

Capítulo 4

Espacios Conexos o Compactos

4.1. Espacio Conexo

Una forma natural de construir nuevos espacios topológicos es pegando en forma disjunta, es decir. Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos, luego definimos

$$Z = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$$

llamada unión disjunta, y definimos

$$\mathcal{T}_Z = \{U \times \{0\} | U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{V \times \{1\} | V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Es fácil demostrar que $(Z, \mathcal{T}_Z)$, es un espacio topológico. El proceso ante señalado se puede repetir indefinidamente. Por ello es de interés, identificar los espacios que no podemos construir de esta forma.

Definición 4.1 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que X es separable, si y sólo si, existen $U, V \in \mathcal{T} - \{\emptyset\}$ tal que

$$U \cap V = \emptyset, \quad X = U \cup V.$$

En este caso se dice que $\{U, V\}$ es una separación de X .

Definición 4.2 Un espacio topológico X se dice conexo, si y sólo si, no existe una separación de X .

Ejemplo 4.1

1. $\mathbb{R}$ es conexo. Supongamos que existe una separación $\{U, V\}$ de $\mathbb{R}$.

Sean $x \in U$, $y \in V$ tal que $x > y$, entonces, existe $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in]a_x, b_x[\subseteq U$.

Sea $I = \{x \in U | x > y\}$, luego es acotado y abierto ya que

$$I = \bigcup_{x \in I}]a_x, b_x[, \quad c = \inf I$$

Si $c \in U$, el cual es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $]c - \epsilon, c + \epsilon[\subseteq U$ lo cual es una contradicción ya que c es el ínfimo.

Si $c \in V$, el cual es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $]c - \epsilon, c + \epsilon[\subseteq V$ lo cual es una contradicción ya que c es el ínfimo.

Por lo tanto $\mathbb{R}$ es conexo.

2. Demostrar que los únicos conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos

3. Claramente $\mathbb{R} - \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$, por lo tanto $\mathbb{R} - \{0\}$ no es conexo.

Proposición 4.1 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) X es conexo.

2) No existen dos conjuntos A, B ambos cerrados, no vacíos de X tales que:

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset.$$

3) Los únicos conjuntos abiertos y cerrados en X son X y $\emptyset$.

4) No existen dos subconjuntos A, B ambos no vacíos de X tales que:

$$X = A \cup B, \quad (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset.$$

Demostración

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que existen A, B ambos cerrados en X tales que $X = A \dot{\cup} B$, entonces

$$A^c = B \in \mathcal{T}, \quad B^c = A \in \mathcal{T},$$

lo cual no puede ser, ya que X es conexo.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $\emptyset \neq A \subsetneq X$ es abierto y cerrado, entonces A^c es abierto y cerrado, entonces $X = A \dot{\cup} A^c$ con A y A^c cerrados en X lo cual no puede ser.

3) $\Rightarrow$ 4) Supongamos que existen A, B no vacíos tales que

$$X = A \cup B, \quad (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset,$$

entonces

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad \vee \quad A \cap \overline{B} = \emptyset,$$

esto es,

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq B^c, \quad \vee \quad B \subseteq \overline{B} \subseteq A^c.$$

Por lo tanto $A \cap B = \emptyset$, $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$, lo cual es una contradicción ya que A y B son subconjuntos abiertos y cerrados de X .

4) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que X no es conexo, entonces, existen $U, V \in \mathcal{T}$ disjuntos no vacío, tales que $X = U \cup V$, entonces U y V son abiertos y cerrados. Luego,

$$(\overline{U} \cap V) \cup (U \cap \overline{V}) = (U \cap V) \cup (U \cap V) = U \cap V = \emptyset,$$

lo cual no puede ser.

□

Definición 4.3 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $Y \subseteq X$.

Se dice que Y es conexo, si y sólo si, Y es conexo con la topología reducida.

Teorema 4.1 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $Y \subseteq X$.

Si Y es conexo, entonces $\overline{Y}$ es conexo.

Demostración Supongamos que Y es conexo, pero $\bar{Y}$ no es conexo. Luego, existe $\{V_1, V_2\}$ una separación de $\bar{Y}$, esto es

$$\bar{Y} = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad V_1, V_2 \in \mathcal{T}_{\bar{Y}},$$

entonces, existen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ tales que

$$V_1 = U_1 \cap \bar{Y}, \quad V_2 = U_2 \cap \bar{Y}.$$

Definamos $W_1 := U_1 \cap Y$ y $W_2 := U_2 \cap Y$, notemos lo siguiente:

$$W_1 \cap W_2 = U_1 \cap Y \cap U_2 \cap Y \subseteq U_1 \cap \bar{Y} \cap U_2 \cap \bar{Y} = \emptyset, \quad W_1, W_2 \in \mathcal{T}_Y,$$

además,

$$\begin{aligned} Y &= Y \cap \bar{Y}, \\ &= Y \cap (V_1 \cup V_2), \\ &= (Y \cap V_1) \cup (Y \cap V_2), \\ &= (Y \cap U_1 \cap \bar{Y}) \cup (Y \cap U_2 \cap \bar{Y}), \\ &= (Y \cap U_1) \cup (Y \cap U_2), \\ &= W_1 \cup W_2. \end{aligned}$$

Además $V_1 = U_1 \cap \bar{Y}$, es no vacío, luego existe $x \in U_1$ y $x \in \bar{Y}$, es decir U_1 es una abierto que contiene a x y esta en la clausura luego $W_1 = U_1 \cap Y \neq \emptyset$, análogamente el otro conjunto es no vacío

Por lo tanto Y es desconexo, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 4.1 Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $Y \subseteq X$ conexo entonces

Para todo $U, V \in \mathcal{T}$ disjuntos tales que $Y \subseteq U \cup V$ implica $Y \subseteq U$ o bien $Y \subseteq V$

Corolario 4.2 Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $Y \subseteq S \subseteq \bar{Y} \subseteq X$.

Si Y es conexo, entonces S también es conexo.

Demostración Supongamos que S es desconexo, entonces, existen U, V abiertos disjuntos tales que $S \subseteq U \cup V$ e $Y \subseteq S$.

Pero Y es conexo, luego podemos suponer que $Y \subseteq U$ (de modo análogo si $Y \subseteq V$), entonces $Y \cap V = \emptyset$, por lo tanto $V \cap \bar{Y} = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $\emptyset \neq V \subseteq S \subseteq \bar{Y}$. $\square$

Proposición 4.2 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ conexos tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $A \cup B$ es conexo.

Demostración Supongamos que $A \cup B$ es desconexo, es decir, existe $\{V_1, V_2\}$ una separación de $A \cup B$ y $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ de modo que

$$A \cup B = V_1 \dot{\cup} V_2, \quad V_1 = U_1 \cap (A \cup B), \quad V_2 = U_2 \cap (A \cup B).$$

Luego, tenemos

$$A = (A \cup B) \cap A = (V_1 \cup V_2) \cap A = (V_1 \cap A) \cup (V_2 \cap A),$$

$$(V_1 \cap A) \cap (V_2 \cap A) = (V_1 \cap V_2) \cap A = \emptyset,$$

y

$$V_i \cap A = U_i \cap (A \cup B) \cap A = U_i \cap A, \quad i = 1, 2.$$

Entonces,

$$V_1 \cap A = \emptyset, \quad \vee \quad V_2 \cap A = \emptyset,$$

análogamente,

$$V_1 \cap B = \emptyset, \quad \vee \quad V_2 \cap B = \emptyset.$$

Claramente $V_i \cap A = \emptyset$ y $V_i \cap B = \emptyset$ para $i = 1, 2$, no puede ser, por lo tanto supongamos $V_i \cap A = \emptyset$ y $V_j \cap B = \emptyset$ con $i, j = 1, 2$ distintos, entonces

$$A \subseteq V_j, \quad B \subseteq V_i, \quad A \cap B \subseteq V_i \cap V_j = \emptyset,$$

lo cual es una contradicción. □

Teorema 4.2 Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de X , tales que $U_i \cup U_j$ es conexo para todo $i, j \in I$. Entonces $\bigcup_{i \in I} U_i$ es conexo.

Demostración Sea $Y = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X$ y supongamos que $\{B_1, B_2\}$ es una separación de Y , es decir

$$Y = B_1 \cup B_2, \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1, B_2 \in \mathcal{T}_Y.$$

Consideremos $b_1 \in B_1$ y $b_2 \in B_2$, entonces existen $i, j \in I$ tales que $b_1 \in U_i$ y $b_2 \in U_j$, además existen $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ de modo que $B_1 = A_1 \cap Y$ y $B_2 = A_2 \cap Y$. Definamos en $\mathcal{T}_{U_i \cup U_j}$ los siguientes conjuntos:

$$\emptyset \neq C_1 := A_1 \cap (U_i \cup U_j), \quad \emptyset \neq C_2 := A_2 \cap (U_i \cup U_j).$$

Notemos ahora lo siguiente:

$$C_1 \cap C_2 = (A_1 \cap A_2) \cap (U_i \cup U_j) \subseteq A_1 \cap A_2 \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset,$$

y

$$\begin{aligned} C_1 \cup C_2 &= (A_1 \cap (U_i \cup U_j)) \cup (A_2 \cap (U_i \cup U_j)), \\ &= (A_1 \cup A_2) \cap (U_i \cup U_j), \\ &= (A_1 \cup A_2) \cap (Y \cap (U_i \cup U_j)), \\ &= ((A_1 \cup A_2) \cap Y) \cap (U_i \cup U_j), \\ &= ((A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y)) \cap (U_i \cup U_j), \\ &= Y \cap (U_i \cup U_j), \\ &= U_i \cup U_j. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, pues $U_i \cup U_j$ es conexo. □

Teorema 4.3 Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y X un espacio conexo, entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración Supongamos que $f(X)$ no es conexo, entonces existe $\{U_1, U_2\}$ una separación de $f(X) \subseteq Y$, luego, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_Y$ de modo que

$$U_1 = V_1 \cap f(X), \quad U_2 = V_2 \cap f(X).$$

Para $i = 1, 2$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_i) &= \left\{ x \in X \mid f(x) \in U_i \right\}, \\ &= \left\{ x \in X \mid f(x) \in V_i \cap f(X) \right\}, \\ &= \left\{ x \in X \mid f(x) \in V_i \right\} \cap \left\{ x \in X \mid f(x) \in f(X) \right\}, \\ &= \left\{ x \in X \mid f(x) \in V_i \right\} \cap X, \\ &= \left\{ x \in X \mid f(x) \in V_i \right\}, \\ &= f^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}_X, \end{aligned}$$

además, como $U_i \neq \emptyset$, entonces existe $y_i \in V_i \cap f(X)$, luego existe $x_i \in X$ de modo que $f(x_i) = y_i$, por lo tanto $f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$.

Si $x \in f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$, entonces $f(x) \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$ pues $\{U_1, U_2\}$ es una separación, luego $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$. Claramente $f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \subseteq X$, además, si $x \in X$, entonces $f(x) \in f(X) = U_1 \cup U_2$, luego

$$f(x) \in U \quad \vee \quad f(x) \in V \quad \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(U_1) \quad \vee \quad x \in f^{-1}(U_2),$$

por lo tanto $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$. Así $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$ es una separación de X , lo cual es una contradicción, pues X es conexo. $\square$

Ejemplo 4.2 La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es continua, luego $\mathbb{R}_0^+$ es conexo

La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$ es continua, luego $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ es conexo.

Note que la función definida por parte

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

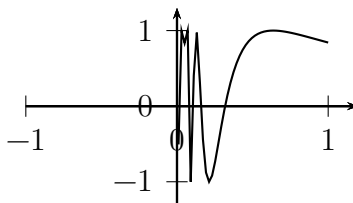
es continua, su recorrido es conexo, pero el dominio, que es la imagen inversa del recorrido no es conexo.

Corolario 4.3 Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y X un espacio conexo, entonces $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in X\}$ es conexo en $X \times Y$ con la topología producto.

Ejemplo 4.3 Por corolario anterior tenemos que

$$A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) | x \in \mathbb{R}^+\}$$

es conexo en $\mathbb{R}^2$.



Además note que

$$(0, \sin(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{a + 2n\pi}, \sin(a + 2n\pi))$$

luego

$$B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) | x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(0, y) | y \in [-1, 1]\} \subseteq \overline{A},$$

es conexo.

Note que el conjunto B es union disjunta de dos conjuntos conexo y el cual es conexo.

Ejemplo 4.4 Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua.

Demuestre que existe un punto fijo

Por el corolario anterior sabemos que $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in [0, 1] \times [0, 1] | x \in [0, 1]\}$ es conexo, supongamos que no existe p tal que $f(p) = p$. Luego $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$, entonces se define los conjuntos abiertos

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x > y\}; \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x < y\}$$

y se tiene que

$$(0, f(0)) \in H \cap f([0, 1]) \neq \emptyset; \quad (1, f(1)) \in G \cap f([0, 1]) \neq \emptyset.$$

Además

$$\Gamma_f = (H \cap f([0, 1])) \dot{\cup} (G \cap f([0, 1]))$$

por lo tanto Γ_f no es conexo, lo que es una contradicción.

Teorema 4.4 Sean X, Y dos espacios conexos, entonces $X \times Y$ también lo es.

Demostración Sea $(x_o, y_o) \in X \times Y$, definimos las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ccc} f_{y_o} : X & \rightarrow & X \times \{y_o\} \subseteq X \times Y \\ x & \rightsquigarrow & (x, y_o) \end{array}; \quad \begin{array}{ccc} f_{y_o}^{-1} : X \times \{y_o\} & \rightarrow & X \\ (x, y_o) & \rightsquigarrow & x \end{array}$$

Ya que f_{y_o} es continua por coordenada es continua, es decir, $X \times \{y_o\}$ es conexo. Por otro lado

$$\begin{array}{ccc} g_{x_o} : Y & \rightarrow & \{x_o\} \times Y \subseteq X \times Y \\ y & \rightsquigarrow & (x_o, y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g_{x_o}^{-1} : \{x_o\} \times Y & \rightarrow & Y \\ (x_o, y) & \rightsquigarrow & y \end{array}$$

También g_{x_o} es continua, luego, $\{x_o\} \times Y$ es conexo.

En forma directa veamos la continuidad

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cap (\mathbf{X} \times \{\mathbf{y}_o\}) = \mathbf{U} \times \mathbf{V} \cap \{\mathbf{y}_o\}; \quad (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cap (\{\mathbf{x}_o\} \times \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_o\} \cap \mathbf{U} \times \mathbf{V}$$

además, si $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \bigcup_{i \in I} (\mathbf{U}_i \times \mathbf{V}_i)$, entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cap (\mathbf{X} \times \{\mathbf{y}_o\}) &= \left(\bigcup_{i \in I} (\mathbf{U}_i \times \mathbf{V}_i) \right) \cap (\mathbf{X} \times \{\mathbf{y}_o\}) \\ &= \bigcup_{i \in I} ((\mathbf{U}_i \times \mathbf{V}_i) \cap (\mathbf{X} \times \{\mathbf{y}_o\})) \\ &= \bigcup_{i \in I} (\mathbf{U}_i \times \{\mathbf{y}_o\}) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} \mathbf{U}_i \right) \times \{\mathbf{y}_o\} = \mathbf{U}' \times \{\mathbf{y}_o\}. \end{aligned}$$

Análogamente

$$(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \cap (\{\mathbf{x}_o\} \times \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_o\} \times (\bigcup_{i \in I} \mathbf{V}_i) = \{\mathbf{x}_o\} \times \mathbf{V}'.$$

Claramente $f_{y_o}^{-1}((\mathbf{x}, \mathbf{y}_o)) = \mathbf{x}$ y $g_{x_o}^{-1}((\mathbf{x}_o, \mathbf{y})) = \mathbf{y}$, luego, tenemos

$$f_{y_o}(\mathbf{U}) = \mathbf{U} \times \{\mathbf{y}_o\}, \quad f_{y_o}^{-1}(\mathbf{U} \times \{\mathbf{y}_o\}) = \mathbf{U}, \quad g_{x_o}(\mathbf{V}) = \{\mathbf{x}_o\} \times \mathbf{V}, \quad g_{x_o}^{-1}(\{\mathbf{x}_o\} \times \mathbf{V}) = \mathbf{V},$$

por lo tanto f_{y_o} , g_{x_o} son homeomorfismos. Así, se tiene que $\mathbf{X} \times \{\mathbf{y}_o\}$ y $\{\mathbf{x}_o\} \times \mathbf{Y}$ son espacios conexos.

Además $\mathbf{X} \times \{\mathbf{y}_o\} \cap \{\mathbf{x}_o\} \times \mathbf{Y} = \{(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o)\}$, no vacío, luego $\mathbf{A}_{(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o)} = \mathbf{X} \times \{\mathbf{y}_o\} \cup \{\mathbf{x}_o\} \times \mathbf{Y}$ es conexo

Por otro lado $\mathbf{A}_{(a,b)} \cap \mathbf{A}_{(c,d)} = \{(a, d), (b, c)\}$. Es decir la unión es conexa, por Teorema 4.2

Finalmente

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \bigcup_{(a,b) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \mathbf{A}_{(a,b)}$$

Es conexo.

□

Ejemplo 4.5 $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es conexo, para todo $n \in \mathbb{N}$

4.1.1. Componente Conexa

Se define la siguiente relación en el espacio topológico X ,

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists A \subseteq X, \text{ conexo})(x, y \in A), \quad (4.1)$$

Note que es una relación de equivalencia en X , ya que es reflexiva debido que los singleton son conexos, es fácil ver la simétrica y es transitiva por la propiedad 4.2

Si denotamos por O_x la clase de $x \in X$ entonces tenemos entonces

$$X = \bigcup_{x \in X} O_x$$

Observación 4.1

1. Por Teorema 4.1, tenemos que $O_x = \overline{O_x}$.
2. Si $x \in A \subseteq X$, con A conexo, entonces $A \subseteq O_x$.
3. Si X es finito, entonces O_x es abierto y cerrado para todo $x \in X$.

Definición 4.4 Sea X un espacio topológico.

Una componente conexa en X es un subconjunto conexo maximal de X .

Ejemplo 4.6

1. $\mathbb{R}$ tiene una sola componente conexa, $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tiene dos componentes conexas, $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$.

4.2. Espacios Conexos por Caminos

Definición 4.5 Sea X un espacio topológico y $x, y \in X$.

Se dice que $f : [0, 1] \rightarrow X$ es un camino de x a y , si y sólo si, f es continua tal que $f(0) = x$, $f(1) = y$.

Si f es un camino de x a y lo denotaremos por $f_{x,y}$

Definición 4.6 Sea X un espacio topológico.

Se dice que X es conexo por caminos, o arcoconexo si y sólo si, existe un camino para todo par de puntos en X .

Ejemplo 4.7

1. El espacio $\mathbb{R}^n$ es conexo por caminos, mediante:

$$f_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_{x,y}(t) := (1-t)x + ty,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq 1$.

2. La circunferencia $S^1 := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1 \}$ es conexo por caminos, mediante:

$$f_{x,y} : [0, 1] \rightarrow S^1, \quad f_{x,y}(t) := (\cos((1-t)\theta_1 + t\theta_2), \sin((1-t)\theta_1 + t\theta_2)),$$

donde $x = (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1))$ e $y = (\cos(\theta_2), \sin(\theta_2))$.

Proposición 4.3 Todo espacio conexo por caminos es conexo

Demostración Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio conexo por camino, luego para todo $x, y \in X$, existe una función continua $f_{x,y} : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f_{x,y}(0) = x$, $f_{x,y}(1) = y$, como $[0, 1]$ es conexo luego $\text{Rec}f_{x,y}$ es conexo, teorema 4.3, y como

$$X = \bigcup_{y \in X} \text{Rec}f_{x,y}$$

es conexo por teorema 4.4, ya que es union de conexo con $\text{Rec}f_{x,y} \cap \text{Rec}f_{x,z} \neq \emptyset$.

□

Ejemplo 4.8 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ($n \geq 2$), es conexo por camino, ya que si el segmento

$$f_{x,y}(t) = (1-t)x + ty,$$

pasa por cero buscamos otro vector, que no se encuentre en el segmento, de modo de construir una función continua que no pase por el origen, por ello $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tiene solamente una componente conexa.

Ejemplo 4.9 En ejemplo 4.3 concluimos que

$$B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) | x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(0, y) | y \in [-1, 1]\}$$

es conexo, pero no es conexo por camino

Para ello, note que $(0, 0), (\frac{1}{2\pi}, 0) \in B$, si suponemos que es conexo por camino, luego existe $f : [0, 1] \rightarrow B$ continua tal que $f(0) = (0, 0), f(1) = (\frac{1}{2\pi}, 0)$.

Definamos

$$J = \{t \in [0, 1] | f(t) \in \{0\} \times [-1, 1]\} = f^{-1}(\{0\} \times [-1, 1])$$

Notemos que $Z = \{0\} \times [-1, 1]$ es cerrado, luego $f^{-1}(\{0\} \times [-1, 1]) = J$ es cerrado, además es no vacío, ya que el origen perteneces a J .

También J es abierto, sea $t \in J$, luego $f(t) \in \{0\} \times [-1, 1]$, consideremos V una bola de centro el origen y radio menor que 1, tal que contenga a $f(t)$, y de modo la intersección de $V \cap B$ no es conexo, luego debe existir un intervalo U , que contiene a t tal que $f(U) \subseteq \{0\} \times [-1, 1]$. lo cual implica que $U \subset J$.

De este modo J es un abierto, cerrado y no vacío en un conexo $[0, 1]$, luego $J = [0, 1]$.

Teorema 4.5 Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y X un espacio conexo por camino, entonces $f(X)$ es conexo por camino.

Teorema 4.6 Sean X, Y dos espacios conexos por camino, entonces $X \times Y$ también lo es.

4.2.1. Componente Conexa por Camino

Si X es un espacio topológico, entonces se define en X la siguiente relación

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{existe un camino de } x \text{ a } y. \quad (4.2)$$

La relación es de equivalencia, ya que, la funciones constante son continua luego es refleja, simétrica al considera la función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(t) = 1 - t$, luego si $f_{x,y}$ es un camino que une x con y , entonces $f_{x,y} \circ f$ es un camino que une y con x . Finalmente es transitiva ya que se define

$$f_{x,y} * f_{y,z}(t) = \begin{cases} f_{x,y}(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ f_{y,z}(2t - 1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

es un camino que une x con z .

Si denotamos por O_x^c la clase mediante la relación en (4.2), entonces

$$X = \bigcup_{x \in R} O_x^c.$$

Diremos que O_x^c es la componente conexa por caminos del punto x .

Definición 4.7 Sea X un espacio topológico.

Una componente conexa por camino en X es un subconjunto conexo por camino maximal de X .

Proposición 4.4 Las componente conexa por camino están contenida en alguna componente conexa del espacio topológico

Ejemplo 4.10

1. $\mathbb{R}$ tiene una sola componente conexa por camino, $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tiene dos componentes conexas por camino, $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$.
3. $A = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{T}\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, A\}$ Determinar las componentes conexas por camino.

Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ c & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. $A = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{T}\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, A\}$ Determinar las componentes conexas por camino.

$$f_{x,y} * f_{y,z}(t) = \begin{cases} a & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ b & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ c & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

5. $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{cf})$. Determinar las componentes conexas por camino.

4.3. Espacios Localmente Conexos

Definición 4.8 Sea X un espacio topológico y $x \in X$, entonces

1. Se dice que X es localmente conexo en x , si y sólo si, para todo $U \in \mathcal{V}(x)$, existe V abierto conexo, tal que, $x \in V \subseteq U$.
2. Se dice que X es localmente conexo, si y sólo si, para todo $x \in X$, X es localmente conexo en x .
3. Se dice que X es localmente conexo por caminos en x , si y sólo si, para todo $U \in \mathcal{V}(x)$, existe V abierto conexo por caminos, tal que, $x \in V \subseteq U$.
4. Se dice que X es localmente conexo por caminos, si y sólo si, para todo $x \in X$, X es localmente conexo por caminos en x .

Ejemplo 4.11 $X = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ no es conexo, pero es localmente conexo.

Dado U abierto en X y $x \in U$, luego existe $\epsilon > 0$, tal que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subseteq U$, escogemos $\delta = \frac{|x|}{2}$, y definimos $V =]x - \delta, x + \delta[\cap]x - \epsilon, x + \epsilon[$ es conexo y se tiene que $x \in V \subseteq U$.

Teorema 4.7 Sea X un espacio topológico, entonces

- 1) X es localmente conexo, si y sólo si, para todo conjunto abierto de X , las componentes conexas son abiertos.
- 2) X es localmente conexo por caminos, si y sólo si, para todo conjunto abierto de X , las componentes conexas por caminos son abiertos.

Demostración Sea X un conjunto localmente conexo, luego Sea U un abierto en X . Por lo tanto, para todo $x \in U$ existe V_x conexo tal que $x \in V_x \subseteq U$, sea C_x la componente conexa en U , que contiene a x , $V_x \subseteq C_x$. Del mismo modo podemos repetir para todo elemento que se encuentre en la componente, por maximalidad $\forall z \in C_x, z \in V_z \subseteq C_x \subseteq U$. De este modo la componente es abierta.

Inversamente, Si dado $x \in U$, abierto, luego $x \in C_x \subseteq U$, es abierto en la topología relativa, como U es abierto se tiene que es abierto en X

□

Teorema 4.8 *Sea X un espacio topológico, entonces*

- 1) *Cada componente conexa por caminos de X , está contenida en una componente conexa de X .*
- 2) *Si X es localmente conexo por caminos, entonces, las componentes conexas y conexas por caminos son las mismas.*

Demostración

- 1) Sea $x \in X$ y O_x^c su respectiva componente conexa por caminos. Sea $y \in O_x^c$, entonces, existe $f_{x,y}$ un camino de x a y , luego, por Teorema 4.3, $f_{x,y}([0, 1])$ es conexo en X . Claramente $x \in O_x^c = \bigcup_{y \in O_x^c} f_{x,y}([0, 1])$, además, por Proposición 4.2, O_x^c es conexo en X , por lo tanto $O_x^c \subseteq O_x$.
- 2) Si X es localmente conexo por caminos, por Teorema 4.7, sabemos que O_x^c es un conjunto abierto, además $O_x = O_x^c \dot{\cup} O_x \setminus O_x^c$. Supongamos que $O_x \setminus O_x^c \neq \emptyset$, entonces, existe $z \in O_x \setminus O_x^c$, y existe O_z^c abierto, de modo que

$$O_x \setminus O_x^c = \bigcup_{z \in O_x \setminus O_x^c} O_z^c,$$

por lo tanto $O_x \setminus O_x^c$ es abierto, luego $\{O_x^c, O_x \setminus O_x^c\}$ es una separación de O_x lo cual es una contradicción, pues O_x es conexo, así $O_x \setminus O_x^c = \emptyset$. Por lo tanto $O_x = O_x^c$.

□

4.4. Espacios Compactos

Definición 4.9 *Sea X un conjunto, $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos.*

1. *Se dice que $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de X , si y sólo si, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.*
2. *Se dice que $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento por abiertos de X , si y sólo si, $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de X y para todo $i \in I$, U_i es abierto.*

Definición 4.10 Se dice que X es compacto, si y sólo si, todo cubrimiento por abiertos de X tiene un subcubrimiento finito de X . Es decir, si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, entonces existe $J \subseteq I$ finito, de modo que $X = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Además $Y \subseteq X$ es compacto, si y sólo si, Y es compacto con la topología relativa.

Lema 4.9 Un subconjunto $Y \subseteq X$ es compacto, si y sólo si, todo cubrimiento de Y por abiertos de X , tiene un subcubrimiento finito.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de Y por abiertos de X , entonces $\{U_i \cap Y\}_{i \in I}$ es un cubrimiento por abiertos de Y , como Y es compacto, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tal que $Y = \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$, por lo tanto $\{U_{i_j}\}_{j=1}^n$ es un cubrimiento finito de Y por abiertos de X .

$\Leftarrow$) Sea $\{V_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de Y , entonces, existen $U_i \in \mathcal{T}_X$ tal que $V_i = U_i \cap Y$ para todo $i \in I$, luego $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de Y por abiertos de X , por lo tanto, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tal que $Y = \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$, luego

$$Y = \left(\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \right) \cap Y = \bigcup_{j=1}^n (U_{i_j} \cap Y),$$

por lo tanto Y es compacto. □

En adelante nos referimos por cubrimiento a un cubrimiento por abiertos.

Teorema 4.10 Sea X un espacio topológico compacto e $Y \subseteq X$ cerrado, entonces Y también es compacto.

Demostración Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de Y , entonces

$$X = Y \dot{\cup} Y^c = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \dot{\cup} Y^c.$$

Como Y^c es abierto, entonces es un cubrimiento por abiertos de X . Pero X es compacto, entonces existen $i_1, \dots, i_n$, $n < \infty$ tal que

$$X = Y \dot{\cup} Y^c = \left(\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \right) \dot{\cup} Y^c,$$

luego $Y = \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$, por lo tanto Y es compacto. □

Ejemplo 4.12 El espacio real $\mathbb{R}$ no es compacto, en efecto, definamos el siguiente cubrimiento

$$\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \mathcal{U}_i :=]i - 1, i + 1[, \quad \mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_i.$$

Si suponemos que $\mathbb{R}$ es compacto, existe $I \subseteq \mathbb{Z}$ finito, de modo que $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, lo cual no puede ser, ya que $\max I + 2 \notin \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

Ejemplo 4.13 Todo conjunto finito es compacto

Teorema 4.11 Todo subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Demostración Sea X un espacio de Hausdorff e $Y \subseteq X$ compacto.

Si $Y = X$, entonces $Y^c = \emptyset$ abierto, por lo tanto Y es cerrado.

Si $Y \neq X$, existe $x_o \in X \setminus Y$, además, X es Hausdorff, entonces, para todo $y \in Y$ existe $\mathcal{U}_y \in \mathcal{V}(x_o)$ y $\mathcal{V}_y \in \mathcal{V}(y)$ de modo que $\mathcal{U}_y \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$. Luego $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} \mathcal{V}_y$, pero Y es compacto, entonces $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_{y_i}$ ($n < \infty$). Consideremos el conjunto abierto $\mathcal{U}_{x_o} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_{y_i}$ y sea $y_o \in \{y_1, \dots, y_n\}$, entonces

$$\mathcal{U}_{x_o} \cap \mathcal{V}_{y_o} = \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_{y_i} \right) \cap \mathcal{V}_{y_o} = \bigcap_{i=1}^n (\mathcal{U}_{y_i} \cap \mathcal{V}_{y_o}) = \emptyset,$$

luego tenemos

$$\mathcal{U}_{x_o} \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{U}_{x_o} \cap \mathcal{V}_{y_i}) = \emptyset,$$

entonces $\mathcal{U}_{x_o} \cap Y = \emptyset$, por lo tanto $\mathcal{U}_{x_o} \subseteq Y^c$, con $\mathcal{U}_{x_o} \in \mathcal{V}(x_o)$, es decir, $X \setminus Y = Y^c$ es abierto. Así, obtenemos que Y es cerrado. $\square$

Proposición 4.5 Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Hausdorff, Y un subconjunto compacto de X y $x_o \in Y^c$. Entonces, existen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ disjuntos, tal que $x_o \in \mathcal{U}$ e $Y \subseteq \mathcal{V}$.

Demostración Como X es un espacio de Hausdorff, para todo $y \in Y$ existe $\mathcal{V}_y \in \mathcal{V}(y)$ y $\mathcal{V}_{x_o, y} \in \mathcal{V}(x_o)$ tal que $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_{x_o, y} = \emptyset$, luego $\{\mathcal{V}_y\}_{y \in Y}$ es un cubrimiento de Y , pero Y es compacto, entonces existen $y_1, \dots, y_n \in Y$ tal que $Y = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_{y_i}$. Luego, basta considerar

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{V}_{x_o, y_i}, \quad \mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_{y_i},$$

claramente $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. $\square$

Teorema 4.12 *Si X es compacto y $f : X \rightarrow Y$ es continua, entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de $f(X)$, como f es continua, entonces para todo $i \in I$, $f^{-1}(U_i)$ es abierto en X , además, para todo $x \in X$, $f(x) \in U_i$, entonces

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i),$$

pero X es compacto, entonces existe $n < \infty$ de modo que

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(U_{i_j}).$$

Por lo tanto

$$f(X) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j},$$

esto prueba que $f(X)$ es compacto. □

Proposición 4.6 *Sean X compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y biyectiva. Entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración Basta probar que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es continua, para esto utilicemos el Teorema 2.3, demostrando que para todo A cerrado en X , entonces, $(f^{-1})^{-1}(A)$ es cerrado en Y . Sea A un cerrado en X , como X es compacto, por Teorema 4.10, entonces A es compacto, luego, por Teorema 4.12, $f(A)$ es compacto en Y , pero Y es un espacio de Hausdorff, entonces por Teorema 4.11 tenemos que $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ es cerrado en Y . Por lo tanto f^{-1} es continua y así f es un homeomorfismo. □

Teorema 4.13 *Sean X, Y dos espacio compactos, entonces $X \times Y$ es compacto.*

Claramente, para todo $a \in X$ y $b \in Y$, las siguientes funciones son homeomorfismos

$$f_b : X \rightarrow X \times \{b\}, \quad f_b(x) := (x, b),$$

$$f_a : Y \rightarrow \{a\} \times Y, \quad f_a(y) := (a, y).$$

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de $X \times Y$, entonces

$$X \times \{b\} \subseteq X \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

pero X es compacto, entonces, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ de modo que

$$X \times \{b\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} =: U.$$

Como U es abierto, para todo $x \in X$, existen, $V_x \in \mathcal{V}(x)$ y $V_{x,b} \in \mathcal{V}(b)$ tal que

$$(x, b) \in V_x \times V_{x,b} \subseteq U, \quad V_x \times V_{x,b} \in \mathcal{V}((x, b)),$$

es decir, $\bigcup_{x \in X} V_x$ es un cubrimiento de X , luego, existen $x_1, \dots, x_m \in X$ de manera que $X = \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$, ya que es compacto. Además, $b \in \bigcap_{i=1}^m V_{x_i, b} =: W_b \in \mathcal{T}_Y$, por lo tanto

$$X \times \{b\} \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^m V_{x_i} \right) \times W_b \subseteq U.$$

Luego, para todo $b \in Y$ existe $W_b \in \mathcal{V}(b)$, es decir, $\bigcup_{b \in Y} W_b$ es un cubrimiento de Y , por la compacticidad de Y existen $b_1, \dots, b_r \in Y$ tal que $Y = \bigcup_{k=1}^r W_{b_k}$.

Así, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} X \times Y &= X \times \bigcup_{k=1}^r W_{b_k}, \\ &= \bigcup_{k=1}^r (X \times W_{b_k}), \\ &= \bigcup_{k=1}^r \left(\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \right), \\ &= \bigcup_{(k,j)=1}^{(r,n)} U_{(k,j)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $X \times Y$ es compacto.

Definición 4.11 Sea X un conjunto. Se dice que una familia de subconjuntos de X satisface la condición de intersección finita, si y sólo si, toda intersección finita de elementos de la familia es no vacía.

Teorema 4.14 Sea X un espacio topológico.

X es compacto, si y sólo si, toda familia de cerrados en X que satisface la condición de intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $\mathcal{C} = \{F_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados en X de modo que $\mathcal{C}$ satisface la condición de intersección finita, probaremos que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{D} = \{F_i^c\}_{i \in I}$, sabemos que para todos

$i_1, \dots, i_n \in I$ con $n < \infty$, se tiene $\bigcap_{j=1}^n F_{i_j} \neq \emptyset$, entonces

$$\bigcup_{j=1}^n F_{i_j}^c \neq X,$$

es decir, toda unión finita de elementos de $\mathcal{D}$ no cubre a X , luego, como X es compacto, $\mathcal{D}$ no es un cubrimiento de X , entonces

$$\bigcup_{i \in I} F_i^c \neq X \quad \Leftrightarrow \quad \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset.$$

$\Leftarrow$) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de X , supongamos que no existe un subcubrimiento finito de X , es decir, para todos $i_1, \dots, i_n$ con $n < \infty$ se tiene que $\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \neq X$, de otro modo, $\bigcap_{j=1}^n U_{i_j}^c \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{D} = \{U_i^c\}_{i \in I}$ es una familia de cerrados que cumple la condición de intersección finita, por lo tanto $\bigcap_{i \in I} U_i^c \neq \emptyset$, entonces

$$\bigcup_{i \in I} U_i \neq X,$$

lo cual es una contradicción, pues $\{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de X .

Esto demuestra el teorema. □

Teorema 4.15 *Todo intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto.*

Demostración Sean $I_x^y = [x, y]$ con $x < y$, un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{C} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de I_x^y . Definamos el siguiente conjunto:

$$C := \left\{ t \in I_x^y \mid I_x^t \text{ tiene un subcubrimiento finito de } \mathcal{C} \right\}.$$

Tenemos que existe $i_o \in I$ tal que $x \in U_{i_o}$, luego $C \neq \emptyset$ ya que

$$x \in C \subseteq I_x^y, \quad [x, x] = \{x\} \subseteq U_{i_o} \in \mathcal{C}.$$

Probemos ahora que $\sup C = y$, supongamos que $\sup C =: s < y$, como $s \in I_x^y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, existe $j_o \in I$ tal que $s \in U_{j_o}$, además, como U_{j_o} es abierto, existe $\epsilon > 0$ de modo que $]s - \epsilon, s + \epsilon[\subseteq U_{j_o}$. Como s es el supremo y $\epsilon > 0$, existe $t \in C$ tal que $s - \epsilon < t < s$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \epsilon, \quad t = s - \delta \in C.$$

Luego, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tal que $[x, s - \delta] \subseteq \bigcup_{k=1}^n u_{i_k}$ por lo tanto

$$[x, s + \delta] \subseteq [x, s - \delta] \cup [s - \epsilon, s + \epsilon] \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^n u_{i_k} \right) \cup u_{j_o} = \bigcup_{k=1}^{n+1} u_{i_k},$$

donde $i_{n+1} := j_o$. Lo cual es una contradicción, ya que s es el supremo.

Por lo tanto $s = y$, es decir I_x^y es compacto. $\square$

Teorema 4.16 *Sea $F \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, F es compacto, si y sólo si, F es cerrado y acotado.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sabemos que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico, luego Hausdorff. Además, por Teorema 4.11, si F es compacto, entonces es cerrado, basta probar luego que F es acotado. Sabemos que $F \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{R}}]-r, r[$, pero F es compacto, por lo tanto, existen $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ con $n < \infty$, de manera que $F = \bigcup_{i=1}^n]-r_i, r_i[$, llamemos $R = \{r_i\}_{i=1}^n$ y sea $r = \max R$, luego se tiene lo siguiente:

$$F = \bigcup_{i=1}^n]-r_i, r_i[\subseteq]-r, r[$$

por lo tanto F es acotado.

$\Leftarrow$) Sea F un conjunto cerrado y acotado, entonces, existe $m \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo par de puntos $x, y \in F$, $d(x, y) < m$, luego para $x_o \in F$ obtenemos:

$$F \subseteq [x_o - m, x_o + m] =: K,$$

como F es un cerrado dentro de un compacto K , por Teorema 4.10, F es compacto. $\square$

Teorema 4.17 *Sean X un espacio topológico compacto y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existen $a, b \in X$ tal que para todo $x \in X$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.*

Demostración Sea $x \in X$, como X es compacto, entonces, por Teorema 4.12, $f(X)$ es compacto, luego, por Teorema 4.16, $f(X)$ es cerrado y acotado. Supongamos que $s = \sup f(X) \notin f(X)$, entonces $s \in f(X)^c$ un abierto, luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $s \in]s - \epsilon, s + \epsilon[\subseteq f(X)^c$, lo cual es una contradicción ya que $s - \epsilon$ es cota superior de $f(X)$ y s es el supremo. Por lo tanto $s \in f(X)$, luego, existe $b \in X$ de modo que $f(b) = s$, entonces para todo $x \in X$, se tiene

$f(x) \leq f(b)$. Análogamente probamos que existe $a \in X$ tal que $f(a) = r = \inf f(X) \in f(X)$ y así

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b),$$

para todo $x \in X$. □

4.5. Espacios Localmente Compactos

Definición 4.12 Sea X un espacio topológico y $x \in X$

1. Se dice que X es localmente compacto en x , si y sólo si, existen K compacto en X y $U \in \mathcal{V}(x)$ y tal que

$$x \in U \subseteq K \subseteq X.$$

2. Se dice que X es localmente compacto, si y sólo si, X es localmente compacto en x , para todo $x \in X$.

Ejemplo 4.14 El espacio real $\mathbb{R}$ no es compacto, pero es localmente compacto, en efecto, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente:

$$x \in]x-1, x+1[\subseteq [x-1, x+1], \quad]x-1, x+1[\in \mathcal{V}(x), \quad I_{x-1}^{x+1} \text{ compacto.}$$

En general, $\mathbb{R}^n$ no es compacto, ya que el cubrimiento por abiertos $B(0, m)$ con $m \in \mathbb{N}$, no tiene subcubrimiento finito, pero es locamente compacto.

$$x \in \prod]x_i - 1, x_i + 1[\subseteq \prod [x_i - 1, x_i + 1]$$

Teorema 4.18 (Compactificación por un Punto) Sea X un espacio topológico.

X es de Hausdorff y localmente compacto, si y sólo si, existe un espacio topológico Y que satisface con las siguientes condiciones:

- i) $X \subseteq Y$.
- ii) $Y \setminus X$ contiene un solo punto.
- iii) Y es compacto y Hausdorff.

Además, si Y e Y' son dos espacios similares entonces existe un homeomorfismo $h : Y \rightarrow Y'$ que restringido a X es la identidad.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $Y = X \cup \{p\}$ para algún $p \notin X$. Definamos una topología sobre Y que cumpla con las condiciones anteriores.

$$\mathcal{T}_Y = \left\{ U \subseteq Y \mid U \in \mathcal{T}_X, \text{ o existe } C \subseteq X \text{ compacto, tal que } U = Y \setminus C \right\}.$$

Claramente $X \subseteq Y$ y $\#(Y \setminus X) = \#\{p\} = 1$.

Veamos que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es un espacio topológico:

- i) Como $\emptyset \in \mathcal{T}_X$ entonces $\emptyset \in \mathcal{T}_Y$, además, como $\emptyset$ es compacto en X , se tiene $Y \setminus \emptyset = Y \in \mathcal{T}_Y$.
- ii) Sean $U, V \in \mathcal{T}_Y$, distingamos tres casos:

a) Si $U, V \in \mathcal{T}_X$. Entonces $U \cap V \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$.

b) Si $U \in \mathcal{T}_X$ y $V = Y \setminus C$ con C un compacto en X , entonces:

$$U \setminus C = U \cap C^c = U \cap Y \cap C^c = U \cap (Y \cap C^c) = U \cap V \in \mathcal{T}_Y.$$

c) Si $U = Y \setminus C_1$ y $V = Y \setminus C_2$ con C_1, C_2 compactos en X . Claramente $C_1 \cup C_2$ es un compacto en X , luego:

$$Y \setminus (C_1 \cup C_2) = Y \cap C_1^c \cap C_2^c = (Y \cap C_1^c) \cap (Y \cap C_2^c) = U \cap V \in \mathcal{T}_Y.$$

iii) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos en Y . Distingamos tres casos:

a) Si $U_i \in \mathcal{T}_X$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$.

b) Si $U_i = Y \setminus C_i$ con C_i compacto en X para todo $i \in I$. Sabemos que $\bigcap_{i \in I} C_i$ es compacto en X , entonces:

$$Y \setminus \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right) = Y \cap \left(\bigcup_{i \in I} C_i^c \right) = \bigcup_{i \in I} (Y \cap C_i^c) = \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_Y.$$

c) Si $I = J \dot{\cup} K$ donde $U_j \in \mathcal{T}_X$ para todo $j \in J$ y $U_k = Y \setminus C_k$ con C_k compacto en X para todo $k \in K$, entonces:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} U_i &= \left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) \cup \left(\bigcup_{k \in K} (Y \setminus C_k) \right), \\ &= \left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) \cup \left(Y \setminus \left(\bigcap_{k \in K} C_k \right) \right), \\ &= \left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) \cup \left(Y \cap \left(\bigcap_{k \in K} C_k \right)^c \right), \\ &= Y \cap \left(\left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) \cup \left(\bigcap_{k \in K} C_k \right)^c \right), \\ &= Y \setminus \left(\left(\bigcup_{j \in J} U_j \right)^c \cap \left(\bigcap_{k \in K} C_k \right) \right) \in \mathcal{T}_Y. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{T}_Y$ es una topología sobre Y .

Por último resta probar que Y es compacto y Hausdorff:

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de Y , como $p \in Y \neq X$, entonces existe $i_o \in I$ y C_{i_o} compacto en X , tal que $p \in U_{i_o} = Y \setminus C_{i_o}$, además $Y = C_{i_o} \dot{\cup} (Y \setminus C_{i_o})$. Recordemos que cada U_i puede ser de dos formas:

$$U_i = U_i \in \mathcal{T}_X, \quad U_i = (Y \cap C_i^c),$$

Luego intersección con X

$$U_i \cap X \in \mathcal{T}_X, \quad U_i \cap X = (Y \cap C_i^c) \cap X = X \cap C_i^c \in \mathcal{T}_X,$$

es decir, abiertos en X . Luego

$$C_{i_o} \subseteq \left(\bigcup_{i \in I \setminus \{i_o\}} U_i \right) \cap X \subseteq \bigcup_{i \in I \setminus \{i_o\}} (U_i \cap X),$$

como C_{i_o} es compacto, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tal que

$$C_{i_o} \subseteq \bigcup_{j=1}^n (U_{i_j} \cap X) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}.$$

Por lo tanto

$$Y = C_{i_o} \dot{\cup} (Y \setminus C_{i_o}) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \cup U_{i_o} = \bigcup_{j=0}^n U_{i_j},$$

esto demuestra que Y es compacto.

Sean $x, y \in Y$, si $x, y \in X$, como X es Hausdorff entonces existen $V_x, V_y \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$ tal que $x \in V_x$, $y \in V_y$ y $V_x \cap V_y = \emptyset$, ahora si $x \in X$ e $y = p$ entonces, como X es localmente compacto, existen $U \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$ y K compacto en X de modo que

$$x \in U \subseteq K \subseteq X, \quad y = p \in Y \setminus K \in \mathcal{T}_Y, \quad U \cap (Y \setminus K) = \emptyset,$$

por lo tanto Y es un espacio de Hausdorff.

Claramente, si Y_1, Y_2 son espacios similares tal que

$$Y_1 = X \cup \{p_1\}, \quad Y_2 = X \cup \{p_2\}, \quad p_1, p_2 \notin X,$$

entonces existe un homeomorfismo $h : Y_1 \rightarrow Y_2$ definido como sigue

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ p_2 & \text{si } x = p_1 \end{cases}, \quad x \in Y_1.$$

$\Leftarrow$) Sea $Y = X \cup \{p\}$ con $p \notin X$ un espacio topológico con las propiedades i), ii) y iii), probemos que X es un espacio de Hausdorff localmente compacto:

Sean $x_1, x_2 \in X \subseteq Y$ luego, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_Y$ tal que $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, basta considerar $u_i \in \mathcal{U}_i = X \cap V_i \in \mathcal{T}_X$ para $i = 1, 2$ y claramente $u_1 \cap u_2 = \emptyset$, por lo tanto X es de Hausdorff.

Sea $x \in X \subseteq Y$, como Y es de Hausdorff, existen $U, V \in \mathcal{T}_Y$ tal que $x \in U, p \in V$ y $U \cap V = \emptyset$, entonces

$$x \in U \subseteq V^c,$$

como V^c es cerrado en Y entonces es compacto, ya que Y es compacto, luego X es localmente compacto. $\square$

Ejemplo 4.15 Sea $p = \infty$, entonces:

$$1. Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = S^1.$$

$$2. Y = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} = S^n.$$

Teorema 4.19 Sea X un espacio de Hausdorff.

X es localmente compacto, si y sólo si, para todo $x \in X$ y todo $U_x \in \mathcal{V}(x)$, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ de modo que $\overline{V_x}$ es compacto y además:

$$x \in \overline{V_x} \subseteq U_x.$$

Demostración

$\Leftarrow$) Claramente, ya que $x \in V_x \subseteq \overline{V_x}$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in X$ y $U_x \in \mathcal{V}(x)$. Consideremos $Y = X \cup \{\infty\}$ con la topología de compactificación por un punto, entonces Y es compacto y Hausdorff, además $U_x \in \mathcal{T}_Y$, luego $U_x^c = Y \setminus U_x$ es cerrado y por lo tanto compacto. Por Proposición 4.5, existen $V, W \in \mathcal{T}_Y$ de modo que:

$$U_x^c \subseteq V, \quad x \in W, \quad V \cap W = \emptyset,$$

entonces, $x \in W \subseteq V^c \subseteq U_x$. Como V^c es cerrado e Y es compacto, entonces V^c es compacto, luego, basta considerar $V_x = V^c$, así obtenemos $x \in \overline{V_x} \subseteq U_x$. $\square$

Corolario 4.4 *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y localmente compacto, y $A \subseteq X$. Si A es abierto o cerrado, entonces A es localmente compacto.*

Demostración

Caso 1: Si A es cerrado, consideremos $x \in A \subseteq X$. Como X es localmente compacto, existen $U \in \mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{T}_X$ y K un compacto en X de modo que

$$x \in U \subseteq K \subseteq X,$$

entonces $x \in U \cap A \subseteq K \cap A$, pero $K' = K \cap A$ es cerrado en A y está contenido en el compacto K , entonces K' es compacto, además, $U' = U \cap A$ es abierto en A , luego $x \in U' \subseteq K'$, por lo tanto A es localmente compacto.

Caso 2: Si A es abierto, consideremos $x \in A$, como $A \in \mathcal{T}_X$ y X localmente compacto, entonces, por Teorema 4.19, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ compacto tal que

$$x \in \overline{V_x} \subseteq A,$$

por lo tanto A es localmente compacto. $\square$

Corolario 4.5 *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto y de Hausdorff, si y sólo si, X es localmente compacto y Hausdorff.*

Demostración

$\Leftarrow$) Supongamos que X es localmente compacto y de Hausdorff. Consideremos $Y = X \cup \{\infty\}$ y el homeomorfismo inclusión $\iota : X \rightarrow Y$, luego X es homeomorfo a $\iota(X) = X \in \mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_Y$, donde Y es compacto y de Hausdorff (Teorema 4.18).

$\Rightarrow$) Supongamos que X es homeomorfo mediante f a A un subespacio abierto de Y el cual es compacto y de Hausdorff. Como Y es de Hausdorff entonces A lo es, así X lo es.

Además, dado $x \in A \subseteq Y$, como A es abierto e Y compacto, existen $U \in \mathcal{V}(x)$ y K un compacto, tal que

$$x \in U \subseteq A \subseteq Y = K,$$

por lo tanto X es localmente compacto. $\square$

Recordemos: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, de modo que todo singleton en X es cerrado. Se dice que:

1. X es un espacio regular, si y sólo si, para todo A cerrado de X y todo $x \in A^c$, existen $U, V \in \mathcal{T}$ de manera que $x \in U$ y $A \subseteq V$.
2. X es un espacio normal, si y sólo si, para todos A, B cerrados y disjuntos en X , existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Teorema 4.20 *Si X es compacto y Hausdorff, entonces X es normal.*

Demostración Sean A, B cerrados y disjuntos en X , por Teorema 4.10, A, B son compactos. Sea $x \in A$, luego existen $U_x \in \mathcal{V}(x)$ y $W_x \in \mathcal{T}_X$ tal que $U_x \cap W_x = \emptyset$, proposición 4.5, es decir,

$$B \subseteq W_x \in \mathcal{T}, \quad U_x \cap W_x = \emptyset, \quad x \in A,$$

entonces $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$, como A es compacto, existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, luego, basta considerar $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, además definamos $W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$.

Claramente se tiene que $B \subseteq W$ y $A \subseteq U$, además

$$U \cap W = (\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}) \cap (\bigcap_{j=1}^n W_{x_j}) = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cap (\bigcap_{j=1}^n W_{x_j})) = \emptyset$$

Por lo tanto X es normal. $\square$

Teorema 4.21 (Lema de Urysohn) *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico normal y A, B cerrados disjuntos. Entonces, existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua, tal que*

$$f(A) = \{0\}, \quad f(B) = \{1\}.$$

Demostración Sea $P = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ un conjunto numerable y ordenado. Definamos una sucesión $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ de la siguiente manera:

Como $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$A \subseteq B^c =: U_1 \in \mathcal{T}, \quad P_1 := \{1\}.$$

Como X es normal, A es cerrado y U_1 abierto, entonces, existe $U_0 \in \mathcal{T}$ tal que

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1, \quad P_2 := \{0, 1\}$$

Donde s_3 es el siguiente a 0 en P

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_{s_3} \subseteq \overline{U_{s_3}} \subseteq U_1, \quad P_3 = \{0, s_3, 1\}.$$

De esta manera construimos U_{s_n} , donde s_n es el siguiente a s_{n-1} en P . Así, el término n -ésimo viene dado por $P_n = \{0, s_3, s_4, \dots, s_n, 1\}$ (los primeros n números de la sucesión), donde

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq \dots \subseteq U_{s_i} \subseteq \overline{U_{s_i}} \subseteq \dots \subseteq U_1 = B^c.$$

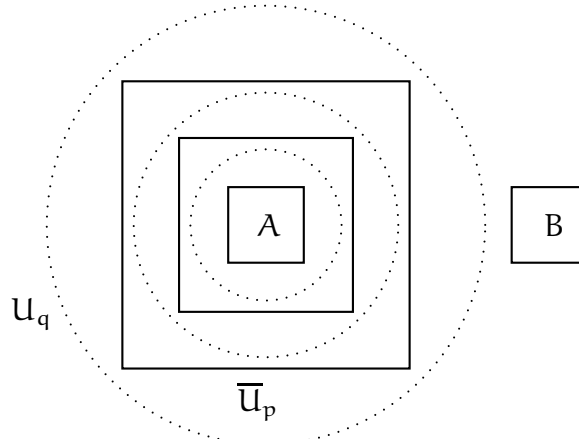
Es una sucesión definida por recurrencia U_{s_j} , están definido para todo $s_j \in P$

El conjunto $\{U_t | t \in P_n\}$ es ordenado por inclusión, tal como los respectivos subíndices en la recta real, notemos además que $P_n \cup \{s_{n+1}\} = P_{n+1} \subseteq [0, 1]$.

Luego, como $s_{n+1} \neq 0 = \min P_{n+1}$ y $s_{n+1} \neq 1 = \max P_{n+1}$, existen $p, q \in P_{n+1}$ de modo que $p < s_{n+1} < q$. Usando la definición $U_{s_{n+1}}$ tenemos que

$$\overline{U_p} \subset U_{s_{n+1}} \subseteq \overline{U_{s_{n+1}}} \subset U_q. \quad (4.3)$$

Así afirmamos que (4.3) se cumple para todo $p, q \in P_{n+1} \subseteq P$.



Podemos también extender la definición de U_i a todo $i \in \mathbb{Q}$ como sigue:

$$V_i = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i < 0 \\ U_i & \text{si } 0 \leq i \leq 1 \\ X & \text{si } 1 < i \end{cases}$$

de modo que (4.3) sigue siendo cierto.

Para cada $x \in X$ definamos $Q(x) = \{i \in \mathbb{Q} | x \in V_i\}$, nótese que este conjunto no contiene valores menores que cero, ya que $V_i = \emptyset$ para $i < 0$. Además, si $i > 1$, $x \in V_i = X$ para todo $x \in X$, entonces $\mathbb{Q} \cap]1, \infty[\subseteq Q(x)$, por lo tanto $Q(x)$ es acotado inferiormente y la mayor de sus cotas inferiores está en $[0, 1]$, esto nos permite definir la siguiente función:

$$f : X \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \inf(Q(x)).$$

Notemos que, si $x \in A$ entonces $f(x) = 0$ ya que $A \subseteq V_0 \subseteq V_i$, $i \geq 0$, por otro lado, si $x \in B$ se tiene $x \notin V_1 = B^c$ y así $x \in V_i$ para $i > 1$, luego $f(x) = 1$.

Veamos ahora que f es continua:

Para esto primero probemos que

$$x \in \overline{V_r} \Rightarrow f(x) \leq r, \quad x \notin V_r \Rightarrow f(x) \geq r. \quad (4.4)$$

Ya que:

Si $x \in \overline{V_r}$, entonces $x \in V_s$ para todo $s > r$, por lo tanto $]r, \infty[\cap \mathbb{Q} \subseteq Q(x)$, luego

$$f(x) = \inf(Q(x)) \leq r.$$

Si $x \notin V_r$, entonces $x \notin V_s$ para todo $s < r$, por lo tanto $(]-\infty, r[\cap \mathbb{Q}) \cap Q(x) = \emptyset$, luego

$$f(x) = \inf(Q(x)) \geq r.$$

Sean $]a, b[\subseteq [0, 1]$ abierto, $x \in f^{-1}(]a, b[)$, entonces $a < f(x) < b$, luego, existen $p, q \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$a < p < f(x) < q < b,$$

como $p < q$ entonces $\overline{V_p} \subseteq V_q$.

Definimos $V = V_q - \overline{V_p}$ es un abierto, y el contrapositivo de (4.4) obtenemos lo siguiente

$$f(x) > p \Rightarrow x \notin \overline{V_p}, \quad f(x) < q \Rightarrow x \in V_q.$$

por lo tanto $x \in V$.

Además, si $y \in f(V)$ entonces existe $z \in V \subseteq X$ tal que $f(z) = y$, luego $z \in V_q \subseteq \overline{V}_q$ implica que $f(z) \leq q$, y $z \notin \overline{V}_p$ implica que $f(z) \geq p$, por lo tanto

$$f(z) \in [p, q] \subseteq]a, b[, \quad f(V) \subseteq]a, b[.$$

Esto prueba que $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{T}$, concluyendo la demostración. $\square$

4.6. Ejercicios Propuestos

1. Demostrar que los siguientes conjuntos son conexos:

$$[0, 1] \times [0, 1], B((0, 0), 1) \cup \{(1, 0)\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy < 1\}.$$

2. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, se define los siguientes conjuntos

$$A = [-1, 1] \times [-1, 1] - \{(x, x) | x \in [-1, 1] - \{0\}\}$$

Determinar si A es conexo, es compacto

3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $B \subseteq X$ un subconjunto conexo, abierto y cerrado. Probar que B es una componente conexa.
4. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico conexo y $A \subseteq X$ conexo. Si B es abierto y cerrado de $X - A$, probar que $A \cup B$ es conexo.
5. Demuestre que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio conexo si y sólo si para todo $M \subset X$ no vacío y distinto de X entonces $\text{Fr}(M) \neq \emptyset$
6. Demostrar que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es conexo
7. Demostrar que $S^2 - \{e_1, -e_1\}$ es conexo
8. Demostrar que S^2 no es homeomorfo a S^1 .
9. ¿Cuántas componentes conexas tiene $\mathbb{R}^3 - S^2$?
10. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio conexo y $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ entonces. Demostrar que $(X, \mathcal{T}_1)$ es conexo.

11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subseteq X$ conexo. ¿Es $\overset{\circ}{A}$ conexo?
12. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua, entonces existe un punto de $x \in [0, 1]$, tal que $f(x) = x$.
13. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ formado por la unión de las rectas $y = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ y los ejes coordenados.
Muestre que X es conexo, pero no localmente conexo.
14. Sean C, X dos subconjuntos de un espacio métrico M . Si C es conexo y tiene un punto en común con X entonces C tiene un punto en común con la frontera de X .
15. Sea $U(a, b) = \{an + b \in \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Z}^+$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

$$B = \{U(a, b) : (a, b) = 1, a, b \in \mathbb{Z}^+\}$$

- a) Demuestre que B es una base, sea $\mathcal{T}$ esta topología.
 - b) Para todo p primo, el conjunto $\{kp : k \in \mathbb{Z}^+\}$ es cerrado en $\mathcal{T}$
 - c) Si P es el conjunto de primo, $\overset{\circ}{P} = \emptyset$.
 - d) $(\mathbb{Z}^+, \mathcal{T})$ es conexo.
16. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que: $(X, \mathcal{T})$ es conexo $\Leftrightarrow$ para cualquier subconjunto A no vacío tal que $A \neq X$ se tiene que $\text{Fr}(A) \neq \emptyset$.
 17. Sea X un espacio conexo por camino y sea $f: X \rightarrow Y$ continua entonces $f(X)$ es conexo por camino.
 18. Demostrar que si X es conexo por camino entonces X es conexo.
 19. Sea X un conjunto infinito con la topología de complemento finito. Demostrar que X es conexo.
 20. Usando la definición, estudiar si los siguientes conjuntos son compactos en los espacios que se indican
 - a) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.
 - b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la topología usual.

c) $[0, 1] \times \{3\} \subset \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico.

21. Determinar si

$$\begin{aligned} X = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in [0, 1] \times [0, 1] & : (\exists \mathbf{n} \in \mathbb{N}) (\mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{n}} \vee \mathbf{y} = \frac{1}{\mathbf{n}})\} \\ \cup \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in [0, 1] \times [0, 1] & : (\mathbf{x} = 0 \vee \mathbf{y} = 0)\} \end{aligned}$$

es compacto.

22. Demostrar que la unión finita de compacto es compacto.

23. Sean:

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathbb{S}^1 \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \\ X_2 &= (\mathbb{R} \times \{0, 1\}) \cup (\{0, 1\} \times \mathbb{R}) \\ X_3 &= (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \mathbf{y}\} \cup \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} = -\mathbf{x} + 2\} \end{aligned}$$

Demostrar que ninguno es homeomorfo a cualquier otro.

24. Pruebe que los espacios siguientes son dos a dos homeomorfos

$$\begin{aligned} a) X &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1\} \\ b) Y &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = \mathbf{z}^2, \mathbf{z} > 0\} \\ c) Z &= \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ d) W &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 < 2\} \\ e) T &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 = 1\} - \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \end{aligned}$$

25. Determine si los espacios siguientes son o no homeomorfos dos a dos

$$\begin{aligned} a) S^1 &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 1\} \\ b) \mathbb{R} & \\ c) S^2 &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 = 1\} \\ d) [0, 1[& \end{aligned}$$

26. Demostrar que $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$, con $n > 1$

27. Decir cuáles son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, con la topología de los complementos numerables y, finalmente, con la topología discreta.
28. Determine si las siguientes son verdadera o falsas justifique
- a) Un conjunto compacto siempre es cerrado
 - b) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topológica cofinita es compacto
 - c) Sean X, Y, Z espacios topológicos Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ no son continua entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ no es continua.
 - d) Sea $A = \{x \in \mathbb{R}^2 | 1 < d(0, x) < 2\}$ es un conjunto conexo (con la topología usual)
 - e) la intersección de dos conexos con un punto en común es conexo
 - f) Si $f : X \rightarrow S^1$ continua y epiyectiva entonces X es compacto.
 - g) Si Y no es conexo, $f : X \rightarrow Y$ continua y epiyectiva entonces X es no conexo.
29. Sea X un espacio de Hausdorff y sean $K_1, K_2 \subset X$ dos compactos disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ con $K_1 \subset \mathcal{U}_1$ y $K_2 \subset \mathcal{U}_2$.
30. Sean A, B compactos con la topología relativa de X e Y respectivamente entonces $A \times B$ es compacto con la topología relativa de $X \times Y$
31. Demostrar que si Y es compacto entonces $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ es cerrada.
32. Sea X un espacio compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ continua.
Demostrar que f es cerrada.
33. Sea X un espacio topológico e Y un espacio de Hausdorff compacto y $f : X \rightarrow Y$.
Probar que f es continua si y sólo si la gráfica de f , Γ_f , es cerrada en $X \times Y$.
34. Si X, Y son espacio de Hausdorff compacto. Demostrar
 $f : X \rightarrow Y$ es continua si y sólo si Γ_f es compacta en $X \times Y$.

35. Sea X un espacio compacto y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Demostrar que existen $c, d \in X$ tal que

$$(\forall x \in X) (f(c) \leq f(x) \leq f(d))$$

36. Se dice X es un espacio métrico es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Demostrar que todo espacio métrico compacto es completo

Índice alfabético

- Arcoconexo, 82
- Compacto, 87
 - Locamente, 93
 - Punto, 93
- Conexo, 72
 - Componente, 81
 - por caminos, 84
 - Subespacio, 74
- Conexo por caminos, 82
- Conjunto
 - Acotado, 52
 - Adherencia, 19
 - Frontera, 19
 - Interior, 19
 - Puntos de Acumulación, 23
- Convergencia
 - Uniforme, 62
- Espacio
 - T_0 , 24
 - T_1 , 24
 - T_2 , 25
 - T_3 , 28
 - T_4 , 28
 - T_5 , 29
- Hausdorff, 25
- Fréchet, 24
- Kolmogorov, 24
- Métrico, 50
 - Bola, 51
- Metrizable, 52
- Normal, 28
- Regular, 28
- Función
 - Abierta, 44
 - Cerrada, 44
 - Continua, 37
 - en un Punto, 43
 - Estereográfica, 46
 - Isometría, 63
- Homeomorfismo, 44
- Lema de Urysohn, 98
- Métrica
 - Discreta, 51
 - Uniforme, 56
 - Usual, 50
- Teorema
 - Compactificación por un Punto, 93

Topología, 5

Base, 8

Complemento Finito, 7

Débil, 11

Discreta, 5

Final, 18

Generada, 10

Grupo, 10

Inicial, 19

más fina, 8

menos fina, 8

Orden, 7

Producto, 14

Sorgenfrey, 11

Subespacio, 17

Trivial, 5

Union Disjunta, 7

Zariski, 7