, *plano afín vectorial complejo*

$$\mathcal{P} = \mathbb{C}^2, \qquad \mathcal{L} = \{< w > + v \mid v, w \in \mathbb{C}^2, w \neq 0\} \quad y \quad I : \textit{pertenecía}$$

y $f_a(z_1, z_2) = (\overline{z_1} + a\overline{z_2}, \overline{z_2})$

1. *Determinar si* f_a *es una colineación, con* $a \in \mathbb{C}$.
2. *Determinar si* f_a *es una dilatación, con* $a \in \mathbb{C}$.

Solución: Dada la Recta $l = \{(bw_1 + v_1, bw_2 + v_2) \mid a \in \mathbb{C}\} =< w > + v$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} f_a(l) &= \{f_a(bw_1 + v_1, bw_2 + v_2) \mid a \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(\overline{bw_1} + \overline{v_1} + a\overline{bw_2} + a\overline{v_2}, \overline{bw_2} + \overline{v_2}) \mid a \in \mathbb{C}\} \\ &= < \overline{w_1} + a\overline{w_2}, \overline{w_2}) > + (\overline{v_1} + a\overline{v_2}, \overline{v_2}) \end{aligned}$$

Por ello se concluye que ..... □

Ejemplo 1.87 *Considere* $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, *plano afín vectorial complejo*

$$\mathcal{P} = \mathbb{C}^2, \qquad \mathcal{L} = \{< w > + v \mid v, w \in \mathbb{C}^2, w \neq 0\} \quad y \quad I : \textit{pertenecía}$$

y $f(a + bi, c + di) = (a - bi, c - di)$

1. *Determinar si* f *es una colineación*
2. *Determinar si* f *es una dilatación*

Solución: Sabemos que $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ y $\overline{\overline{z}} = z$.
Notemos que

$$f(f(z,w)) = f(\overline{z},\overline{w}) = (\overline{\overline{z}},\overline{\overline{w}}) = (z,w)$$

luego f es una función biyectiva a nivel de puntos.
En relación a rectas

$$\begin{array}{rcl} f(<(w_1,w_2)> +(v_1,v_2)) & = & \{f(\alpha(w_1,w_2)+(v_1,v_2)) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \\ & = & \{(\overline{\alpha w_1 + v_1}, \overline{\alpha w_2 + v_2}) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \\ & = & \{(\overline{\alpha}\overline{w}_1 + \overline{v}_1, \overline{\alpha}\overline{w}_2 + \overline{v}_2) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \\ & = & \{\overline{\alpha}(\overline{w}_1,\overline{w}_2) + (\overline{v}_1,\overline{v}_2) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \\ & = & \{\beta(\overline{w}_1,\overline{w}_2) + (\overline{v}_1,\overline{v}_2) \mid \beta \in \mathbb{C}\} \\ & = & <(\overline{w}_1,\overline{w}_2)> +(\overline{v}_1,\overline{v}_2) \end{array}$$

envía recta en recta y de la misma manera se tiene que f es biyectiva a nivel de rectas.

$$f(f(<(w_1,w_2)> +(v_1,v_2))) =<(w_1,w_2)> +(v_1,v_2).$$

La incidencia de recta se cumple por el calculo anterior.
Sea l y m dos rectas paralelas luego

$$l :<(w_1,w_2)> +(v_1,v_2), \quad m :<(w_1,w_2)> +(z_1,z_2)$$

luego tenemos que

$$f(l) :<(\overline{w}_1,\overline{w}_2)> +(\overline{v}_1,\overline{v}_2), \quad f(m) :<(\overline{w}_1,\overline{w}_2)> +(\overline{z}_1,\overline{z}_2)$$

de lo cual tenemos que $f(l) \parallel f(m)$
Por todo lo anterior tenemos que f es una colineación.
Sea $l :<(1,i)>$ tenemos que $f(l) :<(1,-i)>$ pero $\{(1,i),(1,-i)\}$ es linealmente independiente, luego $f(l) \nparallel l$. Y por ello f mo es una dilatación. □

Ejemplo 1.88 *Considere el plano afín de Moulton* $\Pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ *y* $h_a(x,y) = (ax,ay)$.

1. *Determine si* h_3 *es una dilatación*
2. *Determine si* h_{-3} *es una dilatación*

Solución: Sea $a \in \mathbb{R}^*$, tenemos que $h_a(h_{1/a}(x,y)) = (x,y)$, luego tenemos que h_a es biyectiva de puntos.
Rectas horizontal en horizontal

$$\begin{array}{rcl} h_a(\{(c,y) \mid y \in \mathbb{R}\}) & = & \{(ac,ay) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ h_a(\{(c,y) \mid y \in \mathbb{R}\}) & = & \{(ac,z) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Rectas vertical en vertical

$$\begin{aligned} h_a(\{(x,c) \mid x \in \mathbb{R}\} &= \{(ax,ac) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ h_a(\{(x,c) \mid x \in \mathbb{R}\} &= \{(z,ac) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Rectas pendiente positiva en rectas de pendiente positiva

$$\begin{aligned} h_a(\{(x,mx+b) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(ax,amx+ab) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ h_a(\{(x,mx+b) \mid x \in \mathbb{R}\}) &= \{(z,mz+ab) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Rectas pendiente negativa en rectas de pendiente negativa

$$\begin{aligned} & h_3(\{(x,mx+b),(y,my/2+b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\}) \\ = \ & \{(3x,3mx+3b),(3y,3my/2+3b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\} \\ = \ & \{(x,mx+3b),(y,my/2+3b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\} \end{aligned}$$

Luego h_3 es una colineación.
Ya que, las rectas por su tipo se mantiene luego mantiene incidencia y paralelismo.
Rectas pendiente negativa no es enviada en una rectas

$$\begin{aligned} & h_{-3}(\{(x,mx+b),(y,my/2+b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\}) \\ = \ & \{(-3x,-3mx-3b),(y,-3my/2-3b) \mid x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^-\} \\ = \ & \{(x,mx-3b),(y,my/2-b) \mid x \in \mathbb{R}^-, y \in \mathbb{R}^+\}. \end{aligned}$$

En particular note que los puntos $\{(1,-1),(0,0),(-1,0{,}5)\}$ son colineales

$$l : y = \begin{cases} -x & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -\frac{1}{2}x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

y tenemos que

$$h_{-3}\{(1,-1),(0,0),(-1,0{,}5)\} = \{(-3,3),(0,0),(3,-1{,}5)\}$$

Pero los puntos no son colineales, ya que la recta que une los dos primeros punto

$$m : y = \begin{cases} -2x & ; \quad x \geq 0 \\ \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

pero el tercero no pertenece a la recta. □

Ejemplo 1.89 *En el plano de Moulton, Sea* $A = (-3,5), B = (4,-2), C = (1,1)$ *y* $D = (0,2)$*. Calcular* $l_{AB} \cap l_{CD}$

Solución: Sean $A = (-3,5)$ y $B = (4,-2)$

$$l_1 : y = \begin{cases} \dfrac{-14}{11}x + \dfrac{34}{11} & ; \quad x \geq 0 \\ \\ \dfrac{-7}{11}x + \dfrac{34}{11} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Sean $C = (1,1)$ y $D = (0,2)$.

$$l_2 : y = \begin{cases} -x + 2 & ; \quad x \geq 0 \\ \\ \dfrac{-1}{2}x + 2 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{-7}{11}x + \frac{34}{11} &= \frac{-1}{2}x + 2 \\ \frac{-7}{11}x + \frac{1}{2}x &= 2 - \frac{34}{11} \\ \frac{-3}{22}x &= -\frac{12}{11} \\ x &= 8 < 0 \end{aligned}$$

Para $x \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{-14}{11}x + \frac{34}{11} &= -x + 2 \\ \frac{-14}{11}x + x &= 2 - \frac{34}{11} \\ \frac{-3}{11}x &= -\frac{12}{11} \\ x &= 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$l_1 \cap l_2 = \{(4,-2)\}.$$

□

Ejemplo 1.90 *Demostrar directamente que si f es una colineación en plano afín entonces f^{-1} también es una colineación.*

Solución: Sea Π un plano afín, y f una colineación de Π.
De lo anterior tenemos que $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es biyectiva, luego $f^{-1} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ es biyectiva, además $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es biyectiva, por ello $f^{-1} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es biyectiva.
Sabemos que f mantiene incidencia, sean $P\mathcal{I}l$, aplicando la función inversa tenemos $f^{-1}(P)$ es un punto y $f^{-1}(l)$ es una recta, luego existe m recta tal que $f^{-1}(P)\mathcal{I}m$ y $f^{-1}(l) \parallel m$, aplicando

f tenemos que $P\mathcal{I}f(m)$ y $l \parallel f(m)$. Por lo tanto $f(m) = l$, es decir $m = f^{-1}(l)$, de lo cual se tiene que
$$f^{-1}(P)\mathcal{I}f^{-1}(l).$$
Dado m, l dos rectas paralelas distintas, tenemos $f^{-1}(m)$ y $f^{-1}(l)$ son dos rectas distintas. Supongamos que $Q\mathcal{I}f^{-1}(m)$ y $Q\mathcal{I}f^{-1}(l)$, aplicando f tenemos

$$f(Q)\mathcal{I}m \ \wedge f(Q)\mathcal{I}l$$

lo cual es una contradicción, ya que son paralelas y distintas, luego $f^{-1}(m)$ y $f^{-1}(l)$ no tiene punto en común, por lo tanto son paralelas. □

Ejemplo 1.91 *Sea f una dilatación en el plano vectorial real tal que $f(0,0) = (2,1)$, $f(0,4) = (2,4)$.*
Determine $f(x,y)$

Solución: Ya que f es una dilatación se tiene que $f(X) = \alpha X + Y$.
Luego obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} (2,1) & = & \alpha(0,0) + Y \\ (2,4) & = & \alpha(0,4) + Y \end{array}\right|$$

De la primera ecuación tenemos que $Y = (2,1)$, reemplazando en la segunda $(0,3) = \alpha(0,4)$ por ende $\alpha = \frac{3}{4}$, de este modo

$$f(x,y) = \frac{3}{4}(x,y) + (2,1) = \left(\frac{3}{4}x + 2, \frac{3}{4}y + 1\right).$$

□

Ejemplo 1.92 *Sean $\Pi = \mathbb{F}_{11} \times \mathbb{F}_{11}$ plano afín vectorial y $f \in D(\Pi)$, tal que $f(6,9) = (3,3)$ y $f(10,1) = (4,1)$*
Determine el cardinalidad del conjunto de trazas de f

Solución: Ya que f es una dilatación se tiene que $f(X) = \alpha X + Y$.
Luego obtenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} (3,3) & = & \alpha(6,9) + Y \\ (4,1) & = & \alpha(10,1) + Y \end{array}\right|$$

Restando las ecuaciones se obtiene $(1,-2) = \alpha(4,-8)$ por ende $\alpha = 3$. reemplazando en la primera ecuación tenemos que $(3,3) = 3(6,9) + Y$, de lo cual $Y = (-4,-2)$, de este modo

$$f(x,y) = 3(x,y) + (7,9) = (3x + 7, 3y + 9).$$

El punto fijo es $(2,1)$ y razón 3. Por ello es una homotecia.
El conjunto de recta fija esta dada por:

$$\{l + (2,1) \mid l \text{ es una recta vectorial } \}$$

y el cardinal de todas las rectas fija es 12. (cantidad de pendiente +1). □

Ejemplo 1.93 *Sea T una traslación en el plano afín vectorial $V = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ tal que $T(3,5) = (-1,7)$ y σ una homotecia de centro $(8,7)$ y razón 2*

1. *Determine $(T \circ \sigma)(x,y)$*
2. *Calcular $(T^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ T)(x,y)$*

Solución: Como T es una traslación y $T(3,5) = (-1,7)$, tenemos que

$$T(x,y) = (x+1, y+2).$$

Por otro lado σ es una homotecia de razón 2 y centro $(3,2)$, luego

$$\sigma(x,y) = 2(x,y) + 4(3,2) = (2x+2, 2y+3).$$

Evaluando obtenemos

$$(T \circ \sigma)(x,y) = T(2x+2, 2y+3) = (2x+3, 2y)$$

Las inversas de T y σ son:

$$T^{-1}(x,y) = (x-1, y-2) = (x+4, y+3), \quad \sigma^{-1}(x,y) = (3x+4, 3y+1)$$

$$\begin{aligned}
(T^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ T)(x,y) &= (T^{-1} \circ \sigma^{-1})(x+1, y+2) \\
&= T^{-1}(3(x+1)+4, 3(y+2)+1) \\
&= T^{-1}(3x+2, 3y+2) \\
&= (3x+1, 3y)
\end{aligned}$$

de este modo tenemos

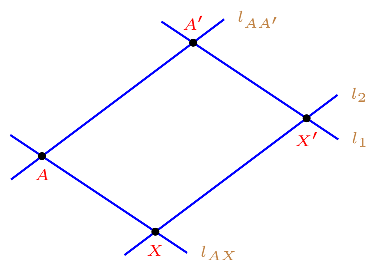
$$(T^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ T)(x,y) = (3x+1, 3y+1)$$

□

Ejemplo 1.94 *En un plano afín.*
Demostrar que una traslación esta completamente determinada si se conoce la imagen de un punto.

Solución: Sea $A \in \mathcal{P}$ tal que $f(A) = A'$, como A, A' son distintos existe $l_{AA'}$ y $X \in \mathcal{P}$. tal que $X \not\mathcal{I} l_{AA'}$.

Definimos:
l_2 paralela a $l_{AA'}$ y $X \mathcal{I} l_2$ es una traza de f luego esta fija por f.
l_1 paralela a l_{AX} y $A' \mathcal{I} l_1$, note que $f(l_{AX}) = l_1$ es paralela y A' incide en ella.
Por lo tanto, l_1, l_2 no son paralela, luego $l_1 \cap l_2 = \{f(X)\}$.
De este modo tenemos que $f(A) = A'$ y $f(X) = X'$, dos imagen, por propiedad de dilatación, define una única dilatación.



□

Ejemplo 1.95 *En el plano afín vectorial real, dados cuatro puntos $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ distintos, tal que $l_{AB} \parallel l_{CD}$*
Demostrar que existe una dilatación f tal que $f(A) = C$ y $f(B) = D$

Solución: La existencia de la dilatación $f(X) = \alpha X + Y$, depende que el siguiente sistema tenga solución

$$\left.\begin{array}{rcl} C &=& \alpha A + Y \\ D &=& \alpha B + Y \end{array}\right|$$

Restando las ecuaciones se obtiene $C - D = \alpha(A - B)$, lo cual tiene solución, ya que $l_{AB} \parallel l_{CD}$, y por ello los vectores directores son linealmente dependiente.
Sea β la solución de la ecuación vectorial, luego $Y = C - \beta A = D - \beta B$.
Por lo tanto existe la dilatación y esta dada por:

$$f(X) = \beta(X - A) + C$$

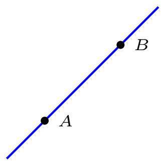
$\square$

Capítulo 2

Plano Proyectivo

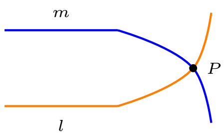
2.1. Axioma del Plano Proyectivo

Un estructura de incidencia $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, se dice que Π es un **plano proyectivo** si y sólo si cumple los siguientes axiomas

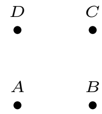


1. Sean $A, B \in \mathcal{P}$, con $A \neq B$ entonces $\exists! l \in \mathcal{L}$ tal que $A\mathcal{I}l$ y $B\mathcal{I}l$

2. Sean $l, m \in \mathcal{L}$, con $l \neq m$ entonces $l \cap m \neq \varnothing$ (no existen rectas paralelas).



3. En el plano proyectivo existen un cuadrilátero o cuadrángulo, es decir, no existen tres puntos que pertenezca a la misma recta y toda recta al menos tiene tres puntos distintos.



Observación: Por el axioma uno, dos rectas distintas inciden solamente en un punto. Sean $l, m \in \mathcal{L}$ distintas entonces $l \cap m = \{P\}$.

Definición 2.1 *Todo conjunto de puntos que incide con una misma recta, se llaman* ***puntos colineales****.*
Todo conjunto de rectas que pasan o inciden en un punto común se llaman rectas ***concurrentes o coincidentes****.*
Un conjunto de 3 puntos distintos no colineales A, B, C junto con las rectas l_{BC}, l_{CA}, l_{AB} de llama ***triángulo****.*
Un conjunto de 4 puntos distintos, 3 de ellos no colineales junto con las rectas de llama ***cuadrilátero****.*

Definición 2.2 *Plano Proyectivo minimal es aquel plano proyectivo formado por el menor número de puntos y rectas que cumple con los axioma de plano proyectivo.*

Propiedad 2.3 *Todo plano proyectivo contiene al menos siete puntos.*

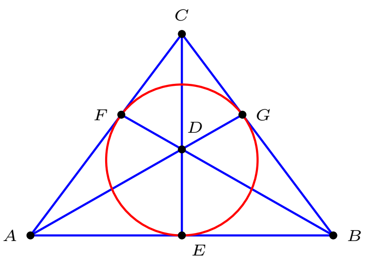
Demostración: Por axioma tres, sabemos que existen cuatro puntos que denotaremos por A, B, C y D

i) $l_{AB} \cap l_{CD} = \{E\}$, entonces $E \,\mathcal{I}\, l_{AB}$ y $E \,\mathcal{I}\, l_{CD}$

ii) $l_{AC} \cap l_{BD} = \{F\}$, entonces $F \,\mathcal{I}\, l_{AC}$ y $F \,\mathcal{I}\, l_{BD}$

iii) $l_{AD} \cap l_{BC} = \{G\}$, entonces $G \,\mathcal{I}\, l_{AD}$ y $G \,\mathcal{I}\, l_{BC}$

Note que, si $E = F$, $E \,\mathcal{I}\, l_{AB}$; $E \,\mathcal{I}\, l_{AC}$; lo que $l_{AE} = l_{AB} = l_{AC}$; lo que significa que tres puntos son colineales, lo cual no es posible, luego existe siete puntos y al menos siete rectas.



■

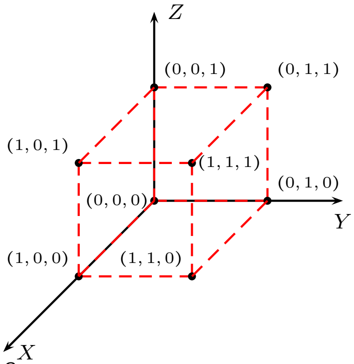
2.1.1. Plano Proyectivo Vectorial

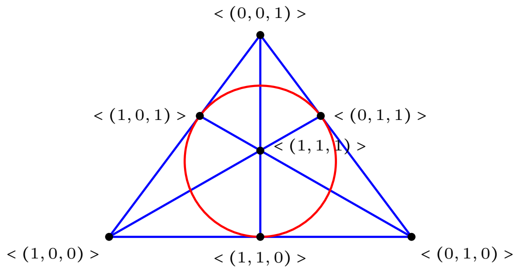
Sea V un espacio vectorial de dimensión tres sobre $\mathbb{K}$.
Se define el conjunto de los puntos y de las rectas por:

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{U} \leq V \mid dim(\mathcal{U}) = 1\}, \quad \mathcal{L} = \{\mathcal{W} \leq V \mid dim(\mathcal{W}) = 2\}$$

y la incidencia la contención.

Ejemplo 2.4 *Sea* $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $(dim(V) = 3)$.
Note que cada recta vectorial tiene dos puntos y los planos tiene cuatro puntos incluido el vector nulo.





Puntos

$$\begin{aligned} P_1 &= \langle(1,0,0)\rangle \\ P_2 &= \langle(0,1,0)\rangle \\ P_3 &= \langle(0,0,1)\rangle \\ P_4 &= \langle(1,1,0)\rangle \\ P_5 &= \langle(1,0,1)\rangle \\ P_6 &= \langle(0,1,1)\rangle \\ P_7 &= \langle(1,1,1)\rangle \end{aligned}$$

Rectas

$$\begin{aligned} l_1 &= \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle \\ l_2 &= \langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle \\ l_3 &= \langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle \\ l_4 &= \langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle \\ l_5 &= \langle(0,1,0),(1,0,1)\rangle \\ l_6 &= \langle(0,0,1),(1,1,0)\rangle \\ l_7 &= \langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle \end{aligned}$$

Luego tenemos que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *es un modelo el plano proyectivo minimal.*

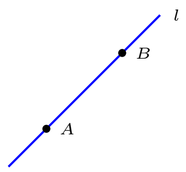
En general, con las notaciones anteriores se define el plano proyectivo asociado al espacio vectorial a

$$\mathbb{P}_2(V) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}).$$

Teorema 2.5 *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión 3 sobre* $\mathbb{K}$, *entonces* $\mathbb{P}_2(V)$ *es un plano proyectivo.*

Demostración:

i) **Axioma uno:** Por dos puntos distintos pasa una única recta



Sea $A \neq B$ con $A = \left\langle \overrightarrow{v} \right\rangle$ y $B = \left\langle \overrightarrow{w} \right\rangle$, entonces $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ son linealmente independiente, en particular:

$$l = \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle.$$

Es única, ya que $A\mathcal{I}m$ y $B\mathcal{I}m$, entonces $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in m$, de lo cual obtenemos

$$l = \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle \subset m.$$

como la dimensión es dos, se obtiene la igualdad.

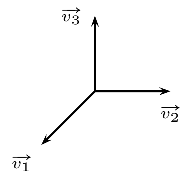
ii) **Axioma dos:** Si $l \neq m$ entonces $l \cap m \neq \varnothing$

Sean $l = \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle$ y $m = \left\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \right\rangle$ con $l \neq m$, entonces $l + m = V$

$$\begin{array}{rcl} dim(l+m) & = & dim(l) + dim(m) - dim(l \cap m) \\ 3 & = & 2 + 2 - dim(l \cap m) \\ dim(l \cap m) & = & 1 \end{array}$$

En particular $l \cap m \neq \varnothing$

iii) **Axioma tres:** Existe un cuadrángulo.

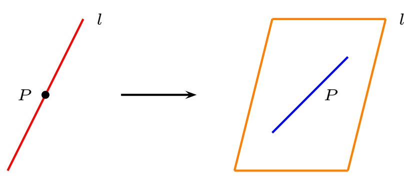


Sea $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ base de V. En donde $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\}$ forman un cuadrángulo. Ya que dado tres vectores cualquiera, estos son linealmente independientes, luego no hay tres colineales.

Por lo tanto $\mathbb{P}_2(V)$ es un plano proyectivo. ■

Observación:

1. Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial de dimensión tres y $\mathbb{P}_2(V)$ el plano proyectivo construido a partir de V con $P\mathcal{I}l$ entonces $P \subseteq l$, gráficamente se tiene que:



2. Sea $l = \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle$ recta del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(V)$, entonces la ecuación cartesiana de l con respecto a la base $B = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ de V, tiene la forma:

$$l : ax + by + cz = 0$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Ejemplo 2.6 *Dado los puntos del plano* $A = \langle(1,2,4)\rangle$ *y* $B = \langle(-2,1,5)\rangle$ *en el plano proyectivo* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.
Determine la ecuación cartesiana de l_{AB}

Solución: Sea $l_{AB} = \langle(1,2,4),(-2,1,5)\rangle$.
Dado $(x,y,z) \in l_{AB}$ entonces:

$$\begin{array}{rcl}(x,y,z) & = & \alpha(1,2,4) + \beta(-2,1,5) \\ (x,y,z) & = & (\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, 4\alpha + 5\beta)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \alpha - 2\beta \\ y & = & 2\alpha + \beta \\ z & = & 4\alpha + 5\beta \end{array}\right|$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 4 & 5 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 0 & 5 & y-2x \\ 0 & 13 & z-4x \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x + \frac{2}{5}(y-2x) \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & z-4x-\frac{13}{5}(y-2x) \end{array}\right]$$

El sistema tiene solución si y sólo si

$$z - 4x - \frac{13}{5}(y - 2x) = 0$$

o bien

$$5z - 13y + 6x = 0$$

De otro modo los vectores los vectores $\{(x,y,z),(1,2,4),(-2,1,5)\}$ son linealmente dependiente, de lo cual tenemos que

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 4 & 5 & z \end{vmatrix} = (10-4)x - (5+8)y + (1+4)z$$

□

Ejemplo 2.7 *En el plano proyectivo* $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_3^3)$.
Sean $l_1 = \left\langle(\overline{1},\overline{2},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{1})\right\rangle$ *y* l_2 *de ecuación* $\overline{2}x + \overline{3}y - z = 0$.
Calcule $l_1 \cap l_2$

Solución: Sea $(x,y,z) \in l_1 \cap l_2$, por pertenecer a la primera recta l_1 tenemos:

$$\begin{array}{rcl}(x,y,z) & = & \alpha(\overline{1},\overline{2},\overline{0}) + \beta(\overline{0},\overline{1},\overline{1}) \\ (x,y,z) & = & (\alpha, \overline{2}\alpha + \beta, \beta)\end{array}$$

Como también $(x,y,z) \in l_2$, satisface la ecuación, reemplazando tenemos que

$$\begin{array}{rcl} 2\alpha + 3(2\alpha + \beta) - \beta & = & 0 \\ 8\alpha + 2\beta & = & 0 \\ \alpha & = & -\beta \end{array}$$

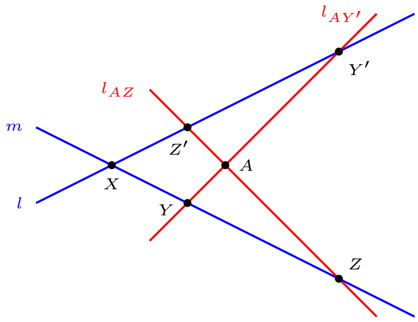
luego

$$(x,y,z) = (\alpha,\ \alpha,\ -\alpha) = \alpha(1,1,-1) = \alpha(1,1,2)$$

Por lo tanto $l_1 \cap l_2 = \{\langle(1,1,2)\rangle\}$. □

Teorema 2.8 *En el plano proyectivo, todas las rectas tienen el mismo número de puntos.*

Demostración: Sean $l, m \in \mathcal{L}, l \neq m$ entonces $l \cap m = \{X\}$ y $A \in \mathcal{P}$ con $A \not{\mathcal{I}}\ m$ y $A \not{\mathcal{I}}\ l$.



Sea $Z\ \mathcal{I}\ m$, luego $l_{ZA} \cap l = \{Z'\}$.
Construimos una función biyectiva

$$\begin{array}{rccc} f: & m & \to & l \\ & X & \rightsquigarrow & X \\ & Z & \rightsquigarrow & Z' \end{array}$$

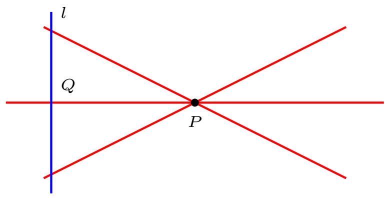
Con lo cual se obtiene que:

$$\#m = \#l$$

■

Corolario 2.9 *De la misma forma, por cada punto pasa la misma cantidad de rectas.*

Demostración:
Sea $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$, tal que $P \not{\mathcal{I}} l$. Notemos que toda recta que pasa por P tiene intersección con l y dado un punto en $Q\mathcal{I}l$ existe la recta l_{PQ}.



■

Definición 2.10 *Se dice que el* ***orden*** *del plano proyectivo* Π *es* n *si y sólo si cada recta contiene* $n+1$ *puntos, en cuyo caso denotamos por* $\#\Pi = n$.

Ejemplo 2.11 $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_2^3)$ *plano proyectivo minimal.*

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & \{<(1,0,0)>,<(0,1,0)>,<(1,1,0)>\}; \\ l_2 & = & \{<(1,0,0)>,<(0,0,1)>,<(1,0,1)>\}; \\ l_3 & = & \{<(0,1,0)>,<(0,0,1)>,<(0,1,1)>\}; \\ l_4 & = & \{<(1,1,0)>,<(0,1,1)>,<(1,0,1)>\}; \\ l_5 & = & \{<(1,0,1)>,<(1,1,1)>,<(0,1,0)>\}; \\ l_6 & = & \{<(1,0,0)>,<(1,1,1)>,<(0,1,1)>\}; \\ l_7 & = & \{<(1,1,0)>,<(0,0,1)>,<(1,1,1)>\}. \end{array}$$

Como cada recta contiene tres puntos, entonces $\#(\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_2^3)) = 2$.

Observación: En general, si $\mathbb{K}$ es cuerpo finito entonces $\#(\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)) = |\mathbb{K}|$, ya que el plano $\mathbb{K}^2$, por el argumento de la pendiente contiene $|\mathbb{K}| + 1$ rectas vectoriales.

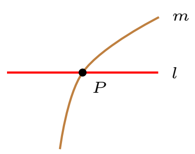
Teorema 2.12 *Sea Π tiene un plano proyectivo de orden n, entonces*

$$\#\mathcal{L} = n^2 + n + 1 \ \ y \ \#\mathcal{P} = n^2 + n + 1$$

Demostración: Si Π tiene orden n, entonces cada recta contiene $n+1$ punto y por cada punto P pasan $n+1$ rectas.
Dado que por un punto P pasa $n+1$ recta y cualquier punto Q distinto de P esta contenido en una recta que pasa por P, luego tenemos $(n+1)^2$ pero el punto P lo hemos contado $n+1$ ya que pertenece a todas las rectas y debemos contarlo una vez.

$$\#\mathcal{P} = (n+1)^2 - n = n^2 + n + 1.$$

Dada dos rectas distintas tiene intersección en un punto, y por cada punto pasa $n+1$ rectas, luego la cantidad de recta es igual al numero de puntos de una recta por la cantidad de recta que pasa por ese punto, teniendo presente que la recta original, se contó tanta vez como punto tiene la recta, por ello



$$\#\mathcal{L} = (n+1)^2 - n$$ ■

Ejemplo 2.13 *Calcular el $\#\mathcal{P}$ y $\#\mathcal{L}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$, $\mathbb{K}$ cuerpo finito.*

Solución: El orden de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$ es $|\mathbb{K}|$. luego tenemos

$$\#\mathcal{P} = |\mathbb{K}|^2 + |\mathbb{K}| + 1 = \#\mathcal{L}$$

Para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ se tiene

$$\#\mathcal{P} = p^2 + p + 1 = \#\mathcal{L}$$

Teorema 2.14 (Bruck- Ryser 1946) *Si $n \equiv 1 \mod 4$ o bien $n \equiv 2 \mod 4$, entonces no existe un plano proyectivo de orden n, salvo que n se escriba como suma de dos cuadrados enteros.*

Observación: $n = 6$, no es suma de dos cuadrados enteros y $n \equiv 2 \mod 4$, luego no existe un plano proyectivo de orden 6, en cambio $10 = 3^2 + 1^2$ y $10 \equiv 2 \mod 4$.

Teorema 2.15 (Lam-Swiercz-Thiel 1988) *No existe un plano proyectivo de orden 10.*

2.1.2. Sub-Plano Proyectivo

Un **sub-plano** Π_0 de Π, es un subconjunto de los elementos de Π que forman un plano proyectivo, teniendo la misma relación de incidencia, es decir, si $\Pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ es un plano proyectivo entonces $\Pi_0 = (\mathcal{P}',\mathcal{L}',\mathcal{I})$ es un sub-plano de Π si y sólo si $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ y Π_0 es un plano proyectivo.
Además es **sub-plano es propio** si y sólo si $\Pi_0 \neq \Pi$.

Ejemplo 2.16 *Como $\mathbb{R}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$, tenemos que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ es un sub-plano propio de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$*

Solución: Dado una elemento $v \in \mathbb{R}^3$ no nulo, tenemos las rectas $< v > \leq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{C}^3$, aún más

$$< v >_{\mathbb{R}} \leq \mathbb{R}^3 \text{ y } < v >_{\mathbb{C}} \leq \mathbb{C}^3$$

donde

$$< v >_{\mathbb{R}} = \{\ tv \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad < v >_{\mathbb{C}} = \{\ tv \in \mathbb{C}^3 \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Notemos que la recta

$$\mathbb{R}^3 \cap < (1,i,2i) >_{\mathbb{C}} = \phi, \qquad \mathbb{R}^3 \cap < (3i,-i,2i) >_{\mathbb{C}} = < (3,-1,2) >_{\mathbb{R}} .$$

que corresponde a los puntos del plano proyectivo.
Análogamente para los planos. □

Observación: En general, si $\mathbb{F}$ es un subcuerpo de $\mathbb{K}$ entonces tenemos que $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}^3)$ es un sub-plano de $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$.

Teorema 2.17 *Sea Π un plano proyectivo de orden n y Π_0 un sub-plano propio de orden m, entonces*

$$n = m^2 \quad \underline{\vee} \quad n \geq m^2 + m$$

Demostración: Sea l un recta de Π_0, luego tiene $n - m > 0$ puntos de $\mathcal{P} - \mathcal{P}'$. Además $\mathcal{L}'$ contiene $m^2 + m + 1$ elementos
De lo anterior tenemos que existen al menos $(n-m)(m^2+m+1)$ puntos que inciden con alguna recta de Π_0, es decir,

$$n^2 + n + 1 \geq (n-m)(m^2+m+1) + m^2 + m + 1$$

simplificando tenemos

$$n^2 \geq nm^2 + nm - m^3$$

de otro modo

$$0 \geq (n-m)(m^2-n)$$

por lo tanto $m^2 - n \leq 0$, es decir, $n = m^2$ o bien $n > m^2$

Si $n = m^2$ entonces tenemos que

$$1+n+n^2 = 1+m^2+m^4 = (m^2+1)^2-m^2 = (m^2+m+1)(m^2-m+1) = (m^2-m)(m^2+m+1)+(m^2+m+1)$$

Lo que significa que cada punto del plano proyectivo, esta contenido en una recta del sub-plano.
Si $n > m^2$, entonces existe un punto P, el cual no pertenece a ninguna recta del sub-plano, al considerar un punto del sub-plano, existe la recta que pasa por ambos punto, esta recta no puede contener otros punto del sub-plano.
Pero P, pasan $n+1$ rectas, luego tenemos que $n+1 \geq m^2+m+1$, cancelando obtenemos que $n \geq m^2+m$. ■

Ejemplo 2.18 *Sean $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ y $\mathbb{F}_8$; cuerpos de cardinal 2,4,8 respectivamente.*
En el primer caso tenemos que el plano proyectivo $\Pi_2 = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_2^3)$ tiene orden 2 y

$$|\mathcal{P}_2| = 7, \ |\mathcal{L}_2| = 7.$$

En el segundo caso tenemos que el plano proyectivo $\Pi_4 = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_4^3)$ tiene orden 4 y

$$|\mathcal{P}_4| = 21, \ |\mathcal{L}_4| = 21.$$

En el último caso tenemos que el plano proyectivo $\Pi_8 = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_8^3)$ tiene orden 8 y

$$|\mathcal{P}_8| = 73, \ |\mathcal{L}_8| = 73.$$

Notemos que en este caso Π_2 es un sub-plano de Π_4 y se cumple $4 = 2^2$, y además Π_2 es un sub-plano de Π_8 y se cumple $8 > 2^2+2 = 6$.

2.2. Plano Proyectivo y Plano Afín

Existen relaciones entre los planos afines y los planos proyectivos lo cual se estudiara en esta sección

2.2.1. Plano Proyectivo en el Plano Afín

Dado un plano proyectivo, se puede construir un plano afín, del siguiente modo
Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ un plano proyectivo y $l \in \mathcal{L}$

i) **Los Puntos $\overline{\mathcal{P}}$**

El conjunto de los puntos se definen del siguiente modo:

$$\overline{\mathcal{P}} = \{P \in \mathcal{P} \mid P \not{\mathcal{I}} l\} = \mathcal{P} - l$$

de otro modo los puntos son, los puntos que no inciden en l.

ii) **Las Rectas $\overline{\mathcal{L}}$**

Sea $m \in \mathcal{L} - \{l\}$, denotemos P_m el punto tal que $m \cap l = \{P_m\}$

$$m' = m - \{P_m\} = m - m \cap l$$

El conjunto de las rectas esta dado por:

$$\overline{\mathcal{L}} = \{m' \mid m \neq l\}$$

es decir, las rectas son, las rectas m distintas de la recta l extrayendo el punto P_m.

iii) **La relación de Incidencia $\overline{\mathcal{I}}$**

Sea $P \in \overline{\mathcal{P}},\ m \in \overline{\mathcal{L}}$.

Se dice que P incide en m, lo que denotamos por $P\overline{\mathcal{I}}m$, si y sólo si $P\mathcal{I}m$

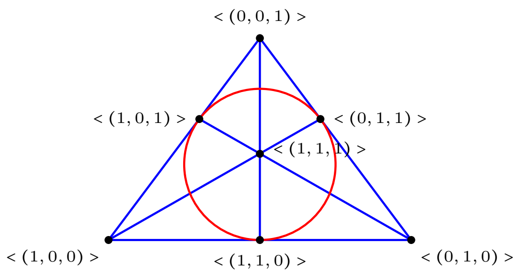
Ejemplo 2.19 *Consideremos el plano proyectivo minimal* $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_2^3)$.
Construir la estructura de incidencia dada anteriormente al omitir la recta

$$l_4 =< (1,0,1),(0,1,1) > .$$

Solución: Sabemos que las rectas del plano proyectivos son:

$$\begin{array}{lcllcl} l_1 &=& \langle(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\rangle\,; & l_2 &=& \langle(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1)\rangle\,; \\ l_3 &=& \langle(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\rangle\,; & l_4 &=& \langle(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\rangle\,; \\ l_5 &=& \langle(1,0,1),(1,1,1),(0,1,0)\rangle\,; & l_6 &=& \langle(1,0,0),(1,1,1),(0,1,1)\rangle\,; \\ l_7 &=& \langle(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\rangle\,. & & & \end{array}$$

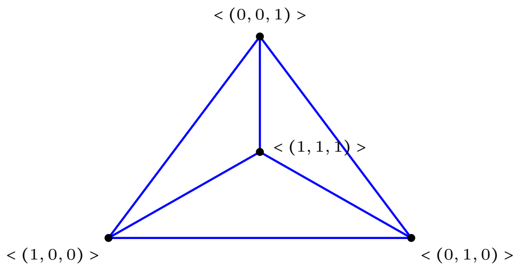
que graficamos del siguiente modo



Luego obtenemos

$$\begin{array}{lcllcl} l_1 &=& \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle\,; & l_2 &=& \langle(1,0,0),(0,0,1)\rangle\,; \\ l_3 &=& \langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle\,; & l_5 &=& \langle(1,1,1),(0,1,0)\rangle\,; \\ l_6 &=& \langle(1,0,0),(1,1,1)\rangle\,; & l_7 &=& \langle(0,0,1),(1,1,1)\rangle\,. \end{array}$$

Es un plano afín con cuatro punto y seis rectas, corresponde al plano afín minimal.



Teorema 2.20 $\Pi^l = (\overline{\mathcal{P}},\ \overline{\mathcal{L}},\ \overline{\mathcal{I}})$ *es un plano afín.*

Demostración: Veamos los axiomas de plano afín.
Axioma uno Si $A, B \in \overline{\mathcal{P}}, A \neq B$ entonces $\exists!\ l \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que $A\ \overline{\mathcal{I}}\ l$ y $B\ \overline{\mathcal{I}}\ l$
Si $A, B \in \mathcal{P},\ A \neq B$, por axioma del plano proyectivo se tiene que existe única $m \in \mathcal{L}$ tal que $A\ \mathcal{I}\ m$ y $B\ \mathcal{I}\ m$, la recta $m \neq l$ ya que los puntos $A \not{\mathcal{I}} l$ y $B \not{\mathcal{I}} l$ luego se cumple.
Axioma dos Sean $P \in \overline{\mathcal{P}}, m \in \overline{\mathcal{L}}, P \not{\mathcal{I}} m$ entonces existe $m \parallel n \wedge P\mathcal{I}n$.
Si $m' = m \cup \{P_m\}$, con $m' \in \mathcal{L}$, luego tenemos la recta $l_{PP_m} \in \mathcal{L}$, claramente tenemos que $l' = l_{PP_m} - \{P_m\} \in \overline{\mathcal{L}}$ luego obtenemos

$$l' \cap m = \emptyset \wedge l' \parallel m$$

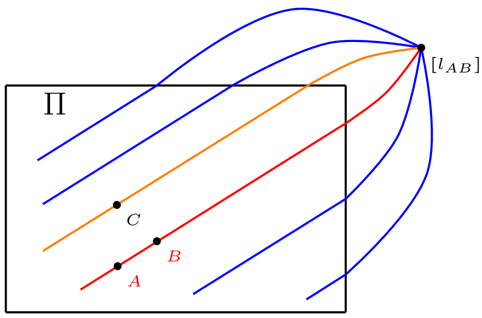
Axioma tres: Existe un triángulo.
En el plano afín Π existe cuadrángulo, los puntos A, B, C, D no son colineales. Si son cero o un punto en la recta l listo.
Si hay dos punto en la recta l, supongamos que son C, D, luego la recta L_{AC} tiene otro punto E, que no pertenece a l, A, B, E no son colineales. toda recta tenia al menos tres puntos, luego ahora tiene al menos dos puntos, por lo tanto

$$\Pi^l \text{ es un plano afín.}$$

■

2.2.2. Plano Afín en el Plano Proyectivo

Dado un plano afín, también se puede construir un plano proyectivo, de modo que el plano afín se inyecta en el proyectivo.



Sea $\Pi = (\mathcal{P},\ \mathcal{L},\ \mathcal{I})$ un plano afín, se construye el plano proyectivo del siguiente modo:

i) **Los Puntos** $\overline{\mathcal{P}}$

Sea $l \in \mathcal{L}$, denotamos por $[l]$ es el haz de rectas, formada por las rectas paralelas a l.

El conjunto de los puntos se definen del siguiente modo:

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{[l] \mid l \in \mathcal{L}\}$$

de otro modo los puntos son, los puntos anteriores unidos con los haces de rectas.

ii) **Las Rectas** $\overline{\mathcal{L}}$

Dado $m \in \mathcal{L}$, tenemos que

$$\overline{m} = m \cup \{[m]\}$$

y la recta $l_\infty = \{[l] \mid l \in \mathcal{L}\}$.

El conjunto de las rectas esta dado por:

$$\overline{\mathcal{L}} = \{\overline{m} \mid m \in \mathcal{L}\} \cup \{l_\infty\}$$

es decir, las rectas, son las rectas del plano afín unido un punto que corresponde al haz de rectas paralelas a ella o bien la recta que contiene todos los haces de rectas paralelas.

iii) **La relación de Incidencia** $\overline{\mathcal{I}}$

Sea $P \in \overline{\mathcal{P}},\ l \in \overline{\mathcal{L}}$.

Se dice que P incide en l, lo que denotamos por $P\overline{\mathcal{I}}l$, si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface:

a) $P \in \mathcal{P}\ \wedge\ l \in \mathcal{L}\ \wedge\ P\mathcal{I}l$

b) $P = [m]\ \wedge\ l \in \mathcal{L}\ \wedge\ m \parallel l$

c) $P = [m]\ \wedge\ l = l_\infty$

Observación: Veamos primero un ejemplo antes de probar que es un plano proyectivo.

Ejemplo 2.21 *Sea $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. el plano afín minimal.*
Construir el plano proyectivo, donde esta inyectado el plano afín

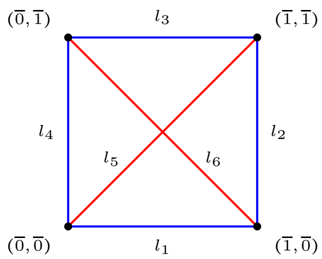
Solución: Las ecuaciones de las rectas de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ son

$$\begin{array}{ll} l_1 : y = 0 & l_4 : x = 0 \\ l_2 : x = 1 & l_5 : y = x \\ l_3 : y = 1 & l_6 : y = x + 1 \end{array}$$

y los haces de rectas paralelas son:

$$[l_1] = \{l_1, l_3\}, \; [l_2] = \{l_2, l_4\}, \; [l_5] = \{l_5, l_6\}.$$

representado por



En consecuencia, el plano proyectivo esta dado por

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} & = & \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1}), (\overline{1},\overline{0}), (\overline{1},\overline{1}), [l_1], [l_2], [l_5]\} \\ \mathcal{L} & = & \{\overline{l}_1, \overline{l}_2, \overline{l}_3, \overline{l}_4, \overline{l}_5, \overline{l}_6, l_\infty\} \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \overline{l}_1 & = & \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{1},\overline{0}), [l_1]\} \\ \overline{l}_2 & = & \{(\overline{1},\overline{0}), (\overline{1},\overline{1}), [l_2]\} \\ \overline{l}_3 & = & \{(\overline{0},\overline{1}), (\overline{1},\overline{1}), [l_1]\} \\ \overline{l}_4 & = & \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1}), [l_2]\} \\ \overline{l}_5 & = & \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{1},\overline{1}), [l_5]\} \\ \overline{l}_6 & = & \{(\overline{0},\overline{1}), (\overline{1},\overline{0}), [l_5]\} \\ l_\infty & = & \{[l_1], [l_2], [l_5]\} \end{array}$$

□

Teorema 2.22 *Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \; \mathcal{L}, \; \mathcal{I})$ el plano afín, tal que se definen el conjunto de los puntos por:*

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{[l] \mid l \in \mathcal{L}\}$$

y el conjunto de las rectas esta dado por:

$$\overline{\mathcal{L}} = \{\overline{m} \mid m \in \mathcal{L}\} \cup \{l_\infty\}$$

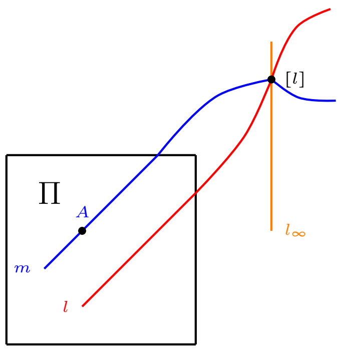
y la relación de incidencia es la definida anteriormente entonces $\overline{\Pi} = (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{I}})$ *es un plano proyectivo*

Demostración: Veamos los axiomas de plano proyectivos.
Axioma uno Si $A, B \in \overline{\mathcal{P}}, A \neq B$ entonces $\exists!\ l \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que $A\ \overline{\mathcal{I}}\ l$ y $B\ \overline{\mathcal{I}}\ l$

Caso uno Si $A, B \in \mathcal{P},\ A \neq B$, por axioma del plano afín se tiene que $\exists!\ l \in \mathcal{L}$ tal que $A\ \mathcal{I}\ l$ y $B\ \mathcal{I}\ l$, luego se cumple.

Caso dos Si $A \in \mathcal{P}\ \wedge\ [l] \in \overline{\mathcal{P}}$.

Sea $l \in [l]$ y $A \not\mathcal{I} l$ entonces, por axioma dos del plano afín tenemos que $\exists! m \in \mathcal{L}$ tal que $A\ \mathcal{I}\ m$ y $m \parallel l$ por lo tanto $m \in [l]$ entonces $[l]\ \overline{\mathcal{I}}\ \overline{m}$ y $A\ \overline{\mathcal{I}}\ \overline{m}$.

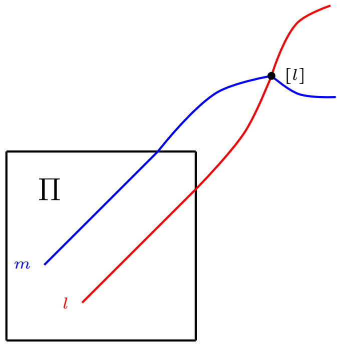


Caso tres $[l], [m] \in \overline{\mathcal{P}}$, por definición $\exists!\ l_\infty \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que $[l]\ \overline{\mathcal{I}}\ l_\infty$ y $[m]\ \overline{\mathcal{I}}\ l_\infty$

Axioma dos Sean $l, m \in \overline{\mathcal{L}}, l \neq m$ entonces $l \cap m \neq \varnothing$.

Caso uno: Si $l = l' \cup \{[l']\}$ y $m = m' \cup \{[m']\}$, con $l',\ m' \in \mathcal{L}$.

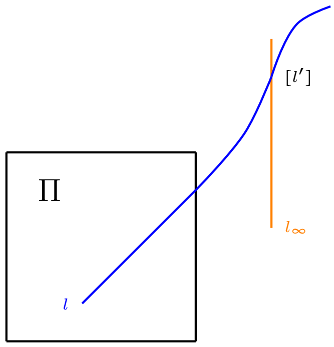
Si $l' \parallel m'$, luego tenemos que $[l'] = [m']$, por lo tanto $l \cap m \neq \varnothing$. En el otro caso, suponemos que l' no es paralela a m‘, por ello tenemos que $l' \cap m' \neq \varnothing$ y de lo cual se obtiene $l \cap m \neq \varnothing$.



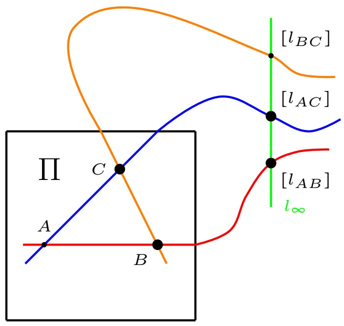
Caso dos: Sea $l = l' \cup \{[l']\}$ y $m = l_\infty$

Por definición tenemos que $[l']\overline{\mathcal{I}}l_\infty \;\wedge\; [l']\overline{\mathcal{I}}l$, de lo cual se obtiene

$$l \cap l_\infty \neq \varnothing$$



Axioma tres: Existe un cuadrángulo.



En el plano afín Π existe tres puntos A, B, C no colineales, consideremos los puntos $C, B, [l_{AC}]$, $[l_{AB}]$ ellos forman un cuadrángulo. Note que las rectas l_{AC} y la recta l_{AB} no son paralelas, luego a la única recta que pertenecen es l_∞ y las otras rectas son $\overline{l_{CB}}, \overline{l_{AC}}$ y $\overline{l_{AB}}$, todas distintas y no paralelas, por lo tanto

$$\overline{\Pi} \text{ es un plano proyectivo.}$$

Por la construcción del Plano Proyectivo obtenemos el sumergimiento del Plano Afín □

Observación: De esta manera entendemos que $\Pi \subset \overline{\Pi}$.

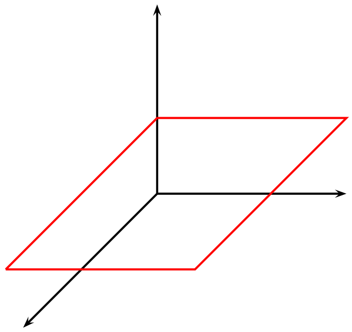
2.2.3. Plano Afín Vectorial y el Plano Proyectivo Vectorial

Ahora veamos el caso particular, del Plano Afín Vectorial y el Plano Proyectivo Vectorial.
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y Π el plano afín asociado al espacio vectorial $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, donde los puntos son vectores, las rectas son rectas afines y la incidencia es la pertenecía.
Y el plano proyectivo esta dado por $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3) = \overline{\Pi} = (\overline{\mathcal{P}},\ \overline{\mathcal{L}},\ \mathcal{I})$, donde

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}} &= \{\mathcal{U} \leq \mathbb{K}^3 \mid dim(\mathcal{U}) = 1\} \\ \overline{\mathcal{L}} &= \{\mathcal{W} \leq \mathbb{K}^3 \mid dim(\mathcal{W}) = 2\} \end{aligned}$$

y la incidencia es la contención.
Sea $\pi_0 : z = 0$ el plano XY y $\pi_1 : z = 1$, consideremos los siguientes conjuntos de punto y recta.
Para la construcción del plano proyectivo, en el plano afín, tenemos que agregar puntos, para ello a cada haz de rectas afines, escogemos como representante la recta vectorial, mirada en el plano π_0, de esta manera, el nuevo conjunto corresponde a los puntos en π_1 unido a las rectas vectoriales en el plano π_0.

$$\begin{array}{cccc} f: & \overline{\mathbb{K}^2} & \to & \mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3) \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & <(x,y,1)> \\ & [<(x,y)>] & \rightsquigarrow & <(x,y,0)> \end{array}$$



Notemos que la intersección de una recta vectorial con π_1 es vacío, cuando la recta esta contenida en el plano XY o en caso contrario es un punto.

$$\mathcal{P}' = \{l \cap \pi_1 \mid l \in \mathcal{P} \wedge l \cap \pi_0 \neq l\}.$$

De esta manera tenemos la correspondencia entre puntos afines y proyectivos.
Ahora veamos las rectas proyectiva. A cada recta del plano afín $l :< (x,y) > +(a,b)$, mirada en π_1 corresponde a $l' :< (x,y,0) > +(a,b,1)$ agregamos la correspondiente recta vectorial en π_0

$$l'' :< (x,y,0) > +(a,b,1) \cup \{< (x,y,0) >\} \leftrightarrow < (x,y,0),(a,b,1) >$$

y el conjunto de todos los recta vectoriales en π_0.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{L}' & \to & \overline{\mathcal{L}} \\ & <(x,y)> +(a,b) & \rightsquigarrow & <(x,y,0),(a,b,1)> \\ & l_\infty & \rightsquigarrow & \pi_0 \end{array}$$

La intersección de una plano vectorial con π_1 es vacío, cuando la plano es el plano π_0 o en caso contrario es una recta

$$\mathcal{L}' = \{\mathcal{U} \cap \pi_1 \mid \mathcal{U} \in \mathcal{L} \wedge \mathcal{U} \neq \pi_0\}.$$

La incidencia esta definida por la pertenecía

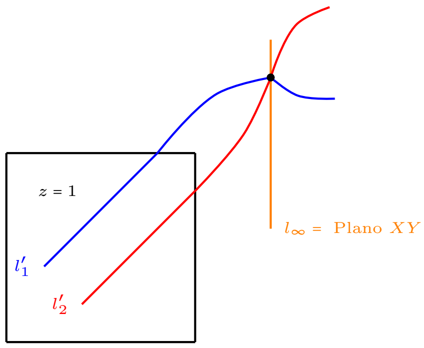
$$A \in \mathcal{P}',\ m \in \mathcal{L}' \text{ entonces } A \in m.$$

De esta manera tenemos $\Pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ es un plano afín, y existe una correspondencia biunívoca con el plano afín vectorial Π.

Ejemplo 2.23 *En plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean las rectas*

$$l_1 : 2x + 3y + 4z = 0 \quad y \quad l_2 : 4x + 6y + 9z = 0.$$

i) Comprobar que tiene un punto en común.
ii) Al mirar las rectas en el Plano Afín, son paralelas



La intersección de ellas corresponde al sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+3y+4z & = & 0 \\ 4x+6y+9z & = & 0 \end{array}\right|$$

Notemos que $l_1 \cap l_2$ es un punto en el plano proyectivo $< (-3,2,0) >$, contenido en el plano π_0. En el plano afín, tenemos que realizar la intersección con el plano $\pi_1 : z = 1$ y corresponde a dos rectas paralelas, y esta dada por

$$\begin{array}{rcrcl} l_1 \cap \pi_1 = & l_1' : & 2x+3y+4 & = & 0 \\ l_2 \cap \pi_1 = & l_2' : & 4x+6y+9 & = & 0 \end{array}$$

De lo cual tenemos que $l_1 \parallel l_2$.

Ejemplo 2.24 *Sean* $\Pi = \mathbb{R}^2$, $A = (2,3)$ *y* $B = (-2,2)$.
Encuentre la ecuación de la recta $\overline{l_{AB}}$ *en el plano proyectivo.*

Solución: Veamos dos posibles desarrollos para determinar la ecuación.
Solución uno:

$$\begin{array}{rcl} l_{AB} & = & \langle A-B\rangle + \langle A\rangle \\ l_{AB} & = & \langle (4,1)\rangle + (2,3) \end{array}$$

Entonces:

$$(x,y) = \alpha(4,1) + (2,3)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 4\alpha+2 \\ y & = & \alpha+3 \end{array}\right|$$

En donde se obtiene que la recta $l_{AB} : x-4y = -10$, del cual se obtiene la recta $\overline{l_{AB}} : x-4y+10z = 0$
Solución dos:

$$\begin{array}{rcl} l_{AB} & \rightsquigarrow & \overline{l_{AB}} \\ (2,3) & \rightsquigarrow & \langle (2,3,1)\rangle \\ (-2,2) & \rightsquigarrow & \langle (-2,2,1)\rangle \end{array}$$

En donde $\overline{l_{AB}} = \langle(2,3,1),(-2,2,1)\rangle$ por lo tanto

$$(x,y,z) = \alpha(2,3,1) + \beta(-2,2,1),$$

luego los vectores son linealmente dependiente

$$0 = \begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ y & 3 & 2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - 4y + 10z$$

Por lo tanto

$$\overline{l_{AB}} : x - 4y + 10z = 0$$

□

2.3. Plano Proyectivo Dual

El principio de la dualidad, es que todo propiedad sobre puntos y rectas es una propiedad sobre rectas y puntos.
Sea $\Pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ un plano proyectivo y se define Π^* el plano dual, donde los puntos son rectas y las rectas son puntos. De otro modo tenemos la estructura de incidencia dada por $\Pi^* = (\mathcal{P}^*,\mathcal{L}^*,\mathcal{I}^*)$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^* & = & \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^* & = & \mathcal{P} \\ \mathcal{I}^* : l\ \mathcal{I}^*\ P & \Leftrightarrow & P\ \mathcal{I}\ l \end{array}$$

Teorema 2.25 *Sea* $\Pi = (\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ *un plano proyectivo.*
El plano dual $\Pi^* = (\mathcal{P}^*,\ \mathcal{L}^*,\ \mathcal{I}^*)$ *es un plano proyectivo, llamado plano proyectivo dual.*

Demostración: Verifiquemos las axiomas del plano proyectivo.
Axioma uno: Por dos puntos distintos pasa una única recta.
Sea $l,m \in \mathcal{P}^*$ luego $l,m \in \mathcal{L}$, entonces por axioma dos:

$$\begin{array}{ccc} l \cap m & \neq & \emptyset \\ l \cap m & = & \{P\} \end{array}$$

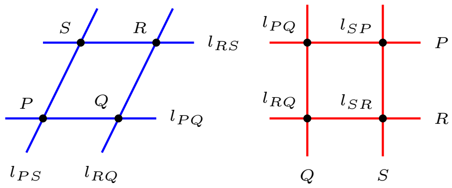
Luego $P\mathcal{I}l \wedge P\mathcal{I}m$ entonces $l\mathcal{I}^*P \wedge m\mathcal{I}^*P$, de este modo tenemos

$$(\exists! P \in \mathcal{L}^*)(l\mathcal{I}^*P \wedge m\mathcal{I}^*P)$$

Axioma dos: Sea $P,Q \in \mathcal{L}^*$ tal que $P \neq Q$, entonces $P \cap Q \neq \emptyset$.
Si $P,Q \in \mathcal{L}^*$ entonces $P,Q \in \mathcal{P}$ luego existe única $l \in \mathcal{L}$ tal que $P\mathcal{I}l \wedge Q\mathcal{I}l)$, es decir, $(l\ \mathcal{I}^*\mathcal{P} \wedge l\ \mathcal{I}^*\ Q)$, por lo tanto

$$(\exists! P \in \mathcal{L}^*)(l\mathcal{I}^*P \wedge m\mathcal{I}^*Q)$$

Axioma tres: Existe un cuadrángulo, en Π existe un cuadrángulo.



Por lo tanto

$$\Pi^* \text{ es un plano proyectivo}$$

■

Observación: Recordemos el propiedad
"En el plano proyectivo, todas las rectas tienen el mismo número de puntos."
por dualidad ahora tenemos
"En el plano proyectivo, por todos los puntos pasan el mismo número de rectas."

2.4. Colineaciones en el Plano Proyectivo

Definición 2.26 *Sean Π plano proyectivo y f una función biyectiva. Se dice que f es **colineación** de Π, si se cumple:*

i) $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ *y* $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ *son biyectiva.*

ii) Preserva incidencia:

$$\textit{Para todo } P, l \textit{ se tiene que si } P\mathcal{I}l \textit{ entonces } f(P)\mathcal{I}f(l).$$

Observación: Análogamente tenemos que

$$Aut(\Pi) = \{f \mid f \text{ es una colineación de } \Pi\}$$

Propiedad 2.27 *Sea Π un plano proyectivo.*
$(Aut(\Pi), \circ)$ *es un grupo, llamado grupo de las colineaciones del plano proyectivo Π.*

Extensión de transformaciones lineales a $\mathbb{P}_2(V)$. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión tres.
Sea $\mathbb{P}_2(V)$ el plano proyectivo construido a partir de V. Si $f \in \mathrm{GL}(V)$, entonces existe una función $\overline{f}$ definida por

$$\begin{array}{rrcl} \overline{f}: & \mathbb{P}_2(V) & \rightarrow & \mathbb{P}_2(V) \\ & \langle \overrightarrow{v} \rangle & \rightsquigarrow & \langle f(\overrightarrow{v}) \rangle \\ & \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle & \rightsquigarrow & \langle f(\overrightarrow{v}), f(\overrightarrow{w}) \rangle \end{array}$$

Propiedad 2.28 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión tres, $\mathbb{P}_2(V)$ el plano proyectivo y $f \in GL(V)$ entonces $\overline{f} \in Aut(\mathbb{P}_2(V))$.*

Ejemplo 2.29 *Determine, si es que existen, los puntos fijos de* $\overline{f}$

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x+y, x-z, z) \end{array}$$

Solución: Sea B base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde el $\det([f]_B) \neq 0$, por lo tanto $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$, entonces existe $\overline{f} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3))$.

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}(\langle (x,y,z) \rangle) & = & \langle (x,y,z) \rangle \\ \langle f(x,y,z) \rangle & = & \langle (x,y,z) \rangle \\ \langle (x+y, x-z, z) \rangle & = & \langle (x,y,z) \rangle \\ (x+y, x-z, z) & = & \lambda(x,y,z) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & \lambda x \\ x-z & = & \lambda y \\ z & = & \lambda z \end{array}\right| \text{ o bien } \left.\begin{array}{rcl} (1-\lambda)x+y & = & 0 \\ x-\lambda y - z & = & 0 \\ (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{pmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en donde:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

del cual se obtiene

$$(1-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 1) = 0$$

entonces

$$\lambda = 1 \quad \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Para cada valor $\overline{f}$ tiene un punto fijo, por ejemplo para $\lambda = 1$ el punto fijo es $\langle (1,0,1) \rangle$, los otros de deja para ejercicio del lector.
Por lo tanto, $\overline{f}$ tiene tres puntos fijos. □

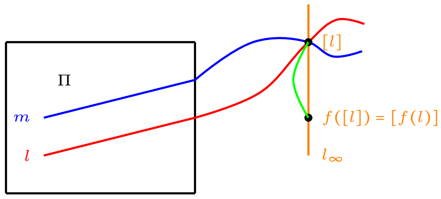
Observación: Si $f \in \mathrm{GL}(V)$, entonces $\overline{f}$ tiene a lo más tres puntos fijos en el plano proyectivo.

Ejercicio 2.30 *Determine, si es que existen, los puntos fijos de* $\overline{f}$*, para*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (x-y, x+y, x-z+y) \end{array}$$

2.5. Colineaciones en el Sumergimiento

Teorema 2.31 *Sean* Π *un plano afín,* $f \in Aut(\Pi)$ *y* $\overline{\Pi}$ *el plano proyectivo en el cual se sumerge* Π*, entonces existe única* $\overline{f} \in Aut(\overline{\Pi})$ *tal que* $\overline{f}|_{\Pi} = f$*.*



Demostración: Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ plano afín y $\overline{\Pi} = (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{I}})$ el correspondiente plano proyectivo y $f \in \mathrm{Aut}(\Pi)$.
Sean $l, m \in \mathcal{L}$, sabemos que si $m \parallel l$, entonces $f(m) \parallel f(l)$. Por lo anterior tenemos que está bien definida

$$\overline{f}[l] = [f(l)]$$

Luego definimos $\overline{f}(P) = f(P)$, con $P \in \mathcal{P}$ y con ello tenemos

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & \overline{\mathcal{P}} & \to & \overline{\mathcal{P}} \\ & \overline{A} & \rightsquigarrow & \overline{f}(\overline{A}) \end{array}$$

en donde

$$\overline{f}(\overline{A}) = \begin{cases} f(A) & A \in \mathcal{P} \\ [f(l)] & A = [l] \end{cases}$$

Veamos en las rectas, sea $l \in \mathcal{L}$, luego tenemos que

$$\overline{f}(\overline{l}) = \{\overline{f}(\overline{P}) \mid \overline{P \mathcal{I} l}\}$$

de donde obtenemos

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & \overline{\mathcal{L}} & \to & \overline{\mathcal{L}} \\ & \overline{l} & \rightsquigarrow & \overline{f}(\overline{l}) \end{array}$$

Ambas son biyectivas y respetan incidencia. ■

Teorema 2.32 *Sea* $\mathcal{A}$ *un plano afín, Entonces existe un único plano proyectivo* Π *tal que* $\mathcal{A}$ *es isomorfo a* Π^l *para alguna recta* $l \in \Pi$*.*

Demostración: Por la sección anteriores tenemos la constricción del plano proyectivo y al considerar la recta $l = l_\infty$ obtenemos lo pedido. ■

Propiedad 2.33 *Dos planos* Π^l *y* Π'^m *son isomorfos si y sólo si existe un isomorfismo entre los planos proyectivos* Π *y* Π'*, de modo que envía* l *en* m*.*

Demostración: Sea $\theta : \Pi^l \to \Pi'^m$ un isomorfismo de planos afines.
Construimos la $\psi : \Pi \to \Pi'$, del siguiente modo.
Sea $P \in \mathcal{P}$, si $P \not\mathcal{I}\ l$, $\psi(P) = \theta(P)$, en caso contrario escogemos otra recta h tal que $P\mathcal{I}h$, notemos que todas las recta que inciden en P tiene un único punto en común, $\psi(P) = \theta(h) \cap m$. con ello esta bien definida en los puntos y es biyectiva.
Sea $h \in \mathcal{L}$, luego $\psi(h) = \theta(h)$ para todo $h \neq l$, y en el otro caso $\psi(l) = m$.
Corresponde a una isomorfismo, que preserva incidencia por construcción.
Inversamente supongamos que $\psi : \Pi \to \Pi'$ es un isomorfismo de plano proyectivo. tal que $\psi(l) = m$.
Claramente la restricción es una función biyectiva entre los puntos y las rectas de cada uno de los planos afines.
La función ψ preserva incidencia, luego la restricción también, por ultimo dada dos rectas paralelas $h, k \in \Pi^l$, significa que el punto de intersección pertenece a l, por ello, el punto de intersección $\psi(h), \psi(k)$ pertenece a m y por ende son paralelas en Π'^m.

■

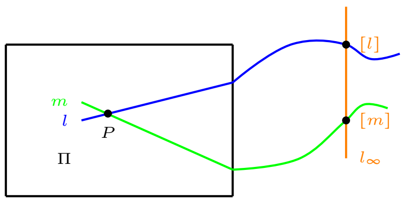
Observación: Sabemos que las dilataciones un plano afín son de dos tipos homotecia y traslaciones, aplicando el teorema anterior veamos como se extiende estas dilataciones.

Ejemplo 2.34 *Sea $\overline{\Pi}$ el plano proyectivo en el que esta sumergido Π plano afín y f una homotecia en Π.*
Determinar los puntos fijos y las rectas fijas de $\overline{f}$.

Solución: Sea P el punto fijo por la homotecia f, además para todo $l \in \mathcal{L}$ entonces $f(l) \parallel l$, de lo cual se obtiene que

$$f[l] = [f(l)] = [l]$$

Luego todos los haces de rectas están fijas por $\overline{f}$. Es decir, $\overline{f}$ fija P y todas las haces de rectas paralelas $[l]$. Así tenemos que $\overline{f}(l_\infty) = l_\infty$.
Finalmente, sea $l \in \mathcal{L}$, tal que $P\ \mathcal{I}\ l$, luego $P\ \mathcal{I}\ f(l)$ y $f(l) \parallel l$, por axioma del plano afín $f(l) = l$.
De este modo tenemos que $\overline{f}$ fija l_∞ y toda recta $l \in \overline{\mathcal{L}}$ tal que $P\ \mathcal{I}\ l$.

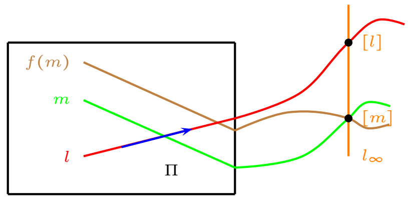


□

Ejemplo 2.35 *Sea $\overline{\Pi}$ el plano proyectivo en el que esta sumergido Π plano afín y t una traslación en Π.*
Determinar los puntos fijos y rectas fijas de $\overline{t}$.

Solución:
Análogamente a lo anterior, tenemos que:

$$t[l] = [t(l)] = [l]$$



luego los únicos puntos fijos de $\overline{t}$ son los haces de rectas.
Además $\overline{t}$ fija las mismas rectas que fija t incluyendo l_∞.

□

Ejemplo 2.36 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y Π el plano Afín Vectorial $\mathbb{K}^2$ y $\overline{\Pi} = \mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$ el Plano Proyectivo Vectorial donde esta sumergido Π.*
Dada la traslación $t(x) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{w}$ en Π, explicitar $\overline{t}$

Solución: Sea $t(x, y) = (x + a, y + b)$, la traslación dada y definimos

$$\mathcal{L}' = \{U \leq \mathbb{K}^3 \mid dimU = 1 \wedge \Pi_1 \cap U \neq \varnothing\}.$$

Trasladando a Π_1 obtenemos

$$\begin{array}{cccc} \overline{t}: & \mathcal{L}' & \to & \mathcal{L}' \\ & <(x,y,1)> & \rightsquigarrow & <(x+a,y+b,1)> \end{array}$$

Dada la recta que pasa por los puntos $(c, d), (u, v)$, luego la recta que une los puntos en forma vectorial es $l =< c - u, d - v > +(u, v)$, y el correspondiente representante en plano Π_0 es

$$l' =< c - u, d - v, 0) > .$$

De esta manera tenemos que la recta que pasa por $t(c, d), t(u, v)$, esta dada por

$$t(l) =< c - u, d - v > +(u + a, v + b),$$

la representante en plano Π_0 es $l' =< c - u, d - v, 0) >$

$$\begin{array}{cccc} \overline{t}: & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ & <(x,y,1)> & \rightsquigarrow & <(x+a,y+b,1)> \\ & <(x,y,0)> & \rightsquigarrow & <(x,y,0)> \end{array}$$

extendiendo linealmente los elementos de la recta, obtenemos que $\overline{t}(x, y, z) = (\alpha x + az, \beta y + bz, \gamma z)$, que al restringir tenemos que $\overline{t}|_\Pi = t$, luego

$$\overline{t}(x, y, z) = (x + az, y + bz, z)$$

Ejercicio 2.37 *En las condiciones del ejemplo anterior.*
Determinar los puntos y rectas fijas si existen en el plano proyectivo

Ejemplo 2.38 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y Π el plano Afín Vectorial $\mathbb{K}^2$ y $\overline{\Pi} = \mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$ el Plano Proyectivo Vectorial donde esta sumergido Π.*
Dada la homotecia $h(\overrightarrow{x}) = \alpha\overrightarrow{x} + (1-\alpha)\overrightarrow{w}$ en Π, explicitar $\overline{h}$

Solución: Sea $h(x,y) = (\alpha x + (1-\alpha)a, \alpha y + (1-\alpha)b)$, la homotecia dada y definimos

$$\mathcal{L}' = \{U \leq \mathbb{K}^3 \mid dimU = 1 \wedge \Pi_1 \cap U \neq \varnothing\}.$$

Trasladando obtenemos

$$\begin{array}{cccc} \overline{h}: & \mathcal{L}' & \to & \mathcal{L}' \\ & <(x,y,1)> & \rightsquigarrow & <(\alpha x + (1-\alpha)a, \alpha y + (1-\alpha)b, 1)> \end{array}$$

Dada la recta que pasa por los puntos $(c,d),(u,v)$, el representante en el plano Π_0 es

$$l' = < c-u, d-v, 0) > .$$

De esta manera tenemos que, la recta que pasa por $h(c,d), h(u,v)$, esta definida por

$$h(l) = < \alpha(c-u), \alpha(d-v) > + h(u,v),$$

el representante en el plano Π_0 es $l' = < \alpha(c-u), \alpha(d-v), 0) >$

$$\begin{array}{cccc} \overline{t}: & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} \\ & <(x,y,1)> & \rightsquigarrow & <(\alpha x + (1-\alpha)a, \alpha y + (1-\alpha)b, 1)> \\ & <(x,y,0)> & \rightsquigarrow & <(\alpha x, \alpha y, 0)> \end{array}$$

de lo anterior y teniendo presente que debe cumplir que al restringir $\overline{t}|_{\Pi} = t$, se obtiene

$$\overline{t}(x,y,z) = (\alpha x + (1-\alpha)az, \alpha y + (1-\alpha)bz, z)$$

□

Ejercicio 2.39 *En las condiciones del ejemplo anterior.*
Determinar los puntos y rectas fijas si existen en el plano proyectivo

2.6. Problemas Misceláneos

Ejemplo 2.40 *En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$. Hallar el punto de intersección de la recta m que pasa por los puntos $<(3,1,2)$ y $<(1,5,-3)>$ y la recta l de ecuación $x-3y-4z=0$.*

Solución: Veamos la ecuación de la recta proyectiva que pasa por los puntos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -13x + 11y + 14z = 0.$$

Despejando $x = 3y + 4z$ y reemplazamos

$$\begin{aligned} -13(3y+4z) + 11y + 14z &= 0 \\ -14y - 19z &= 0 \end{aligned}$$

de este modo tenemos que una solución particular la obtenemos de $y = 19,\ z = -14$ y con ella $x = 1$.

$$P =< (1, 19, -14) >$$

□

Ejemplo 2.41 *Sea $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2(\delta)$ con $\delta^2 = \delta + 1$ y el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_4^3)$. Dada las rectas $l_1 = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$ y l_2 la recta de ecuación $\delta x + y + \delta z = 0$. Calcule $l_1 \cap l_2$*

Solución: Veamos la ecuación de la recta proyectiva que pasa por los puntos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z = 0$$

Despejando $y = -\delta x - \delta z$ y reemplazamos

$$\begin{aligned} x + \delta x + \delta z + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

de este modo tenemos que una solución particular la obtenemos de $x = 1,\ z = -1$ y con ella $y = 0$.

$$P =< (1, 0, 1) >$$

□

Ejemplo 2.42 *Sea $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2(\delta)$ con $\delta^2 = \delta + 1$ y el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_4^3)$. Dada las rectas $l_1 = \langle (1,0,1), (0,1,\delta) \rangle$ y l_2 la recta de ecuación $\delta x + y + z = 0$. Calcule $l_1 \cap l_2$*

Solución: Veamos la ecuación de la recta proyectiva que pasa por los puntos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \delta \end{vmatrix} = x + \delta y + z = 0$$

Despejando $z = \delta x + y$ y reemplazamos

$$\begin{aligned} x + \delta y + \delta x + y &= 0 \\ (1+\delta)x + (1+\delta)y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

de este modo tenemos que una solución particular la obtenemos de $x = 1$, $y = 1$ y con ella $z = 1 + \delta$.

$$P =< (1, 1, 1 + \delta) >$$

□

Ejemplo 2.43 *En el plano proyectivo* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_5^3)$*, sean los puntos*

$$K =< (2, 3, 2) >, L =< (3, 1, 1) >, R =< (2, 1, 3) >, P =< (2, 3, 0) >, Y =< (1, 1, 1) > .$$

1. *Determine si el punto* L *incide en la recta* l_{KR}*.*

2. *Determine si el punto* $Z =< (2, 0, 1) >$ *incide en las rectas* l_{KL} *y* l_{PY}*.*

Solución: (a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 7 = 15 = 0 \in \mathbb{Z}_5$$

Luego L incide en la recta l_{KR}.

Solución: (b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 = 0$$

incide en ambas rectas. □

Ejemplo 2.44 *Sean* $A = (1, 1 - i)$*,* $B = (1 + i, 1)$ *puntos en el plano afín vectorial* $\mathbb{C}^2$ *y* $\overline{A}, \overline{B}$ *los puntos que se obtiene al sumergir* $\mathbb{C}^2$ *en el plano proyecto* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$*.*
Determinar la ecuación de la recta que une $\overline{A}$ *y* $\overline{B}$*.*

Solución: la ecuación de la recta que pasa por A, B, la pendiente es $m = \frac{1-(1-i)}{1+i-1} = 1$, reemplazando el punto obtenemos $y = x - i$.
Por ello la ecuación en el plano proyectivo es

$$x - y - iz = 0$$

y pasa por los puntos proyectivos $\overline{A} =< (1, 1 - i, 1) >$, $\overline{B} =< (1 + i, 1, 1) >$. □

Ejemplo 2.45 *En el plano proyectivo* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$*, sea la recta de ecuación* $l : 3x - y + z = 0$ *y consideremos el plano afín* $\Pi^l = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \smallsetminus l$*.*
Hallar la ecuación de la recta afín que pasa por los puntos $< (1, 2, -3) >$ *y* $< (2, 1, 2) >$*, respecto base canónica.*

Solución: Consideremos $l' : 3x - y + z = 1$ recta proyectiva trasladada, los puntos de la recta vectorial que pertenecen al plano son:

$$\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right);\ \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

Los puntos del plano son:

$$\left(-\frac{1}{2}, -1\right);\ \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

Y la ecuación tiene pendiente $m = \frac{1/7+1}{2/7+1/2} = \frac{16}{11}$ y

$$y = \frac{16}{11}x - \frac{3}{11}$$

□

Ejemplo 2.46 *En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea la recta de ecuación $k : x - 3y + 2z = 0$ y consideremos el plano afín $\Pi^k = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \smallsetminus k$.*
Hallar la ecuación de la recta afín que pasa por los puntos $<(1, 2, -3)>$ y $<(2, 1, 2)>$, respecto base canónica.

Solución: Consideremos $k' : x - 3y + 2z = 1$ recta proyectiva trasladada, los puntos de la recta vectorial que pertenecen al plano son:

$$\left(-\frac{1}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{3}{11}\right);\ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Los puntos del plano son:

$$\left(-\frac{1}{11}, -\frac{2}{11}\right);\ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Y la ecuación tiene pendiente $m = \frac{1/3+2/11}{2/3+1/11} = \frac{17}{25}$ y

$$y = \frac{17}{25}x + \frac{3}{25}$$

□

Ejemplo 2.47 *En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea la recta de ecuación $l : x - 3y + z = 0$ y el plano afín $\Pi^l = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \smallsetminus l$.*
Hallar la ecuación de la recta afín, en el plano afín Π^l, que pasa por los puntos $<(2, 2, 3)>$ y $<(3, 1, 2)>$, respecto base canónica.

Solución: (a) Consideremos $l' : x - 3y + z = 1$ recta proyectiva trasladada, los puntos de la recta vectorial que pertenecen al plano son:

$$(-2, -2, -3);\ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

Los puntos del plano son:

$$(-2,-2);\ \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Y la ecuación tiene pendiente $m = \frac{1/2+2}{3/2+2} = \frac{5}{7}$ y

$$y = \frac{5}{7}x - \frac{4}{7} \quad \text{o bien} \quad 5x - 7y = 4.$$

Solución: (b) Consideremos $l' : x - 3y + z = 1$ recta proyectiva trasladada,
El plano que contiene a las rectas vectoriales es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x + 5y - 4z$$

En el plano afín l' corresponde a

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 3y + z & = & 1 \\ x + 5y - 4z & = & 0 \end{array}\right|$$

O en el plano $\mathbb{R}^2$ esta dada por

$$x + 5y - 4(1 - x + 3y) = 0 \Longleftrightarrow 5x - 7y = 4.$$

□

Ejemplo 2.48 *En el plano proyectivo* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$*, sea la recta de ecuación* $m : x - 3y + z = 0$ *y el plano afín* $\Pi^m = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \setminus m$*.*

1. *Determinar la ecuación de la recta* l *que pasa los puntos* $< (2,2,3) >$ *y* $< (3,1,2) >$ *en* Π*.*
2. *Determinar la ecuación de la recta* l_1*, sumersión de* l*, en el modelo del plano afín* $\Pi^m = \mathbb{R}^2$*.*
3. *Dada* $k : 3x - y + 2z = 0$ *y* k_1 *sumersión de* k *en plano afín, determine si* $l_1 \parallel k_1$*.*

Solución: (a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A < (2,2,3) >$ y $B < (3,1,2) >$ en Π. Corresponde al plano que contiene a las rectas vectoriales, es decir,

$$(x,y,z) \in < (2,2,3),(3,1,2) > \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x + 5y - 4z = 0$$

La ecuación es

$$x + 5y - 4z = 0$$

(b) En el plano afín, l_1 corresponde a

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 3y + z & = & 1 \\ x + 5y - 4z & = & 0 \end{array}\right|$$

luego, en el plano $\mathbb{R}^2$ esta dada por

$$x + 5y - 4(1 - x + 3y) = 0 \Longleftrightarrow 5x - 7y = 4.$$

La ecuación en el plano afín es $5x - 7y = 4$ y su pendiente es $5/7$.
(c) Para la segunda tenemos

$$k : 3x - y + 2(1 - x + 3y) = 0 \Longleftrightarrow x + 5y = -2.$$

y su pendiente es $-1/5 \neq 5/7$, luego no son paralelas. □

Ejemplo 2.49 *En el plano proyectivo* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$ *y sea* $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ *tal que*

$$f(x, y, z) = ((2 - i)\overline{x} + \overline{y}, \overline{y} + \overline{z}, i \cdot \overline{z}).$$

1. *Demostrar* f *es semilineal biyectiva*
2. *Demostrar que* f *induce naturalmente* $\overline{f}$ *una colineación de* Π.

Solución: Sea $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, dada por $f(x, y, z) = ((2 - i)\overline{x} + \overline{y}, \overline{y} + \overline{z}, i \cdot \overline{z})$.
(a) Es semilineal ya que:

$$\begin{aligned}
f((x, y, z) + \alpha(a, b, c)) &= f(x + \alpha a, y + \alpha b, z + \alpha c) \\
&= ((2 + i)\overline{x + \alpha a} + \overline{y + \alpha b}, \overline{y + \alpha b} + \overline{z + \alpha c}, i\overline{z + \alpha c}) \\
&= ((2 + i)\overline{x} + \overline{y}, \overline{y} + \overline{z}, i\overline{z}) + \overline{\alpha}((2 + i)\overline{a} + \overline{b}, \overline{b} + \overline{c}, i\overline{c}) \\
&= f(x, y, z) + \overline{\alpha} f(a, b, c).
\end{aligned}$$

La inversa es

$$\begin{aligned}
f((x, y, z)) = (a, b, c) &\Leftrightarrow ((2 + i)\overline{x} + \overline{y}, \overline{y} + \overline{z}, i\overline{z}) = (a, b, c) \\
&\Leftrightarrow ((2 - i)x + y, y + z, -iz) = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \\
&\Leftrightarrow z = i\overline{c},\ y = \overline{b} - i\overline{c},\ x = \frac{2 + i}{5}(\overline{a} - \overline{b} + i\overline{c}) \\
&\Leftrightarrow f^{-1}(a, b, c) = (\frac{2 + i}{5}(\overline{a} - \overline{b} + i\overline{c}), \overline{b} - i\overline{c}, i\overline{c}).
\end{aligned}$$

Luego f es biyectiva y semilineal.
(b) Por lo anterior tenemos que $f(a(x, y, z)) = \overline{a} f(x, y, z)$. Luego esta bien definida a nivel de puntos y biyectiva.

$$\begin{array}{cccc}
f : & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\
& < (x, y, z) > & \rightsquigarrow & < f(x, y, z) >
\end{array}$$

Además tenemos que $f(a(x, y, z) + b(u, v, w)) = \overline{a} f(x, y, z) + \overline{b} f(u, v, w)$, luego esta bien definida y es biyectiva a nivel de recta y también preserva incidencia.

$$\begin{array}{cccc}
f : & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\
& < (x, y, z), (u, v, w) > & \rightsquigarrow & < f(x, y, z), f(u, v, w) >
\end{array}$$

De este modo f es una colineación. □

Ejemplo 2.50 *En el plano proyectivo* $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$ *y*

$$f(< (x,y,z) >) = < (3\overline{x}+\overline{y}, \overline{y}+\overline{z}, \overline{z}) > .$$

Demostrar f *una colineación.*

Solución: (a)
Sea $g : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, dada por $g(x,y) = (3\overline{x}+\overline{y}, \overline{y})$ es semilineal ya que:

$$\begin{aligned} g((x,y)+\alpha(a,b)) &= g(x+\alpha a, y+\alpha b) \\ &= (3\overline{x+\alpha a}+\overline{y+\alpha b}, \overline{y+\alpha b}) \\ &= (3\overline{x}+\overline{y}, \overline{y}) + \overline{\alpha}(3\overline{a}+\overline{b}, \overline{b}) \\ &= g(x,y)+\overline{\alpha} g(a,b). \end{aligned}$$

Luego g es semilineal y es biyectiva ya que su inversa es $g^{-1}(x,y) = (\frac{x-y}{3}, y)$. Luego $k(x,y) = (3\overline{x}+\overline{y}, \overline{y}) + (0,1)$ es una colineación del plano afín vectorial.

$$\widetilde{k}(x,y,1) = (3\overline{x}+\overline{y}, \overline{y}+1, 1)$$

Que induce la colineación en el plano proyectivo

$$f(< (x,y,z) >) = \overline{k}(< (x,y,z) >) = < (3\overline{x}+\overline{y}, \overline{y}+\overline{z}, \overline{z}) > .$$

Solución: (b) Sea $g : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, dada por $g(x,y,z) = (3\overline{x}+\overline{y}, \overline{y}+\overline{z}, \overline{z})$. es semilineal ya que:

$$\begin{aligned} g((x,y,z)+\alpha(a,b,c)) &= g(x+\alpha a, y+\alpha b, z+\alpha c) \\ &= (3\overline{x+\alpha a}+\overline{y+\alpha b}, \overline{y+\alpha b}+\overline{z+\alpha c}, \overline{z+\alpha c}) \\ &= (3\overline{x}+\overline{y}, \overline{y}+\overline{z}, \overline{z}) + \overline{\alpha}(3\overline{a}+\overline{b}, \overline{b}+\overline{c}, \overline{c}) \\ &= g(x,y,z)+\overline{\alpha} g(a,b,c). \end{aligned}$$

La inversa es

$$\begin{array}{ll} g((x,y,z)) = (a,b,c) & (3\overline{x}+\overline{y}, \overline{y}+\overline{z}, \overline{z}) = (a,b,c) \\ & (3x+y, y+z, z) = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \\ & z = \overline{c},\ y = \overline{b}-\overline{c},\ x = \dfrac{1}{3}(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}) \\ & g^{-1}(a,b,c) = (\dfrac{1}{3}(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}), \overline{b}-\overline{c}, \overline{c}). \end{array}$$

Luego g es biyectiva y semilineal.
De este modo tenemos que $g(a(x,y,z)) = \overline{a} g(x,y,z)$. Función bien definida y biyectiva a nivel de puntos

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & < (x,y,z) > & \rightsquigarrow & < g(x,y,z) > \end{array}$$

Por otra parte tenemos que $g(a(x,y,z)+b(u,v,w)) = \overline{a}g(x,y,z)+\overline{b}g(u,v,w)$
Función bien definida y biyectiva a nivel de recta y preserva incidencia

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\ & <(x,y,z),(u,v,w)> & \rightsquigarrow & <g(x,y,z),g(u,v,w)> \end{array}$$

Luego g es una colineación. $\square$

Ejemplo 2.51 *En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ y sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, una transformación lineal biyectiva tal que*

$$f(x,y,z) = (3x, 2x+y+z, 3z).$$

y $\overline{f}$ la colineación inducida por f en plano proyectivo.

1. *Determinar los puntos fijos de $\overline{f}$ en Π.*
2. *Determinar cuatro rectas fijas de $\overline{f}$ en Π.*

Solución: (a) Determinar los puntos fijos de la colineación es equivalente a determinar

$$f(x,y,z) = a(x,y,z)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (3-a)x & = & 0 \\ 2x+(1-a)y+z & = & 0 \\ (3-a)z & = & 0 \end{array}\right|$$

que el sistema tenga solución no trivial significa que

$$\begin{vmatrix} 3-a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & 3-a \end{vmatrix} = (3-a)^2(1-a) = 0$$

Si $\boxed{a=3}$, luego $2x-2y+z=0$, de ello tenemos que

$$(x,y,-2x+2y) = x(1,0,-2)+y(0,1,2)$$

Toda las rectas del plano $<(1,0,-2),(0,1,2))>$ están fijas, ya que

$$f(x,y,2y-2x) = (3x, 2x+y+2y-2x, 6y-6x)) = (3x,3y,6y-6x) = 3(x,y,2y-2x)$$

Para $\boxed{a=1}$,

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x & = & 0 \\ 2x+z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array}\right|$$

tenemos que $x=0=z$, luego la recta es $<(0,1,0)>$.
(b) Algunas rectas proyectivas fijas, planos vectoriales, son:

1. $f(<(1,0,-2),(0,1,2))>) =< 3(1,0,-2),3(0,1,2) >=< (1,0,-2),(0,1,2) >$,
2. $f(<(1,0,-2),(0,1,0))>) =< 3(1,0,-2),(0,1,0) >=< (1,0,-2),(0,1,0) >$,
3. $f(<(0,1,0),(0,1,2))>) =< (0,1,0),3(0,1,2) >=< (0,1,0),(0,1,2) >$,
4. $f(<(1,0,0),(0,1,0))>) =< (3,1,0),(0,1,0) >=< (1,0,0),(0,1,0) >$.

$\square$

Ejemplo 2.52 *En el plano proyectivo* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, *sean la recta de ecuación* $m : x - 3y + 2z = 0$, *los puntos* $A =< (2,1,3) >$, $B =< (3,1,2) >$ *y el plano afín* $\Pi^m = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \smallsetminus m$.

1. *Determinar la ecuación cartesiana de la recta* l_1, *sumersión de* l_{AB}, *en el modelo del plano afín* $\Pi^m = \mathbb{R}^2$.
2. *Dada* $k : 3x - y + 2z = 0$ *y* k_1 *sumersión de* k *en plano afín, determine si* $l_1 \parallel k_1$.

Ejemplo 2.53 *En el plano proyectivo* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}^3)$ *y sea* $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ *tal que*

$$f(x,y,z) = (2\overline{x} + \overline{y}, \overline{y} + i \cdot \overline{z}, \overline{z}).$$

1. *Demostrar* f *es semilineal biyectiva*
2. *Determinar un punto fijo y una recta fija de* $\overline{f}$ *en* Π.

Ejemplo 2.54 *Sean* $\mathbb{K}$ *un cuerpo y los conjuntos de puntos y rectas dada por:*

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{U} \leq \mathbb{K}^3 \mid dim(\mathcal{U}) = 1\}, \quad \mathcal{L} = \{\mathcal{W} \leq \mathbb{K}^3 \mid dim(\mathcal{W}) = 2\}$$

y la incidencia la contención (plano proyectivo vectorial).
Demuestre que $\mathbb{P}_2(\mathbb{K}^3)$ *satisface:*

1. *El segundo axioma de plano proyectivo.*
2. *El tercer axioma de plano proyectivo.*

Solución: El segundo axioma de plano proyectivo.
Si $l \neq m$ entonces $l \cap m \neq \varnothing$
Sean $l = \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \right\rangle$ y $m = \left\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \right\rangle$ con $l \neq m$, entonces $l \subsetneq l + m \subseteq \mathbb{K}^3$

$$\begin{aligned} dim(l+m) &= dim(l) + dim(m) - dim(l \cap m) \\ 3 &= 2 + 2 - dim(l \cap m) \\ dim(l \cap m) &= 1 \end{aligned}$$

En particular $l \cap m \neq \varnothing$.
El tercer axioma de plano proyectivo.

Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{K}^3$. Entonces $\{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ forman un cuadrángulo. Para ello notemos que $e_1, e_2 \notin < e_3, e_1 + e_2 + e_3 >$. Ya que

$$e_1 \neq ae_3 + b(e_1 + e_2 + e_3) \text{ y } e_2 \neq ae_3 + b(e_1 + e_2 + e_3),\ \ a, b \in \mathbb{K}.$$

Del mismo modo $e_1, e_1 + e_2 + e_3 \notin < e_2, e_3 >$. Ya que

$$e_1 \neq ae_2 + be_3 \text{ y } e_1 + e_2 + e_3 \neq ae_2 + be_3,\ \ a, b \in \mathbb{K}.$$

□

Ejemplo 2.55 *Demuestre que todo plano proyectivo tiene al menos 7 rectas.*

Solución: Por axioma tres, sabemos que existen cuatro puntos que denotaremos por A, B, C y D, además por cada par de punto existe un recta que no contiene a los otros

i) $l_{AB} \cap l_{CD} = \{E\}$, entonces $E \,\mathcal{I}\, l_{AB}$ y $E \,\mathcal{I}\, l_{CD}$

ii) $l_{AC} \cap l_{BD} = \{F\}$, entonces $F \,\mathcal{I}\, l_{AC}$ y $F \,\mathcal{I}\, l_{BD}$

iii) $l_{AD} \cap l_{BC} = \{G\}$, entonces $G \,\mathcal{I}\, l_{AD}$ y $G \,\mathcal{I}\, l_{BC}$

Note que, si $E = F,\ E \,\mathcal{I}\, l_{AB};\ E \,\mathcal{I}\, l_{AC}$; lo que $l_{AE} = l_{AB} = l_{AC}$; lo que significa que tres puntos son colineales, lo cual no es posible, luego existe siete puntos. a las anterior seis recta, existe l_{EF} que es distinta a las anteriores. □

Ejemplo 2.56 *Demostrar que en un plano proyectivo todas las rectas tiene la misma cantidad de puntos que inciden en ella.*

Demostración: Dada las rectas l, k distintas y sea P un punto que no inciden en ninguna de ellas, la existencia del cuadrángulo, garantiza la existencia del punto P.
Dado $Q\mathcal{I}l$, luego existe única recta l_{PQ} y la intersección de l_{PQ} con k es un único punto. Inversamente dado R un punto que incide en k, existe la recta l_{PR} y con ella el punto intersección $l_{PR} \cap l$.
Teniendo presente la unicidad de la intersección y que dado dos puntos define una única recta, se tiene que una función es la inversa de la otra.

$$\begin{array}{cccc} f & l & \longleftrightarrow & k \\ & Q & \dashrightarrow & l_{PQ} \cap k \\ & l_{PR} \cap k & \dashleftarrow & R \end{array}$$

De lo anterior tenemos que $\sharp(l) = \sharp(k)$. □

Capítulo 3

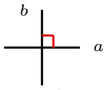
Plano Métrico

En los espacios métricos introduciremos la noción de ortogonalidad entre rectas y analizaremos el quinto axioma de Euclides.

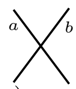
3.1. Introducción

Para enunciar los axiomas del plano métrico, consideremos $\Pi = (\mathcal{P},\ \mathcal{L},\ \mathcal{I},\ \perp)$ donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de puntos, $\mathcal{L}$ es el conjunto de rectas, $\mathcal{I}$ una relación de incidencia entre puntos y rectas y $\perp$ una relación ortogonalidad entre rectas.

$a \perp b$



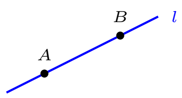
$a \not\perp b$



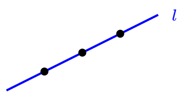
Ahora veamos los tres tipos de axiomas (afines, perpendicular y colineación).

3.1.1. Axiomas Afines:

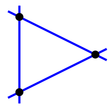
1. Si$A, B \in \mathcal{P}, A \neq B$ entonces $(\exists! l \in \mathcal{L})(A\mathcal{I}l \wedge B\mathcal{I}l)$



2. Cada recta contiene al menos tres puntos.

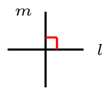


3. Existe un triángulo (tres puntos no colineales).

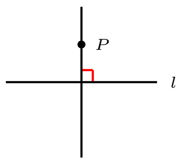


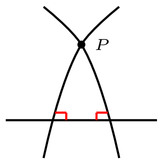
3.1.2. Axiomas de Ortogonalidad

1. Sean $l, m \in \mathcal{L}$ tal que si $l \perp m$, entonces $m \perp l$ ($\perp$ es simétrico)

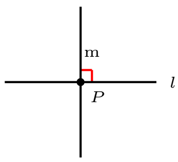


2. Sean $P \in \mathcal{P}, l \in \mathcal{L}$, entonces $\exists m \in \mathcal{L}$ tal que $P\ \mathcal{I}\ m$ y $m \perp l$

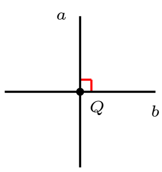




Además si $P\mathcal{I}l$, entonces m es única.



3. Si $l \perp m$, entonces $l \cap m \neq \varnothing$



Definición 3.1 *Sean* $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \perp)$ *plano que cumple los axiomas afines y de ortogonalidad y* f *una función biyectiva, se dice que* f *es una colineación del plano* Π *si y sólo si*

i) $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ *y* $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ *son biyectiva.*

ii) Preserva incidencia:

Para todo P, l *se tiene que si* $P\mathcal{I}l$*, entonces* $f(P)\mathcal{I}f(l)$*.*

iii) Preserva Ortogonalidad.

Para todo l, m *se tiene que si* $l \perp m$*, entonces* $f(l) \perp f(m)$*.*

Notación:

$$\mathrm{Aut}(\Pi) = \{f : \Pi \to \Pi \mid f \text{ es colineación}\}$$

Simetrías en el plano.

Definición 3.2 *Sea $R \in Aut(\Pi)$, se dice que R es una simetría de eje l si y sólo si*

i) $R \neq \mathrm{Id}$

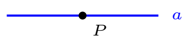
ii) R tiene orden dos

iii) R fija a todos los puntos de una recta l (eje de simetría)

Notación: R_l es la simetría de eje l.

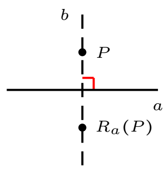
Visualización de una simetría: Sean $P \in \mathcal{P}$ y $a, b \in \mathcal{L}$

1. Si $P\mathcal{I}a$ entonces $R_a(P) = P$



2. Si $P\not{\mathcal{I}}a$, entonces existe $b \perp a$, tal que $P\mathcal{I}b$, pero $\{Q\} = a \cap b$, luego b es única recta tal que $Q\mathcal{I}b$.

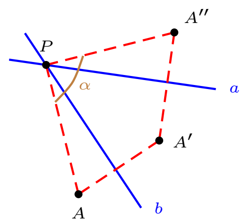
   Pero $R_a(Q) = Q$, $R_a(P)\mathcal{I}R_a(b)$, $Q\mathcal{I}R_a(b)$, y como $R_a(a) \perp R_a(b)$, por ello $R_a(b) = b$, de lo cual tenemos que $R_a(P)\mathcal{I}b$.



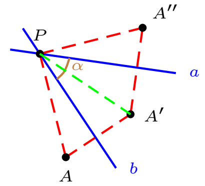
Rotaciones:
Sea $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Pi)$, se dice que σ es una rotación si y sólo si existen R_a, $R_b \in \mathrm{Aut}(\Pi)$, tal que $a \cap b = \{P\}$ y $\sigma = R_a \circ R_b$.

a) P se denomina centro de rotación.

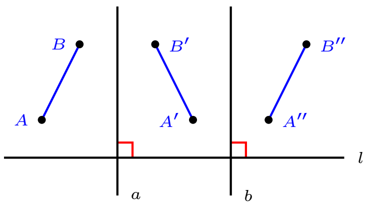
b) El ángulo de rotación viene dado por $\alpha = \sphericalangle APA''$, donde $A'' = \sigma(A)$



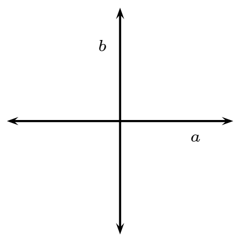
En plano Real el ángulo de una rotación siempre es el doble del ángulo entre las rectas a y b.



Traslaciones:
Sea $t \in \mathrm{Aut}(\Pi)$. Diremos que t es traslación a lo largo de l si y sólo si existe $a, b \in \mathcal{L}$ tales que $t = R_a \circ R_b, a \cap b = \varnothing$ y $a \perp l \wedge b \perp l$ (R_a, R_b simetría).



Simetría Puntual Sea $H_P \in \mathrm{Aut}(\Pi)$. Diremos que H_P es una simetría Puntual si y sólo si existen $a, b \in \mathcal{L}$ tales que $H_P = R_a \circ R_b$, $a \cap b = \{P\}$ y $a \perp b$



3.1.3. Axiomas de Colineaciones:

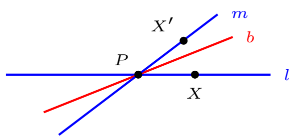
1. **Simetrías**

   a) Todas recta está asociada a una única simetría.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \to & \mathrm{Aut}(\Pi) \\ a & \to & R_a \end{array}$$

   b) El grupo de las colineaciones esta generado por el conjunto de las simetrías del plano afín.

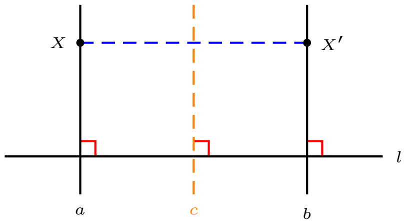
2. **Rotación:** Sea σ una rotación tal que $\sigma(P) = P$ y $\sigma(l) = m$, entonces existe $b \in \mathcal{L}$ tal que $P \mathcal{I} b$ y $(\forall X \mathcal{I} l)(R_b(X) = \sigma(X))$



$$R_b|_l = \sigma|_l$$

3. **Traslaciones:** Sea t traslación a lo largo de la recta l del plano Π.

   Sean $a, b \in \mathcal{L}$ tales que $a \perp l \wedge b \perp l$ y $t(a) = b$, entonces existe $c \in \mathcal{L}$ tal que $c \perp l$ y $(\forall X \mathcal{I} a)(R_c(X) = t(X))$.



   donde c se visualiza como la paralela media entre a y b

3.2. Plano Métrico

Definición 3.3 $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \perp)$ *es un plano métrico, si y sólo si satisface los axiomas: afines, de ortogonalidad y de colineación.*
Además, el grupo de las colineaciones corresponde a $Aut(\Pi)$*, es decir, biyecciones entre puntos, entre rectas y que preservan incidencia y ortogonalidad.*

Propiedad 3.4 *Sean* Π *plano métrico,* $\sigma \in Aut(\Pi)$ *y* R_a *simetría de eje* a*, entonces*

$$\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} = R_{\sigma(a)}$$

Demostración: Notemos que $\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1}$ es una simetría, ya que

i) $\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} \neq Id$. Supongamos que $\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} = Id$ entonces

$$\begin{array}{rcl} R_a & = & \sigma^{-1} \circ \sigma \\ R_a & = & Id \end{array}$$

Pues esto es una contradicción, por lo tanto es distinta de la identidad.

ii) $(\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1}) = Id$

Esto es verdadero pues $Id = Id$, de esta forma se cumple que tiene orden dos.

iii) $\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1}$ deja fijos a todos los puntos de la recta $\sigma(a)$

Si $P \mathcal{I} a$ entonces $\sigma(P) \mathcal{I} \sigma(a)$

$$(\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1})(\sigma(P)) = \sigma(R_a(P)) = \sigma(P)$$

Luego tenemos, es una simetría y fija los puntos de la recta $\sigma(A)$, luego

$$\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} = R_{\sigma(a)}$$

■

Corolario 3.5 *Sean* Π *plano métrico,* $a, b, l \in \mathcal{L}$ *tal que* $R_l(a) = b$ *entonces*

$$R_l \circ R_a \circ R_l = R_b.$$

Propiedad 3.6 *Sea* Π *plano métrico y* $a, b \in \mathcal{L}$ *tal que* $a \perp b$ *entonces* $R_a(b) = b$.

Demostración:
Sea $\{P\} = a \cap b$, luego tenemos que b es la única recta ortogonal a a en P. Además $P\mathcal{I}a$ entonces $R_a(P) = P$.
Pero $R_a(P)\mathcal{I}R_a(b)$ y $R_a(b) \perp R_a(a)$, de lo cual tenemos que:

$$P\mathcal{I}R_a(b) \text{ y } R_a(b) \perp a$$

Por unicidad de b, se tiene que $R_a(b) = b$. ■

Propiedad 3.7 *Sea* Π *plano métrico y* $a, b \in \mathcal{L}$ *distintas tales que* $R_a(b) = b$ *entonces* $a \perp b$.

Demostración:
Sea $P\mathcal{I}b$ y $P\not\mathcal{I}a$, luego tenemos que $R_a(P)\mathcal{I}b$, consideremos c tal que $P\mathcal{I}c$ y $c \perp a$, entonces por la propiedad anterior tenemos $R_a(c) = c$, de lo cual $R_a(P)\mathcal{I}c$.
De este modo tenemos que $P, R_a(P)\mathcal{I}c$, por ello tenemos c, b tiene dos puntos en común, luego las rectas son iguales, de lo cual obtenemos que $b \perp a$. ■

Propiedad 3.8 *Sean* Π *plano métrico,* $a, b \in \mathcal{L}$ *distintas, entonces*

$$a \perp b \quad \text{si y sólo si} \quad R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

Demostración: Sean $a, b \in \mathcal{L}$ y $a \perp b$, luego tenemos que $R_a(b) = b$, además $R_a^{-1} = R_a$, de este modo tenemos que

$$R_a \circ R_b \circ R_a^{-1} = R_{R_a(b)} = R_b.$$

despejando obtenemos

$$R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

Supongamos ahora que

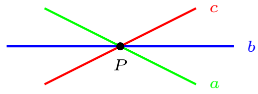
$$R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

despejando, y usando la propiedad tenemos

$$R_{R_a(b)} = R_a \circ R_b \circ R_a = R_b$$

luego $R_a(b) = b$, de lo cual $a \perp b$. ■

Teorema 3.9 (Teorema de las Tres Simetrías para Rotación) *Sea* Π *plano métrico. Si* $P \in \mathcal{P}$ *y* $a, b, c \in \mathcal{L}$*, tal que* $P\mathcal{I}a, b, c$*, entonces* $(\exists d \in \mathcal{L})(R_a \circ R_b \circ R_c = R_d \ \wedge \ P\mathcal{I}d)$



Demostración: Ya que $R_c \circ R_b$ es una rotaciones de centro P y consideremos $(R_c \circ R_b)(a) = a'$, entonces por axioma de rotación existe $d \in \mathcal{L}$ tal que $d\mathcal{I}l \ \wedge \ R_c \circ R_b|_a = R_d|_a$
Notemos que

$$\begin{array}{rcll} (R_c \circ R_b)(x) & = & R_d(x) & ; \forall x\mathcal{I}a \\ (R_d \circ R_c \circ R_b)(x) & = & x & ; \forall x\mathcal{I}a \end{array}$$

De lo cual obtenemos que

$$R_d \circ R_c \circ R_b = Id \ ; \ R_d \circ R_c \circ R_b = R_a$$

Supongamos que

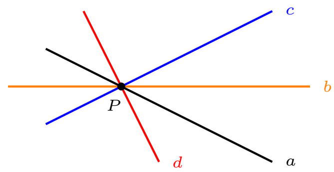
$$\begin{array}{rcl} R_d \circ R_c \circ R_b & = & Id \quad /R_d \circ \\ R_c \circ R_b & = & R_d \end{array}$$

de lo cual tenemos $R_c \circ R_b = R_d$, en donde

$$\begin{array}{rcl} R_c \circ R_b \circ R_c \circ R_b & = & Id \\ R_c \circ R_b \circ R_c & = & R_b \\ R_c \circ R_b & = & R_b \circ R_c \\ b & \perp & c. \end{array}$$

Análogamente $d \perp c$. Por lo tanto por P pasan dos rectas b, d perpendiculares a c esto es una contradicción, luego debe cumplirse la otra igualdad.

$$\begin{array}{rcl} R_d \circ R_c \circ R_b & = & R_a \\ R_d \circ R_c & = & R_a \circ R_b \\ R_d & = & R_a \circ R_b \circ R_c \end{array}$$

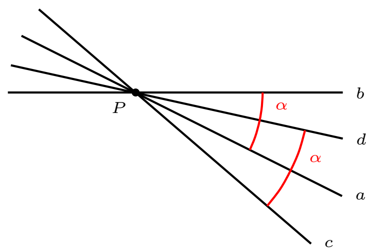


■

Teorema 3.10 *Sea Π plano métrico y σ una rotación de centro P.*

$$\text{Si } P\mathcal{I}a, \text{ entonces } (\exists b \in \mathcal{L})(P\mathcal{I}b \ \wedge \ \sigma = R_a \circ R_b)$$

Demostración: Ya que σ es una rotación, existen $c, d \in \mathcal{L}$ tales que $c \cap d = \{P\}$ y $\sigma = R_c \circ R_d$



Luego tenemos que $P\mathcal{I}a, c, d$ y por teorema de las tres simetrías se obtiene

$$R_a \circ R_c \circ R_d = R_b$$

Despejando

$$R_c \circ R_d = R_a \circ R_b = \sigma$$

■

Teorema 3.11 *Sea* Π *un plano métrico y* $P \in \mathcal{P}$.

$$G_P = \{\sigma \in Aut(\Pi) \mid \sigma \text{ rotación de centro } P\}$$

entonces $(G_P, \circ)$ *es un grupo abeliano.*

Demostración: Clausura Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in G_P$, luego existen $a, b, c, d \in \mathcal{L}$ tales que $P\mathcal{I}a, b, c, d$ y $\sigma_1 = R_a \circ R_b$, $\sigma_2 = R_c \circ R_d$.
Como $P\mathcal{I}a, b, c$ y $R_a \circ R_b \circ R_c$, por teorema de las tres simetrías existe $l \in \mathcal{L}$ tal que $P\mathcal{I}l$ y $R_a \circ R_b \circ R_c = R_l$.
Luego tenemos que

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = R_a \circ R_b \circ R_c \circ R_d = R_l \circ R_d \in G_P$$

Neutro Dada $a \in \mathcal{L}$ tal que $P\mathcal{I}a$ entonces $R_a \circ R_a = Id \in G_P$.
Inverso Sea $\sigma = R_a \circ R_b \in G_P$, luego

$$\sigma^{-1} = R_b \circ R_a \in G_P$$

Conmutatividad Sean $\sigma_1 = R_a \circ R_b$, $\sigma_2 = R_c \circ R_d$. Por demostrar que

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1.$$

Por teorema de las tres simetrías tenemos que $R_b \circ R_c \circ R_d = R_l$
Luego $\sigma_2 = R_b \circ R_l$. De lo cual obtenemos

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = R_a \circ R_b \circ R_b \circ R_l = R_a \circ R_l$$

y

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = R_b \circ R_l \circ R_a \circ R_b$$

Reemplazando, obtenemos una proposición equivalente a que debemos demostrar

$$R_a \circ R_l \circ R_b = R_b \circ R_l \circ R_a$$

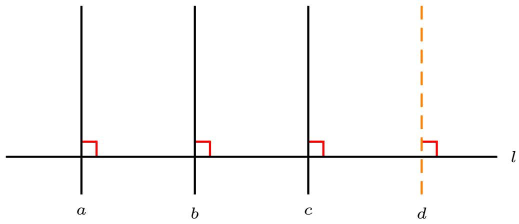
Pero por teorema de las tres simetrías, es una simetría

$$R_a \circ R_l \circ R_b = (R_a \circ R_l \circ R_b)^{-1} = R_b \circ R_l \circ R_a$$

lo que demuestra lo requerido. ■

Teorema 3.12 (Las Tres Simetrías para traslaciones) *Sea* Π *plano métrico, Si* $a, b, c, l \in \mathcal{L}$ *tal que* $a \cap b = a \cap c = b \cap c = \varnothing$ *y* $l \perp a, b, c$ *entonces*

$$(\exists d \in \mathcal{L})(R_a \circ R_b \circ R_c = R_d \ \wedge \ d \perp l)$$



Demostración: Ya que $R_c \circ R_b$ es una traslación a lo largo de l y consideremos $(R_c \circ R_b)(a) = a'$, entonces por axioma de traslación existe $d \in \mathcal{L}$ tal que $d \perp l \ \wedge \ R_c \circ R_b|_a = R_d|_a$
Notemos que

$$\begin{array}{rcll} (R_c \circ R_b)(x) & = & R_d(x) & ; \forall x \mathcal{I} a \\ (R_d \circ R_c \circ R_b)(x) & = & x & ; \forall x \mathcal{I} a \end{array}$$

De lo cual obtenemos que

$$R_d \circ R_c \circ R_b = Id \ ; \ R_d \circ R_c \circ R_b = R_a$$

Supongamos que

$$\begin{array}{rcll} R_d \circ R_c \circ R_b & = & Id & / R_d \circ \\ R_c \circ R_b & = & R_d & \end{array}$$

de lo cual tenemos $R_c \circ R_b = R_d$, en donde

$$\begin{array}{rcl} R_c \circ R_b \circ R_c \circ R_b & = & Id \\ R_c \circ R_b \circ R_c & = & R_b \\ R_c \circ R_b & = & R_b \circ R_c \\ b & \perp & c. \end{array}$$

luego $b \cap c \neq \varnothing$.
Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} R_d \circ R_c \circ R_b & = & R_a \\ R_d \circ R_c & = & R_a \circ R_b \\ R_d & = & R_a \circ R_b \circ R_c \end{array}$$

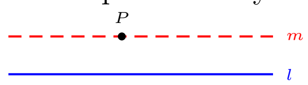
■

Teorema 3.13 *Sea* Π *un plano métrico y* $l \in \mathcal{L}$.

$$G_l = \{\sigma \in Aut(\Pi) \mid \sigma \text{ traslación en la dirección } l \}$$

entonces $(G_l, \circ)$ *es un grupo abeliano.*

Observación: El quinto postulado de Euclides en el plano métrico dice que si $P \in \mathcal{P}$, $l \in \mathcal{L}$ y $P \not\mathcal{I} l$, implica que existe un único $m \in \mathcal{L}$ tal que $P\ \mathcal{I}\ m$ y $m \parallel l$

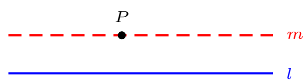


1. Los planos métricos, que cumple el quinto axioma de Euclides se le denomina plano **Euclidiano**.
2. Si no existe rectas paralelas, entonces el plano métrico se denomina plano **Elíptico**.
3. Si existen infinitas paralelas, entonces el plano métrico se denomina plano **Hiperbólico**.

3.3. Plano Euclidiano

El plano Euclidiano es un plano métrico en el cual se cumple el **quinto postulado de Euclides**, es decir, es un plano $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \perp)$ que cumple con

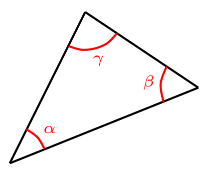
1. Los axiomas afines
2. Los axiomas de ortogonalidad
3. Los axiomas de colinealidad
4. **Axioma Euclides** Si $P \not\mathcal{I} l$ entonces $\exists! m \in \mathcal{L}$ tal que $P \mathcal{I} m\ \wedge\ m \parallel l$



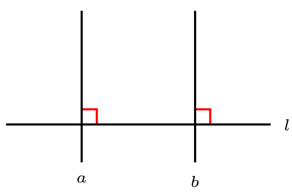
Introducción: A través de éste axioma se derivan muchas propiedades de la geometría clásica, como las siguientes:

1. La suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

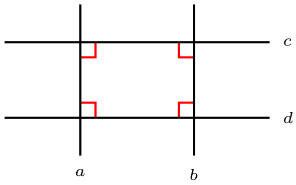
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



2. Si $a \perp l \wedge b \perp l$, $a \neq b$ entonces $a \parallel b$

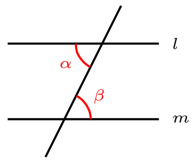


3. Si $a \perp c \wedge a \perp d$, $b \perp c$ entonces $b \perp d$

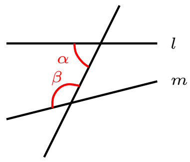


4. Ángulos alternos internos

$$l \parallel m \Rightarrow \alpha = \beta$$



5. Si $l \nparallel m$ entonces $\alpha + \beta \neq 180°$



3.3.1. Modelos de Plano Euclidiano

Sean V un plano vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $2 \neq 0$ y $f : V \times V \to \mathbb{K}$, una forma bilineal, simétrica sin vectores isótropos, es decir,

1. **Bilineal:**

   Se dice que f es lineal en la primera componente.

   a) $(\forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in V)(f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = f(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}) + f(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}))$.

   b) $(\forall \alpha \in \mathbb{K})(\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V)(f(\alpha \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \alpha f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}))$

   Note que la linealidad en la segunda componente, se logra con la siguiente propiedad

2. **Simétrica:**

   Se dice que f es simétrica si y sólo si

$$(\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V)(f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})).$$

3. **Sin vectores isótropos:**

   Se dice que f no tiene vectores isótropos si y sólo si

$$(\forall \overrightarrow{v} \in V)(f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v} = 0).$$

Plano Métrico Euclidiano Sean V un plano vectorial y $f : V \times V \to \mathbb{K}$, una forma bilineal, simétrica sin vectores isótropos.
Definimos el plano (V, f), de modo que el conjunto de puntos es $\mathcal{P} = V$, el conjunto de recta $\mathcal{L}$ es el conjunto de rectas afines, la incidencia $\mathcal{I}$ es la pertenecía y la ortogonalidad entre rectas esta dada por

$$\langle v_1 \rangle + w_1 \perp \langle v_2 \rangle + w_2 \text{ si y sólo si } f(v_1, v_2) = 0.$$

Propiedad 3.14 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y f un forma bilineal simétrica sin vectores isótropos, entonces (V, f) es un Plano Métrico Euclidiano*

Demostración: De ejercicios los axiomas afines y de ortogonalidad, recordar para ello las nociones de geometría analítica, el de colineación lo veremos más adelante.

Ejemplo 3.15 *Sea $(\mathbb{R}^2, f)$ plano Euclidiano, con f el producto interno usual, es decir,*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \rightsquigarrow & x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{array}$$

Dada las rectas $l_1 : y = x + 2$ y $l_2 : y = -x - 3$.
Determine si $l_1 \perp l_2$.

Solución: Para el caso real, con el producto usual sabemos que

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

lo cual es verdadero.
De otro modo, o en general con un producto arbitrario, tenemos

$$l_1 = \langle (1, 1) \rangle + (0, 2); \quad l_2 = \langle (1, -1) \rangle + (0, -3)$$

Evaluando el vector director

$$f((1, 1), (1, -1)) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 = 0$$

Por lo tanto

$$l_1 \perp l_2.$$

□

Observación: En general la forma bilineal utilizada es el producto interno usual para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pero para otro cuerpo, es necesario tener presente lo siguiente:
Sea (V, f) un Plano Euclidiano, luego se tiene que V es un espacio vectorial de dimensión dos y f es una forma bilineal sin vectores isótropos. Por ello, dado $u_1 \in V$ no nulo, se tiene que u_1 es anisótropo y podemos obtener el ortogonal a

$$< u_1 >^{\perp} = \{ v \in V \mid f(u_1, v) = 0 \}$$

No es difícil demostrar que este espacio tiene dimensión 1, ya que es una ecuación lineal homogénea de dos variables, luego existe u_2 y se cumple que $\{u_1, u_2\}$ es una base de V.
Dados $x = x_1u_1 + x_2u_2$, $y = y_1u_1 + y_2u_2$, podemos calcular

$$f(x,y) = x_1y_1f(u_1,u_1) + x_2y_2f(u_2,u_2)$$

Como esta forma bilineal no tiene vectores isótropos, significa que la ecuación cuadrática

$$f(x,x) = x_1^2 f(u_1,u_1) + x_2^2 f(u_2,u_2) = 0$$

sólo puede tener la solución trivial, de lo cual obtenemos

$$f(u_1,u_1) \neq 0 \wedge f(u_2,u_2) \neq 0$$

y además

$$z^2 = -\frac{f(u_2,u_2)}{f(u_1,u_1)}$$

no debe tener solución.
De este modo tenemos que la forma bilineal salvo escalar, debe poder escribirse de la forma

$$f(x,y) = x_1y_1 - \delta x_2y_2$$

donde $z^2 = \delta$ no tiene solución.
Por esto es importante considerar el grupo de los cuadrado, que esta dado por

$$\square_{\mathbb{K}} = \left\{a^2 \mid a \in \mathbb{K} - \{0\}\right\}$$

y de los no cuadrado

$$\boxslash_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} - \left\{a^2 \mid a \in \mathbb{K}\right\}$$

Por ejemplo en $\mathbb{Z}_5$, tenemos que el conjunto de los cuadrados es $\square_5 = \{1,\ 4\}$ y el conjunto de los no cuadrados es $\boxslash_5 = \{2,\ 3\}$.
Para cada $\delta \in \boxslash_{\mathbb{K}}$, se puede definir la función

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1x_2 - \delta y_1y_2,$$

la cual es una función bilineal, simétrica y sin vectores isótropos en $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Ejemplo 3.16 *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ y $V = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ y la forma bilineal simétrica sin vectores isótropos*

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1x_2 + 3y_1y_2 = x_1x_2 - 2y_1y_2.$$

Determine si $l_1 = \langle(1,\ 1)\rangle + (2,3)$ y $l_2 = \{(x,y) \in V \mid x - 2y = 1\}$ son ortogonales.

Solución: Sea $(x,y) \in l_2$ entonces

$$(x,y) = (1+2y,y) = y(2,1) + (1,0)$$

luego $l_2 : \langle(2,\ 1)\rangle + (1,0)$, entonces

$$f((1,1),(2,1)) = 2 + 3 = 5 = 0 \ \in \mathbb{Z}_5$$

por lo tanto $l_1 \perp l_2$. $\square$

3.3.2. Colineaciones del Plano Euclidiano

Sea (V, f) un plano Euclidiano y $g : V \to V$ una transformación lineal invertible, hemos visto que preservan incidencia, ahora veremos la ortogonalidad.
Se dice que g es una **isometría** si y sólo si

$$(\forall v, w \in V)(f(g(v), g(w)) = f(u, v))$$

Note que la ortogonalidad esta definida a partir de la forma bilineal, luego una isometría son colineaciones. Claramente la identidad es una isometría
Se define el grupo ortogonal de (V, f) igual a

$$O(f) = \{g : V \to V \mid g \text{ es una isometría }\}$$

Caso particular Sea $(\mathbb{R}^2, f)$ con la formal usual tenemos que

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 = [x_1\ x_2]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Una forma de explicitar las isometrías es matricialmente, para ello consideramos una base la base canonica C y calculemos

$$\begin{array}{rcl} f(g(v), g(w)) & = & f(u, v) \\ [g(v)]_C^t[f]_C[g(w)]_C & = & [u]_C^t[f]_C[v]_C \\ ([g]_C[v]_C)^t[f]_C[g]_C[w]v & = & [u]_C^t[f]_C[v]_C \\ [v]_C^t[g]_C^t[f]_C[g]_C[w]_C & = & [u]_C^t[f]_C[v]_C \end{array}$$

Es una igualdad para todo los vectores, por lo tanto

$$[g]_C^t[f]_C[g]_C = [f]_C$$

Si g es una isometría tal que $A = [g]_C$, reemplazando obtenemos que

$$A^tA = I_2$$

Grupo de las matrices ortogonales de 2×2

$$O(f) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A^tA = I\}.$$

Para explicitar directamente este grupo. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial $A^tA = I$, nos entrega el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl|} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab + cd & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Ya que los puntos pertenecen al circunferencia unitaria, podemos parametrizar

$$a = cos(\alpha);\ c = sen(\alpha),\ b = cos(\beta);\ d = sen(\beta)$$

luego se cumple las dos primeras ecuaciones y la tercera

$$0 = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) = cos(\beta - \alpha)$$

de lo cual obtenemos

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ o bien } \beta - \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Veamos la primera posibilidad y reemplacemos

$$a = cos(\alpha);\ c = sen(\alpha),\ b = cos(\frac{\pi}{2} + \alpha);\ d = sen(\frac{\pi}{2} + \alpha)$$

Utilizando identidades, finalmente obtenemos que

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

matriz de tienen determinante 1 y corresponde a rotaciones en un ángulo α.
En la otra posibilidad se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

matriz de tiene determinante -1.
Luego tenemos el grupo ortogonal esta formado por

$$O(f) = \left\{ \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Note que las matrices de determinante -1, dejan fijos todos los punto de la recta

$$< (cos(\alpha) + 1, sen(\alpha)) >,$$

por lo anterior es una simetría entorno a la recta, ya que al cuadrado es la identidad.
Al multiplicar dos de esta simetrías obtenemos

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\beta) & sen(\beta) \\ sen(\beta) & -cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha - \beta) & -sen(\alpha - \beta) \\ sen(\alpha - \beta) & cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

una rotación, que son las otras matrices del grupo ortogonal, los otros axiomas se obtiene en forma similar.
Luego tenemos el grupo ortogonal de las rotaciones esta formado por:

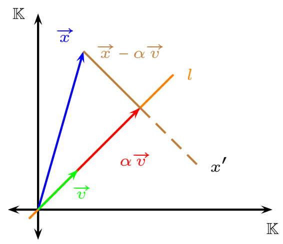
$$O^+(f) = \left\{ \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi] \right\}.$$

3.3.3. Simetrías

Notemos que la recta fija anterior, no tiene una expresión fácil de despejar a partir de el vector director de la recta, por ello determinaremos en forma explícita la simetría respecto a la recta $l \in \mathcal{L}$.
Primer Caso: Cuando la Recta es Vectorial.
Sean $l = \langle \overrightarrow{v} \rangle$, $\overrightarrow{x} \in V$ y R_l simetrías de eje l.
Determinemos primero $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $x - \alpha\overrightarrow{v}$, sea ortogonal a l

$$f(\overrightarrow{x} - \alpha\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0$$

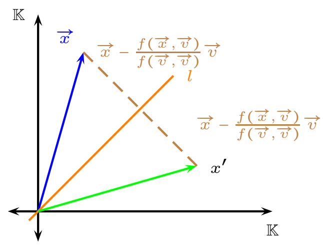
$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x} - \alpha\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) &= 0 \\ f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}) - \alpha f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) &= 0 \\ \alpha f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) &= f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}) \end{aligned}$$



Luego tenemos

$$\alpha = \frac{f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})}$$

$$\begin{aligned} x' &= \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x} - \tfrac{f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v}) \\ x' &= -\overrightarrow{x} + 2\tfrac{f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v} \end{aligned}$$



De este modo tenemos que la simetría está dada por:

$$R_l(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x} + 2\frac{f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v}$$

Segundo Caso: La recta no es vectorial.
Sean $l = \langle \overrightarrow{v} \rangle + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x} \in V$ y R_l simetrías de eje l.
Si $\overrightarrow{P} \mathcal{I} l$ entonces, existe $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{P} = \alpha_1\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

$$\begin{aligned} R_l(\alpha_1\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= \alpha_1\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \\ (R_l \circ T_{\overrightarrow{w}})(\alpha_1\overrightarrow{v}) &= T_{\overrightarrow{w}}(\alpha_1\overrightarrow{v}) \\ (T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}})(\alpha_1\overrightarrow{v}) &= \alpha_1\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

luego, $T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}}$ tiene orden 2 y fija a todos los puntos de la forma $\alpha_1\overrightarrow{v}$, entonces:

$$T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}} = Id \ \vee \ T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}} = R_{\langle \overrightarrow{v} \rangle}$$

Si $T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}} = Id$, despejando se tiene que $R_l = Id$ lo cual es una contradicción, luego tenemos

$$T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}} = R_{\langle \overrightarrow{v} \rangle}$$

del cual se establece que:

$$R_l = T_{\overrightarrow{w}} \circ R_{\langle \overrightarrow{v} \rangle} \circ T_{\overrightarrow{w}}^{-1}$$

De este modo tenemos que la simetría está dada por:

$$R_l(\overrightarrow{x}) = -(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w}) + 2\frac{f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

Propiedad 3.17 *Sea (V, f) plano métrico euclidiano y la recta $l =< \overrightarrow{v} > + \overrightarrow{w}$ entonces*

$$\begin{array}{rccl} R_l : & V & \to & V \\ & x & \rightsquigarrow & 2\overrightarrow{w} - \overrightarrow{x} + 2\frac{f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$$

Ejemplo 3.18 *Sea $(\mathbb{R}^2, f)$ plano Euclidiano con el producto usual*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$$

Dada $l : y = 2x$, Calcule $R_l(x, y)$.

Solución: Ya que $l : y = 2x$, obtenemos $l = \langle(1, 2)\rangle$

$$\begin{array}{rcl} R_l(x,y) & = & -(x,y) + 2\frac{f((x,y),(1,2))}{f((1,2),(1,2))} \cdot (1,2) \\ R_l(x,y) & = & (-x,-y) + 2(\frac{x+2y}{5}) \cdot (1,2) \\ R_l(x,y) & = & (-x,-y) + (\frac{2x+4y}{5}, \frac{4x+8y}{5}) \\ R_l(x,y) & = & (\frac{-3x+4y}{5}, \frac{4x+3y}{5}) \end{array}$$

En la base canónica C, tenemos que

$$A = [R_l]_C = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \quad det(A) = -1.$$

□

Ejemplo 3.19 *Sea $(\mathbb{Z}_7^2, f)$ plano euclidiano y la forma bilineal simétrica sin vectores isótropos.*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 - \overline{5}y_1y_2.$$

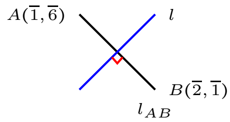
Sea l la recta tal que $R_l(\overline{2}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{6})$.
Determine $R_l(x, y)$

Solución: Para determinar la recta

$$l = \langle \overrightarrow{v} \rangle + \overrightarrow{w}$$

veamos los siguiente:

$$\begin{aligned} l_{AB} &= \langle A-B\rangle + B \\ l_{AB} &= \left\langle (\overline{1},\overline{6})-(\overline{2},\overline{1})\right\rangle + (\overline{2},\overline{1}) \\ l_{AB} &= \left\langle (-\overline{1},\overline{5})\right\rangle + (\overline{2},\overline{1}) \end{aligned}$$



Pero $l_{AB} \perp l$, luego

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2),(-\overline{1},\overline{5})) &= 0 \\ -x_1-\overline{25}x_2 &= 0 \\ x_1 &= \overline{3}x_2 \end{aligned}$$

Entonces $(x_1,x_2)=(3x_2,x_2)=x_2(3,1)$, por lo tanto $l=\left\langle(\overline{3},\overline{1})\right\rangle+(c,d)$ buscamos el punto medio entre A y B que esta dado por:

$$\begin{aligned} P_m &= \left(\tfrac{\overline{2}+\overline{1}}{2},\tfrac{\overline{1}+\overline{6}}{2}\right) \\ P_m &= (3\cdot 3, 3\cdot 7) \\ P_m &= (5,0) \end{aligned}$$

Luego $l=\left\langle(\overline{3},\overline{1})\right\rangle+(\overline{5},\overline{0})$.
Finalmente podemos encontrar $R_l(x,y)$

$$\begin{aligned} R_l(x,y) &= (T_{(\overline{5},\overline{0})}\circ R_{\langle(\overline{3},\overline{1})\rangle}\circ T^{-1}_{(\overline{5},\overline{0})})(x,y) \\ &= T_{(\overline{5},\overline{0})}\left(R_{\langle(\overline{3},\overline{1})\rangle}(x-\overline{5},y)\right) \\ &= T_{(\overline{5},\overline{0})}\left((\overline{5}-x,-y)+\overline{2}\cdot\tfrac{f((x-\overline{5},y),(\overline{3},\overline{1}))}{f((\overline{3},\overline{1}),(\overline{3},\overline{1}))}\cdot(\overline{3},\overline{1})\right) \\ &= T_{(\overline{5},\overline{0})}\left((\overline{5}-x,-y)+\tfrac{(\overline{3}x-\overline{15}-\overline{5}y)}{\overline{2}}\cdot(\overline{3},\overline{1})\right) \\ &= T_{(\overline{5},\overline{0})}\left((\overline{5}-x,-y)+\left(\tfrac{\overline{9}x-\overline{15}y-\overline{45}}{\overline{2}},\tfrac{\overline{3}x-\overline{15}-\overline{5}y}{\overline{2}}\right)\right) \\ &= T_{(\overline{5},\overline{0})}\left((\overline{5}-x,-y)+(x+\overline{3}y+\overline{2},\overline{5}x+y+\overline{3})\right) \\ &= T_{(\overline{5},\overline{0})}\left(\overline{3}y+\overline{7},\overline{5}x+\overline{3}\right) \\ &= \left(\overline{3}y+\overline{7}+\overline{5},\overline{5}x+\overline{3}+\overline{0}\right) \\ R_l(x,y) &= \left(\overline{3}y+\overline{5},\overline{5}x+\overline{3}\right) \end{aligned}$$

□

3.3.4. Traslaciones en el Plano Euclidiano

En el plano euclidiano real (V,f),
Sean $b :< \overrightarrow{v} > + \overrightarrow{u}$ y $d :< \overrightarrow{v} > + \overrightarrow{w}$.
Luego tenemos

$$\begin{aligned} (R_b\circ R_d)(\overrightarrow{x}) &= R_b(2\overrightarrow{w}-\overrightarrow{x}+2\tfrac{f(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}\cdot\overrightarrow{v}) \\ &= \overrightarrow{x}+2\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{w}+2\tfrac{f(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}\cdot\overrightarrow{v} \\ &= t_{2\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{w}+2\frac{f(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}\cdot\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) \end{aligned}$$

Notemos que

$$f(2\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{w}+2\frac{f(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}\cdot\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}) = 2f(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})+2\frac{f(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})=0$$

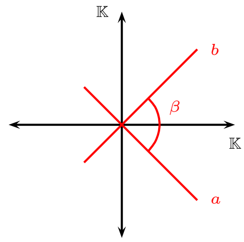
Por ellos es un traslación, en dirección de la recta ortogonal a $< \overrightarrow{v} >$.

3.3.5. Rotaciones en el Plano Euclidiano

En el plano euclidiano real (V, f), sea σ una rotación de centro P.
Luego existen $a, b \in \mathcal{L}$ tal que $a \cap b = \{P\}$ y $\sigma = R_a \circ R_b$.
Si $P = \overrightarrow{0}$ y α es el ángulo de rotación, si β es el ángulo entre a y b entonces

$$\alpha = 2 \cdot \beta$$

$$\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Fórmula para rotaciones de centro $(0,0)$ y ángulo α

Si $P \neq \overrightarrow{0}$, entonces las rotaciones de centro P y ángulo α vienen dadas por la fórmula:

$$\sigma(x,y) = \left(T_{\overrightarrow{P}} \circ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \circ T^{-1}_{\overrightarrow{P}} \right)(x,y)$$

Ejemplo 3.20 *Sea $(\mathbb{R}^2, f)$ plano Euclidiano con el producto usual*

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$$

Dadas las rectas $l_1 : y = 5x$ y $l_2 : y = 2x$.
Determinar explícitamente la rotación $R_{l_1} \circ R_{l_2}(x,y)$ y el ángulo de rotación .

Solución: Ya que $l_1 : x = 5y$, y $l_2 : y = 2x$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\sigma(x,y) &= R_{l_1} \circ R_{l_2}(x,y) \\
&= R_{l_1}(-(x,y) + 2\tfrac{f((x,y),(1,2))}{f((1,2),(1,2))} \cdot (1,2) \\
&= R_{l_1}(\tfrac{-3x+4y}{5}, \tfrac{4x+3y}{5}) \\
&= -(\tfrac{-3x+4y}{5}, \tfrac{4x+3y}{5}) + \tfrac{1}{13}\tfrac{-11x+23y}{5}(5,1) \\
&= -(\tfrac{-3x+4y}{5}, \tfrac{4x+3y}{5}) + \tfrac{1}{13}\tfrac{-11x+23y}{5}(5,1) \\
&= (\tfrac{-16x+63y}{65}, \tfrac{-63x-16y}{65})
\end{aligned}$$

Expresando en coordenadas de la base canónica, se tiene que

$$[\sigma(x,y)]_C = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} -16 & 63 \\ -63 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De lo cual tenemos que

$$\arctan(\frac{63}{16}) \approx 75,75°.$$

Ya que $\sigma(1,0) = (\frac{-16}{65}, \frac{-63}{65})$ y $\sigma(0,1) = (\frac{63}{65}, \frac{-16}{65})$, el ángulo es

$$\alpha \approx -75,75°.$$

□

Ejercicio 3.21 *Sean* (V,f) *plano euclidiano,* $a,b \in \mathcal{L}$ *tal que* $a \cap b \neq \phi$.
Determine la rotación, de centro P *y*

$$\sigma = R_a \circ R_b$$

Ejercicio 3.22 *Sean* (V,f) *plano euclidiano,* $a,b \in \mathcal{L}$ *tal que* $a \cap b \neq \phi$ *y* $a \perp b$.
Determine la simetría puntual, de centro P

$$\sigma = R_a \circ R_b$$

3.4. Plano Elíptico

Un plano elíptico $\Pi = (\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \mathcal{I},\ \perp)$ es un plano métrico Π que satisface el axioma elíptico, es decir,

1. Los axiomas afines
2. Los axiomas de ortogonalidad
3. Los axiomas de colinealidad
4. **Axioma elíptico:** Para toda $l,m \in \mathcal{L}$, entonces $l \cap m \neq \varnothing$

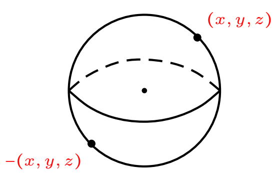
3.4.1. Modelo de Plano Elíptico

Construyamos un modelo de un el Plano Elíptico, para ello consideremos la esfera unitaria y centro en el origen, es decir,

$$S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$

i) Notemos que una recta vectorial intersecta a la esfera centrada en el origen en dos puntos.

Puntos del plano elíptico

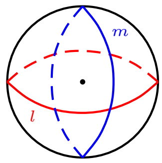


$\mathcal{P} = \{[(x,y,z),(-x,-y,-z)];(x,y,z) \in S\}$ a los puntos $[(x,y,z),(-x,-y,-z)]$ se les llama puntos antipolares o bipuntos.

ii) Un plano vectorial intersecta a la esfera en una circunferencia de radio máximo.

Rectas del plano elíptico

$\mathcal{L}$ = {circunferencia de radio máximo de S}, si l_1, l_2 son rectas, entonces en S tienen ecuaciones de la forma:



$$\begin{array}{rcl} l_1 & : & a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ l_2 & : & a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{array}$$

iii) La **incidencia** $P\mathcal{I}l$ si y sólo si $P \subseteq l$

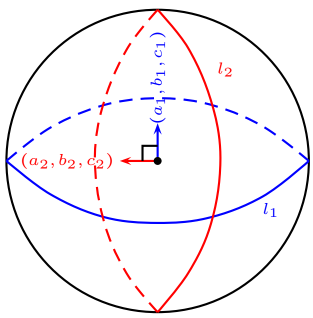
iv) La **Ortogonalidad** en $\mathcal{L}$. Sean l_1 y l_2 en $\mathcal{L}$, definida por:

$$\begin{array}{rcl} l_1 & : & a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ l_2 & : & a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{array}$$

note que podemos escribir las ecuaciones del siguiente modo

$$\begin{array}{rcl} l_1 & : & (a_1, b_1, c_1)(x, y, z) = 0 \\ l_2 & : & (a_2, b_2, c_2)(x, y, z) = 0 \end{array}$$

Los vectores $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ son perpendicular a los respectivos planos en el espacio.



Por ello se define, la ortogonalidad

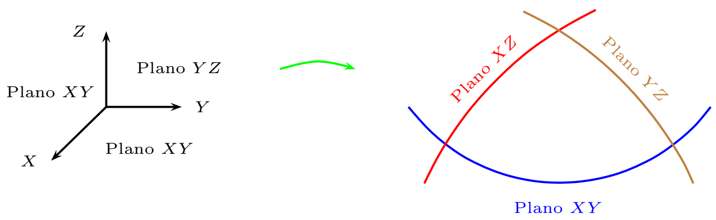
$$l_1 \perp l_2 \text{ si y sólo si } a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0$$

Propiedad 3.23 *El plano* $\Pi = (\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \mathcal{I},\ \perp)$*, es un Plano Elíptico.*

Ejemplo 3.24 *Consideremos las planos* XY,XZ *y* YZ *donde las ecuaciones están dadas por* $l_z : z = 0$*,* $l_y : y = 0$*,* $l_x : x = 0$ *respectivamente.*
Los rectas en el plano elíptico son perpendiculares ya que

$$\begin{array}{rcl} l_z \perp l_y & \Leftrightarrow & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \\ l_z \perp l_x & \Leftrightarrow & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \\ l_y \perp l_x & \Leftrightarrow & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

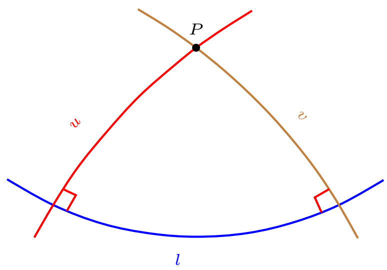
Una visualización en el primer octante $x, y, z > 0$, de los planos asociado a los ejes están dados por



Definición 3.25 *Sean Π plano métrico y $a, b, c \in \mathcal{L}$.*
*Se dice que a, b, c es un **Triángulo Polar** si y sólo si $a \perp b$, $b \perp c$ y $c \perp a$.*

Observación: En el figura anterior, tenemos que $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ forman un triángulo polar en el primer octante,con los bipuntos $< (1,0,0) >, < (0,1,0) >, < (0,0,1) >$ y además la suma de los ángulos interiores de este triángulo son tres rectos.

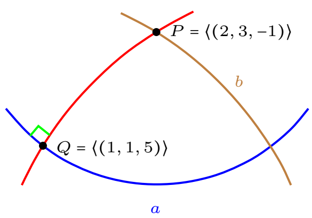
Definición 3.26 *Sea Π plano métrico, $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$.*
*Se dice que P es **polo** de l si y sólo si existen $u, v \in \mathcal{L}$ distintas, tales que $u \perp l$, $v \perp l$ y $u \cap v = \{P\}$.*



Ejemplo 3.27 *Comprobar que $< (0,0,1) >$ es el polo de $l =< (0,1,0), (1,0,0) >$.*

Solución: En la figura anterior, tenemos que $u =< (1,0,0), (0,0,1) >$, $v =< (0,1,0), (0,0,1) >$ son recta ortogonales a l, ya que forman un triángulo polar.

Ejemplo 3.28 *Sea $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ plano elíptico.*
Determinar la recta que une $P = \langle(2,3,-1)\rangle$ y $Q = \langle(1,1,5)\rangle$



Solución:
La recta que pasa por P y Q es

$$l_{PQ} = \langle (2,3,-1),(1,1,5)\rangle$$

y su ecuación cartesiana esta dada por

$$l_{PQ} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

De lo cual se obtiene $l_{PQ} : 16x - 11y - z = 0$.
Además note que las rectas

$$\begin{array}{rrcl} a: & 2x + 3y - z & = & 0 \\ b: & x + y + 5z & = & 0 \end{array}$$

son perpendiculars l_{PQ} ya que

$$\begin{array}{rcl} (2,3,-1)(16,-11,-1) & = & 0 \\ (1,1,5)(16,-11,-1) & = & 0 \end{array}$$

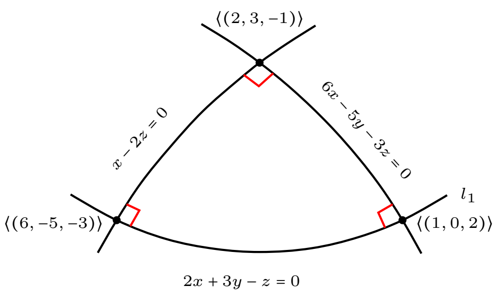
□

Ejemplo 3.29 *Sean $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ plano elíptico, $l : 2x + 3y - z = 0$ y $\delta = \langle (1,0,2)\rangle$.
Determinar los lados y vertices del triángulo polar formado por el vértice δ y lado l.*

Solución: Teniendo presente el ejemplo anterior tenemos que la recta que une los puntos

$$l_{PQ} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6x - 5y - 3z = 0$$

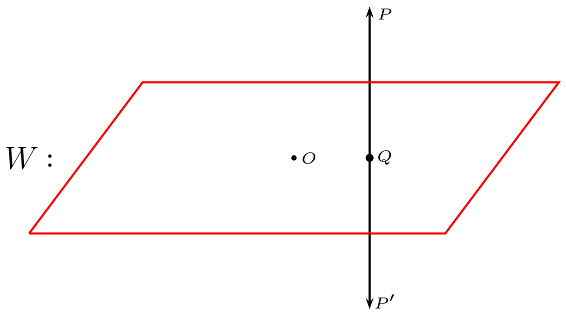
Luego



□

3.5. Simetrías en el Plano Elíptico

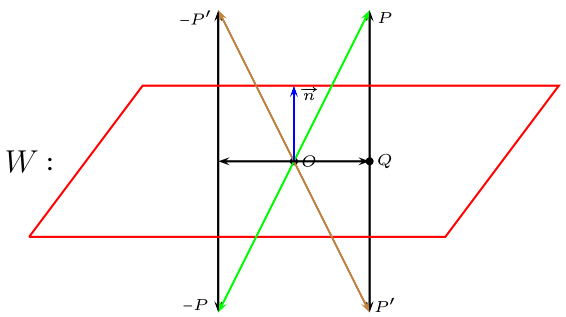
Todo plano vectorial en $\mathbb{R}^3$ es el eje de una simetría



Los puntos P, P' son simétricos respecto al plano.
Teniendo presente el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$, obtenemos un resultado similar, esto es

$$R_W(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2\frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{n}$$

donde $\overrightarrow{n}$ es perpendicular al plano W.



Si $d(O,P) = d(O,P') = d(0,-P) = d(O,-P')$, luego si uno de ello pertenece a la circunferencia unitaria, todos pertenecen, por ello tenemos la definida la simetría en los puntos antipolares de Plano Elíptico del siguiente modo

$$R_W([P,-P]) = [R_W(P), R_W(-P)] = [P', -P'].$$

Propiedad 3.30 *Sea* Π *el modelo de plano elíptico sobre la esfera, y la recta* $l : ax+by+cy = 0$*, entonces la simetría asociada a* l *esta dada por*

$$R_l([\pm P]) = \left[\pm\left(P - 2\frac{P\cdot\overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{n}\right)\right]$$

donde $\overrightarrow{n} = (a,b,c)$.

Ejemplo 3.31 *Sea* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ *plano elíptico.*
Determinar la simetrías en el plano elíptico respecto a la recta

$$l : 2x + 3y - z = 0.$$

Solución: En $\mathbb{R}^3$, notemos que $\overrightarrow{\eta} = (2,3,-1)$, $\overrightarrow{\eta} \cdot \overrightarrow{\eta} = 14$ y la simetría esta dada por

$$\begin{aligned} R_l(x,y,z) &= (x,y,z) - 2\frac{1}{14}(2x+3y-z)(2,3,-1) \\ &= \frac{1}{7}(3x-6y+2z, -6x-2y+3z, 2x+3y+6z) \end{aligned}$$

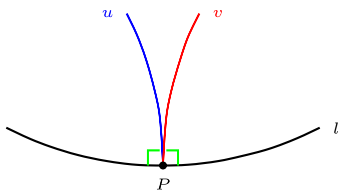
aplicada a un punto antipolar o bipunto tenemos

$$R_l([e_1,-e_1]) = \left[\left(\frac{3}{7},\frac{-6}{7},\frac{2}{7}\right),-\left(\frac{3}{7},\frac{-6}{7},\frac{2}{7}\right)\right]$$

□

Teorema 3.32 *Sea Π plano métrico y P polo de l, entonces $P \not\mathcal{I} l$*

Demostración: *Supongamos que $P\mathcal{I}l$.*
Por P pasan dos rectas perpendiculares a l, y estas son u,v esto es una contradicción, ya que por la recta l sólo pasa una recta perpendicular en P. ■



Propiedad 3.33 *Sea Π plano métrico.*
Si P es polo de l, entonces $R_l(P) = P$

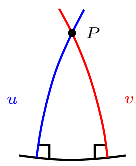
Demostración: Si P es un polo de l, luego existen $u,v \in \mathcal{L}$, con $u \neq v$, tales que $u \perp l$, $v \perp l$ y $u \cap v = \{P\}$.
Por propiedad anterior tenemos que

$$R_l(u) = u \text{ y } R_l(v) = v$$

de este modo tenemos que

$$R_l(u) \cap R_l(v) = u \cap v = \{P\}$$

es decir $R_l(P) = P$.

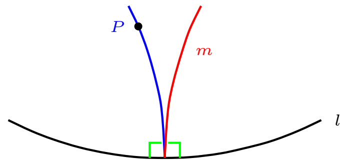


■

Teorema 3.34 *Sea Π plano métrico.*
Si P es polo de l y $m \perp l$, entonces $P\mathcal{I}m$

Demostración:

Supongamos que $l \cap m = \{Q\}$, entonces $R_l(Q) = Q$. Dada la recta l_{PQ}, pero P y Q son fijos por R_l, entonces $R_l(l_{PQ}) = l_{PQ}$ por eso es perpendicular a la recta l.



Luego tenemos

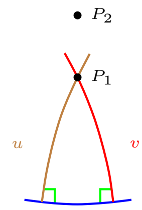
$$l_{PQ} = m, \text{ ya que por } Q \text{ pasa una única ortogonal a la recta } l.$$

■

Teorema 3.35 *Sea* Π *un plano métrico, entonces cada recta tiene a lo más un polo.*

Demostración: Supongamos que P_1 y P_2 son polo de l, si P_1 es polo de l, entonces $\exists\ u, v \in \mathcal{L}$ distintas tales

$$u \perp l \ \wedge \ u \cap v = \{P_1\}$$

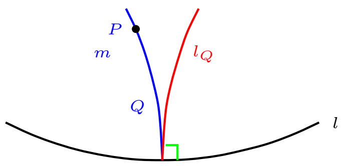


Pero $u \perp l$ y $v \perp l$, por teorema anterior $P_2 \mathcal{I} u$ y $P_2 \mathcal{I} v$, si los puntos fueran distintos las recta u, v serían iguales lo cual es imposible, por lo tanto $P_1 = P_2$, es decir

$$u \cap v = \{P\} = \{P_1\} = \{P_2\}$$

■

Teorema 3.36 *Sea* Π *plano métrico.*
Si P *es polo de* l *y* $P \mathcal{I} m$*, entonces* $l \perp m$*.*



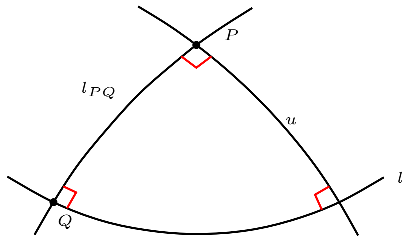
Demostración: Sea $Q \mathcal{I} m$, tal que $Q \neq P$ y sea $l_Q \in \mathcal{L}$ tal que $Q \mathcal{I} l_Q \ \wedge \ l_Q \perp l$, por ello tenemos que $P \mathcal{I} l_Q$ y además $Q, P \mathcal{I} m$, por ello

$$\begin{array}{rcl} l_Q & = & m \\ m & \perp & l \end{array}$$

■

Teorema 3.37 *Sea* Π *plano métrico.*
Si P *es polo de* l*, entonces todo punto tiene un recta polar y toda recta tiene un polo.*

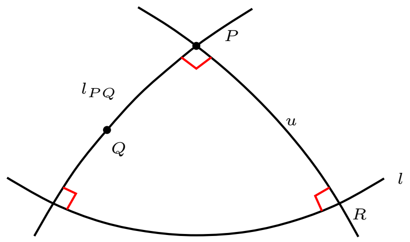
Demostración: Sea Π plano métrico y P es polo de l. Dado Q un punto en el plano métrico.



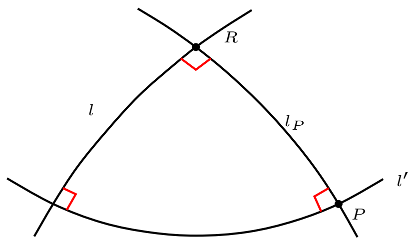
Primer caso $Q\mathcal{I}l$.
Sea l_{PQ} la recta que une P, Q, además u recta ortogonal a l_{PQ} en el punto P, por ello tenemos que

$$l_{PQ} \perp u \wedge l \perp u$$

Además ambas contiene a Q.
Segundo caso $Q\not{\mathcal{I}}l$.



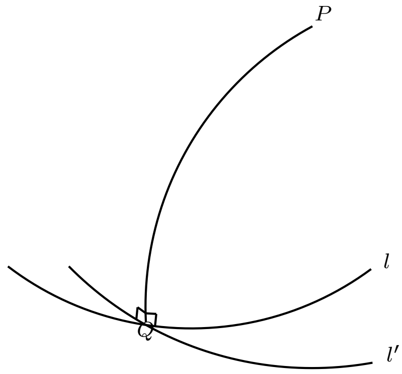
Sea l_{PQ} la recta que une P, Q, de este modo tenemos $l_{PQ} \perp l$. Además sea u la recta tal que $u \perp l_{PQ}$ y contiene P, de este modo l_{PQ} es la recta polar de $u \cap l = \{R\}$ y Q pertenece a ella. Aplicando el caso anterior, se construye la recta polar.
Para la otra parte.



Dado l' una recta, luego contiene un punto P y por lo anterior el tiene una recta polar l. Luego tenemos $l \perp l'$. Consideremos l_P, la recta perpendicular a l' en el punto P, por ello $l_P \perp l$, de este modo tenemos que $l_P \cap l = \{R\}$ es el polo de l'. ∎

Propiedad 3.38 *Sea* Π *plano elíptico.*
Si P *es polo de* l*, entonces* P *tiene solamente una recta polar.*

Demostración: Sea P polo de l y l'.
Toda recta ortogonal a l, pasa por P, y por ende es ortogonal a l' y toda recta l'' tal que $P\mathcal{I}l''$ tenemos que $l'' \perp l$ y $l'' \perp l'$.
Sea $Q\mathcal{I}l \wedge Q\mathcal{I}l'$, l_Q la recta ortogonal a l, luego $P\mathcal{I}l_Q$, de lo cual $l_Q \perp l'$.
Es decir, l, l' son ortogonales a l_Q en el punto Q, luego por unicidad de la recta ortogonal, tenemos que $l = l'$.

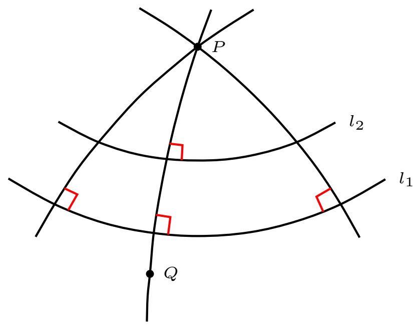


$\blacksquare$

Teorema 3.39 *Sea* Π *plano métrico.*
Si cada recta contiene un polo, entonces Π *es un plano elíptico.*

Demostración: Sea $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$, por demostrar que $l_1 \cap l_2 \neq \varnothing$.
Supongamos que P es el polo de l_1 y Q es polo de l_2, como $l_1, l_2 \perp l_{PQ}$, entonces l_1 y l_2 pasan por el polo de l_{PQ}, por lo tanto

$$l_1 \cap l_2 \neq \varnothing$$



$\blacksquare$

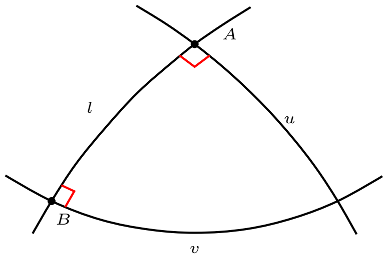
Teorema 3.40 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. Π *es un plano elíptico.*
2. *Cada recta tiene un polo*
3. *Cada punto tiene una recta polar.*
4. *Existe un par polo-polar*
5. *El plano* Π *contiene un triángulo polar.*

Demostración:

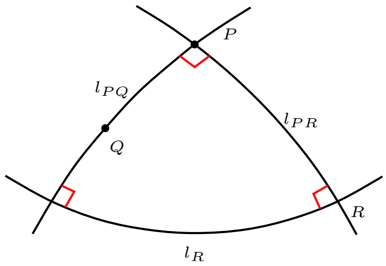
1. Sea Π un plano elíptico, por demostrar que cada recta tiene un polo.

   Dada la recta l y $A, B\mathcal{I}l$ distintas.
   Sean $u, v \in \mathcal{L}$, tal que $A\mathcal{I}u$, $u \perp l$ y $B\mathcal{I}v$, $v \perp l$, de este modo tenemos $u \cap v = \{P\}$, de donde P es el polo de l.

2. Si cada recta tiene un polo, por demostrar cada punto tiene una polar.

   Sea P un punto, escogemos Q otro punto, luego la recta l_{PQ} tiene un polo R, trazamos la recta l_{PR} y la recta ortogonal a l_R, ortogonal a l_{PR}, de la construcción obtenemos que l_R es la recta polar a P.

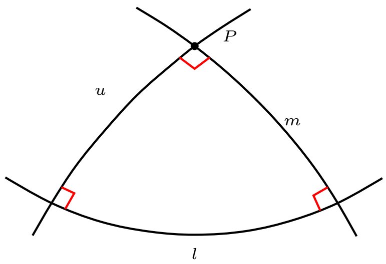
3. Si cada punto tiene una recta polar entonces existe un par polo-polar.

   Este demostración se deja para el lector, dado que es trivial.

4. Si existe un par polo-polar entonces el plano Π contiene un triángulo polar.

   Sea (P, l) par polo polar.
   Sea $m \in \mathcal{L}$ tal que $m \perp u \;\wedge P\mathcal{I}m$, entonces $m \perp l$

   existe un triángulo polar.

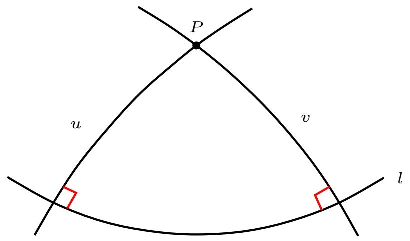
   

5. Si existe un triángulo polar entonces Π es un plano elíptico.

   Sea (P, l) una par polar, por teorema 3.37 toda recta tiene un polo y aplicando teorema 3.39 Π es elíptico. ■

3.5.1. Colineaciones en el Plano Elíptico

Sean Π plano elíptico y (P, l) par polo-polar.



Si P es polo de l, entonces existen $u, v \in \mathcal{L}$ tales que $u, v \perp l \ \wedge \ u \cap v = \{P\}$.
De lo cual obtenemos que $R_l(P) = P$.

Observación: Recordemos que una rotación σ de centro Q en un plano métrico significa que existen $u, v \in \mathcal{L}$ tales que $u \cap v = \{Q\}$ y $\sigma = R_u \circ R_v$

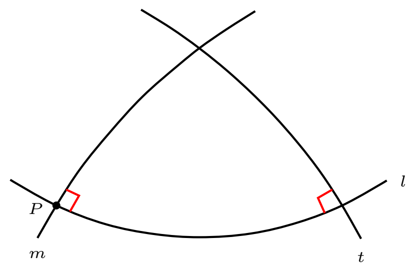
Propiedad 3.41 *Sea Π plano elíptico y σ una rotación de centro P, entonces existe $l \in \mathcal{L}$ tal que $\sigma(l) = l \ \wedge \ P \not\mathcal{I} l$.*

Demostración: Sea σ es rotación, entonces

$$(\exists l, m \in \mathcal{L})(\sigma = R_l \circ R_m \ \wedge \ m \cap l = \{P\})$$

Sea t la recta polar de P, de donde se tiene que $m \perp t \ \wedge \ l \perp t$
entonces

$$\begin{array}{rcl} \sigma(t) & = & (R_l \circ R_m)(t) \\ & = & R_l(R_m(t)) \\ & = & R_l(t) \\ \sigma(t) & = & t \end{array}$$



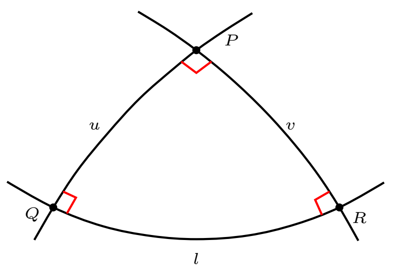
De este modo se obtiene que t esta fija.

$$\sigma(t) = t$$

■

Propiedad 3.42 *Sea Π plano elíptico y H_P una simetría puntual, entonces H_P fija tres puntos.*

Demostración: Como H_P es una simetría puntual, existen $u, v \in \mathcal{L}$ tales que $u \cap v = \{P\} \wedge u \perp v$ y $H_P = R_u \circ R_v$.

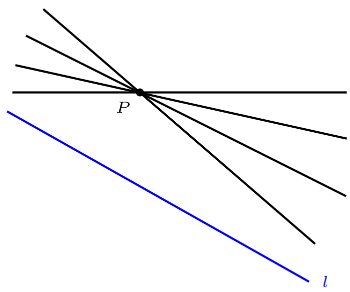


Sea l la recta polar de P, y los puntos de incidencia $l \cap u = \{Q\} \wedge l \cap v = \{R\}$. Por propiedad anterior $H_P(l) = l$.
Sabemos que $Q\mathcal{I}l, u$, $R_v(Q)\mathcal{I}l, u$, de lo cual tenemos $R_v(Q) = Q$ y por ende tenemos $H_P(Q) = Q$ análogamente $H_P(R) = R$. ■

3.6. Plano Hiperbólico

Un plano hiperbólico $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \perp)$ es un plano métrico Π que satisface el axioma hiperbólico, es decir,

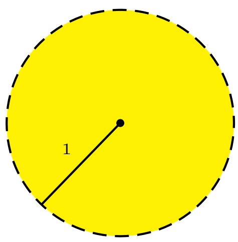
1. Los axiomas afines
2. Los axiomas de ortogonalidad
3. Los axiomas de colinealidad
4. **Axioma hiperbólico:** Si $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$ tal que $P \not\!\mathcal{I} l$ entonces por P pasan infinitas paralelas a la recta l.



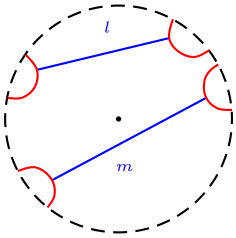
3.6.1. Modelo de Klein

Construyamos el modelo de Klein de un Plano Hiperbólico.
El conjunto de punto del plano, corresponde al interior del circulo unitario, es decir,

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$



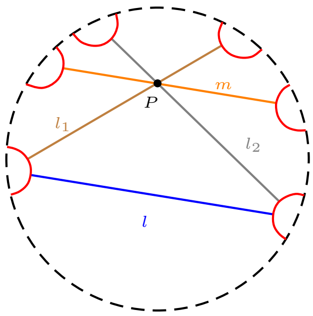
Las rectas del plano, corresponde a las cuerda en el circulo unitario, de otro modo son las recta del plano cartesiano intersecta con el circulo, cuando estas es no vacías, $l, m \in \mathcal{L}$



$$\mathcal{L} = \{\text{ Las cuerdas de las circunferencia unitaria}\}$$

La incidencia corresponde a la pertenecía.

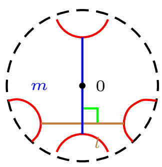
Relación de Paralelismo Dos rectas son paralelas, si no tiene puntos en común.
En la figura, las rectas paralelas a l que pase por P, son cualquier recta que pase por P y se encuentre situada entre las rectas l_1 y l_2.



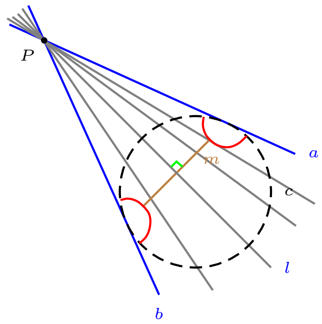
Observación: En el caso Euclidiano, sólo se tiene que $m \parallel l$.

Relación de Ortogonalidad Dos rectas $l, m \in \mathcal{L}$ son ortogonales, si cumple una de las siguientes condiciones

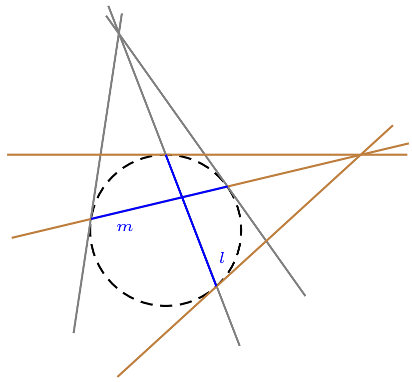
a) Si l o m es un diámetro es la ortogonalidad Euclidiana:



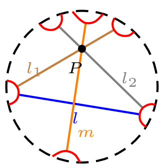
b) Si ninguna de las cuerdas es un diámetro, trazamos las tangente a, b a la circunferencia, en los puntos de intersección de la prolongación de m con la circunferencia, y prolongamos la recta l, si la prolongación pasa por el punto de intersección de las tangente, decimos que las recta m es ortogonal a la recta l.



De otro modo, si $m \perp l$, entonces existen tangentes a la circunferencia en los puntos de intersección con las cuerdas, de modo que las extensiones de ambas pasan por los puntos de intersección de las tangentes.



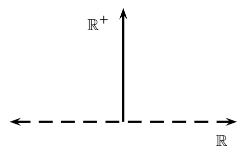
Observación: La ortogonalidad hiperbólica, no respecta paralelismo.



3.6.2. Modelo de Poincaré

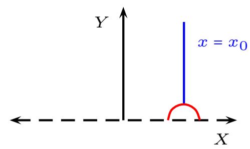
Construyamos el modelo de Poincaré, de un plano Hiperbólico.
El conjunto de puntos del plano, son los puntos del semiplano superior del plano cartesiano, es decir,

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

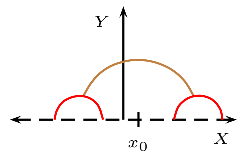


El conjunto de las rectas, esta formado por dos tipos:

1. Semirecta Paralelas al eje Y; $l : x = x_0$

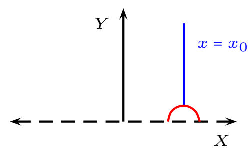


2. Semicircunferencias $l : (x - x_0)^2 + y^2 = r^2$

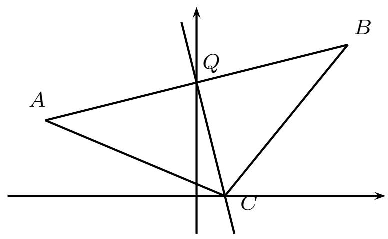


Por dos puntos pasa un única recta. Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathcal{P}$.

1. Si $x_0 = x_1$, las recta es $l : x = x_0$



2. Si $x_0 \neq x_1$ entonces, sea Q el punto medio del segmento que une los puntos $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, tracemos la perpendicular, al segmento en Q y la intersección con el eje X es el centro de la semicircunferencia y el radio la distancia a uno de los puntos



Ejemplo 3.43 *Sean $A = (1, 2)$ y $B = (3, 5)$ en el plano de Poincare.*
Determinar la ecuación de la recta que une los puntos

Solución: El punto medio es $M = (2, \frac{7}{2})$, la pendiente de la recta es

$$m = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}.$$

Luego la ecuación de la recta tangente esta dada por

$$y - \frac{7}{2} = -\frac{2}{3}(x-2)$$

Para $y = 0$, $x_0 = \frac{29}{4}$, y las distancia tenemos

$$d(A,O) = D(B,O) = \sqrt{(1-29/4)^2+4} = \sqrt{\frac{689}{16}}$$

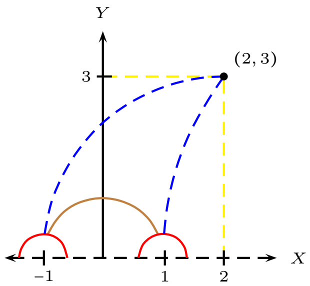
De lo cual tenemos

$$l_{AB} : \left(x - \frac{29}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{689}{16}$$

□

Ejemplo 3.44 *En el semiplano de Poincare.*
Dada la recta $l : x^2 + y^2 = 1$ y el punto $P = (2,3)$.
Determine las rectas paralelas hiperbólicas a la recta l y que pasa por P.

Solución: Grafiquemos la semicircunferencia unitaria de centro el origen y punto correspondiente.



Notemos que existen posibles semicircunferencias y una semirecta paralela Por ello debe, tener ecuación

$$m : (x - x_0)^2 + y^2 = r^2$$

y debe pasar por los puntos $(2,3), (t,0)$, $t \in \mathbb{R} -]-1,1[$ y $t \neq 2$ reemplazando obtenemos

$$\begin{array}{rcl|} (2-x_0)^2 + 9 & = & r^2 \\ (t-x_0)^2 & = & r^2 \\ \hline \end{array}$$

sustituyendo obtenemos

$$\begin{array}{rcl} (2-x_0)^2 + 9 & = & (t-x_0)^2 \\ 4 - 4x_0 + x_0^2 + 9 & = & t^2 - 2tx_0 + x_0^2 \\ 13 - t^2 & = & (4-2t)x_0 \\ x_0 & = & \frac{13-t^2}{4-2t} \end{array}$$

De donde se concluye que

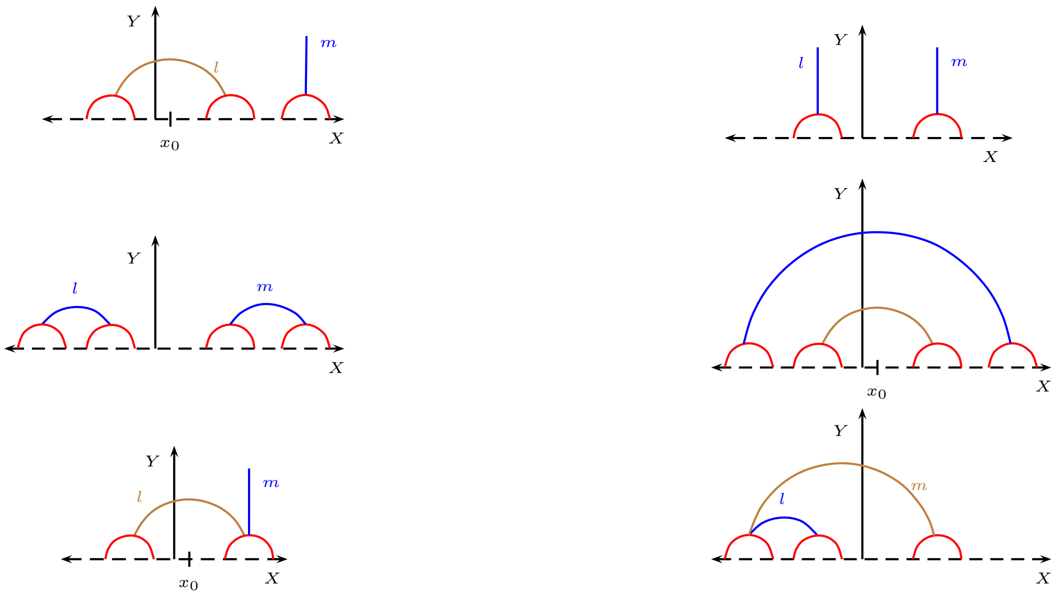
$$m_t : \left(x - \frac{13 - t^2}{4 - 2t}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{t^2 - 4t + 13}{4 - 2t}\right)^2, \text{ con } |t| \geq 1$$

Además

$$m : x = 2$$

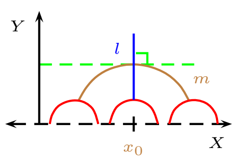
□

Relación de Paralelismo: Dos rectas son paralelas, si no tiene puntos en común:

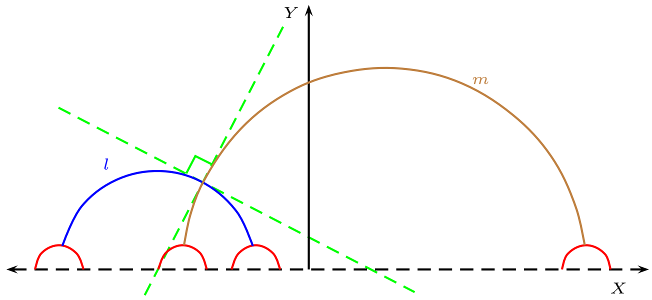


Relación de Ortogonalidad: El ángulo entre un semirecta y una semicircunferencia corresponde a la recta tangente a la semicircunferencia con la semirecta y para el caso de dos semi circunferencia, es el ángulo entre las tangente a las circunferencias en el punto de intersección. Las rectas l y m son perpendiculares en los siguientes casos

1. Una semicircunferencia con la semirecta $l \perp m$

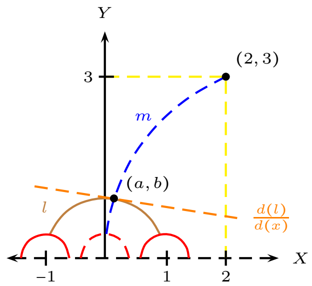


2. Dos semi circunferencia $l \perp m$



Ejemplo 3.45 *En el semiplano de Poincare.*
Dada la recta $l : x^2 + y^2 = 1$ *y el punto* $P = (2, 3)$*.*
Determine las rectas ortogonales hiperbólicas a la recta l *y que pasa por* P*.*

Solución: Grafiquemos la semicircunferencia unitaria de centro el origen y punto correspondiente.



La recta ortogonal, sólo puede ser del tipo semicircunferencia, para ello sea
Sea $m : (x - x_0)^2 + y^2 = r^2$, la recta solicitada.
Luego existe $Q = (a, b)$ tal que $P\mathcal{I}m$, $Q\mathcal{I}m$, $Q\mathcal{I}l$ reemplazando tenemos:

$$\begin{array}{rcl|}
(2 - x_0)^2 + 9 & = & r^2 \\
(a - x_0)^2 + b^2 & = & r^2 \\
a^2 + b^2 & = & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Además deben ser perpendiculares, para ello calculemos la pendiente de la recta tangente en el punto Q.

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{d(l)}{d(x)} : \quad 2x + 2y \cdot y' & = & 0 \\
y' & = & -\dfrac{x}{y} \\
y'|_{(a,b)} & = & -\dfrac{a}{b}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d(m)}{d(x)} : \quad 2(x - x_0) + 2y \cdot y' & = & 0 \\
y' & = & \dfrac{x_0 - x}{y} \\
y'|_{(a,b)} & = & \dfrac{x_0 - a}{b}
\end{array}$$

luego tenemos,

$$\begin{array}{rcl}
-\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{x_0 - a}{b} & = & -1 \\
-ax_0 + a^2 & = & -b^2 \\
a^2 + b^2 & = & ax_0 \\
1 & = & ax_0
\end{array}$$

Volvamos al sistema, igualando r^2 obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{array}{rcll} (2-x_0)^2+9 & = & (a-x_0)^2+b^2 & \\ 4-4x_0+x_0^2+9 & = & a^2-2ax_0+x_0^2+b^2 & \\ 2ax_0-4x_0 & = & -12 & /\div 2 \\ 2x_0-ax_0 & = & 6 & \end{array}$$

y reemplazando

$$\begin{array}{rcl} 2x_0-ax_0 & = & 6 \\ 2x_0-1 & = & 6 \\ 2x_0 & = & 7 \\ x_0 & = & \frac{7}{2} \end{array}$$

Reemplazamos en la primera ecuación del sistema:

$$\begin{array}{rcl} \left(2-\frac{7}{2}\right)^2+9 & = & r^2 \\ \frac{9}{4}+9 & = & r^2 \\ \frac{45}{4} & = & r^2 \end{array}$$

Finalmente tenemos la ecuación de la recta tangente a l es

$$m:\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+y^2=\frac{45}{4}$$

$\square$

Ejercicio 3.46 *En el semiplano de Poincare.*
Dada la recta $l: x^2+y^2=1$ *y el punto* $P=(-5,8)$.
Determine las rectas ortogonales hiperbólicas a la recta l *y que pasa por* P.

Observación: Notemos que el semiplano de Poincare, también se puede describir del siguiente modo

$$\mathcal{P}=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ (z)>0\}$$

y las rectas están dadas por

$$l: Re(z)=a \quad \vee \quad l:|z-x_0|=r,\ Im(x_0)=0$$

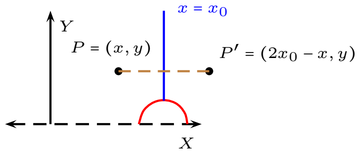
Donde $Re(z)=a$ es la parte real de z y $Im(z)$ es la parte imaginaria de z.

3.6.3. Simetrías en el Semiplano de Poincaré

Para determinar las simetrías de semiplano superior de Poincaré, considere

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } (z) > 0\}$$

y debemos tener presente que hay dos tipo de rectas en el Semiplano de Poincaré
Caso 1: Simetría de eje la semirecta $k : Re(z) = x_0$
Recordemos la simetría respecto a la recta en el plano euclidiano



$$R_k(x, y) = (2x_0 - x, y)$$

En nuestro caso tenemos

$$R_k(z) = 2x_0 - \overline{z}$$

Caso 2: Simetría respecto a la semicircunferencia,

1. Veamos primero simetría respecto a la recta $l : |z| = 1$.

   Ya que $|z| = 1$, luego tenemos que $z \cdot \overline{z} = 1$, de lo cual tenemos

   $$z = \frac{1}{\overline{z}}$$

   es decir, la función $R(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ deja fijo los punto de la circunferencia unitaria.

   a) $R(z) = \frac{1}{z\overline{z}}z$, luego si $Im(z) > 0$ entonces $Im(R(z)) > 0$, ya que sólo es amplificado por un número positivo.

   b) $R(R(z)) = z$, por ello se tiene que $R^2 = I$.

   c) Es una colineación.
   Si $k_a : x = a \neq 0$, entonces $R(l) = \{(\frac{a}{a^2+y^2}, \frac{y}{a^2+y^2}) \mid y \geq 0\}$.
   Sean $u = \frac{a}{a^2+y^2}$, $v = \frac{y}{a^2+y^2}$, de lo cual obtenemos $\frac{av}{u} = y$, reemplazando tenemos

   $$\begin{aligned} u &= \frac{a}{a^2 + (av/u)^2} \\ 1 &= \frac{u}{au^2 + av^2} \\ au^2 - u + av^2 &= 0 \\ \left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 &= \frac{1}{4a^2} \end{aligned}$$

   Es un circulo de centro $(\frac{1}{2a}, 0)$ y radio $\frac{1}{2|a|}$.
   Cuando $a = 0$, la recta queda fija.

d) Las semicircunferencia de centro a y radio r, tal que $a^2 \neq r^2$.
Sea $l : (x-a)^2 + y^2 = r^2$, luego tenemos

$$R(l) = \left\{ \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) \mid y \geq 0 \right\}.$$

Notemos que

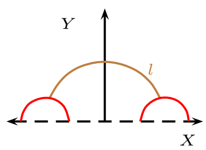
$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{a}{a^2-r^2} \right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)^2 \\
= & \left(\frac{x(a^2-r^2) - a(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(a^2-r^2)} \right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)^2 \\
= & \frac{x^2(a^2-r^2)^2 + a^2(x^2+y^2)^2 - 2xa(a^2-r^2)(x^2+y^2) + y^2(a^2-r^2)^2}{(x^2+y^2)^2(a^2-r^2)^2} \\
= & \frac{(x^2+y^2)(a^2-r^2)^2 + a^2(x^2+y^2)^2 - 2xa(a^2-r^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2(a^2-r^2)^2} \\
= & \frac{(a^2-r^2-2xa)(a^2-r^2) + a^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(a^2-r^2)^2}
\end{aligned}$$

Teniendo presente $l : x^2 + y^2 = r^2 - a^2 + 2ax$, obtenemos que

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{a}{a^2-r^2} \right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)^2 = \frac{r^2}{(a^2-r^2)^2}$$

Notemos que: Cuando $a^2 = r^2$, la semicircunferencia es enviada en la semirecta $l : x = \frac{1}{2a}$.
Las semicircunferencia de centro el origen y radio r, son enviados en semicircunferencia de centro el origen y radio $1/r$.
Por el calculo anterior, se cumple la incidencia. Del mismo modo repasando cada caso, tenemos que preserva ortogonalidad

e) Por todo lo anterior tenemos que $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ es una simetría respecto al semicircunferencia unitaria, con centro en el origen.

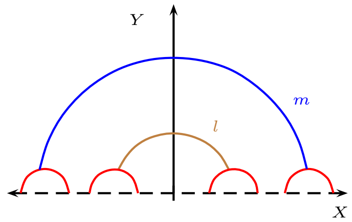


2. Simetría respecto a la recta $m : |z| = r$
Consideremos las homotecia de centro $(0,0)$ y de razón $r > 0$.

$$\begin{aligned} h_r : \ & \mathbb{C} & \to & \ \mathbb{C} \\ & z & \rightsquigarrow & \ h_r(z) = r \cdot z \end{aligned}$$

La cual respecta incidencia y ortogonalidad, es decir,

$$h_r(l) = m; h_r \in \mathrm{Aut}(\Pi)$$



Por propiedad 3.4 tenemos que $\sigma(a) = a'$, entonces:

$$\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} = R_{a'}.$$

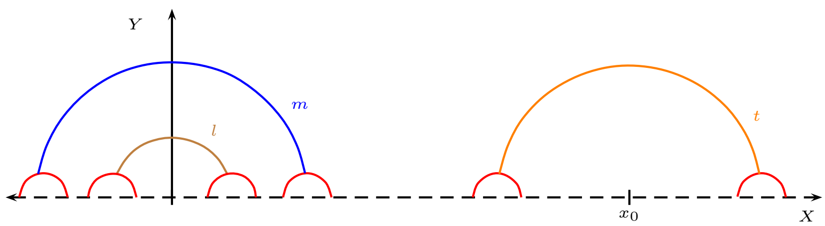
En nuestro caso tenemos que $h_r(l) = m$, entonces:

$$\begin{array}{rcll} h_r \circ R_l \circ h_r^{-1} & = & R_m & ; h_r^{-1} = h_{\frac{1}{r}} \\ \left(h_r \circ R_l \circ h_{\frac{1}{r}}\right)(z) & = & R_m(z) & \\ h_r\left(R_l(\frac{z}{r})\right) & = & R_m(z) & \\ h_r\left(\frac{r}{\overline{z}}\right) & = & R_m(z) & \\ \frac{r^2}{\overline{z}} & = & R_m(z) & \end{array}$$

3. Consideremos el eje simetría $t : |z - x_0| = r$

   La traslación en x_0 respecta incidencia y ortogonalidad

$$\begin{array}{rccl} t_{x_0} : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \rightsquigarrow & t_{x_0}(z) = z + x_0 \end{array}$$



$$l \xrightarrow{h_r} m \xrightarrow{t_{x_0}} t$$

Análogamente entonces se tiene

$$\begin{array}{rcl} R_t & = & t_{x_0} \circ R_m \circ t_{x_0}^{-1} \\ R_t(z) & = & t_{x_0}\left(R_m\left(z - x_0\right)\right) \\ R_t(z) & = & t_{x_0}\left(\dfrac{r^2}{\overline{z} - x_0}\right) \\ R_t(z) & = & \dfrac{r^2}{\overline{z} - x_0} + x_0 \end{array}$$

Propiedad 3.47 *Sea R_l una simetría del plano de Poincaré y $a \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que*

1. *Si $l : Re(z) = a$*
$$R_l(z) = 2a - \overline{z}$$

2. *Si $l : |z - a| = r$.*
$$R_l(z) = \frac{r^2}{\overline{z} - a} + a$$

Ejemplo 3.48 *Sea Π semiplano de Poincaré y $P = 2 + 3i$.*
Determine un simétrica puntual H_P, respecto al punto P.

Solución: Sea H_P la simetría puntual, luego corresponde a una rotación en 180°.
Para ello debe existir $a, b \in \mathcal{L}$ tales que

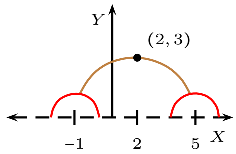
$$H_P = R_a \circ R_b; \quad a \cap b = \{P\} \quad \wedge \quad a \perp b$$

Consideremos la semicircunferencia b de centro 2 y radio 3 y a la semirecta vertical en $Re(z) = 2$.

$$a : Re(z) = 2; \quad b : |z - 2| = 3$$

y satisface lo pedido

$$a \cap b = \{2 + 3i\} \wedge a \perp b$$



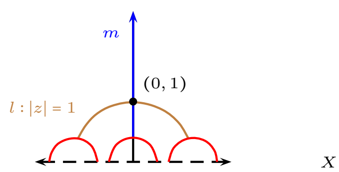
$$\begin{aligned} H_P(z) &= (R_b \circ R_a)(z) \\ H_P &= R_b(4 - \overline{z}) \\ H_P &= \frac{9}{2 - z} + 2 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.49 *Sea σ una rotación de centro i y $\sphericalangle 180°$ en el semiplano de Poincaré. Determine $\sigma(z)$.*

Solución: Las rotaciones de centro $(0, 1)$, es compuesta de dos simetrías ortogonales que se intersecta en el punto $(0, 1)$.
De otro modo:

$$(\exists l, m \in \mathcal{L})(l \perp m \ \wedge \ l \cap m = \{(0, 1)\})$$



1. Si una es una semirecta $m : Re(z) = 0$ y $l : x^2 + y^2 = 1$ tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sigma & = & R_l \circ R_m \\ \sigma(z) & = & R_l\left(R_m(z)\right) \\ \sigma(z) & = & R_l(0 - \overline{z}) = \frac{1}{-z} \end{array}$$

Es una rotación en 180°

$$\sigma(z) = -\frac{1}{z} = -z^{-1}$$

2. Si la dos recta son semicircunferencias:

$$l_0 : |z - x_0| = r_0, \quad l_1 : |z - x_1| = r_1$$

Deben pasar por $(0,1)$ y perpendicular sera en 180°

$$\left.\begin{array}{rcl} x_0^2 + 1 & = & r_0^2 \\ x_1^2 + 1 & = & r_1^2 \\ x_0 x_1 & = & -1 \end{array}\right|$$

Realizando la compuesta obtenemos

$$\sigma(z) = R_{l_1} \circ R_{l_0}(z) = \frac{r_1^2 x_0}{z(x_1 - x_0)}$$

Notemos que

$$\frac{r_1^2 x_0}{z(x_1 - x_0)} = \frac{r_1^2 x_0 x_1}{z(x_1^2 - x_0 x_1)} = \frac{-r_1^2}{z(x_1^2 + 1)} = \frac{-1}{z}$$

de este modo obtenemos la función anterior. □

Ejemplo 3.50 *En el plano de Poincaré*
Determinar el grupo de rotaciones de centro en i.

Solución: Consideremos que usando traslación y homotecia siempre podemos considerar que una de las rectas es una semicircunferencia de radio 1 y centro en el origen, por el ejemplo 3.49 anterior no consideramos el caso que la otra sea una semirecta.

$$l : |z| = 1 \wedge m : |z - a| = r$$

donde $i\mathcal{I}m$ es decir, $1 + a^2 = r^2$, luego $R_l \circ R_m$ es una rotación de centro i.

$$R_l(R_m(z)) = R_l\left(\frac{r^2 + a\overline{z} - a^2}{\overline{z} - a}\right) = \frac{z - a}{r^2 + az - a^2} = \frac{z - a}{1 + az}$$

La rotación depende solo del valor de $a \neq 0$, y por el ejemplo anterior tenemos

$$\sigma_a(z) = \frac{z - a}{1 + az} \quad \vee \quad \sigma_\infty(z) = \frac{-1}{z}$$

Veamos la composición de dos rotaciones

$$\sigma_b(\sigma_a(z)) = \sigma_b\left(\frac{z-a}{1+az}\right) = \frac{\frac{z-a}{1+az} - b}{1 + b\frac{z-a}{1+az}} = \frac{z-a-b(1+az)}{1+az+b(z-a)} = \frac{z(1-ab)-(a+b)}{z(a+b)+(1-ab)}$$

Luego tenemos

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \begin{cases} \sigma_{\frac{a+b}{1-ab}} & \text{si} \quad ab \neq 1, \\ \sigma_\infty & \text{si} \quad ab = 1 \end{cases}$$

Además $\sigma_\infty \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_\infty = \sigma_{\frac{-1}{a}}$ □

3.7. Problemas Misceláneos

Ejemplo 3.51 *En $\Pi = \mathbb{Z}_{13}^2$, plano métrico con $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + 2y_1y_2$.*
Sean $A = (5,1)$, l la recta que une los puntos $B = (3,2)$ y $C = (1,4)$.
Determine la ecuación de la recta m, tal que $A\mathcal{I}m$ y $m \perp l_{BC}$

Solución: La Recta $l :< 2,-2) > +(3,2)$, la recta ortogonal

$$f((2,-2),(a,b)) = 2a - 4b = 0$$

Luego una solución es $(a,b) = (2,1)$
Por ello

$$m =< (2,1) > +(5,1)$$

□

Ejemplo 3.52 *En $\Pi = \mathbb{Z}_{11}^2$, plano métrico con $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + 5y_1y_2$ y el punto $A = (5,1)$.*
Determine la simetría puntual $H_A(x,y)$.

Solución: (a) Consideremos la recta $a :< (1,0) > +(5,1)$ y $b :< (0,1) > +(5,1)$, rectas perpendiculares y pasan por A

$$\begin{aligned} H_A(x,y) &= R_a \circ R_b(x,y) \\ &= R_a(2(5,1) - (x,y) + \frac{2}{5}(5y-5)(0,1) \\ &= R_a(10-x,y) \\ &= 2(5,1) - (10-x,y) + 2(5-x)(1,0) \\ &= (x, 2-y) + 2(5-x)(1,0) \\ &= (10-x, 2-y) \end{aligned}$$

(b) Dada la recta $a :< (5,1) >$, tenemos que $f((5,1),(c,d)) = 5c + 5d = 0$, luego $b :< (1,-1) > +(5,1)$.

Veamos las Simetrías

$$\begin{aligned} R_a(x,y) &= -(x,y) + \frac{2}{30}(5x+5y)(5,1) \\ &= -(x,y) + 4(x+y)(5,1) \\ &= (8x+9y, 4x+3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_b(x,y) &= (10,2) - (x,y) + \frac{2}{6}((x-5) - 5(y-1))(1,-1) \\ &= (10-x, 2-y) + 4(x-5y)(1,-1) \\ &= (10-x, 2-y) + (4x+2y)(1,-1) \\ &= (10+3x+2y, 2+7x+8y) \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} H_A(x,y) &= R_b \circ R_a(x,y) = R_b(8x+9y, 4x+3y) \\ &= (10+3(8x+9y)+2(4x+3y), 2+7(8x+9y)+8(4x+3y)) = (10-x, 2-y) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.53 *En el plano métrico $\Pi = \mathbb{Z}_{13}^2$, donde $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + 2y_1y_2$. Sean $A = (1,2)$, $B = (3,1)$, $C = (1,-1)$ puntos y la recta $l : 3x+2y = 1$.*

1. *Determine la ecuación cartesiana de la recta m que pasa por A y B.*
2. *Determine la ecuación vectorial de la recta k que pasa por C y es ortogonal a l.*
3. *Calcular $R_k \circ R_l(x,y)$.*

Solución: (a) La pendiente de la recta que pasa por A, B es $m = \frac{2-1}{1-3} = \frac{1}{-2} = 6$.

$$y - 1 = 6(x-3); \qquad 7x + y = 9.$$

(b) La recta ortogonal a $l :< (-2,3) > +(1,-1)$ son paralela a $< (3,1) >$ y si pasa por C esta dada por $k =< (3,1) > +(1,-1)$.
(c) La simetría esta definida por

$$R_a(x) = 2w - x + 2\frac{f(x-w,v)}{f(v,v)}v$$

donde $a :< v > +w$.
Calcula cada uno por separado y componiendo

$$\begin{aligned} R_l(x,y) &= (10-3x+6y, 12-10x+3y) \\ R_k(x,y) &= (5-10x-6y, 12-3x-3y) \\ R_k \circ R_l(x,y) &= R_k(10-3x+6y, 12-10x+3y) \\ &= (2-x, 11-y) \end{aligned}$$

(c') Dada $k :< v > +w$ y $l :< u > +w$ tal que $f(v,u) = 0$, entonces

$$R_k \circ R_l(X) = X - 2\frac{f(X-w,v)}{f(v,v)}v - 2\frac{f(X-w,u)}{f(u,u)}u$$

Veamos $k :< (3,1) > +(1,-1),\ l :< (-2,3) + (1,-1)$ "solución particular más homogénea"

$$\begin{array}{ll} f(v,v) = 11, & f(X-w,v) = 3(x-1) + 2(y+1) = 3x + 2y - 1, \\ f(u,u) = 22, & f(X-w,u) = -2(x-1) + 6(y+1) = -2x + 6y + 8 \end{array}$$

Note que $11^{-1} = 6$.

$$\begin{array}{rcl} R_k \circ R_l(x,y) & = & (x,y) - 12(3x+2y-1)(3,1) - 6(-2x+6y+8)(-2,3) \\ & = & (x,y) + (3x+2y-1)(3,1) + (-x+3y+4)(-2,3) \\ & = & (2-x, 11-y) \end{array}$$

□

Ejemplo 3.54 *En el plano Euclidiana Real usual* $\mathbb{R}^2$.
Sean $A = (1,4)$, $B = (3,1)$, $C = (1,-1)$ *puntos y la recta* $l : 2x + 3y = 1$

1. *Determine si la recta que pasa por los puntos* A *y* B *es ortogonal a* l.
2. *Determine* $R_l(C)$.
3. *Determine la ecuación cartesiana de la recta* b, *tal que* $R_b(B) = C$.

Solución: (a) La recta que pasa por A y B, tiene pendiente $m = \frac{1-4}{3-1} = -\frac{3}{2}$ y la recta l tiene pendiente $-\frac{2}{3}$, luego no son perpendiculares.
(b) La ecuación vectorial de la recta $l :< (3,-2) > +(-1,1)$.

$$R_l(C) = (-2-1, 2+1) + \frac{2}{13}(1+1, -1-1)\cdot(3,-2)\cdot(3,-2) = (-3,3) + \frac{20}{13}(3,-2) = \left(\frac{21}{13}, -\frac{1}{13}\right)$$

(c) El punto medio entre B, C es $(2,0)$, y la pendiente de la recta que une B, C es $m = \frac{1+1}{3-1} = 1$. De este modo la recta que buscamos es $b : y = -x + 2$. □

Ejemplo 3.55 *Sean* $\Pi = (V, f)$ *plano vectorial euclidiano,* $a \in \mathcal{L}$, *tal que* $R_a(v) = w$.
Demostrar que el punto medio entre v *y* w *es un punto fijo de la Simetría* R_a

Solución: Sea $a :< u > +z \in \mathcal{L}$, además $R_a(v) = w$ y $v = R_a(w)$.

$$\begin{array}{rcl} R_a(v) & = & 2z - v + 2\frac{f(v-z,u)}{f(u,u)}u = w \\ R_a(w) & = & 2z - w + 2\frac{f(w-z,u)}{f(u,u)}u = v \end{array}$$

Sumando tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
R_a\left(\frac{1}{2}(v+w)\right) & = & 2z - \frac{1}{2}(v+w) + 2\left(\frac{f(\frac{1}{2}(v+w)-z,u)}{f(u,u)}\right)u \\
& = & 2z - \frac{1}{2}(v+w) + 2\left(\frac{f(\frac{1}{2}(v+w-2z),u)}{f(u,u)}\right)u \\
& = & \frac{1}{2}(4z-(v+w)) + 2\left(\frac{1}{2}\frac{f(v-z+w-z,u)}{f(u,u)}\right)u \\
& = & \frac{1}{2}\left[4z-(v+w) + 2\left(\frac{f(v-z,u)+f(w-z,u)}{f(u,u)}\right)u\right] \\
& = & \frac{1}{2}\left[4z-(v+w) + 2\left(\frac{f(v-z,u)}{f(u,u)} + \frac{f(w-z,u)}{f(u,u)}\right)u\right] \\
& = & \frac{1}{2}\left[2z - v + 2\frac{f(v-z,u)}{f(u,u)}u + 2z - w + 2\frac{f(w-z,u)}{f(u,u)}u\right] \\
& = & \frac{1}{2}\left[R_a(v) + R_a(w)\right] \\
& = & \frac{1}{2}(w+v).
\end{array}$$

□

Ejemplo 3.56 *En el plano Métrico Elíptico ξ. Sean el punto $A =< (2,1,3) >$ y $l : 2x - y + z = 0$ Determine los vértices y las ecuaciones de los lados del triángulo polar, de modo que l sea un lado y A incide en otro lado.*

Solución: Ya que un ado la recta es $l : 2x - y + z = 0$, tenemos que el polo es vértices $< (2,-1,1) >$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4x - 4y + 4z = 0.$$

El segundo lado es $l_2 : x + y - z = 0$ y su polo es $< (1,1,-1) >$
El tercer lado debe unir los polos

$$l_3 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3y + 3z = 0.$$

Luego el último vértice es $< (0,1,1) >$.
Los puntos son los polos de la recta correspondiente, luego es un triángulo polar.

$$< (2,-1,1) >, \quad < (1,1,-1) >, \quad < (0,1,1) >$$

y los lados son

$$l : 2x - y + z = 0, \quad l_2 : x + y - z = 0, \quad l_3 : y + z = 0.$$

□

Ejemplo 3.57 *En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean $P =< (-1,2,3) >$ y $l : 2x - 4y - 6z = 0$. Determine los vértices y lados del triángulo polar que tiene como vértice al punto P y lado a la recta l.*

Solución: El polo de $l : 2x - 4y - 6z = 0$ es $P =< (2, -4, -6) >$.
Luego consideremos punto de la recta $B =< (3, 0, 1) >$.

$$a : \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 10y - 6z = 0. \qquad b : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 21x + 7z = 0$$

De este modo tenemos que los lados son $l : 2x - 4y - 6z = 0$, $a : x + 5y - 3z = 0$, $b : 3x + z = 0$ y son rectas perpendiculares, ya que

$$f(3, 0, 1), (1, 5, -3)) = 0, \; f(3, 0, 1), (2, -4, -6)) = 0, \; f(2, -4, -6), (1, 5, -3)) = 0$$

Además, los vértices son: $a \cap l =< (3, 0, 1) >$, $a \cap b =< (-1, 2, 3) >$, $b \cap l =< (1, 5, -3) >$, □

Ejemplo 3.58 *En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean $A =< (1, 1, 1) >$ y $l : x - 2y - 2z = 0$.*

1. *Determine el polo de la recta l.*
2. *Determine la ecuación de la recta k ortogonal a l y que pasa por A.*
3. *Determine los vértices y lados del triángulo polar que dos de sus lados son k y l.*

Solución: (a) El polo de la recta l es $< (1, -2, -2) >$.
(b) La recta perpendicular a l, debe pasar por su polo $< (1, -2, -2) >$.

$$k : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3y - 3z = 0.$$

(c) El polo de la recta k es $< (0, 1, -1) >$. Finalmente buscamos un recta que pase por ambos polos.

$$m : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4x + y + z = 0.$$

Luego el triángulo polar tiene los vértices

$$< (1, -2, -2) >, \quad < (0, 1, -1) >, \quad < (4, 1, 1) >$$

y los lados son

$$l : x - 2y - 2z = 0, \quad k : y - z = 0, \quad m : 4x + y + z = 0$$

□

Ejemplo 3.59 *En el plano Métrico Elíptico ξ. Sean los bipuntos $A = [\pm(-4, 2, 3)]$ y $B = [\pm(1, -1, 2)]$ vértices de un triángulo polar.*
Determine el otro vértice y las ecuaciones de los tres lados del triángulo.

Solución: La recta que une los puntos es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7x + 11y + 2z = 0.$$

El tercer punto debe ser $C = [\pm(7, 11, 2)]$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \end{vmatrix} = -29(x - y + 2z) = 0. \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 7 & 11 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6(-4x + 2y + 3z) = 0.$$

Los puntos son los polos de la recta correspondiente, luego es un triángulo polar.

$$[\pm(7, 11, 2)], \quad [\pm(1, -1, 2], \quad [\pm(-4, 2, 3)]$$

y los lados son

$$l : 7x + 11y + 2z = 0, \quad k : x - y + 2z = 0, \quad m : -4x + 2y + 3z = 0.$$

□

Ejemplo 3.60 *En el plano métrico elíptico* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_5^3)$, *sean los puntos*

$$K =< (4, 1, 1) >, L =< (3, 1, 2) >, R =< (2, 1, 3) >, P =< (2, 3, 1) >, Y =< (4, 3, 0) > .$$

Determine si el punto R *incide en las rectas* l_{KL} *y* l_{PY}.

Solución:

$$l_{KL} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x + z = 0. \qquad l_{PY} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2x + 4y - z = 0.$$

Evaluando
$R\mathcal{I}l_{KL}$ si y sólo si $2 + 3 = 5 = 0$ y $R\mathcal{I}l_{PY}$ si y sólo si $4 + 4 - 3 = 5 = 0$.
Luego $l_{KL} \cap l_{PY} = \{R\}$. □

Ejemplo 3.61 *En el plano métrico elíptico* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{11}^3)$, *sean los puntos*

$$K =< (9, 1, 2) >, L =< (3, 0, 1) >, R =< (3, 9, 1) >, P =< (2, 1, 4) > .$$

Determine $l_{KL} \cap l_{RP}$.

Solución:

$$l_{KL}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 9 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 3y - 3z = 0. \qquad l_{RP}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2x - 10y + 7z = 0.$$

El punto de intersección se obtiene del despeje de la primer ecuación $x = 3y+3z$ y reemplazando en la segunda ecuación tenemos $6y + 6z - 10y + 7z = 0$, simplificando tenemos $-4y + 2z = 0$ de esto resulta que $z = 2y$, $x = 9y$, luego el punto esta dada por

$$(9y, y, 2y) \in < (9,1,2) >, \ y \in \mathbb{R}$$

Luego $l_{KL} \cap l_{RP} = \{< (9,1,2) >\}$. □

Ejemplo 3.62 *En el plano de Klein, sean la recta* $l : y = 3/5$ *y* $P = (\frac{1}{10}, \frac{2}{5})$.
Determine la recta m *tal que* $P\mathcal{I}m$ *y* $m \perp l$

Solución: Los extremos en la circunferencia unitaria de la cuerda $y = 3/5$ son $(4/5, 3/5)$, $(-4/5, 3/5)$ luego las rectas perpendiculares o tangente a la circunfencia en los puntos extremos de la cuerda son

$$\left.\begin{array}{rcl} y - 3/5 &=& -4/3(x - 4/5) \\ y - 3/5 &=& 4/3(x + 4/5) \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{rcl} y &=& -4/3x + 5/3 \\ y &=& 4/3x + 5/3 \end{array}\right|$$

El punto de intersección de las tangentes es $(0, 5/3)$,
Luego tenemos $\eta :< (\frac{1}{10}, -\frac{19}{15}) > +(0, \frac{5}{3})$. Forma cartesiana $\eta : 38x + 3y = 5$.

□

Ejemplo 3.63 *En el semiplano de Poincaré,* $l : |z - 3| = 4$.
Determine $R_l(1 + i)$ *y* $R_l(w)$

Solución: $R_l(w) = \frac{16}{\overline{w}-3} + 3$
Veamos el caso:

$$R_l(1 + i) = \frac{16}{-2 - i} + 3 = \frac{-32 + 16i}{5} + 3 = \frac{-17 + 16i}{5} = -\frac{17}{5} + \frac{16}{5}i$$

□

Ejemplo 3.64 *En el semiplano de Poincaré,* $k : |z + 2| = 3$ *y* $l : |z - 3| = 4$

1. *Determine* $k \cap l$.
2. *Determine si* $k \perp l$.
3. *Calcular la forma binomial de* $R_k(1 + 2i)$.

Solución: (a) Sea $z = a + bi$, luego $(a+2)^2 + b^2 = 9$ y $(a-3)^2 + b^2 = 16$
Restando obtenemos que

$$(2a-1)(-5) = (a-3)^2 - (a+2)^2 = 7,$$

de lo cual $a = -\frac{1}{5}$, evaluando tenemos que $b = \frac{12}{5}$.
De este modo tenemos que

$$a \cap b = \left\{ -\frac{1}{5} + \frac{12}{5} i \right\}$$

(b) Veamos las pendiente, $m_1 = \frac{12/5}{-1/5+2} = \frac{4}{3}$ y $m_2 = \frac{12/5}{-1/5-3} = -\frac{3}{4}$.
(b') la distancia entre los centros $d(-2,0),(3,0)) = 5$ y $3^2 + 4^2 = 5^2$, luego son ortogonales.
(c) $R_k(1+2i) = \frac{9}{1-2i+2} - 2 = \frac{1}{13} + \frac{18}{13} i$

□

Ejemplo 3.65 *En el semiplano de Poincaré,* $k : |z+3| = 8$ *y* $l : |z-10| = 12$
Calcular la forma binomial de $(R_k \circ R_l)(4+6i)$.

Solución:

$$\begin{array}{rcl}
(R_k \circ R_l)(4+6i) & = & R_k(R_l(4+6i)) \\
 & = & R_k\left(\dfrac{144}{4-6i-10} + 10\right) \\
 & = & R_k\left(\dfrac{144}{-6-6i} + 10\right) \\
 & = & R_k\left(\dfrac{24}{-1-i} + 10\right) \\
 & = & R_k\left(12(-1+i) + 10\right) \\
 & = & R_k\left(-2+12i\right) \\
 & = & \dfrac{64}{-2-12i+3} - 3 \\
 & = & \dfrac{64}{1-12i} - 3 \\
 & = & \dfrac{64}{145}(1+12i) - 3 \\
 & = & -\dfrac{371}{145} + \dfrac{768}{145} i.
\end{array}$$

□

Ejemplo 3.66 *En el semiplano de Poincaré, dado los puntos* $A = 2+3i$ *y* $B = -6+i$.
Calcular la forma binomial de $R_l(\frac{1}{2} + i)$, *donde* $l = l_{AB}$.

Solución: La recta no es vertical, luego es de la forma $(x-a)^2 + y^2 = r^2$.
Considerando la correspondencia y reemplazando obtenemos

$$(2-a)^2 + 3^2 = r^2 \qquad (-6-a)^2 + 1^2 = r^2$$

Igualado obtenemos

$$\begin{aligned} (2-a)^2+3^2 &= (-6-a)^2+1^2 \\ 4-4a+a^2+9 &= 36+12a+a^2+1 \\ -16a &= 24 \\ a &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

de este modo tenemos que $r^2 = (2+3/2)^2+9 = \frac{85}{4}$.
De este modo tenemos que $l : |z+\frac{3}{2}| = \sqrt{\frac{85}{4}}$

$$\begin{aligned} R_l\left(\tfrac{1}{2}+i\right) &= \left(\frac{\frac{85}{4}}{\frac{1}{2}-i+\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{85}{4}}{2-i} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{85}{4*5}(2+i) - \tfrac{3}{2}\right) \\ &= \left(\tfrac{17}{4}2 + \tfrac{17}{4}i - \tfrac{3}{2}\right) = \left(7+\tfrac{17}{4}i\right) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.67 *Sean* Π *plano métrico,* $a, b \in \mathcal{L}$ *distintas.*
Demostrar que

$$a \perp b \quad \textit{si y sólo si} \quad R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

Solución: Consideremos que $a \perp b$ si y sólo si $R_a(b) = b$.
Sean $a, b \in \mathcal{L}$ y $a \perp b$, luego tenemos que $R_a(b) = b$, además $R_a^{-1} = R_a$, de este modo tenemos que

$$R_a \circ R_b \circ R_a^{-1} = R_{R_a(b)} = R_b.$$

despejando obtenemos

$$R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

Supongamos ahora que

$$R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

despejando, y usando la propiedad tenemos

$$R_{R_a(b)} = R_a \circ R_b \circ R_a = R_b$$

luego $R_a(b) = b$, de lo cual $a \perp b$. □

Ejemplo 3.68 *En* Π *plano métrico, sean* $a, b \in \mathcal{L}$ *tal que* $a \perp b$.
Demostrar que

$$R_a(b) = b.$$

Solución: Sea $\{P\} = a \cap b$, luego tenemos que b es la única recta ortogonal a a en P. Además $P\mathcal{I}a$ entonces $R_a(P) = P$.
Pero $R_a(P)\mathcal{I}R_a(b)$ y $R_a(b) \perp R_a(a)$, de lo cual tenemos que:

$$P\mathcal{I}R_a(b) \text{ y } R_a(b) \perp a$$

Por unicidad de b, se tiene que $R_a(b) = b$ $\square$

Capítulo 4

Espacio Afín

4.1. Introducción:

El espacio afín, es un trio de la forma $(V, X, \cdot)$, en donde:

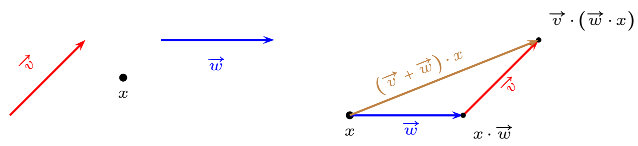
1. V es el espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$
2. X es el conjunto de puntos
3. $\cdot$ es una función dada por:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & V \times X & \to & X \\ & (\overrightarrow{v}, x) & \rightsquigarrow & \overrightarrow{v} \cdot x \end{array}$$

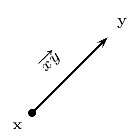
   y cumple con:

   a) $(\forall x \in X)\left(\overrightarrow{0} \cdot x = x\right)$

   b) $\left(\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V\right)(\forall x \in X)\left((\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \cdot x = \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{w} \cdot x)\right)$



   c) $(\forall x, y \in X)\left(\exists!\ \overrightarrow{xy} \in V\right)\left(\overrightarrow{xy} \cdot x = y\right)$, $\overrightarrow{xy}$ es el único vector que envia x en y.



Observación: Note que $\cdot$ es una acción del grupo $(V, +)$ en el conjunto X, la cual es transitiva y fiel.

Propiedad 4.1 *Sea* $(V, X, \cdot)$ *un espacio afín, entonces*

1. $(\forall x \in X)\left(\forall \vec{v} \in V\right)\left(\overrightarrow{x\left(\vec{v}\cdot x\right)} = \vec{v}\right)$

2. $(\forall x, y \in X)\left(\forall \vec{v} \in V\right)\left(\overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\cdot y} = \overrightarrow{xy} - \vec{v}\right)$

3. $\left(\forall \vec{v} \in V\right)(\forall x, y \in X)\left(\overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\left(\vec{v}\cdot y\right)} = \overrightarrow{xy}\right)$

4. $(\forall x \in X)(\forall \vec{v} \in V)\left((\vec{v}\cdot x = x) \Rightarrow \vec{v} = 0\right)$

5. $(\forall x, y \in X)(\forall \vec{v} \in V)\left(\overrightarrow{x\left(\vec{v}\cdot y\right)} = \overrightarrow{xy} + \vec{v}\right)$

6. $\left(\forall \vec{v}, \vec{w} \in V\right)(\forall x, y \in X)\left(\overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\left(\vec{w}\cdot y\right)} = -\vec{v} + \overrightarrow{xy} + \vec{w}\right)$

Demostración:

1. Sean $x \in X$, $\vec{v} \in V$

$$\overrightarrow{x\left(\vec{v}\cdot x\right)}\cdot x = \vec{v}\cdot x$$

Por unicidad son iguales

$$\overrightarrow{x\left(\vec{v}\cdot x\right)} = \vec{v}$$

2. Sean $x, y \in X$, $\vec{v} \in V$

$$\begin{array}{rcl}
\left(\overrightarrow{xy} - \vec{v}\right)\left(\vec{v}\cdot x\right) & = & \overrightarrow{xy}\cdot\left(-\vec{v}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right)\right) \\
& = & \overrightarrow{xy}\cdot\left(\left(-\vec{v} + \vec{v}\right)\cdot x\right) \\
& = & \overrightarrow{xy}\cdot\left(\vec{0}\cdot x\right) \\
\left(\overrightarrow{xy} - \vec{v}\right)\left(\vec{v}\cdot x\right) & = & \overrightarrow{xy}\cdot x
\end{array}$$

Luego $\left(\overrightarrow{xy} - \vec{v}\right)\left(\vec{v}\cdot x\right) = y$, entonces

$$\overrightarrow{xy} - \vec{v} = \overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)y}$$

De lo cual se tiene

$$\overrightarrow{y\,(v\cdot x)} = \vec{v} + \overrightarrow{yx}$$

3. Sean $\vec{v} \in V$, $x, y \in X$

$$\begin{array}{rcl}
\vec{w} & = & \overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\left(\vec{v}\cdot y\right)} \\
\vec{w}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right) & = & \overrightarrow{\left(\vec{v}\cdot x\right)\left(\vec{v}\cdot y\right)}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right) \\
\vec{w}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right) & = & \vec{v}\cdot y \\
-\vec{v}\cdot\left(\vec{w}\cdot\left(\vec{v}\cdot x\right)\right) & = & -\vec{v}\cdot\left(\vec{v}\cdot y\right) \\
\left(-\vec{v} + \vec{w} + \vec{v}\right)\cdot x & = & \left(-\vec{v} + \vec{v}\right)\cdot y \\
\vec{w}\cdot x & = & y \\
\vec{w} & = & \overrightarrow{xy}
\end{array}$$

4. Sean $\overrightarrow{v} \in V$, $x \in X$ tales que $\overrightarrow{v} \cdot x = x$, pero $\overrightarrow{0} \cdot x = x$ luego tenemos que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{0}$$

■

4.2. Espacio Afín Vectorial

Propiedad 4.2 *Sea V un $\mathbb{K}$- espacio vectorial, $X = V$ y*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & V \times V & \to & V \\ & \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) & \rightsquigarrow & \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \end{array}$$

entonces $(V, V, \cdot)$ es un espacio afín.

Demostración: Veamos si $\cdot$ cumple con las propiedades anteriores

1. $\left(\forall \overrightarrow{v} \in V\right)\left(\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\right)$

   Sea $\overrightarrow{v} \in V$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} & = & \overrightarrow{0} + \overrightarrow{v} \\ & = & \overrightarrow{v} \end{array}$$

2. $\left(\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x} \in V\right)\left(\overrightarrow{v} \cdot \left(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{x}\right) = \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) \cdot \overrightarrow{x}\right)$

   Sean $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x} \in V$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{v} \cdot \left(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{x}\right) & = & \overrightarrow{v} \cdot \left(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{x}\right) \\ & = & \overrightarrow{v} + \left(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{x}\right) \\ & = & \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) + \overrightarrow{x} \\ & = & \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) \cdot \overrightarrow{x} \end{array}$$

3. $\left(\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V\right)\left(\exists!\ \overrightarrow{w} \in V\right)(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y})$

   Sean $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$,

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} & = & \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{x} & = & \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{u} & = & \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} \end{array}$$

   Además, $\left(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\right) \in V$

$$\begin{array}{rcl} \left(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\right) \cdot \overrightarrow{x} & = & \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x} \\ & = & \overrightarrow{y} \end{array}$$

Luego al tomar $V = X$, entonces $(V, X, \cdot)$ es un espacio afín. ■

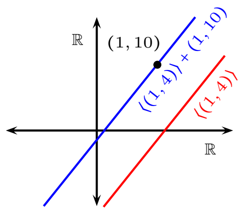
4.3. Subespacio Afín

Sea $(V, X, \cdot)$ un espacio afín y $\mathcal{U} \leq V$. Se define $S(x_0, \mathcal{U}) = \left\{ \overrightarrow{u} \cdot x_0 \mid \overrightarrow{u} \in \mathcal{U} \right\}$ en donde $S(x_0, \mathcal{U})$ se denomina subespacio afín, donde $\mathcal{U}$ es la dirección del subespacio afín.

Ejemplo 4.3 *Sea $V = X = \mathbb{R}^2$, el Espacio Afín, luego*

$$S\left((1,10), \langle(1,4)\rangle\right)$$

es un subespacio afín, con dirección $\langle(1,4)\rangle$



Notación:

1. Se dice que $S(x_0, \mathcal{U})$ es una recta afín si y sólo si $\dim \mathcal{U} = 1$
2. Se dice que $S(x_0, \mathcal{U})$ es un plano afín si y sólo si $\dim \mathcal{U} = 2$
3. Se dice que $S(x_0, \mathcal{U})$ es un hiperplano afín si y sólo si $\dim \mathcal{U} = \dim V - 1$
4. $\dim\ (S(x_0, \mathcal{U})) := \ \dim \mathcal{U}$

Propiedad 4.4 *Sea $(V, X, \cdot)$ un espacio afín y para todo $x_0 \in X$ entonces*

$$X = S(x_0, V)$$

Demostración: Sea $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, y $x \in X$.

$$\begin{array}{cccc} t_x & V & \to & X \\ & \overrightarrow{v} & \mapsto & \overrightarrow{v} \cdot x \end{array}$$

Es una función, ya que $\overrightarrow{v} \cdot x$ es único. Además $t_x(\overrightarrow{v}) = t_x(\overrightarrow{w})$, significa que $\overrightarrow{v} \cdot x = \overrightarrow{w} \cdot x$, pero es único, luego $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.
Por último, dado $y \in X$, existe $\overrightarrow{xy} \in V$ tal que $t_x(\overrightarrow{xy}) = y$.
por ello tenemos que

$$S(x, V) = X.$$

■

Ejemplo 4.5 *En $V = X = \mathbb{R}^4$ espacio afín veectorial. Sea $\pi : 2x + 3y - 4z + w = 6$. Exprese π en términos de un subespacios afín.*

Solución: Sea $(x, y, z, w) \in \pi$, luego tenemos $w = 6 - 2x - 3y + 4z$, reemplazando obtenemos,

$$\begin{aligned} & (x, y, z, w) \\ = \; & (x, y, z, 6 - 2x - 3y + 4z) \\ = \; & (x, 0, 0, -2x) + (0, y, 0, -3y) + (0, 0, z, 4z) + (0, 0, 0, 6) \\ = \; & x(1, 0, 0, -2) + y(0, 1, 0, -3) + z(0, 0, 1, 4) + (0, 0, 0, 6) \end{aligned}$$

Denotemos

$$x_0 = (0, 0, 0, 6), \quad U = \langle (1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, -3), (0, 0, 1, 4) \rangle$$

Luego

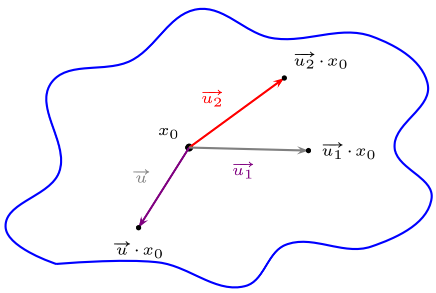
$$S(x_0, U) = (0, 0, 0, 6) + \langle (1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, -3), (0, 0, 1, 4) \rangle$$

□

Teorema 4.6 *Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín y $S(x_0, \mathcal{U})$ un subespacio afín, entonces*

$$\mathcal{U} = \left\{ \overrightarrow{xy} \mid x, y \in S(x_0, \mathcal{U}) \right\}$$

Demostración: Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín y $S(x_0, \mathcal{U})$ un subespacio afín



1. Veamos primero $\mathcal{U} \subseteq \left\{ \overrightarrow{xy} \mid x, y \in S(x_0, \mathcal{U}) \right\}$.

   Sea $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$, luego $\overrightarrow{u} \cdot x_0$, $x_0 \in S(x_0, \mathcal{U})$ ya que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{x_0 \left(\overrightarrow{u} \cdot x_0 \right)}$ envían x_0 en $\overrightarrow{u} \cdot x_0$ y la unicidad del vector tenemos

$$\overrightarrow{x_0 \left(\overrightarrow{u} \cdot x_0 \right)} = \overrightarrow{u}$$

   de este modo se tiene

$$\mathcal{U} \subseteq \left\{ \overrightarrow{xy} \mid x, y \in S(x_0, \mathcal{U}) \right\}.$$

2. Para la otra contención $\{\ \overrightarrow{xy} \mid x, y \in S(x_0, \mathcal{U})\ \} \subseteq \mathcal{U}$.

   Sean $x, y \in S(x_0, \mathcal{U})$, por demostrar $\overrightarrow{xy} \in \mathcal{U}$.

   Como $x, y \in S(x_0, \mathcal{U})$ se tiene que, existen $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in \mathcal{U}$ tal que

$$x = \overrightarrow{u_1} \cdot x_0 \qquad y = \overrightarrow{u_2} \cdot x_0$$

   Sea

$$\begin{array}{rcll}
\overrightarrow{xy} & = & \overrightarrow{w} & \\
\overrightarrow{\left(\overrightarrow{u_1} \cdot x_0\right)\left(\overrightarrow{u_2} \cdot x_0\right)} & = & \overrightarrow{w} & / \cdot \overrightarrow{u_1} \cdot x_0 \\
\overrightarrow{\left(\overrightarrow{u_1} \cdot x_0\right)\left(\overrightarrow{u_2} \cdot x_0\right)} \cdot \overrightarrow{u_1} \cdot x_0 & = & \overrightarrow{w} \cdot \left(\overrightarrow{u_1} \cdot x_0\right) & \\
\overrightarrow{u_2} \cdot x_0 & = & \left(\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u_1}\right) \cdot x_0 & / - \overrightarrow{u_2} \cdot \\
x_0 & = & \left(-\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u_1}\right) \cdot x_0 &
\end{array}$$

   Por unicidad

$$\begin{array}{rcl}
-\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u_1} & = & \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{w} & = & \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1}
\end{array}$$

   con $\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1} \in \mathcal{U}$, luego $\overrightarrow{w} \in \mathcal{U}$. ∎

Propiedad 4.7 *Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x, z \in X$ y $\mathcal{U}$ subespacios de V, entonces*

1. *Si $z \in S(x, \mathcal{U})$ entones $S(x, \mathcal{U}) = S(z, \mathcal{U})$.*
2. *Si $S(x, \mathcal{U}) = S(z, \mathcal{U})$ entones $\overrightarrow{xz} \in \mathcal{U}$.*

Demostración: Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x, z \in X$, $\mathcal{U} \leq V$, y $z \in S(x, \mathcal{U})$ luego tenemos que $z = \overrightarrow{u} \cdot x$, con $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$
Ahora bien, notemos que

$$\overrightarrow{w} \cdot z = \overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \cdot x) = (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}) \cdot x$$

por ello $S(z, \mathcal{U}) \subseteq S(x, \mathcal{U})$. análogamente, obtenemos que

$$(-\overrightarrow{u}) \cdot z = (-\overrightarrow{u}) \cdot (\overrightarrow{u} \cdot x) = (-\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}) \cdot x = x$$

y con ello la otra contención.

$$S(x, \mathcal{U}) = S(z, \mathcal{U}).$$

De $S(x, \mathcal{U}) = S(z, \mathcal{U})$, tenemos que $x \in S(z, \mathcal{U})$, luego existe $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$ que cumple con

$$\overrightarrow{u} \cdot z = x = \overrightarrow{xz} \cdot x$$

es decir, $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$. ∎

Propiedad 4.8 *Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x, w \in X$ y $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ subespacios de V, tales que $S(x, \mathcal{U}) \cap S(w, \mathcal{W}) \neq \varnothing$, entonces, existe $z \in X$, de modo que*

$$S(x, \mathcal{U}) \cap S(w, \mathcal{W}) = S(z, \mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

Demostración: Sea $z \in S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W})$, luego por la propiedad anterior tenemos que

$$S(x,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{U}) \quad \wedge \quad S(w,\mathcal{W}) = S(z,\mathcal{W})$$

Ahora demostraremos que

$$S(z,\mathcal{U}) \cap S(z,\mathcal{W}) = S(z,\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

Para ello, sea $u \in S(z,\mathcal{U}) \cap S(z,\mathcal{W})$, luego tenemos por teorema 4.6 que

$$\overrightarrow{uz} \in \mathcal{U} \ \wedge \ \overrightarrow{uz} \in \mathcal{W},$$

de lo cual tenemos $\overrightarrow{uz} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, de este modo $u \in S(z,\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.
Para la otra contención, sea $u \in S(z,\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$, luego tenemos por teorema 4.6 que $\overrightarrow{uz} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, de lo cual tenemos $\overrightarrow{uz} \in \mathcal{U} \wedge \overrightarrow{uz} \in \mathcal{W}$, de este modo $u \in S(z,\mathcal{U}) \cap S(z,\mathcal{W})$. ■

Corolario 4.9 *Sean $(V,X,\cdot)$ un espacio afín, $x_i \in X$ y $\mathcal{U}_i$ subespacios de V, para todo $i \in I$ tales que $\cap_{i\in I} S(x_i,\mathcal{U}_i) \neq \varnothing$, entonces, existe $z \in X$, de modo que*

$$\cap_{i\in I} S(x_i,\mathcal{U}_i)) = S(z, \cap_{i\in I}\mathcal{U}_i)$$

Teorema 4.10 *Sean $(V,X,\cdot)$ un espacio afín, $x,w \in X$ y $\mathcal{U},\mathcal{W}$ subespacios de V, entonces $S(x,\mathcal{U}) = S(w,\mathcal{W})$ si y sólo si $\mathcal{U} = \mathcal{W} \ \wedge \ S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) \neq \varnothing$*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{U} = \mathcal{W} \wedge S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) \neq \varnothing$, por demostrar que $S(x,\mathcal{U}) = S(w,\mathcal{W})$.
Sea $z \in S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{U})$,

$$S(x,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{U}) = S(z,\mathcal{W}) = S(w,\mathcal{W})$$

Ahora supongamos que $S(x,\mathcal{U}) = S(w,\mathcal{W})$, por demostrar $\mathcal{U} = \mathcal{W}$ y
$S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) \neq \varnothing$
Por teorema anterior

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} & = & \left\{\overrightarrow{zw} \in V \mid z,w \in S(x,\mathcal{U})\right\} \\ & = & \left\{\overrightarrow{zw} \in V \mid z,w \in S(w,\mathcal{W})\right\} \\ & = & \mathcal{W} \end{array}$$

Además $S(x,\mathcal{U}) = S(w,\mathcal{W})$, se tiene entonces que $S(x,\mathcal{U}) \cap S(w,\mathcal{W}) \neq \varnothing$.

■

Grupo de las Traslaciones. Sea $(V,X,\cdot)$ un espacio afín y $\overrightarrow{a} \in V$

$$\begin{array}{rccl} t_{\overrightarrow{a}}: & X & \to & X \\ & x & \rightsquigarrow & t_{\overrightarrow{a}}(x) = \overrightarrow{a} \cdot x \end{array}$$

Se dice que $t_{\overrightarrow{a}}$ es una **traslación** en la dirección del vector $\overrightarrow{a}$, en el conjunto X.

Teorema 4.11 $t_{\overrightarrow{a}}$ *es una función biyectiva.*

Demostración:

i. $t_{\overrightarrow{a}}$ es inyectiva, sean $x, y \in X$ por demostrar $t_{\overrightarrow{a}}(x) = t_{\overrightarrow{a}}(y)$, entonces $x = y$ Para ello veamos

$$\begin{array}{rcl} t_{\overrightarrow{a}}(x) & = & t_{\overrightarrow{a}}(y) \\ \overrightarrow{a} \cdot x & = & \overrightarrow{a} \cdot y \\ -\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot x\right) & = & -\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot y\right) \\ \overrightarrow{0} \cdot x & = & \overrightarrow{0} \cdot y \\ x & = & y \end{array}$$

De este modo $t_{\overrightarrow{a}}$ es inyectiva.

ii. $t_{\overrightarrow{a}}$ es epiyectiva, por demostrar que Rec $(t_{\overrightarrow{a}}) = X$

La primera contención es evidente que Rec $(t_{\overrightarrow{a}}) \subseteq X$, basta demostrar que Rec $(t_{\overrightarrow{a}}) \supseteq X$.

Dado $x \in X$

$$\begin{array}{rcl} t_{\overrightarrow{a}}\left(-\overrightarrow{a} \cdot x\right) & = & \overrightarrow{a}\left(-\overrightarrow{a} \cdot x\right) \\ & = & \left(\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a})\right) \cdot x \\ & = & \overrightarrow{0} \cdot x \\ & = & x \end{array}$$

Luego $t_{\overrightarrow{a}}$ es epiyectiva, de este modo $t_{\overrightarrow{a}}$ es biyectiva. ∎

Notación:

$$\mathcal{T}(X) = \left\{t_{\overrightarrow{a}} \mid \overrightarrow{a} \in V\right\}$$

Propiedad 4.12 *Sea* $(V, X, \cdot)$ *un espacio afín, entonces*

$\mathcal{T}(X)$ *es un grupo, llamado el grupo de las traslaciones del espacio afín.*

Demostración: Consideremos las aplicación, que además cumple con:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(X) & \cong & (V, +) \\ t_{\overrightarrow{a}} & \leftrightarrow & \overrightarrow{a} \\ t^{-1}_{\overrightarrow{a}} & \leftrightarrow & -\overrightarrow{a} \\ t_{\overrightarrow{a}} \circ t_{\overrightarrow{b}} & \leftrightarrow & t_{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}} \end{array}$$

Además por unicidad tenemos $t_{\overrightarrow{a}}(x) = t_{\overrightarrow{b}}(x)$ se tiene que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$. ∎

Propiedad 4.13 *Sean* $(V, X, \cdot)$ *un espacio afín,* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u} \in V$ *y* $x_0 \in X$ *entonces*

$$t_{\overrightarrow{a}}(S(x_0, < \overrightarrow{u} >)) = S(\overrightarrow{a} x_0, < \overrightarrow{u} >)$$

es decir, $t_{\overrightarrow{a}}$ *respeta paralelismo de la rectas.*

Demostración: Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u} \in V$ y $x_0 \in X$

$$
\begin{aligned}
t_{\overrightarrow{a}}(S(x_0, <\overrightarrow{u}>) &= t_{\overrightarrow{a}}(\{\alpha\overrightarrow{u}\cdot x_0 \mid \alpha \in K\}) \\
&= \{t_{\overrightarrow{a}}(\alpha\overrightarrow{u}\cdot x_0) \mid \alpha \in K\} \\
&= \{\overrightarrow{a}\cdot(\alpha\overrightarrow{u}\cdot x_0) \mid \alpha \in K\} \\
&= \{\alpha\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{a}\cdot x_0) \mid \alpha \in K\} \\
&= (S(\overrightarrow{a}\cdot x_0, <\overrightarrow{u}>)
\end{aligned}
$$

■

Corolario 4.14 *Sean* $(V, X, \cdot)$ *un espacio afín,* $\overrightarrow{a} \in V$, $\mathcal{U} \leq V$ *y* $x_0 \in X$ *entonces*

$$t_{\overrightarrow{a}}(S(x_0, \mathcal{U})) = S(\overrightarrow{a}x_0, \mathcal{U}).$$

4.4. Sistema de Coordenadas

Sean $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $x_0 \in X$ y B una base ordenada del espacio vectorial V.
Se dice que (x_0, B) es un sistema de coordenada de X y las coordenada de $x \in X$ respecto al sistema de coordenadas (x_0, B), están dadas por:

$$[x]_{(x_0,B)} = [\overrightarrow{x_0x}]_B$$

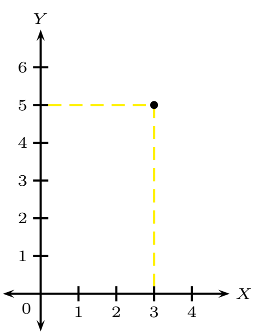
Ejemplo 4.15 *En espacio vectorial afín real, es decir,* $V = X = \mathbb{R}^2$.
Sean $x_0 = (1,1)$ *y* $B = \{(1,0), (0,1)\}$.
Determine las coordenadas del punto $[(3,5)]_{(x_0,B)}$

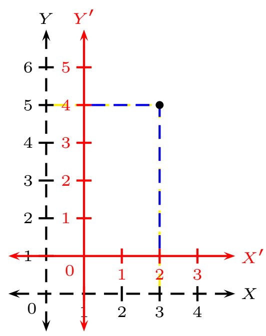
Solución:

$$
\begin{aligned}
[(3,5)]_{(x_0,B)} &= [\overrightarrow{(1,1)(3,5)}]_B \\
&= [\overrightarrow{(3,5)-(1,1)}]_B \\
&= [\overrightarrow{(2,4)}]_B
\end{aligned}
$$

$$[(3,5)]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

□





Ejemplo 4.16 *Sea* (V, X) *un espacio afín,* $x_0 \in X$ *y* $B = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \cdots, \overrightarrow{a_n}\}$ *base de* V*. Determine las coordenadas de*

$$[(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0]_{(x_0,B)}$$

Solución: Sea

$$\begin{array}{rl} & [(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0]_{(x_0,B)} \\ = & [\overrightarrow{x_0(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0}]_{(B)} \\ = & [\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}]_B \\ = & [\overrightarrow{a_1}]_B + [\overrightarrow{a_2}]_B + [\overrightarrow{a_3}]_B + \cdots + [\overrightarrow{a_n}]_B \\ & [(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0]_{(x_0,B)} \\ = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$[(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \cdots + \overrightarrow{a_n}) \cdot x_0]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Teorema 4.17 *Sean* (V, X) *un espacio afín,* $x_0 \in X$ *y* B *base de* V *tal que*

$$[\overrightarrow{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \ y \ [x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \ entonces \ [\overrightarrow{v} \cdot x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

Demostración:

$$\begin{array}{rcl} [\overrightarrow{v} \cdot x]_{(x_0,B)} & = & \left[\overrightarrow{x_0\left(\overrightarrow{v} \cdot x\right)}\right]_B \\ & = & \left[\overrightarrow{v} + \overrightarrow{x_0x}\right]_B \\ & = & [\overrightarrow{v}]_B + [\overrightarrow{x_0x}]_B \\ & = & [\overrightarrow{v}]_B + [x]_{(x_0,B)} \end{array}$$

De este modo se tiene

$$[\overrightarrow{v} \cdot x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

■

Ejemplo 4.18 *Sean* $(V, X, \cdot)$ *un espacio afín,* $x_0, x, y \in X$ *y* B *una base de* V *tales que*

$$[x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ y } [y]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Calcule $[\overrightarrow{xy}]_B$

Solución: Si $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xx_0} + \overrightarrow{x_0y} = -\overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{x_0y}$, entonces:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{xy}]_B &= [-\overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{x_0y}]_B \\ &= -[\overrightarrow{x_0x}]_B + [\overrightarrow{x_0y}]_B \\ &= -[\overrightarrow{x}]_{(x_0,B)} + [\overrightarrow{y}]_{(x_0,B)} \end{aligned}$$

$$[\overrightarrow{xy}]_B = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$$

□

Observación: Tener un sistema de coordenadas para el espacio afín (V, X) significa que podemos representar cada punto de X mediante una matriz columna.

4.5. Ecuación de la Recta

Sean $(V, X, \cdot)$ espacio afín, $x_0 \in X$ y B base ordenada de V. Además sea l una recta afín tal que $l = S(x_0, \langle \overrightarrow{v} \rangle)$.
Si $y \in l$, entonces existe $t \in \mathbb{K}$ tal que $y = (t\overrightarrow{v}) \cdot x_0$

$$\begin{aligned} [y]_{(x_0,B)} &= [(t\overrightarrow{v}) \cdot x]_{(x_0,B)} \\ &= [\overrightarrow{x_0((t\overrightarrow{v}) \cdot x)}]_B \\ &= [t\overrightarrow{v}]_B + [x]_{(x_0,B)} \\ &= t \cdot [\overrightarrow{v}]_B + [x]_{(x_0,B)} \end{aligned}$$

Supongamos que

$$[\overrightarrow{v}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ [y]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ y } [x]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

entonces tenemos ecuación paramétrica de la recta l en el sistema (x_0, B).

$$l: \left.\begin{aligned} y_1 &= t \cdot x_1 + a_1 \\ y_2 &= t \cdot x_2 + a_2 \\ \vdots &= \quad \vdots \\ y_n &= t \cdot x_n + a_n \end{aligned}\right\}$$

Despejando el parámetro t, obtenemos la ecuación simétrica de la recta l en el sistema (x_0, B).

$$l : \frac{y_1 - a_1}{x_1} = \frac{y_2 - a_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n - a_n}{x_n}$$

Ejemplo 4.19 *Sea* $V = X = \mathbb{R}^3$*,* $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *base ordenada de* V*,* $x_0 = (1,2,3)$ *y* $l = S((2,1,0),\langle(2,3,1)\rangle)$*.*
Determine la ecuación paramétrica y simétrica de $[l]_{(x_0,\mathcal{B})}$

Solución:
Si $\overrightarrow{x} \in l$, entonces $\overrightarrow{x} = (2,1,0) + \alpha(2,3,1)$

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{x}]_{(x_0,\mathcal{B})} &= [(2,1,0) + \alpha(2,3,1)]_{(x_0,\mathcal{B})} \\
&= [(2,1,0)]_{(x_0,\mathcal{B})} + \alpha[(2,3,1)]_{\mathcal{B}} \\
&= [\overrightarrow{(1,2,3)\,(2,1,0)}]_{B} + \alpha[(2,3,1)]_{\mathcal{B}} \\
&= [(1,-1,-3)]_{\mathcal{B}} + \alpha[(2,3,1)]_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

$$[\overrightarrow{x}]_{(x_0,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

del cual se concluye la ecuación paramétrica

$$l : \begin{cases} x_1 = -\alpha + 2 \\ x_2 = 2\alpha + 2 \\ x_3 = \alpha - 3 \end{cases}$$

y la ecuación simétrica es

$$l : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$$

□

Ejercicio 4.20 *En* $V = X = \mathbb{R}^4$*, sean* $x = (1,2,1,2)$*,* $y = (1,3,1,1)$*,*

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

base ordenada de V *y* $x_0 = (1,-1,0,1)$*.*
Determine la ecuación paramétrica y simétrica de $[l_{xy}]_{(x_0,\mathcal{B})}$

Ejemplo 4.21 *Sean* $V = X = \mathbb{R}^3$ *y* $H = S((0,0,1),\langle(1,2,3),(-1,0,1)\rangle)$
Determine si H *es un hiperplano afín*

Solución:

$$\dim(\langle(1,2,3),(-1,0,1)\rangle) = 2, \text{ entonces } H \text{ es un hiperplano afín}$$

□

4.6. Formas Lineales

Sea (V, X) un espacio afín y $f : V \to \mathbb{K}$, entonces f es una forma lineal (f transformación lineal) si y sólo si

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \left(\forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V\right) \left(f(\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}) = \alpha \cdot f(\overrightarrow{v_1}) + \beta \cdot f(\overrightarrow{v_2})\right)$$

Ejercicio 4.22 *Determine si las siguientes funciones son formas lineales*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,w) & \rightsquigarrow & 2x+y-w \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & x \end{array}$$

Teorema 4.23 *Si f es una forma lineal no nula sobre el espacio afín (V, X), entonces*

$$ker\ f = \{\overrightarrow{v} \in V \mid f(\overrightarrow{v}) = 0\}$$

es un hiperplano.

Demostración: Como f es no nula, entonces existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ y $\overrightarrow{v} \in V$ tales que $f(\overrightarrow{v}) = \alpha$. Despejando y operando obtenemos que

$$\begin{array}{rcll} f(\overrightarrow{v}) & = & \alpha & /\cdot \frac{1}{\alpha}\ ,\ \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{\alpha} f(\overrightarrow{v}) & = & 1 & \\ f\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\overrightarrow{v}\right) & = & 1 & /\cdot \beta\ ,\ \beta \in \mathbb{K} \\ f\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\overrightarrow{v}\right) & = & \beta & \end{array}$$

todo elemento tiene preimagen, es decir

$$f \text{ es epiyectiva}$$

Por teorema de álgebra lineal, tenemos la siguiente igualdad

$$\dim V = \dim\ (\ker\ f) + \dim\ (\text{Im}\ f)$$

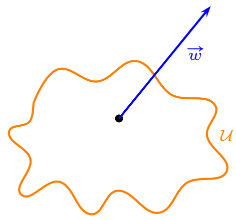
Supongamos $\dim V = n$ y como f es epiyectiva, entonces $\dim\ (\text{Im}\ f) = 1$, entonces

$$n = \dim\ (\ker\ f) + 1, \text{ luego } \dim\ (\ker\ f) = n - 1$$

$$\ker\ f \text{ es un hiperplano.}$$

■

Teorema 4.24 *Sea $\mathcal{U} \leq V$ y $\mathcal{U}$ hiperplano, entonces existe una forma lineal f, tal que $ker\ f = \mathcal{U}$.*



Demostración:
Si $\dim V = n$, entonces $\dim \mathcal{U} = n - 1$.
Sea $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}}\}$ base de $\mathcal{U}$
Sea $\overrightarrow{w} \in V$ tal que $\overrightarrow{w} \notin \mathcal{U}$, entonces $V = \mathcal{U} + \langle \overrightarrow{w} \rangle$
Sea $\overrightarrow{v} \in V$, entonces existen únicos $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tales que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \alpha \overrightarrow{w}$$

Por lo anterior, se obtiene la función

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \to & \mathbb{K} \\ & \overrightarrow{v} & \rightsquigarrow & f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u} + \alpha \overrightarrow{w}) = \alpha \end{array}$$

que claramente es una forma lineal y $\ker f = \mathcal{U}$. ■

Observación: El teorema anterior, nos permite determinar la ecuación cartesiana de un hiperplano vectorial.
Con las notaciones anteriores $B = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \dots, \overrightarrow{w_n}\}$ otra base de V. Si $\overrightarrow{v} \in \ker f$ entonces

$$\overrightarrow{v} = x_1 \overrightarrow{w_1} + x_2 \overrightarrow{w_2} + \dots + x_n \overrightarrow{w_n}$$

luego

$$\begin{array}{rcl} f(\overrightarrow{v}) & = & x_1 \cdot f(\overrightarrow{w_1}) + x_2 \cdot f(\overrightarrow{w_2}) + \dots + x_n \cdot f(\overrightarrow{w_n}) \\ & = & \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n \\ 0 & = & \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n \end{array}$$

esta última, es la forma general de la ecuación cartesiana de un hiperplano vectorial con respecto a la base B.

4.7. Ecuación de un Hiperplano Afín

Sea $S(x_0, \mathcal{U})$ un hiperplano afín y (x_0, B) un sistema de coordenadas en X. Supongamos

$$[x_1]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ y } [x]_{(x_0,B)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sea $x \in S(x_0, \mathcal{U})$, entonces

$$\begin{array}{rcl} [\overrightarrow{x_1 x}]_B & = & [\overrightarrow{x_1 x_0} + \overrightarrow{x_0 x}]_B \\ & = & [\overrightarrow{x_0 x}]_B - [\overrightarrow{x_0 x_1}]_B \\ & = & [x]_{(x_0,B)} - [x_1]_{(x_0,B)} \end{array}$$

finalmente

$$[\overrightarrow{u}]_B = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

Como $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es hiperplano, entonces tenemos que existe $\alpha_i \in K$, tal que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot (x_1 - a_1) + \alpha_2 \cdot (x_2 - a_2) + \cdots + \alpha_n \cdot (x_n - a_n) &= 0 \\ \alpha_1 \cdot x_1 - \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot x_2 - \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n - \alpha_n \cdot a_n &= 0 \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n$$

Ecuación hiperplano afín

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = d$$

Ejemplo 4.25 *Sea* $V = X = \mathbb{R}^3$. *Si* $B = \{(1,1,0),(1,0,1)(1,0,0)\}$ *base ordenada de* $\mathbb{R}^3$, $S_1 = S((1,1,1),\langle(2,1,3),(0,1,-1)\rangle)$ *y* $x_0 = (1,2,3)$.
Determine la ecuación cartesiana del hiperplano afín $[S_1]_{(x_0,B)}$.

Solución:
Sea $(x,y,z) \in S_1$, entonces $(x,y,z) = (1,1,1) + \alpha(2,1,3) + \beta(0,1,-1)$,luego:

$$\begin{aligned} [(x,y,z)]_{(x_0,B)} &= [(1,1,1)]_{(x_0,B)} + \alpha[(2,1,3)]_B + \beta[(0,1,-1)]_B \\ &= [\overrightarrow{(1,2,3)(1,1,1)}]_B + \alpha[(2,1,3)]_B + \beta[(0,1,-1)]_B \\ &= [(0,-1,-2)]_B + \alpha[(2,1,3)]_B + \beta[(0,1,-1)]_B \end{aligned}$$

$$[(x,y,z)]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de otro modo

$$[(x,y,z)]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} -1 + \alpha + \beta \\ -2 + 3\alpha - \beta \\ 3 - 2\alpha \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \alpha + \beta \\ y_1 &= -2 + 3\alpha - \beta \\ z_1 &= 3 - 2\alpha \end{aligned}$$

del cual se concluye que la ecuación del hiperplano afín es

$$x_1 + y_1 + 2z_1 = 3.$$

□

Ejercicio 4.26 *Sea* $V = X = \mathbb{R}^3$*. Si* $B = \{(1,1,1),(1,1,0)(1,0,0)\}$ *base ordenada de* $\mathbb{R}^3$*,* $U = \langle(1,2,1),(0,1,2)\rangle$ *y* $x_0 = (3,1,2)$*.*
Determine la ecuación cartesiana del hiperplano afín $[S(((1,1,1),U)]_{(x_0,B)}$*.*

Ejercicio 4.27 *Sea* π_1 *un plano en* $\mathbb{R}^3$*, cuya ecuación en el sistema* (x_0,B) *es* $x+y-z=5$*, con* $x_0 = (1,2,3)$ *y* $B = \{(1,1,0),(1,1,1)(1,0,0)\}$ *base*
Determine la ecuación cartesiana del hiperplano afín

$$[(\pi_1)]_{((1,3,1),\{(1,3,2),(2,3,1),(2,1,3)\})}.$$

4.8. Paralelismo en un Espacio Afín

Sea (V,X) un espacio afín, $S_1 = S(x,\mathcal{U})$ y $S_2 = S(y,\mathcal{W})$ subespacios afines.
Se dice que

$$S_1 \parallel S_2 \text{ si y sólo si la } \mathcal{U} \leq \mathcal{W} \text{ o bien } \mathcal{W} \leq \mathcal{U}.$$

Ejemplo 4.28 *Determine si* S_1 *y* S_2 *son paralelos donde*

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y+z=1\} \\ S_2 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+2y+z=-7\} \end{array}$$

Solución:
$S_1 : x = 1-2y-z$, entonces

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) & = & (1-2y-z,y,z) \\ (x,y,z) & = & (1,0,0)+(-2y,y,0)+(-z,0,z) \\ (x,y,z) & = & (1,0,0)+y(-2,1,0)+z(-1,0,1) \end{array}$$

entonces

$$S_1 = S\left((1,0,0),\langle(-2,1,0),(-1,0,1)\rangle\right)$$

Análogamente

$$S_2 = S\left((7,0,0)\langle(-2,1,0),(-1,0,1)\rangle\right)$$

Luego $S_1 \parallel S_2$

□

Teorema 4.29 *Sean* (V,X) *un espacio afín,* S_1,S_2 *subespacio afines tal que dim* $S_1 =$ *dim* S_2*, entonces*

$$S_1 \parallel S_2, \textit{ si y sólo si existe } t \textit{ traslación tal que } t(S_1) = S_2.$$

Demostración: Supongamos $S_1 \parallel S_2$, por demostrar que existe t traslación tal que $t(S_1) = S_2$ Ya que $\mathcal{U} = \mathcal{W}$, tenemos

$$\begin{array}{rcccl} S_1 & = & S(x,\mathcal{U}) & = & S(x,\mathcal{W}) \\ S_2 & = & S(y,\mathcal{W}) & = & S(y,\mathcal{U}) \end{array}$$

Sea $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{xy}$, luego $t_{\overrightarrow{v}}(x) = y$ y por lo tanto

$$t_{\overrightarrow{v}}(S(x,\mathcal{U})) = S(\overrightarrow{v} \cdot x,\mathcal{U}) = S(y,\mathcal{W})$$

Ahora supongamos que existe t traslación tal que $t(S_1) = S_2$, por demostrar $S_1 \parallel S_2$.
Sea $S_1 = S(x,\mathcal{U})$ y $t_{\overrightarrow{v}}(S_1) = t_{\overrightarrow{v}}(S(x,\mathcal{U})) = S(\overrightarrow{v} \cdot x,\mathcal{U}) = S_2$, luego ambos tienen la misma dirección por lo tanto $S_1 \parallel S_2$. ■

Teorema 4.30 *Sea (V,X) un espacio afín, S_1 y S_2 hiperplanos afines, entonces*

$$S_1 \parallel S_2, \text{ si y sólo si } S_1 = S_2 \vee S_1 \cap S_2 = \varnothing$$

Demostración:
Supongamos $S_1 \parallel S_2$, por demostración $S_1 = S_2 \vee S_1 \cap S_2 = \varnothing$

i) Si $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ listo

ii) Ahora $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, entonces existe $z \in X$ tal que $z \in S_1 \cap S_2$ como $S_1 \cap S_2$. entonces

$$\begin{array}{rcccl} S_1 & = & S(x,\mathcal{U}) & = & S(z,\mathcal{U}) \\ S_2 & = & S(y,\mathcal{U}) & = & S(z,\mathcal{U}) \end{array}$$

Por lo tanto $S_1 = S_2$

Ahora supongamos $S_1 = S_2 \vee S_1 \cap S_2 = \varnothing$, por demostrar $S_1 \parallel S_2$.

i) Si $S_1 = S_2$, entonces $S_1 \parallel S_2$ listo

ii) Caso $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, por absurdo
Supongamos que $S_1 \cap S_2 = \varnothing \ \wedge \ S_1 \not\parallel S_2$, $S_1 = S(x,\mathcal{U})$, y $S_2 = S(y,\mathcal{W})$. Como $\mathcal{U},\mathcal{W}$ son hiperplanos distintos se tiene que $V = \mathcal{U} + \mathcal{W}$.
$\overrightarrow{xy} \in V$, existe $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}, \overrightarrow{w} \in \mathcal{W}$

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$$

$$\begin{array}{rcll} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \cdot x & = & y & / - \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u} \cdot x & = & -\overrightarrow{w} \cdot y & \end{array}$$

de donde $\overrightarrow{u} \cdot y = -\overrightarrow{w} \cdot x \in S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ Por lo tanto

$$S_1 \parallel S_2.$$

■

Definición 4.31 *Sea* (V, X) *un espacio afín y* $S = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq X$.
Se dice que S *es linealmente independiente si y sólo si*

$$(\sharp(S) = 1) \vee (\sharp(S) > 1 \wedge \{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\}) \text{ es linealmente independiente.}$$

Definición 4.32 *Sea* (V, X) *un espacio afín y* $S = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq X$.
Se define el subespacio afín generado por S *es*

$$S(x_0, \{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\})$$

note que $S = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq S(x_0, \{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_n}\})$.

Notemos que dado $x, z \in X$ distintos, luego la recta afín que contiene a los puntos esta dada por

$$l_{xz} = S(x, < \overrightarrow{xz} >)$$

Del mismo modo la intersección de dos rectas afines, es vacía o un punto o son iguales propiedad 4.8.

4.9. Dilataciones en un Espacio Afín

Sea $(V, X, \cdot)$ un espacio afín, $dim(X) \geq 2$ y la función $f : X \to X$ biyectiva.
f es una dilatación si y sólo si, para todo l recta, $f(l) \parallel l$
Note que la identidad es una dilatación.

Teorema 4.33 *Sea* $f : X \to X$ *una dilatación en el Espacio Afín* (V, X), *entonces* f *esta completamente determinada si se conoce la imagen de dos puntos.*

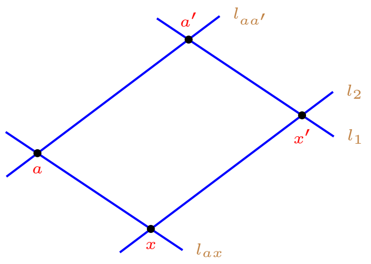
Demostración: idéntica a la del teorema 1.40.

Definición 4.34 *Sea* f *una dilatación en el espacio afín* (V, X).

> *Se dice que* f *es una* ***Traslación*** *si y sólo si,* f *no tiene puntos fijos o* $f = Id$.
>
> *Se dice que* f *es una* ***Homotecia*** *si y sólo si,* f *tiene puntos fijos y el se llama centro de la homotecia o* $f = Id$.

Teorema 4.35 *Una traslación está completamente determinada si se conoce la imagen de un punto.*

Demostración: Sea f una traslación y $a \in X$ tal que $f(a) = a'$ y consideremos $x \in X$. de modo que $x \notin l_{aa'}$.



Definimos: l_2 paralela a $l_{aa'}$ y $x \in l_2$
l_1 paralela a l_{ax} y $a' \in l_1$
Por lo tanto $l_1 \cap l_2 = \{x'\}$ es la imagen de x.
Al conocer la imagen de dos puntos, f esta completamente determinada. ∎

Por argumentos similares a los realizados en el primer capitulo tenemos que las únicas traslaciones son $t_{\overrightarrow{v}}$ con $\overrightarrow{v} \in V$.

Propiedad 4.36 *Sea $f : X \to X$ una homotecia de centro $c \in X$, entonces existe $k \in \mathbb{K}$ tal que*

$$f(x) = (k\overrightarrow{cx}) \cdot c, \ \textit{Para todo } x \in X.$$

Demostración: Dado $x \in X$, distinto de c, luego $f(x)$ no esta fijo, por ello tenemos que las rectas $l_{cx} \parallel l_{cf(x)}$, de este modo los vectores directores son linealmente dependiente $\{\overrightarrow{cx}, \overrightarrow{cf(x)}\}$.
Por lo anterior existe $k \in \mathbb{K}$, tal que $\overrightarrow{cf(x)} = k\overrightarrow{cx}$.
De este modo tenemos que $f(x) = (k\overrightarrow{cx}) \cdot c$.
Ahora bien dado $y \in X$, tenemos que $f(x) = (\alpha\overrightarrow{cy}) \cdot c$, pero notemos que $l_{xy} \parallel l_{f(x)f(y)}$, de este modo los vectores directores son linealmente dependiente $\{\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{f(x)f(y)}\}$, de lo cual tenemos $\alpha = k$

$$f(x) = (k\overrightarrow{cx}) \cdot c, \ \text{Para todo } x \in X.$$

∎

Notación: $M_{(c,k)}$ es la homotecia de razón k y centro c.

Propiedad 4.37 *Sea (V, X) un espacio afín entonces*

$$H_c = \{M_{(c,k)} \mid k \in \mathbb{K}^*\}$$

es un grupo, llamado de las homotecia de centro c

Demostración: Notemos solamente que

$$M_{(c,k)} \circ M_{(c,t)} = M_{(c,kt)}$$

y

$$M_{(c,k)}^{-1} = M_{(c,k^{-1})}$$

∎

Ejemplo 4.38 *Describa las homotecia de centro c y razón k en espacio vectorial afín.*

Solución: (V, V), el espacio vectorial afín,

$$\begin{aligned} M_{(c,k)}(x) &= (k\overrightarrow{cx}) \cdot c \\ &= (kx - kc) \cdot c \\ &= (kx - kc) + c \\ &= kx + (1-k)c. \end{aligned}$$

Teorema 4.39 *Sea f una dilatación en espacio afín (V, X), entonces existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tales que para todo $x, y \in$, se tiene*

$$\overrightarrow{f(x)f(y)} = \alpha\overrightarrow{xy}$$

α se llama la razón de la dilatación

Demostración: Sea f una dilatación.
i) Si f es una traslación, luego $f = t_{\overrightarrow{v}}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{t_{\overrightarrow{v}}(x)t_{\overrightarrow{v}}(y)} &= \overrightarrow{(\overrightarrow{v} \cdot x)(\overrightarrow{v} \cdot y)} \\ &= \overrightarrow{xy} \end{aligned}$$

Lo cual se tiene por la propiedad 4.1, y $\alpha = 1$.
ii) Si f es una homotecia, luego $f = M_{(c,k)}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{(c,k)}(x)M_{(c,k)}(y)} &= \overrightarrow{(k\overrightarrow{cx} \cdot c)(k\overrightarrow{cy} \cdot c)} \\ &= k\overrightarrow{cy} - k\overrightarrow{cx} \\ &= k\overrightarrow{xy} \end{aligned}$$

Lo cual se tiene por la propiedad 4.1, y $\alpha = k$. ■

Corolario 4.40 *Sean f_1, f_2 una dilatación en espacio afín (V, X), de razón k_1, k_2 respectivamente, entonces*

1. *$f_1 \circ f_2$ tiene razón k_1k_2*
2. *f_1^{-1} tiene razón k_1^{-1}*

Corolario 4.41 *Sea (V, X) un espacio afín, entonces*

$$D(X)/T(X) \simeq (\mathbb{K}^*, \cdot)$$

Propiedad 4.42 *Sea (V, X) un espacio afín.*
Una dilatación está completamente determinada si se conoce la imagen de un punto y la razón de la dilatación.

Demostración: Sea σ una dilatación de razón k tal que $\sigma(c) = c'$
Primer Caso, si σ es un traslación, $k = 1$, y estamos listo.

$$\sigma = t_{\overrightarrow{cc'}}$$

Segundo Caso, si σ es una rotación

$$\sigma = M_{(a,k)}$$

Pero tenemos que

$$\begin{array}{rcl} M_{(a,k)}(c) & = & c' \\ k\overrightarrow{ac}\cdot a & = & c' \\ k\overrightarrow{ac} & = & \overrightarrow{ac'} \\ k\overrightarrow{ac} & = & \overrightarrow{ac + cc'} \\ k\overrightarrow{ac} - \overrightarrow{ac} & = & \overrightarrow{cc'} \\ (k-1)\overrightarrow{ca} & = & \overrightarrow{c'c} \\ \overrightarrow{ca} & = & \dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{c'c} \\ a & = & \dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{c'c}\cdot c \end{array}$$

Conocemos el centro y la razón esta completamente determinado. ■

Propiedad 4.43 *Sea (V, X) un espacio afín y σ una dilatación tal que $\sigma(x) = z$ y de la razón k, entonces*

$$\sigma = t_{\overrightarrow{xz}} \circ M_{(x,k)}$$

Demostración: σ una dilatación tal que $\sigma(x) = z$ y de la razón k. Luego tenemos que

$$t^{-1}_{\overrightarrow{xz}} \circ \sigma(x) = x$$

es una dilatación, que tiene un punto fijo y es de razón k, por lo tanto es una homotecia de razón k

$$t^{-1}_{\overrightarrow{xz}} \circ \sigma = M_{(x,k)}$$

de lo cual tenemos

$$\sigma = t_{\overrightarrow{xz}} \circ M_{(x,k)}$$

■

Propiedad 4.44 *Sea (V, X) un espacio afín, entonces para todo $a, b \in V$, para todo $c \in X$ y para todo $r, s \in K^*$*

$$t_{\overrightarrow{a}} \circ M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)} = t_{\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,rs)}$$

Demostración: Sean $a, b \in V$, $c \in X$ y $r, s \in \mathbb{K}^*$.

$$\begin{aligned} M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)})(c) &= M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}})((s\overrightarrow{cc} \cdot c)) \\ &= M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}})(c) \\ &= M_{(c,r)}(\overrightarrow{b} \cdot c) \\ &= (r\overrightarrow{c(\overrightarrow{b} \cdot c)} \cdot c) \\ &= (r\overrightarrow{b} \cdot c)) \\ &= t_{r\overrightarrow{b}}(c) \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos que la dilatación

$$t_{-r\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)}$$

tiene un punto fijo y la razón es el producto de las razones, luego es rs.

$$t_{-r\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)} = M_{(c,rs)}$$

despejando obtenemos

$$t_{\overrightarrow{a}} \circ M_{(c,r)} \circ t_{\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,s)} = t_{\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}} \circ M_{(c,rs)}$$

■

Ejercicio 4.45 *Sea (V, X) un espacio afín, entonces*
Determinar condiciones para $c, d \in X$ distintos y $r, s \in \mathbb{K}^*$ de modo que $M_{(c,r)} \circ M_{(d,s)}$ es una traslación.

Capítulo 5

Guías de Ejercicios

5.1. Guía Plano Afín

1. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión dos, $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$, con

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & \left\langle \overrightarrow{v_1} \right\rangle + \overrightarrow{w_1} \\ l_2 & = & \left\langle \overrightarrow{v_2} \right\rangle + \overrightarrow{w_2} \end{array}$$

   Demuestre que $l_1 \parallel l_2$, si y sólo si, $\left\langle \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v_2} \right\rangle$

2. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión dos, $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ base de V y las rectas dadas por

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \left\langle \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} \right\rangle \\ l_2 & = & 2\overrightarrow{v_1} + \left\langle \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \right\rangle \end{array}$$

   Calcule $l_1 \cap l_2$.

3. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión dos, $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ base de V.

   Si $A = 2\overrightarrow{v_1} - 3\overrightarrow{v_2}$ y $B = 4\overrightarrow{v_1}$.

   Determine la ecuación cartesiana de la recta l_{AB}.

4. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión dos, $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ base de V.

   Si $2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in m$ y $m \parallel l$ y $l = \overrightarrow{v_1} + < \overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2} >$.

   Determine la ecuación cartesiana de la recta m.

5. Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión dos, $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ base de V.

   Si $A = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, C = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$ y $D = \overrightarrow{v_1}$.

   Determine la ecuación cartesiana de la recta m respecto a la base B, tal que $m \parallel l_{AC}$ y $D \mathcal{I} m$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión dos sobre $\mathbb{K}$, $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ base de V.

   Sea l recta de ecuación $y = 2x + 1$ respecto a la base B, $t = 2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \langle \overrightarrow{v_2} + 5\overrightarrow{v_1} \rangle$.

   Determine $l \cap t$.

7. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimension 2. sea $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ base de V.

   Sea $A = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $B = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $C = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$, $D = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

   Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.

8. Sean $A = (-1, 3), B = (2, -7), C = (2, -1)$ y $D = (4, 5)$ puntos en el plano de Moulton,.

   Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.

9. Sean $A = (-3, 5), B = (4, -2), C = (1, 1)$ y $D = (0, 2)$ puntos en el plano de Moulton,.

   Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.

10. Sean $A = (-3, 5), B = (-2, 2), C = (-1, 1)$ y $D = (0, 2)$ puntos en el plano de Moulton.

    Calcular:

    a) $l_{AB} \cap l_{CD}$.

    b) Determinar un punto E tal que $l_{AB} \parallel l_{CE}$.

11. Sean $A = (1, 2), B = (-2, 3)$ y $C = (1, 1)$ puntos en el plano de Moulton.

    Determinar la ecuación de la recta m en el plano de Moulton que cumple con $m \parallel l_{AB}$ y $c\mathcal{I}m$.

12. Sean $A = (1, 2), B = (-1, -1)$ y $C = (2, 5)$ puntos en el plano de Moulton.

    Determinar la ecuación de la recta m en el plano de Moulton que cumple con $m \parallel l_{AB}$ y $c\mathcal{I}m$.

13. Sean $A = (1, 1)$ y $B = (3, 0)$ puntos en el plano $\mathbb{R}^2$.

    Determine

    a) La ecuación de la recta en el plano afín vectorial real que une A con B.

    b) La ecuación de la recta en el plano afín de Moulton que une A con B.

14. Sean $A = (1, 2)$ y $B = (3, 5)$ puntos en el plano $\mathbb{R}^2$.

    Determine

    a) La ecuación de la recta en el plano afín vectorial real que une A con B.

    b) La ecuación de la recta en el plano afín de Moulton que une A con B.

15. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(x, y) = (2x - y + 1, x + y)$.

    Sea $l =< (1, 1) > +(2, 3)$ en el plano afín vectorial. Calcule $T(l)$.

16. Dada la recta de ecuación $l : \langle(2,3)\rangle + (0,1)$, en el plano vectorial real.

    Encuentre la ecuación de $T(l)$, donde

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (4x-2y+1, 3x+2y-1) \end{array}$$

17. Sea

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (x+2y+1, 3x-y+4) \end{array}$$

    Demuestre que T es una colineación en el plano afín vectorial real.

18. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(x,y) = (2x+y+1, x-y+6)$.

    Demostrar que T es una colineación del plano afín vectorial $\mathbb{R}^2$.

19. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(x,y) = (x+2, y+2)$.

    Demuestre que T no es una colineación en el plano de Moulton.

20. Sean $A = (1,1), B = (-2,4)$ y $C = (6,5)$ puntos en el plano de Moulton.

    a) Determinar la ecuación de la recta m tal que $m \parallel l_{AB}$ y $c\mathcal{I}m$.

    b) Determine el orden de $D = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2 \mid t_{\overrightarrow{v}}(l_{AB}) = m\}$, donde $t_{\overrightarrow{v}}$ es la traslación.

21. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(x,y) = (2x+1, 2y+5)$.

    Determinar los puntos y rectas fijas f.

22. Sea f una dilatación en el plano vectorial real tal que $f(0,0) = (1,0)$, $f(0,4) = (1,3)$.

    Determine $f(x,y)$

23. Sea T traslación en el plano vectorial real tal que $T(3,1) = (1,2)$.

    Determine las trazas de T

24. Sea σ una homotecia en el plano vectorial real, tal que σ tiene razón tres y $\sigma(2,1) = (1,2)$.

    Determine las trazas de σ

25. Sea σ una homotecia del plano afín $\mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$. Si el centro de σ es $(1,2)$ y $\sigma(2,1) = (3,-3)$.

    Determinar $\sigma(x,y)$.

26. Sea T una traslación del plano afín vectorial $V = \mathbb{F}_5^2$ tal que $T(3,5) = (-1,7)$.

    Sea σ una homotecia de centro $(8,7)$ y razón 2

    a) Determine $(T \circ \sigma)(x,y)$

    b) Calcular $(T^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ T)(x,y)$

27. Determine $F \in D(\mathbb{R}^2)$ tal que $T \circ F = F \circ T$, en donde:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & (y,x)+(2,3) \end{array}$$

28. Sea $\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tal que el centro de σ es $(1,2)$ y $\sigma(1,3)=(1,6)$. Sea τ traslación que cumple con $\tau(1,0)=(0,1)$.

    Calcular $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}(x,y)$

29. Sea $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homotecia de centro $(1,2)$ y razón 3. Sea $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ traslación tal que $\tau(0,0)=(1,1)$.

    Calcular $(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1})(x,y)$.

30. Sea $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ traslación tal que $\tau(1,1)=(2,3)$. $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homotecia de razón 3 y $\sigma(4,1)=(1,4)$.

    Determinar las trazas de $(\tau \circ \sigma)$ en el plano afín ectorial.

31. Sean $\Pi = \mathbb{F}_{11} \times \mathbb{F}_{11}$ plano afín, $f \in D(\Pi)$, tal que $f(6,9)=(3,3)$ y $f(10,1)=(4,1)$

    a) Determine el conjunto de trazas de f
    b) Se define $R = \{l \in \mathcal{L} \mid l \text{ es traza de } f\}$. Determine la cardinalidad de R

32. Sea $\sigma, \tau \in D(\mathbb{R}^2)$ tal que $\tau(1,3)=(2,2), \sigma(-2,0)=(-2,0)$ y $\sigma(1,-1)=(3,1)$.

    Determine:

    a) $(\tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1})(x,y)$
    b) Las trazas de $(\tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1})$

33. Sean $\mathbb{K}$ cuerpo y Π el plano afín vectorial, f la homotecia de centro $\overrightarrow{v}$ y razón α y t traslación $t(\overrightarrow{0})=\overrightarrow{u}$.

    Calcule $(f \circ t \circ f^{-1} \circ t^{-1})(\overrightarrow{w})$

34. Sea $\Pi = \mathbb{R}^2$, $\sigma, \tau \in D(\mathbb{R}^2)$, tal que σ es homotecia de razón α y $\sigma(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{w}$ y τ traslación tal que $\tau(\overrightarrow{w})=\overrightarrow{v}$.

    Determine las rectas fijas y puntos fijos de $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1}$

35. Sea Π el plano afín, g traslación de Π y f colineación de Π.

    a) Demuestre que $f^{-1} \circ g \circ f$ es una traslación de Π
    b) Si $[l]$ es la dirección de g. Determine la dirección de traslación $f^{-1} \circ g \circ f$

36. Sea $\mathbb{F}_q$ cuerpo finito de q elementos, $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ el plano afín vectorial, l una recta en Π. Si $H = \{f \in D(\Pi) \mid f(l)=l\}$.

    Calcule el orden de H

37. Sea $\mathbb{F}_q$ cuerpo finito de q elementos, $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ el plano afín vectorial, l_1, l_2 rectas de Π.
    Si $H = \{f \in D(\Pi) \mid l_2, l_1$ son traza de $f\}$.
    Calcule el orden de H

38. Sea $\Pi = \mathbb{F}_{11} \times \mathbb{F}_{11}$ plano afín vectorial y $P \in \mathcal{P}, l \in \mathcal{L}$.
    Si $H = \{f \in D(\mathbb{F}_{11}^2) \mid f(P) = P \wedge f(l) = l\}$.
    Calcule el orden de H

39. Sea $\Pi = \mathbb{F}_{31} \times \mathbb{F}_{31}$ espacio afín vectorial. $\sigma \in \mathcal{D}(\Pi)$ una homotecia de razón 2. y centro $(1,1)$
    $$H = \{f \in D(\Pi) \mid f \circ \sigma = \sigma \circ f\}.$$
    Calcule el orden de H

40. Sea $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. $\sigma \in \mathcal{D}(\Pi)$ una homotecia de razón -1. y centro $(1,1)$
    $$H = \{f \in D(\Pi) \mid f \circ \sigma = \sigma \circ f\}.$$
    Calcule el orden de H

41. Sea $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. $A, B \in \mathcal{P}$ distintos
    $$X = \{f \in D(\Pi) \mid f(A) = B\}.$$
    Calcule el orden de X

42. Sea t una traslación de $\mathbb{F}_7 \times \mathbb{F}_7$ tal que $t(1,2) = (1,0)$.
    Determinar σ dilatación tal que $\sigma \circ t \circ \sigma^{-1} = t$

43. Sea $\Pi = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$, y $H_{(1,2)}$ el grupo de homotecias de centro $(1,2)$.
    Describir la tabla de $H_{(1,2)}$.

44. Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ plano afín. Si $\sigma \in D(\Pi), t \in T(\Pi)$.
    Demuestre que $(\sigma \circ t \circ \sigma^{-1})$ es una traslación.

45. Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ plano afín. Si $\sigma \in Aut(\Pi), t \in T(\Pi)$.
    Demuestre que $(\sigma \circ t \circ \sigma^{-1})$ es una traslación.

46. Sea Π plano afín, $\sigma \in D(\Pi)$, l recta de Π, $\sigma(l) = l$, $P \in \mathcal{P}$, $P \not\mathcal{I} \mathcal{P}$ y $\sigma(P) = P$.
    Demostrar que $\sigma = Id$.

47. Sea $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ un plano afín de orden n. Sea $l \in \mathcal{L}$, recta fija.
    En $\mathcal{P}$ se define la siguiente relación
    $$A \sim B \Leftrightarrow l_{AB} \parallel l$$

a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

b) Determine el número de clases de equivalencia y cardinalidad de cada clase.

48. Sea $\mathbb{K}$ cuerpo y la relación $\sim$ sobre $\mathbb{K}^2$ plano afín vectorial dada por

$$\overrightarrow{u} \sim \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \exists \sigma \in D(\mathbb{K}^2),\ \sigma(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w},\ \sigma(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$$

   a) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) Describir las clases de equivalencias.

49. Sea $\mathbb{K}$ cuerpo y la relación $\sim$ sobre $\mathbb{K}^2$ plano afín vectorial dada por

$$\overrightarrow{u} \sim \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{K}^2,\ t_{\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$$

   a) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) Describir las clases de equivalencias.

50. Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de puntos con cardinal n^2, con $n > 1$ y $\mathcal{L}$ una colección de subconjuntos de $\mathcal{P}$ tales que

   a) Cada elemento de $\mathcal{L}$ contiene n puntos

   b) Si $P, Q \in \mathcal{P}$ distintos entonces existe única $l \in \mathcal{L}$ tal que $P, Q, \in l$

   Demostrar que $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ es un plano afín

51. Sea Π un plano afín. Demuestre que Π contiene al menos 3 hace de paralelas

52. ★ Sea $\Pi = \mathbb{F}_q^2$ el plano afín vectorial, P un punto, H_P el grupo de las homotecias de centro P.

$$\overrightarrow{u} \sim \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \exists \sigma \in H_P,\ \sigma(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$$

   Calcule el número de clases y la cardinalidad de cada clases.

53. ★ Sea $\Pi = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ plano afín vectorial. Calcular $|Aut(\Pi)|$.

54. ★ Sea $\Pi = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ plano afín vectorial. Calcular $|D(\Pi)|$.

55. ★ Sea A, B, C, D puntos distintos del plano afín vectorial real tal que $l_{AB} \parallel l_{CD}$.

   a) Demostrar que existe una única f dilatación tal que $f(A) = C$ y $f(B) = D$.

   b) Determine cuando f es homotecia y cuando f es traslación.

56. ★ Sea Π un plano afín $f \in Aut(\Pi)$, $g \in D(\Pi)$.

   Demostrar que $f \circ g \circ f^{-1} \in D(\Pi)$.

57. ★ Determinar todas las transformaciones lineales invertible de $\mathbb{R}^2$, las cuales son colineación del plano de Moulton.

5.2. Guía Plano Proyectivos

1. Comprobar que los tres puntos $< (1,2,2) >$, $< (3,1,4) >$ y $< (2,-1,2) >$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ son colineales, y determinar una ecuación de la recta que pasa por ellos.

2. Sean $A =< (1,2,1) >, B =< (1,1,1) >$ puntos del plano $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.

   Determinar la ecuación cartesiana de l_{AB}.

3. Sean $A =< (3,2,1) >, B =< (1,1,2) >$ puntos del plano $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{19}^3)$.

   Determinar la ecuación cartesiana de l_{AB}.

4. Sean $A =< (1,2,1) >, B =< (0,1,2) >, C =< (1,1,2) >, D =< (1,1,1) >$ puntos del plano $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.

   Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.

5. Sean $A =< (1,0,1) >, B =< (0,1,1) >, C =< (1,0,2) >, D =< (1,1,0) >$ puntos del plano $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.

   Calcular $l_{AB} \cap l_{CD}$.

6. En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_3^3)$. Sean $l_1 =< (1,2,0), (0,1,1) >$ y l_2 la recta de ecuación $2x + y + z = 0$.

   Calcule $l_1 \cap l_2$.

7. En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_5^3)$. Sean $l_1 = \langle (1,2,1), (2,0,1) \rangle$ y l_2 la recta de ecuación $x + y + z = 0$.

   Calcule $l_1 \cap l_2$

8. Sean $A =< (1,2,1) >, B =< (3,2,1) >, C =< (1,\alpha,4) >$ puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.

   Determine α de modo que A, B, C sean colineales.

9. En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$. Hallar el punto de intersección de la recta r que pasa por los puntos $< (3,1,-2)$ y $< (1,-5,3) >$ y la recta de ecuación $x - 3y - 4z = 0$.

10. En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $< (1,2,-2) >$ y el punto de corte de las rectas $2x - 3y + 7z = 0$ y $5x + 2z = 0$.

11. En cada uno de los casos siguientes encontrar una ecuación de la recta del plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ que pasa por los dos puntos dados:

    a) $< (-1,1,1) >$, $< (1,3,2i) >$

    b) $< (1,-1,i) >$, $< (i,1,1) >$

    c) $< (1,1,2i) >$, $< (1,-2,2i) >$

12. Sea $\pi = \mathbb{R}^2$ el plano afín vectorial, la recta de ecuación $l : y = 2x + 1$ y $\bar{l} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ el sumergimiento de l.

    Calcular la ecuación de $\bar{l}$.

13. Sea $\Pi = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ el plano afín vectorial, los puntos $A = (1,1), B = (2,1), C = (0,0)$ y $D = (1,3)$ y $\overline{\Pi}$ el sumergimiento de Π.

    Si $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ los puntos correspondientes en $\overline{\Pi}$. Calcular $l_{\overline{AB}} \cap l_{\overline{CD}}$.

14. Sean $A = (-3,5),\ B = (1,-4)$ puntos en el plano afín vectorial real y $\overline{A}, \overline{B}$ los puntos que se obtiene al sumergir $\mathbb{R}^2$ en el plano proyecto $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.

    Determinar la ecuación de la recta que une $\overline{A}$ y $\overline{B}$

15. Sean $A = (1,\delta),\ B = (\delta,1)$ puntos en el plano afín vectorial $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2(\delta)$ con $\delta^2 = \delta + 1$ y $\overline{A}, \overline{B}$ los puntos que se obtiene al sumergir $\mathbb{F}_4^2$ en el plano proyecto $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_4^3)$.

    Determinar la ecuación de la recta que une $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

16. Sea V un espacio vectorial real y $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base.

    Si A, B, C son tres puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(V)$ tal que

    $$A =< xe_1 + ye_2 + e_3 >,\ B =< e_1 + me_2 >,\ C =< be_2 + e_3 >$$

    Demostrar que $A \in l_{BC}$ si y sólo si $y = mx + b$

17. Sea l un recta en el plan afín vectorial $\mathbb{Z}_7^2$ y $\bar{l}$ la correspondiente recta inducida en $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_7^3)$ tal que su ecuación cartesiana es $x - 2y + 3z = 0$.

    Determinar la ecuación cartesiana de l.

18. Sea $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, tal que $f(< (x,y,z) >=< (x+y, x-y, z+x+y) >$, se extiende de manera natural a los conjuntos.

    Determine si f es una colineación en el plano proyectivo

19. Sea $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3),\ f(< (x,y,z) >) =< (y,x,z) >$ una colineación de plano proyectivo.

    Determine los puntos fijos de f.

20. Sea $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{11}^3) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{11}^3),\ f(< (x,y,z) >) =< (3x-y, 2x+y, 2y-5z) >$ una colineación de plano proyectivo.

    Determinar los puntos fijos de f.

21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $f(x,y,z) = (2x+y, 3y, z)$ una transformación lineal.

    Si $\overline{f}$ la colineación inducida por f en el plano proyectivo.

    Determine los puntos fijos de $\overline{f}$ si existe.

22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x-y, x+y, x+y-z)$ una transformación lineal.
    Si $\overline{f}$ la colineación inducida por f en el plano proyectivo.
    Determine los puntos fijos de $\overline{f}$.

23. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3, f(x,y,z) = (x+y, z, 2x+y)$ una transformación lineal.
    Si $\overline{f}$ la colineación inducida por f en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_5^3)$.
    Determine los puntos fijos de $\overline{f}$.

24. Sea $g : \mathbb{Z}_{11}^3 \to \mathbb{Z}_{11}^3$, $g(x,y,z) = (x,y,z) + (x+y+z)(1,2,1)$ transformación lineal.
    Si $\overline{g}$ es la colineación inducida por g en $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{11}^3)$.
    Determinar los puntos fijos de $\overline{g}$.

25. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
    Sea $\overline{f}$ la colineación inducida por$f \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$. Determine los puntos fijos de $\overline{f}$.

26. Sea $f : \mathbb{F}_{11}^2 \to \mathbb{F}_{11}^2$, tal que $f(x,y) = (x+y, x-y)$ y $\overline{f}$ la colineación inducida por f en $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_{11}^3)$.
    Determine los puntos y rectas fijas de $\overline{f}$.

27. Sea $f : \mathbb{F}_q^2 \to \mathbb{F}_q^2$, tal que $f(x,y) = (x+y, y)$ y $\overline{f}$ la colineación inducida en $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$.
    Determine los puntos fijos de $\overline{f}$.

28. En el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea r la recta de ecuación $3x-y+2z = 0$ y consideremos el plano afín $\Pi^r = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \smallsetminus r$.
    Hallar la ecuación de la recta afín que pasa por los puntos $<(1,2,-3)>$ y $<(2,1,5)>$, respecto base canónica.

29. Sea $\sigma : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$, tal que $\sigma(x,y) = (x, x+y)$ y $\overline{\sigma}$ la colineación inducida por σ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}^3)$.
    Demostrar que $(\exists l \in \mathcal{L})(\forall Q \in \mathcal{L} \ / \ \overline{\sigma}(l) = l)$

30. Demuestre que $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$ es un plano proyectivo de orden q.

31. Demuestre que todo plano proyectivo tiene al menos 7 rectas.

32. Sea $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $\sigma(x,y) = (x, x+y)$, y $\overline{\sigma}$ la colineación inducida por σ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.
    Demostrar que existe l recta de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, tal que $\forall Q \in l$, $\overline{\sigma}(Q) = Q$.

33. ★ Considere el plano afín $\Pi = (\mathbb{Z}_3^2, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.
    Construir el plano proyectivo asociado $\overline{\Pi}$.

34. ★ Considere el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2(\delta)$ con $\delta^2 = \delta + 1$ y el plano proyectivo $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{F}^3)$. Dada la recta $l =< (1,0,0),(0,1,\delta) >$.

    Construir el plano afín asociado Π^l.

35. ★ Sea $T : \mathbb{F}_q^2 \to \mathbb{F}_q^2$, una traslación en el plano afín vectorial finito y $\overline{T}$ la colineación inducida en $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$.

    Determine los puntos fijos de T y el número de rectas fijas.

36. ★ En $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$ el plano proyectivo, sea H el grupo de las perspectividad de eje l_∞.

    Calcular el orden de grupo H.

37. ★ Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal invertible, sea $\overline{f}$ la colineación inducida por f en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$

    Demuestre que $\overline{f}$ tiene un punto fijo.

38. ★ Sea $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$, l recta del plano afín vectorial y G el grupo de las colineaciones de $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$ inducido por el grupo de las traslaciones de traza l. Luego G opera sobre los puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$.

    Determine el número de órbitas o clases y la cardinalidad de cada clase

39. ★ Sea $\Pi = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$, y G el grupo de las colineaciones de $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$ inducido por el grupo de las traslaciones de Π. Luego G opera sobre los puntos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_q^3)$.

    Determine el número de órbitas o clases y la cardinalidad de cada clase

5.3. Guía Planos Métricos

1. En $\mathbb{R}^2$ plano Euclidiano. Sean $A = (-2,6)$, $B = (4,-4)$ y R_l la simetría de eje l.

    Encuentre:

    a) La recta de tal manera que $R_l(A) = B$

    b) Determine $R_l(x,y)$

2. En $\Pi = \mathbb{Z}_7^2$, plano métrico con $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$.

    Sean $A = (5,1)$, l la recta que une los puntos $B = (1,1)$ y $C = (2,4)$.

    a) Determine la ecuación de la recta m, tal que $A\mathcal{I}m$ y $m \perp l_{BC}$

    b) Determine $R_m(x,y)$

3. En $\Pi = \mathbb{Z}_{13}^2$, plano métrico con $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 - 2y_1y_2$.

    Si $A = (5,6)$, $b = (-1,-3)$ y R la simetría tal que $R(A) = B$.

    Determine $R(x,y)$

4. En $(\mathbb{Z}_{11}^2, f)$ plano Euclidiano, con $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{Z}_{11}^2$.

   Sean $A = (2,3)$, $B = (-1,5)$ y R_l simetría de eje l, tal que $R_l(A) = B$.
   Determine $R_l(x,y)$.

5. Sea Π plano métrico, $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Pi)$, $l \in \mathcal{L}$.

   Demostrar que $\sigma \circ R_l \circ \sigma^{-1} = R_{\sigma(l)}$

6. En $\mathbb{R}^2$ plano métrico, sean $P = (4,-3)$ y H_P la simetría puntual de centro P.

   Determine $H_P(x,y)$.

7. En $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ plano Elíptico.

   Hallar la intersección de las rectas l_1 y l_2 tal que l_1 une los puntos $\langle(2,3,1)\rangle, \langle(0,1,4)\rangle$ y l_2 tiene como polo al punto $\langle(6,5,-1)\rangle$.

8. Sea $\mathbb{Z}_{13}^2$ plano Euclidiano con $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 - 5y_1y_2$.

   Sea S la simetría tal que $S(2,7) = (4,9)$. Determine $S(8,1)$

9. Sea $\mathbb{R}^2$ plano Euclidiano. Sea σ la rotación de centro $(-1,1)$ y ángulo $30°$. Determine $\sigma(x,y)$

10. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = cis\alpha \cdot z$, en donde $cis\alpha = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$. Compruebe que f es una rotación de centro $(0,0)$ y ángulo α en $\mathbb{R}^2$.

    Donde f esta dada por

    $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

11. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean l la recta de ecuación $x + 2y + z = 0$ y $P =< (-1,1,-1) >$.

    Determine los vértices y lados del triángulo polar si uno de los lados es l y un vértice P.

12. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean $P =< (-1,2,3) >$ y $l : 2x - 4y - 6z = 0$.

    Determine los vértices y lados del triángulo polar que tiene como vértice al punto P y lado a la recta l.

13. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean l la recta de ecuación $2x + 4z = 0$ y $P =< (-2,2,1) >$.

    Determine los vértices y lados del triángulo polar si uno de los lados es l y un vértice P.

14. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean $A = \langle(1,2,1)\rangle, B = \langle(0,1,1)\rangle, P = \langle(1,1,1)\rangle$. Determine la ecuación de la recta m tal que $P\mathcal{I}m$ y $m \perp l_{AB}$

15. Exprese $R_{(1,1)}, R_{\text{eje } X}, R_{\text{eje } Y}$ mediante números complejos.

16. Sea Π plano Elíptico. Demostrar que $R_a(P) = P'$, entonces $R_a \circ H_p \circ R_a = H_{P'}$

17. Sea Π plano Elíptico. Si $P\mathcal{I}a$, entonces $R_a \circ H_P = H_P \circ R_a$

18. En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sea $P = \langle(0,1,1)\rangle$

    a) Determine l y m tal que $l \perp m$ y $l \cap m = \{P\}$

    b) Calcule $H_P(\langle(x,y,z)\rangle)$

19. En el semiplano de Poincaré, sea $P = (3,1)$ y l la recta de ecuación $x = 2$.

    Determine la recta m tal que $P\mathcal{I}m$ y $m \perp l$

20. En el semiplano de Poincaré, sea $l : x = 1, P = (2,3)$.

    Determine la ecuación de las paralelas hiperbólicas a l que pasan por P

21. En el semiplano de Poincaré, sean $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$, m la recta de ecuación $x = 1$.

    Determine la ecuación de $R_l(m)$

22. En el semiplano de Poincaré, sean $l : |z| = 4$ y $P = 3i$.

    Determine la ecuación de m tal que $P\mathcal{I}m$ y $m \perp l$

23. En el semiplano de Poincaré, sea $P = 1 + 2i$.

    Calcule $H_P(z)$

24. En el semiplano de Poincaré. Sean $l : |z| = 5$ y $P = 3i - 4$.

    Determine la ecuación de m tal que $P\mathcal{I}m$ y $m \perp l$

25. En el semiplano de Poincaré. Sean $P = -1 + 3i$ y $Q = 6 + 4i$.

    a) Determine la ecuación de m tal que $P\mathcal{I}m$ y $Q\mathcal{I}m$

    b) Calcule $R_m(z)$.

26. Dado el semiplano de Poincaré:

    a) Si t traslación a lo largo de la recta $x = 5$. Determine $t(z)$ con $z \in \mathbb{C}$

    b) Determine los elementos del grupo de rotaciones de centro i

27. ★ En Π plano métrico.

    Demuestre que para todo $l \in \mathcal{L}$ y $P \in \mathcal{P}$ tal que $P\mathcal{I}l$ se tiene que $H_P(l) = l$.

28. ★ En Π plano métrico. Sean a, b, c rectas no concurrentes a un punto tales que $M\mathcal{I}u, v$; $A\mathcal{I}v, C\mathcal{I}u$ tal que $R_u(a) = u$ y $R_v(b) = c$.

    Demuestre que existe w tal que $u \perp w, R_w(c) = (a)$ entonces $R_w = c$

5.4. Guía Espacios Afines

1. Sea (V, X) un espacio afín. Demostrar que $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V, \forall x, y \in X$

   a) $-\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{yx}$

   b) $\overrightarrow{(\overrightarrow{b} \cdot x)(\overrightarrow{b} \cdot y)} = \overrightarrow{xy}$

   c) $\overrightarrow{a} \cdot x = y \Leftrightarrow x = (\overrightarrow{-a}) \cdot y$

   d) $\overrightarrow{(\overrightarrow{a} \cdot x)(\overrightarrow{b} \cdot y)} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{b}$

   e) $\overrightarrow{xy} \cdot z = \overrightarrow{xz} \cdot y = (\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{xz}) \cdot x$

2. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$
$$\pi = S((1,1,1), <(1,0,1),(1,2,1)>)$$
   Determine la ecuación de π respecto sistema canónica.

3. Sean $A = (1,2,3), B = (2,3,1), C = (3,2,1)$.
   Determine la ecuación del plano que pasa por A, B, C respecto a la base canónica.

4. Sea $V = X = \mathbb{R}^4$. Determine la ecuación del subespacio afín respecto sistema canónica.
$$\pi = S((1,0,2,1), <(0,1,0,1),(0,1,1,1)>)$$

5. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$
$$S_1 = ((1,2,1), \langle(1,3,1)\rangle) \text{ y } S_2 = ((0,0,0), \langle(1,2,3),(1,0,4)\rangle).$$
   Determine la ecuación de las siguientes subespacios $S_1 \cap S_2$.

6. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$
$$S_1 = S((1,1,1), \langle(1,0,1),(1,2,1)\rangle) \text{ y } S_2 = S((1,0,1), \langle(1,2,3),(3,0,1)\rangle).$$
   Determine la ecuación de las siguientes subespacios $S_1 \cap S_2$

7. Sean $V = X = \mathbb{R}^4$
$$S_1 = S((1,0,1,1), \langle(1,2,1,1)\rangle) \text{ y } S_2 = ((0,1,1,0), \langle(1,1,2,1)\rangle).$$
   Determine la ecuación de las siguientes subespacios $S_1 \cap S_2$

8. Sean $V = X = \mathbb{R}^4$, S_1 y S_2 subespacios tales que
$$S_1 = S((1,2,3,0), \langle(1,3,0,1)\rangle) \text{ y } S_2 = S((0,0,0,1), \langle(0,2,3,4),(-1,1,6,7)\rangle)$$
   Determine:

a) $S_1 \cap S_2$

b) S_3 subespacio afín tal que $S_3 \parallel S_1$ y $S_3 \parallel S_2$

9. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$ y π el hiperplano que contiene a los puntos $(1,-1,0)$, $(3,-1,1)$ y $(0,1,1)$. Si l la recta que une los puntos $(1,4,1)$ y $(1,2,5)$.

   Calcular $l \cap \Pi$

10. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, $A = (1,2,1)$, $B = (3,5,1)$, $C = (1,3,2)$, $D = (1,2,3)$, $E = (2,1,3)$, l la recta que contiene los puntos A, B y π el plano que contiene los puntos C, D, E.

    Determinar si $l \parallel \pi$.

11. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, $A = (1,2,1)$, $B = (1,1,2)$, $C = (2,1,1)$, $D = (1,3,5)$ y π el plano que contiene los puntos A, B, C.

    Determinar la ecuación respecto sistema canónica del plano que es paralelo a π y contiene a D.

12. Sean $V = X = \mathbb{R}^4$

$$\pi_1 = S((1,0,1,0), < (1,0,1,1), (1,0,0,0), (1,1,0,0) >)$$

    Determine la ecuación de π_2 respecto a sistema canónica si

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \wedge (1,1,1,1) \in \pi_2$$

13. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, $A = (1,2,3)$, $B = (1,3,2)$, $C = (2,3,1)$ y Π el plano que contiene los puntos A, B, C. Si $D = (1,4,5), E = (2,1,\alpha)$.

    Determine α tal que $l_{ED} \parallel \Pi$

14. En $V = X = \mathbb{R}^3$, $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ base de V

    Sean $A = \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2$, $B = \overrightarrow{v}_3 + 2\overrightarrow{v}_2$.

$$\pi = S(\overrightarrow{v_2}, < \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3} >).$$

    Determine $L_{AB} \cap \pi$.

15. Sea V un espacio vectorial de dimensión tres. $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$

$$S_1 = S(\overrightarrow{v_1}, \langle \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3} \rangle) \text{ y } S_2 = (\overrightarrow{v_2}, \langle \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} \rangle).$$

    Determine $S_1 \cap S_2$.

16. En $V = X = \mathbb{R}^4$, $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v}_4\}$ base de V. Sean

    $S = S(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v}_2, < \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} >)$, $\quad B_1 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v}_4\}$

    Determine la ecuación cartesiana de S respecto a $(\overrightarrow{0}, B_1)$.

17. Sean $V = X = \mathbb{R}^2$, $S((0,1), \langle(1,1)\rangle)$ y $B = \{(0,1),(1,0)\}$ base de V, con $x_0 = (2,1)$.

    Determine la ecuación de S en (x_0, B).

18. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, $x_0 = (1,1,1)$y $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ base de V

    Determine la ecuación de cartesiana de $S((1,2,1), < (1,0,0,(2,0,1) >)$ respecto al sistema (x_0, B).

19. Sean $V = X = \mathbb{R}^3$, y π una recta cuya ecuación es $2x - 3 = \dfrac{y}{2} = 1 - z$ respecto al sistema canónico.

    Determine la ecuación de π respecto al sistema $((1,0,1), \{(1,2,3),(3,2,1),(0,1,0)\}$

20. En $V = X = \mathbb{R}^3$, sea π un plano cuya ecuación con respecto al sistema canónico es $x - y + 2z = 1$

    Determinar la ecuación de π respecto al sistema

    $$x_0 = (1,2,1) \text{ y } B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}.$$

21. Sea V un espacio vectorial y π hiperplano cuya ecuación es $x + y + z = 4$ respecto a la base $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$.

    Determine la ecuación de π respecto a la base $\overline{B} = \{\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\}$.

22. Sean (V, X) un espacio afín de dimensión tres, (x_0, B) un sistema de coordenadas de X. Sea S_1 subespacio de ecuación $x - y + z = 4$.

    Determine la ecuación de $S_2 \parallel S_1$ y $(1,2,3) \in S_2$

23. En $V = X = \mathbb{R}^3$. sea $S((1,0,0), < (1,1,0),(0,0,1) >$, $x_0 = (1,0,0)$.

    Determinar una base B de $< (1,1,0),(0,0,1) >$ tal que

    $$[(2,1,1)]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [(1,0,1)]_{(x_0,B)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

24. En $V = X = \mathbb{R}^3$ un espacio afín. Sea $l = S((0,0,1), \langle(1,1,2)\rangle)$ recta respecto al sistema (x_0, B), $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ base de V, con $x_0 = (0,0,0)$.

    Sea Π el plano cuya ecuación cartesiana es $2x - 3y - 4z = 5$ respecto al sistema (x_1, B_1), con $x_1 = (3,2,1)$ y $B_1 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Calcule $[l \cap \Pi]_{(x_1,B_1)}$

25. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $f(z,w) = (\overline{z}, \overline{w})$

    a) Demostrar que f es una transformación semilineal.

    b) Determinar todo los puntos de $L(c, f)$ si $c = (3,1)$.

26. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $f(z,w) = (3\overline{z} - \overline{w} + 1, \overline{z} + \overline{w} - 1)$

a) Demostrar que f es una transformación semilineal.

b) Determinar todo los puntos.

27. En $V = X = \mathbb{R}^3$, sean $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tales que σ_1 es una homotecia de razón 2 y centro $(1,1,0)$ y σ_2 homotecia la cual se sabe

$$\sigma_2(1,1,1) = (3,3,3), \quad \sigma_2(1,0,1) = (3,0,3)$$

Determinar el centro y razón de $\sigma_1 \circ \sigma_2^2 \circ \sigma_1^{-1}$.

28. En (V,X) espacio afín, sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$, $c \in X$ $r,s \in \mathbb{K}^*$ tales que

Demostrar que

$$T_{\overrightarrow{a}} \circ M(c,r) \circ T_{\overrightarrow{b}} \circ M(c,s) = T_{\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}} \circ M(c,rs)$$

29. En $V = X = \mathbb{R}^3$, sean $P_0 = (1,0,1)$, $P_1 = (0,1,1)$, $P_2 = (1,0,0)$, $P_3 = (-1,1,2)$, $Q_0 = (1,2,1)$, $Q_1 = (-1,2,0)$, $Q_2 = (0,3,4)$, $Q_3 = (1,-2,5)$ y $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación afín tal que

$$\sigma(P_0) = Q_0,\ \sigma(P_1) = Q_1,\ \sigma(P_2) = Q_2,\ \sigma(P_3) = Q_3$$

Determine $\sigma(x,y,z)$.

30. Sea $S(x,\mathcal{U})$ y $S(y,\mathcal{U})$ dos subespacios afines. Demuestre que:

$$S(x,\mathcal{U}) \parallel S(y,\mathcal{U}) \Leftrightarrow \exists t \text{ traslación tal que } T(S(x,\mathcal{U})) = S(y,\mathcal{U})$$

Anexos A

Complemento de Plano Proyectivo Perspectividad

Definición A.1 *Sean* Π *un plano proyectivo y* E *un subconjunto de puntos y rectas*

1. *Se dice que* E *es una configuración cerrada si y sólo si satisface los dos primeros axiomas de plano proyectivo*

2. *Se dice que es un subconjunto de Baer si y sólo si todo elemento de* Π *incide en un elemento de* E*.*

Lema A.1 *Sea* Π *un plano proyectivo, y* α *una colineación.*
Si $\mathcal{F}(\alpha)$ *son los puntos y rectas fijas por* α *entonces* $\mathcal{F}(\alpha)$ *es una configuración cerrada.*

Demostración: Sea P, Q dos puntos en $\mathcal{F}(\alpha)$, y $l = l_{PQ}$, por end se tiene que $\alpha(P)\mathcal{I}\alpha(l)$ y $\alpha(Q)\mathcal{I}\alpha(l)$, pero los puntos son fijos luego $P\mathcal{I}\alpha(l)$ y $Q\mathcal{I}\alpha(l)$ y por unicidad se tiene que $\alpha(l) = l$.
Dado dos rectas distintas l, m en $\mathcal{F}(\alpha)$, se tiene que $l \cap m = \{R\}$ luego tenemos que $\alpha(R)\mathcal{I}\alpha(l)$ y $\alpha(R)\mathcal{I}\alpha(m)$, pero las rectas son fijas, de este modo tenemos $\alpha(R)\mathcal{I}l$ y $\alpha(R)\mathcal{I}m$, además las rectas son distintas, por ello $\alpha(R) = R$. ■

Corolario A.2 *Si* α *una colineación deja fijo un cuadrilátero, entonces* $\mathcal{F}(\alpha)$ *es un sub-plano de* Π

Definición A.3 *Sea* Π *un plano proyectivo y* α *una colineación.*

1. *Si* $\mathcal{C}$*, es un subconjunto de puntos y rectas de* Π *que forman una configuración cerrada, entonces diremos que* $\mathcal{C}$ *es cerrada.*

2. *Si* $\mathcal{F}(\alpha)$ *es un sub-plano de* Π*, entonces llamaremos a* α *una colineación planar.*

3. *Si* $\mathcal{F}(\alpha)$ *es un subconjunto de Baer, entonces se dice que* α *una colineación de Baer.*

A.1. Cuasiperspectividades

Una cuasiperspectividad o colineación cuasicentral, de un plano proyectivo Π, es una colineación α tal que $\mathcal{F}(\alpha)$ es un subconjunto de Baer.
Note que Π es un subconjunto de Baer, luego la identidad en un cuasipertectividad.

Teorema A.4 *Sea Π un plano proyectivo, y α una colineación de orden 2, $\alpha^2 = 1$, entonces α es una cuasiperspectividad*

Definición A.5 *Sea Π un plano proyectivo, α una colineación*
Se dice que α es una involución si y sólo si α tiene de orden 2.

Teorema A.6 *Sean Π un plano proyectivo y $\mathcal{B}$ un subconjunto de Baer y configuración cerrada, entonces $\mathcal{B}$ es uno de los siguientes conjuntos*

1. *$\mathcal{B}$ es un plano de Baer*
2. *$\mathcal{B}$ consiste en una recta l, los puntos de l y todas las rectas que pasan por un punto fijo de l*
3. *$\mathcal{B}$ consiste en una recta l, un punto V, $V \not\mathcal{I} l$ los puntos de l y las rectas que pasan por V.*

Lema A.2 *Sea Π un plano proyectivo y Π_0 un sub-plano que contiene todos los puntos de una recta l de Π entonces $\Pi = \Pi_0$*

Teorema A.7 *Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto de Baer, $\mathcal{C}$ una configuración cerrada de un plano proyectivo Π y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, entonces*

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} \text{ o bien } \mathcal{C} = \Pi,$$

es decir, $\mathcal{B}$ es una configuración cerrada maximal.

Teorema A.8 *Sea α una cuasiperpectividad de un plano proyectivo Π, entonces α está completamente determinada por $\mathcal{F}(\alpha)$ y la imagen de un elemento que no pertenece a $\mathcal{F}(\alpha)$*

Lema A.3 *Sea α una cuasiperpectividad de un plano proyectivo Π, entonces $< \alpha >$ ejerce una acción sobre Π que no pertenece a $\mathcal{F}(\alpha)$.*

Definición A.9 *Si denotamos por Γ el grupo de las colineaciones de del plano proyectivo entonces*

$$\mathcal{F}(\Gamma) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{F}(\alpha)$$

A.2. Perspectividad

Definición A.10 *Sea Π un plano proyectivo, α una colineación, V un punto y l una recta*

1. *Se dice que α es una (V, l)-perspectividad o una (V, l) colineación central si y sólo si α fija la recta l punto a punto y el un punto V recta a recta.*

   El punto V se llama centro de α y l es su eje.

2. *Si $V \mathcal{I} l$ se dice que α es una Elación*

3. *Si $V \not\mathcal{I} l$ se dice que α es una homología*

4. *La identidad se define como una elación y una homología*

Teorema A.11 *Sea Π un plano proyectivo, α una colineación, entonces son equivalentes*

1. *α es una perspectividad*

2. *existe l recta fija punto a punto*

3. *existe V punto tal que α fija a cada recta que pasa por V*

Teorema A.12 *Sea α una (V, l) perspectividad entonces α esta completamente determinada si se conoce la imagen de un punto $P \not\mathcal{I} l$, $P \neq V$.*

Lema A.4 *Sea Π es un plano proyectivo finito de orden n, con una perspectividad α de orden k, entonces*

1. *Si $k|n$ entonces α es una elación.*

2. *Si $k|(n-1)$ entonces α es una homología.*

Lema A.5 *Sea Π es un plano proyectivo, si α es una (V, l)-perspectividad de Π y β una colineación, entonces*

$$\beta^{-1}\alpha\beta \text{ es una } (V^\beta, l^\beta)\text{-perspectividad}$$

Corolario A.13 *Sea Π es un plano proyectivo, si α es una (V, l)-perspectividad de Π y β una colineación que conmuta con α, entonces*

$$V^\beta = V \text{ y } l^\beta = l$$

Definición A.14 *Sea Γ es el grupo de colineaciones de plano proyectivo Π.*

1. $\Gamma(V, l) = \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha \text{ es una } (V, l)\text{-perspectividad }\}$

2. $\Gamma(k, l) = \bigcup_{P \mathcal{I} k} \Gamma(P, l)$

3. $\Gamma(P, Q) = \bigcup_{Q \mathcal{I} l} \Gamma(P, l)$

4. $\Gamma(P) = \underset{l\in\mathcal{L}}{\cup}\Gamma(P,l)$

5. $\Gamma(l) = \underset{P\in\mathcal{P}}{\cup}\Gamma(P,l)$

Corolario A.15 *Sea Γ es el grupo de colineaciones de plano proyectivo Π, $\gamma \in \Gamma$ entonces*

$$\Gamma^{\gamma}(V,l) = \gamma^{-1}\Gamma(V,l)\gamma = \Gamma(V^{\gamma}, l^{\gamma})$$

Lema A.6 *Sea plano proyectivo Π, k, l recta en Π y α una colineación distinta de la identidad. Si α es una perspectividad con eje en l y si $k^{\alpha} = k$, con $k \neq l$ entonces k pasa por el centro de α.*

Teorema A.16 *Sea Γ es el grupo de colineaciones de plano proyectivo Π, entonces $\Gamma(V,l)$, $\Gamma(k,l)$, $\Gamma(P,Q)$, $\Gamma(P)$, $\Gamma(l)$ son todos subgrupos de Γ para todo p, q puntos y l, k rectas.*
Además $\Gamma(l,l) \trianglelefteq \Gamma(l)$ y $\Gamma(P,P) \trianglelefteq \Gamma(P)$ para todo los elementos P y l.

Teorema A.17 *Sea Γ es el grupo de colineaciones de plano proyectivo Π.*
Si $\Gamma(P,l)$ es no trivial para los 2 puntos de l, entonces $\Gamma(l,l)$ es abeliano y todo elemento distinto de la identidad tiene el mismo orden infinito o primo.

Corolario A.18 *Sea Γ es el grupo de colineaciones de plano proyectivo Π de orden n. Si $|\Gamma(A,l)| > 1$, para elementos dos puntos distintos de l, entonces $\Gamma(l,l)$ es un p-grupo abeliano, donde p es un divisor de n*

Lema A.7 *Sea Γ es el grupo de colineaciones de plano proyectivo Π.*
Si $|\Gamma(P,l)| > 1$ y $|\Gamma(A,m)| > 1$ con Πl $A\mathcal{I}m$ entonces $|\Gamma(A,l)| > 1$.

Teorema A.19 *Sea Γ es el grupo de colineaciones de plano proyectivo Π de orden n.*
Para alguna recta $l \in \mathcal{L}$, $|\Gamma(l,l)| \not/ n^2$

Teorema A.20 *Sea Γ es el grupo de colineaciones de plano proyectivo Π de orden n.*

1. *Si l es una recta de Π entonces para la recta $m \neq l$, el conjuntos de punto fijos de que fijan m en $\Gamma(l,l)$, denotado por $\Gamma(l,l)_m = \Gamma(A,l)$ donde $A = l \cap m$*

2. *Si Π es finito de orden n y $|\Gamma(l,l)| > n$ entonces $1\Gamma(B,l)| > 1$ para todo $B\mathcal{I}l$*

3. *Si Π es finito de orden n entonces para alguna recta m el cardinal de la órbita de m por los elementos de $\Gamma(l,l)$ divide a n.*

A.3. (V,l)- transitividad

Sea Γ es el grupo de colineaciones de plano proyectivo Π de orden n.

1. Si $V\mathcal{I}l$ entonces $|\Gamma(V,l)| \leq n$
2. Si $V\not{\mathcal{I}}l$ entonces $|\Gamma(V,l)| \leq n-1$

Observación: Si en el primer caso $|\Gamma(V,l)| = n$ o bien en el segundo caso $|\Gamma(V,l)| = n-1$ entonces $\Gamma(V,l)$ es transitiva sobre los puntos de alguna recta que pasa por V no fijo

Definición A.21 *Sea Π plano proyectivo.*
Se dice que Π es (V,l)- transitivo, si para todo los puntos A,B distintos y $l_{V,A} = l_{V,B}$ y $A \neq V \neq B$ y $A\not{\mathcal{I}}l$, $B\not{\mathcal{I}}l$ existe una ‘perspectividad α en los $Aut(\Pi)$ tal que $A^\alpha = B$.

Lema A.8 *Sea Π plano proyectivo finito de orden n y $\Gamma = Aut(\Pi)$.*

1. *Π es (V,l)-transitivo para $V\mathcal{I}l$ si y solo si $\Gamma(V,l)| = n$*
2. *Π es (V,l)-transitivo para $V\not{\mathcal{I}}l$ si y solo si $\Gamma(V,l)| = n-1$*

Definición A.22 *Sea Π un plano proyectivo, l,m rectas.*

1. *Se dice que Π es (m,l)-transitivo si y sólo si para todo $V\mathcal{I}m$ se tiene que Π es (V,l)-transitivo*
2. *Se dice que Π es (A,B)-transitivo si y sólo si para todo $B\mathcal{I}m$ se tiene que Π es (A,m)-transitivo*

Teorema A.23 *Si π es un plano proyectivo (A,l)- transitivo y (B,l)- transitivo para los puntos A,B en Π, entonces Π es un plano de traslaciones*

Teorema A.24 *Si l,m son rectas de traslación en plano proyectivo Π, entonces toda recta que pasa por $l \cap m$, es también una recta de traslación*
Si Π tiene tres rectas no concurrentes, entonces toda recta de π es una recta de traslación.