Capítulo 2

Funciones Continuas

2.1. Definiciones y Propiedades

Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos y una función $f : X \to Y$. Se dice que f es continua, si y sólo si, para todo $V \in \mathcal{T}_Y$, se tiene $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$, donde

$$f^{-1}(V) = \left\{ x \in X \mid f(x) \in V \right\}.$$

Ejemplo 2.1 *Sea $\mathcal{T}$ la topología usual y $\mathcal{T}_d$ la topología débil en $\mathbb{R}$. Entonces la función identidad definida como sigue, no es continua*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}: & (\mathbb{R}, \mathcal{T}) & \to & (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

En efecto, si consideramos $[1, 2[\in \mathcal{T}_d$, tenemos $\mathrm{id}^{-1}([1, 2[) = [1, 2[\notin \mathcal{T}$.

Por lo tanto id no es continua.

Ejemplo 2.2 *Sean X_1, X_2 espacios topológicos y $X_1 \times X_2$ con la topología producto entonces la función proyección es continua*

$$\begin{array}{rccc} p_i: & X_1 \times X_2 & \to & X_i \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_i \end{array}$$

En efecto, sean $U_i \in \mathcal{T}_{X_i}$, entonces tenemos

$$p_1^{-1}(U_1) = U_1 \times X_2 \text{ y } p_2^{-1}(U_2) = X_1 \times U_2.$$

Por lo tanto p_i es continua.

Lema 2.1 *Sean* $f : X \to Y$ *y* $\{U_i\}_{i\in I}$ *una familia de subconjuntos de* Y. *Entonces*

$$f^{-1}\left(\{U_i\}_{i\in I}\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i). \tag{2.1}$$

Demostración Consideremos x como sigue:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\{U_i\}_{i\in I}\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \textstyle\bigcup_{i\in I} U_i, \\ &\Leftrightarrow f(x) \in U_{i_0},\ (i_0 \in I), \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(U_{i_0}\right),\ (i_0 \in I), \\ &\Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(U_i\right). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1 *Sea* $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ *una función y* $\mathcal{B}$ *una base de* $\mathcal{T}_Y$. *Entonces,* f *es continua, si y sólo si, para todo* $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $B \in \mathcal{B}$, como $B \in \mathcal{T}_Y$ y f es continua, entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.

$\Leftarrow$) Sea $V \in \mathcal{T}_Y$, entonces

$$V = \bigcup_{x\in V} B_x, \qquad (B_x \in \mathcal{B}).$$

Por Lema 2.1, se tiene $f^{-1}(V) = \bigcup_{x\in V} f^{-1}(B_x) \in \mathcal{T}_X$, ya que $f^{-1}(B_x) \in \mathcal{T}_X$. Por lo tanto f es continua. □

Ejercicio 2.3 *Demostrar la proposición anterior para una sub-base de* $\mathcal{T}_Y$.

Ejemplo 2.4 *Sean* $\mathcal{T}_d$ *la topología débil y* $\mathcal{T}$ *la topología usual en* $\mathbb{R}$. *Entonces la función identidad definida como sigue, es continua*

$$\begin{aligned} \mathrm{id} :\ (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) &\to (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

En efecto $\mathrm{id}^{-1}(]a, b[) =]a, b[= \bigcup_{c\in]a,b[} [c, b[$. *Por lo tanto* id *es continua.*

Lema 2.2 *Sean* A *un conjunto y* f *una función, entonces:*

$$\left(f^{-1}\left(A^c\right)\right)^c = f^{-1}(A). \tag{2.2}$$

Demostración Consideremos x como sigue:

$$\begin{aligned} x \in \left(f^{-1}\left(A^c\right)\right)^c &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}\left(A^c\right), \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A^c, \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A, \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.3 *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes*

1) f *es continua.*

2) Para todo $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

3) Si $B \subseteq Y$ *es cerrado, entonces* $f^{-1}(B)$ *es cerrado en* X.

Demostración

1) $\Rightarrow$ 2). Sea $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$, probaremos que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Sea $U \in \mathcal{V}(f(x))$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X, además $x \in f^{-1}(U)$. Luego

$$x \in \overline{A} \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Como $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$, existe $y \in f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$, entonces $f(y) \in U \cap f(A)$.

Por lo tanto $f(x) \in \overline{f(A)}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Sea $B \subseteq Y$ cerrado, anotemos $A = f^{-1}(B)$, entonces $f(A) \subseteq B$, luego

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{B} = B.$$

Por hipótesis, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq f^{-1}(B) = A \subseteq \overline{A}$. Por lo tanto $f^{-1}(B)$ es cerrado.

3) $\Rightarrow$ 1). Sea $U \in \mathcal{T}_Y$, luego U^c es cerrado. Por hipótesis $f^{-1}(U^c)$ es cerrado. Por Lema 2.2 se tiene

$$\left(f^{-1}(U^c)\right)^c = f^{-1}(U),$$

es abierto. Por lo tanto f es continua. $\square$

Teorema 2.4 *Sean* X, Y, Z *espacios topológicos, entonces:*

1) *Sea* $y_0 \in Y$. *La función constante* $c_{y_0} : X \to Y$ *tal que para todo* $x \in X$, $c_{y_0}(x) := y_0$, *es continua.*

2) *Sea* $A \subseteq X$. *La función inclusión* $\iota_A^X : A \hookrightarrow X$ *tal que para todo* $a \in A$, $\iota_A^X(a) := a$, *es continua.*

3) *Sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *funciones continuas. La función compuesta* $g \circ f : X \to Z$ *tal que para todo* $x \in X$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, *es continua.*

4) *Sean* $A \subseteq X$ *y* $f : X \to Y$ *continua. La función restricción* $f|_A : A \to Y$ *tal que para todo* $a \in A$, $f|_A(a) := f(a)$, *es continua.*

5) *Sean* $B \subseteq Y$ *y* $f : X \to Y$ *continua de modo que* $\mathrm{Rec}(f) \subseteq B$. *La función* $g : X \to B$ *tal que para todo* $x \in X$, $g(x) := f(x)$, *es continua.*

6) *Sean* $f : X \to Y$ *continua e* $Y \subseteq Z$. *La función* $g : X \to Z$ *tal que para todo* $x \in X$, $g(x) := f(x)$, *es continua.*

Demostración

1) Sea $U \in \mathcal{T}_Y$. Si $y_0 \in U$, entonces $f^{-1}(U) = X$, ahora si $y_0 \notin U$, tenemos $f^{-1}(U) = \emptyset$. Como $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$, entonces c_{y_0} es continua.

2) Sea $U \in \mathcal{T}_X$, entonces:

$$f^{-1}(U) = \left\{ \ a \in A | \iota_A^X(a) \in U \ \right\} = A \cap U \in \mathcal{T}_A.$$

Por lo tanto ι_A^X es continua.

3) Sea $U \in \mathcal{T}_Z$, como g es continua, entonces $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y$, luego

$$f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(U) = (g \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X,$$

ya que f es continua. Por lo tanto $g \circ f$ es continua.

4) Sea $U \in \mathcal{T}_Y$, entonces

$$f|_A^{-1}(U) = \left\{ a \in A | f|_A(a) = f(a) \in U \right\} = f^{-1}(U) \cap A \in \mathcal{T}_A.$$

Por lo tanto $f|_A$ es continua.

5) Sea $U \in \mathcal{T}_Y$, entonces

$$\begin{aligned} g^{-1}(U \cap B) &= \left\{ x \in X | g(x) \in U \cap B \right\}, \\ &= \left\{ x \in X | f(x) \in U \cap B \right\}, \\ &= \left\{ x \in X | f(x) \in U \right\}, \\ &= f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X, \end{aligned}$$

ya que f es continua. Por lo tanto g es continua.

6) Sea $U \in \mathcal{T}_Z$, entonces

$$g^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap Y) \in \mathcal{T}_X,$$

ya que $U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. Por lo tanto g es continua.

$\square$

Proposición 2.2 *Sean* X, Y *espacios topológicos y* $\{U_i\}_{i\in I}$ *una familia de conjuntos abiertos en* X *de modo que*

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Entonces, $f : X \to Y$ *es continua, si y sólo si,* $f|_{U_i}$ *es continua para todo* $i \in I$.

Demostración

$\Rightarrow$) Por Teorema 2.4.4, $f|_{U_i}$ es continua para todo $i \in I$.

$\Leftarrow$) Sea $U \in \mathcal{T}_Y$, entonces

$$f|_{U_i}^{-1} = \left\{ x \in U_i | f(x) \in U \right\} = f^{-1}(U) \cap U_i \in \mathcal{T}_{U_i},$$

ya que $f|_{U_i}$ es continua para todo $i \in I$. Por lo tanto $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

$\square$

Proposición 2.3 (Lema de Unión) *Sea* $X = A \cup B$ *espacio topológico, con* A, B *cerrados en* X.

Si $f : A \to Y, \quad g : B \to Y$ *son funciones continuas tales que, para todo* $x \in A \cap B$, *se tiene que* $f(x) = g(x)$, *entonces*

$$\begin{aligned} h : X &\to Y \\ x &\rightsquigarrow h(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si} \quad x \in A \\ g(x) & \textit{si} \quad x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

es un función continua.

Demostración

Sea C cerrado en Y, luego tenemos que

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$$

Debido que f, g son continua $f^{-1}(C)$, $g^{-1}(C)$ son cerrado en la topología relativa.

Luego existen C_1, C_2 cerrado en X tales que

$$f^{-1}(C) = C_1 \cap A \qquad g^{-1}(C) = C_2 \cap B$$

Cerrados en X, luego h es continua.

$\square$

Proposición 2.4 *Sean* $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ *espacios topológicos. Entonces, la función* $f : X \to Y$ *es continua, si y sólo si, para todo* $x \in X$ *y todo* $U \in \mathcal{V}(f(x))$ *existe* $V \in \mathcal{V}(x)$ *de modo que* $f(V) \subseteq U$.

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que f es continua. Sean $x \in X$ y $U \in \mathcal{V}(f(x))$, tenemos

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X, \qquad x \in f^{-1}(U), \qquad f\left(f^{-1}(U)\right) \subseteq U.$$

Luego, basta considerar $V = f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$.

$\Leftarrow$) Sean $U \in \mathcal{T}_Y$ y $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{P}(X)$, entonces $U \in \mathcal{V}(f(x))$, por hipótesis, existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $f(V_x) \subseteq U$, más aún

$$x \in V_x \subseteq f^{-1}(U).$$

Luego,

$$f^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x \subseteq f^{-1}(U),$$

esto es $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} V_x \in \mathcal{T}_X$. Por lo tanto f es continua. $\square$

Definición 2.1 (Continuidad en un Punto) *Sea* $f : X \to Y$ *y* $x_0 \in X$*. Se dice que* f *es continua en* x_0*, si y sólo si, para todo* $U \in \mathcal{V}(f(x_0))$ *existe* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *de modo que* $f(V) \subseteq U$*.*

Proposición 2.5 *Sean* X, X_1, X_2 *espacios topológicos y* $f_i : X \to X_i$ *funciones entonces.*

La función $T : (X, \mathcal{T}_X) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_{X_1} \times \mathcal{T}_{X_2})$ *tal que para todo* $x \in X$*,* $T(x) := (f_1(x), f_2(x))$*, es continua si y solo si* f_i *es continua para todo* $i = 1, 2$*.*

Demostración

$\Rightarrow$) Sea U un elemento basal de $\mathcal{T}_{X_1} \times \mathcal{T}_{X_2}$, es decir $U = U_1 \times U_2$, donde $U_i \in \mathcal{T}_{X_i}$ para $i = 1, 2$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x \in T^{-1}(U) &\Leftrightarrow x \in T^{-1}(U_1 \times U_2), \\ &\Leftrightarrow (f_1(x), f_2(x)) \in U_1 \times U_2, \\ &\Leftrightarrow f_1(x) \in U_1, f_2(x) \in U_2, \\ &\Leftrightarrow x \in f_1^{-1}(U_1), x \in f_2^{-1}(U_2), \\ &\Leftrightarrow x \in f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2). \end{aligned}$$

Como f_i es continua para todo $i = 1, 2$ y T tiene como dominio a X, entonces

$$T^{-1}(U) = \left(f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)\right) \in \mathcal{T}_X.$$

Por lo tanto T es continua.

$\Leftarrow$) Como T es continua y la proyección es continua p_i ejemplo 2.2, entonces teorema 2.4.3 se tiene que

$$p_i \circ T = f_i$$

$\square$

Proposición 2.6 *Sean* X, X_1, X_2, Z *espacios topológicos,* $f_i : X \to X_i$ *continua para* $i = 1, 2$ *y* $H : X_1 \times X_2 \to Z$ *continua. Entonces la función* $F : X \to Z$ *tal que* $F(x) := H(f_1(x), f_2(x))$, *es continua.*

Demostración Por Proposición 2.5, sabemos que $T : X \to X_1 \times X_2$ tal que $T(x) = (f_1(x), f_2(x))$ es continua.

Basta notar que $F = H \circ T$, luego por Teorema 2.4.3, F es continua. $\square$

El siguiente corolario es consecuencia directa de las Proposiciones 2.5 y 2.6.

Ejercicio 2.5 *Sean* X *un espacio topológico y* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *continuas.*
Pruebe que:

1) *La función* $f + g : X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

2) *La función* $f - g : X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

3) *La función* $fg : X \to \mathbb{R}$ *es continua.*

4) *La función* $f/g : A \to \mathbb{R}$ *es continua, donde* $A := \left\{ x \in X | g(x) \neq 0 \right\}$.

4) *La función* $\sqrt{\ } : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es continua.*

2.2. Homeomorfismos

Definición 2.2 *Sean* X, Y *dos espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función. Diremos que* f *es un homeomorfismo , si y sólo si,* f *es biyectiva y* f, f^{-1} *son continuas.*

Observación 2.1 *Sea* $f : X \to Y$ *una función biyectiva. Entonces,* f^{-1} *es continua, si y sólo si, para todo* $U \in \mathcal{T}_X$, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

Definición 2.3 *Sea* $f : X \to Y$ *una función. Se dice que* f *es abierta (cerrada) o, si y sólo si, envía abierto (cerrado) en abierto (cerrado), es decir, para todo* $U \in \mathcal{T}_X$, $f(U) \in \mathcal{T}_Y$.

Ejemplo 2.6 *Sea* $D_{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < 1 \right\}$, *y la función*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \to & D_{n-1} \\ & x & \rightsquigarrow & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array}$$

es un homeomorfismo.

i) *Notemos que* $\left\| \frac{x}{1+\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1$.

ii) *Sean* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *de modo que:*

$$\frac{x}{1+\|x\|} = \frac{y}{1+\|y\|}.$$

Primero notemos los siguiente:

$$\frac{x}{1+\|x\|} = \frac{y}{1+\|y\|} \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{x}{1+\|x\|} \right\| = \left\| \frac{y}{1+\|y\|} \right\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| = \|y\|.$$

Entonces

$$\frac{x}{1+\|x\|} = \frac{y}{1+\|y\|} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1+\|x\|} = \frac{y}{1+\|x\|} \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Por lo tanto f *es inyectiva.*

iii) *Sea* $y \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\|y\| < 1$, *determinemos* $x \in \mathbb{R}^n$ *de modo que* $T(x) = y$. *Notemos primero que, si* $f(x) = y$, *entonces:*

$$\begin{aligned} \frac{\|x\|}{1+\|x\|} &= \|y\|, \\ \|x\| &= \|y\| + \|x\| \cdot \|y\|, \\ \|x\| - \|x\| \cdot \|y\| &= \|y\|, \\ \|x\|(1 - \|y\|) &= \|y\|, \\ \|x\| &= \frac{\|y\|}{1-\|y\|}. \end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+\|x\|} &= y, \\ x &= y\left(1 + \frac{\|y\|}{1-\|y\|}\right), \\ x &= \frac{y}{1-\|y\|}. \end{aligned}$$

Por último,

$$y = \frac{\frac{y}{1-\|y\|}}{\frac{1}{1-\|y\|}} = \frac{\frac{y}{1-\|y\|}}{1 + \frac{\|y\|}{1-\|y\|}} = \frac{\frac{y}{1-\|y\|}}{1 + \left\| \frac{y}{1-\|y\|} \right\|} = T(x), \qquad x := \frac{y}{1-\|y\|}.$$

No es difícil probar que T^{-1} *es definida como sigue:*

$$T^{-1} : \left\{ \; x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < 1 \; \right\} \to \mathbb{R}^n, \qquad T^{-1}(z) := \frac{z}{(1-\|z\|},$$

luego T *es biyectiva.*

La continuidad de T *y* T^{-1} *se obtiene de Proposición 2.6 y Ejercicio 2.5. Por lo tanto* T *es un homeomorfismo.*

Ejemplo 2.7 *Reinteprete el cambio de coordenada en el lenguaje de homeomorfismo*

1.
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \rightsquigarrow & (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, z) & \rightsquigarrow & (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), z) \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta) & \rightsquigarrow & (r\cos(\theta)\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha)) \end{array}$$

4. *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tales que* $ac - db \neq 0$
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (ax + by, cx + dy)) \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{rccc} f: & [0, 1[& \to & \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \\ & \theta & \rightsquigarrow & (\cos(2\pi\theta), \mathrm{sen}(2\pi\theta)) \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{rccc} f: &]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \rightsquigarrow & \tan(\frac{\pi\theta}{2}) \end{array}$$

Ejemplo 2.8 *Dado el conjunto* $\mathbb{S}^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \sum_i x_i^2 + t^2 = 1\}$*, entonces la función La función*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{S}^n - \{e_{n+1}\} \\ & x & \rightsquigarrow & \left(\frac{2}{1+\|x\|^2}x, \frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2}\right) \end{array}$$

es un homeomorfismo. Llamada función estereográfica

La inversa es

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & S^n - \{e_{n+1}\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x, t) & \rightsquigarrow & \frac{1}{1-t}x \end{array}$$

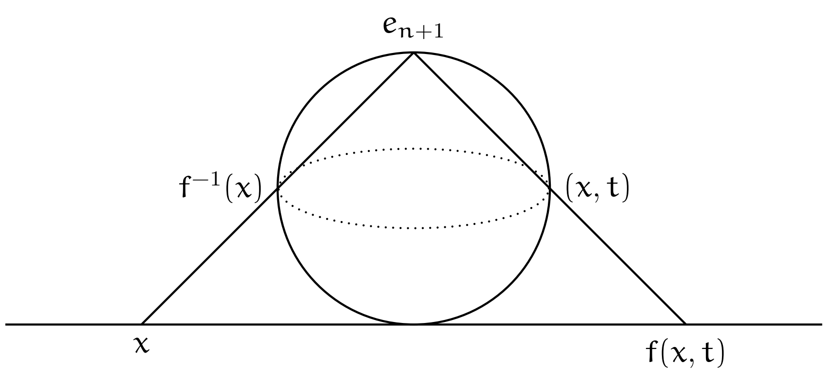
Observación Al trasladarla al conjunto $X = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \sum_i x_i^2 + (t-1)^2 = 1\}$

Las ecuaciones se escriben del siguiente modo

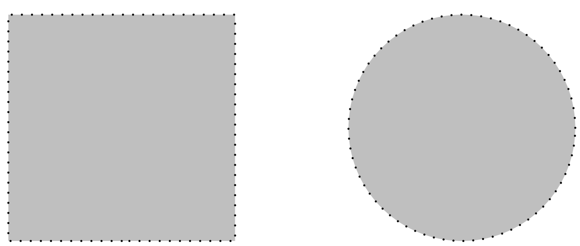
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & X - \{2e_{n+1}\} \\ & x & \rightsquigarrow & \left(\frac{4}{4+\|x\|^2}x, \frac{2\|x\|^2}{4+\|x\|^2}\right) \end{array}$$

La inversa es

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: & X - \{e_{n+1}\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x, t) & \rightsquigarrow & \frac{2}{2-t}x \end{array}$$



Ejemplo 2.9 *Determine si* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| < 1\}$ *y* $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ *son homeomorfos con las topología reducidas*



Ejemplo 2.10 *Probar los siguientes homeomorfismos*

1. $X \times Y \approx Y \times X$.

2. $(X \times Y) \times Z \approx X \times (Y \times Z)$.

3. $X \times \{pt\} \approx X \approx \{pt\} \times X$.

2.3. Ejercicios Propuestos

1. Sea el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, donde

$$X = \{a, b, c, d\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X\}.$$

   Determine en que punto son continua las siguientes funciones

   a) $f(a) = b, f(b) = d, f(c) = c, f(d) = c$

   b) $f(a) = a, f(b) = d, f(c) = b, f(d) = c$

   c) $f(a) = b, f(b) = d, f(c) = b, f(d) = c$

2. Sea $f : (X; \mathcal{T}) \to (Y, \sigma)$ una aplicación abierta. Dado $S \subseteq Y$ y A cerrado tal que $f^{-1}(S) \subseteq A$. Demostrar que existe un cerrado B, tal que $S \subseteq B$ y $f^{-1}(B) \subseteq A$

3. Sea $f : (X; \mathcal{T}) \to (Y, \sigma)$ una aplicación cerrado. Dado $S \subseteq Y$ y A abierto tal que $f^{-1}(S) \subseteq A$. Demostrar que existe un abierto B, tal que $S \subseteq B$ y $f^{-1}(B) \subseteq A$

4. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función

   Probar que f es continua si y sólo si para todo $A \subset X$ se tiene que $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(A)}}$

5. Sea $X = A \cup B$ donde A y B son cerrado en X. Además $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continua tales que $(\forall x \in (A \cap B))(f(x) = g(x))$ entonces

$$\begin{array}{rrcl} h: & X \to & Y & \\ & x \to & h(x) & = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases} \end{array}$$

   es continua

6. Sean $(X_i, \mathcal{T}_i), (Y_i, \sigma_i)$ cuatro espacios topológicos y $f_i : X_i \to Y_i$ dos funciones. Se define la función producto

$$\begin{array}{rccc} f_1 \times f_2 : & X_1 \times X_2 & \to & Y_1 \times Y_2 \\ & (x_1, x_2) & \to & (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{array}$$

   Demostrar en la topología producto que

   a) $f_1 \times f_2$ es continua si sólo si f_1 y f_2 son continuas

   b) $f_1 \times f_2$ es un homeomorfismo si sólo si f_1 y f_2 son homeomorfismo

7. Sea $A = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \;=\; \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

   Demostrar que f es continua si A tiene la topología del orden o la de subespacio, pero que sólo es un homeomorfismo con la del orden.

8. Demostrar que cualquier intervalo (a, b) es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$, a la recta $\mathbb{R}$ y al rayo $(0, +\infty)$.

9. Dado los espacios topológicos $A =]-1, 1[$ y

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x+1)^2 + y^2 = 1\},$$

   ambos con la topología usual de subespacio.

   Determinar si los espacios son homeomorfos

10. Sea $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ una función continua y $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y$, con la topología de inducida por la topología producto de $X \times Y$.

   Demostrar que X es homeomorfo a Γ_f