Capítulo 3

Relaciones

3.1 Nociones Básicas

Definición 3.1.1 Sea A un conjunto no vacío.
Se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación** en A si y sólo si $\mathcal{R} \subseteq A \times A$. $\diamondsuit$

Ejemplo 3.1.2 Sea $A = \{a, b, c\}$, y dado los siguientes conjuntos

$$\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}, \mathcal{R}_2 = \{(a, a), (a, b), (b, d)\}$$

Determinar si son relaciones en A
Solución:
El conjunto $\mathcal{R}_1$ es una relación en A, ya que $\mathcal{R}_1$ es un subconjunto de $A \times A$, debido a que la primera coordenada y segunda coordenada de los elementos en $\mathcal{R}_1$ todos pertenecen al conjunto A.
Pero $\mathcal{R}_2$ no es una relación en A, ya que $\mathcal{R}_2$ no es un subconjunto de $A \times A$, por ejemplo $(b, d) \in \mathcal{R}_2, d \notin A$. $\square$

Ejemplo 3.1.3 Sea $A = \{\text{los alumnos de este curso}\}$, entonces podemos definir la siguiente relación el conjunto A, dada por:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ es amigo de } y\}.$$

$\square$

Notación: Denotaremos a los elementos (x, y) que pertenecen a la relación $\mathcal{R}$ del siguiente modo $x\mathcal{R}y$, es decir,

$$(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y,$$

donde $x\mathcal{R}y$ se lee, x esta relacionado con y.

Equivalentemente aquellos elementos que no están relacionados los denotaremos por:

$$(x, y) \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow x\not{\mathcal{R}}y.$$

Ejemplo 3.1.4 Sea $A = \{a, b, c\}$, donde la relación es:

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c)\},$$

en este caso tenemos que los siguientes elementos están relacionados

$$a\mathcal{R}a; \quad a\mathcal{R}b; \quad b\mathcal{R}c$$

pero los siguientes elementos no están relacionados

$$b\not\mathcal{R}a; \quad c\not\mathcal{R}b; \quad a\not\mathcal{R}c$$

$\square$

Ejemplo 3.1.5 Sea $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy \text{ es múltiplo de } 3\}$, es una relación en los números naturales.
En este caso tenemos que 1 y 3 están relacionados, ya que $1 \cdot 3$ es múltiplo de 3, luego lo escribimos $1\mathcal{R}3$.
Y los elementos 2 y 5 no están relacionados, ya que $2 \cdot 5$ no es múltiplo de 3, luego lo expresamos $2\not\mathcal{R}5$. $\square$

Ejemplo 3.1.6 Dado

$$\mathcal{R} = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{R}) \mid x_1 y_1 \text{ es múltiplo de } 3 \vee x_2^2 = y_2^2\},$$

es una relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
Por ejemplo tenemos que:

1. Los elementos $(1, 2)$ y $(3, -5)$ están relacionados, ya que la proposición $1 \cdot 3$ es múltiplo de $3 \vee 2^2 = (-5)^2$ es verdadera. Es decir,

   $$(1, 2)\,\mathcal{R}\,(3, -5)$$

2. Los elementos $(-2, 1), (2, 1)$, cumple la proposición

   $$(-2) \cdot 2 \text{ es múltiplo de } 3 \vee 1^2 = 1^2$$

   pero como $(-2, 1) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ luego, no tiene sentido la expresión $(2, 1)\,\mathcal{R}\,(-2, 1)$.

3. Los elementos $(2, 1)$ y $(2, 5)$ no están relacionados, ya que la proposición $2 \cdot 2$ es múltiplo de $3 \vee 1^2 = (5)^2$, es falsa. Es decir,

   $$(2, 1)\,\not\mathcal{R}\,(2, 5)$$

$\square$

Definición 3.1.7 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces diremos:

1. **Refleja.**

   Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación refleja en A si y sólo si

   $$(\forall x \in A)(x\mathcal{R}x).$$

2. **Simétrica.**

   Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación simétrica en A si y sólo si

   $$(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x),$$

   lo que es equivalente a decir

   $$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x),$$

3. **Antisimétrica.**

   $\mathcal{R}$ es una relación antisimétrica en A si y sólo si

   $$(\forall x, y \in A)[(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y].$$

4. **Transitiva.**

   $\mathcal{R}$ es una relación transitiva en A si y sólo si

   $$(\forall x, y, z \in A)[(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z].$$

5. **Totalidad.**

   $\mathcal{R}$ es una relación total en A si y sólo si

   $$(\forall x, y \in A)\left[x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x\right].$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.1.8 Sea $A = \{a, b, c\}$, y la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}.$$

en A. Determinar si $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica, antisimétrica y transitiva en A. $\square$

Solución 1.

1. $\mathcal{R}$ no es refleja pues para $x = b$, se tiene que $b\mathcal{R}b \equiv F$.

2. $\mathcal{R}$ no es simétrica, ya que para $x = a$ y $b = y$, tenemos que

   $$(a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a) \equiv F.$$

3. $\mathcal{R}$ es antisimétrica ya que:

$$\begin{aligned}
&(a\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}a) \Rightarrow a = a \equiv V\\
&(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b \equiv V\\
&(a\mathcal{R}c \wedge c\mathcal{R}a) \Rightarrow a = c \equiv V\\
&(b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b) \Rightarrow b = a \equiv V\\
&(b\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}b) \Rightarrow b = b \equiv V\\
&(b\mathcal{R}c \wedge c\mathcal{R}b) \Rightarrow b = c \equiv V\\
&(c\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}c) \Rightarrow c = a \equiv V\\
&(c\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow c = b \equiv V\\
&(c\mathcal{R}c \wedge c\mathcal{R}c) \Rightarrow c = c \equiv V
\end{aligned}$$

4. $\mathcal{R}$ no es transitiva, con $x = a, y = b$ y $z = c$, se tiene que

$$[(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c] \equiv F.$$

Ejemplo 3.1.9 Dada la relación $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y^2\}$ en $\mathbb{N}$. Determinar si $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica, antisimétrica y transitiva. □

Solución 2.

1. $\mathcal{R}$ no es refleja, ya que para $x = 2$, se tiene

$$2 = 2^4 \equiv F.$$

2. $\mathcal{R}$ no es simétrica, pues para $x = 36$ y para $y = 6$, obtenemos que

$$36\mathcal{R}6, \text{ pues } 36 = 6^2,$$

pero 6 no esta relacionado con 36, puesto que

$$6 \neq (36)^2 .$$

es decir,

$$36\mathcal{R}6 \Longrightarrow 6\mathcal{R}\,(36)^2$$
$$\left[36 = 6^2 \Longrightarrow 6 = (36)^2\right] \equiv F.$$

por lo anterior, al proposición es falsa.

$$(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$$

3. La relación $\mathcal{R}$ es antisimétrica pues.

$$(\forall x, y \in A)\left[(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y\right].$$

Supongamos que $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x)$ es verdadero. Queremos demostrar que $x = y$.

Para ello tenemos que

$$x = y^2 \wedge y = x^2$$

luego reemplazando y en la primera ecuación tenemos

$$\begin{aligned} x &= y^2 \\ x &= (x^2)^2 \\ x &= x^4 \\ 0 &= x^4 - x \\ 0 &= x(x^3-1) \\ 0 &= x(x-1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

de donde deducimos que $x = 0 \vee x = 1$.

Si $x = 0$, entonces $y = 0$, por tanto $x = y = 0$.

Si $x = 1$, entonces $y = 1$, por lo tanto $x = y = 1$.

De esta forma queda demostrado que $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

4. $\mathcal{R}$ no es transitiva, ya que para $x = 81, y = 9$ y $z = 3$, se tiene

$$(81 = 9^2 \wedge 9 = 3^2) \Rightarrow 81 = 3^2 \equiv F.$$

Ejercicios

Determine si las siguientes relaciones son reflejas, simétricas, antisimétricas y transitivas:

1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy \text{ es múltiplo de } 3\}$.
2. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y \text{ es múltiplo de } 3\}$.
3. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |x - y| < 3\}$.

3.2 Relaciones de Orden

Definición 3.2.1 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A.

1. Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación de **orden** en A o $\mathcal{R}$ es un orden en A si y sólo si $\mathcal{R}$ es una relación refleja, antisimétrica y transitiva en A.
2. Se llama **conjunto ordenado** al par $(A, \mathcal{R})$, donde $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A.
3. Dados dos conjuntos ordenados $(A, \mathcal{R})$ y $(A', \mathcal{R}')$ son iguales si y sólo si se cumple que $A = A'$ y que $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.
4. Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación de **orden total** en A o que $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto **totalmente ordenado** si y sólo si cumple

   a $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A

   b $\mathcal{R}$ es una relación total en A, es decir,

$$(\forall a, b \in A)(a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.2.2 El conjunto $(\mathbb{R}, \leq)$ es un orden total pues:

1. Es Refleja: $(\forall x \in \mathbb{R})(x \leq x)$.
2. Es Antisimétrica: $(\forall x, y \in \mathbb{R})[(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y]$.
3. Es Transitiva: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x \leq z]$.
4. Es Total: $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leq y \vee y \leq x)$, es decir en $\mathbb{R}$ siempre se pueden comparar dos elementos.

$\square$

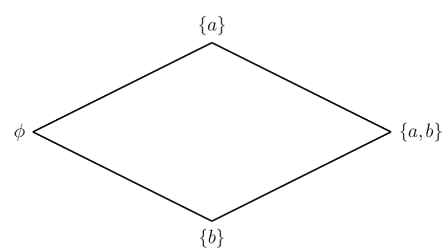
Ejemplo 3.2.3 Sean E una conjunto no vacío y $\mathcal{P}(E)$ el conjunto potencia, luego $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, es un conjunto ordenado pero en general el orden no es total. $\square$

Solución.

1. Refleja:
$$(\forall A \in \mathcal{P}(E))\,(A \subseteq A)$$
2. Antisimétrica:
$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(E))\,[(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Longrightarrow A = B]$$
3. Transitiva:
$$(\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E))\,[(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Longrightarrow A \subseteq C]$$

   por lo tanto, $\subseteq$ es una relación de orden.

Ejemplo 3.2.4 Un caso particular del caso anterior, lo tenemos con $E = \{a, b\}$, y sea $\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, considere el conjunto $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, luego tenemos el siguiente diagrama



Tenemos que $\subseteq$ es refleja antisimétrica y transitiva pero no total, pues

$$\{a\} \not\subseteq \{b\} \vee \{b\} \not\subseteq \{a\}$$

por lo cual la proposición

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(E))\,[A \subseteq B \vee B \subseteq A]$$

es falsas. $\square$

Ejercicios

Sea $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 + x \leq y^2 + y\}$.
Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathbb{N}$.

Definición 3.2.5 Sean $\mathcal{R}$ una relación de orden en A, n $a \in A$ y $X \subseteq A$, entonces

1. **Elemento maximal**.

   Se dice que a es el elemento maximal de $(A,\ \mathcal{R})$ si y sólo si
   $$(\forall x \in A)(a\mathcal{R}x \Rightarrow a = x).$$

2. **Elemento minimal**.

   Se dice que a es el elemento minimal de $(A,\ \mathcal{R})$ si y sólo si
   $$(\forall x \in A)(x\mathcal{R}a \Rightarrow x = a).$$

3. **Primer elemento**.

   Se dice a es el primer elemento de $(A,\ \mathcal{R})$ si y sólo si
   $$(\forall x \in A)(a\mathcal{R}x).$$

4. **Último elemento**.

   Se dice a es el último elemento de $(A,\ \mathcal{R})$ si y sólo si
   $$(\forall x \in A)(x\mathcal{R}a).$$

5. **Cota superior**.

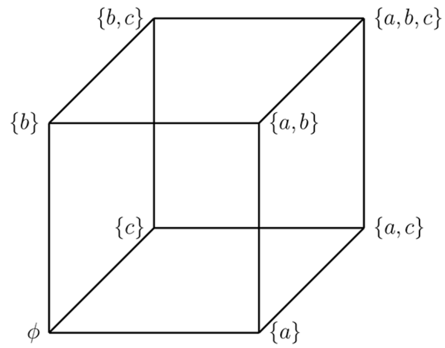
   Se dice que a es cota superior de X si y sólo si
   $$(\forall x \in X)(x\mathcal{R}a).$$

6. **Cota inferior.**

   Se dice que a es cota inferior de X si y sólo si
   $$(\forall x \in X)(a\mathcal{R}x).$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.2.6 Sea $E = \{a, b, c\}$, y consideraremos a $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$.
Tenemos que
$$\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\},$$
mediante el siguiente diagrama podemos ilustrar las contenciones que encontraremos en $\mathcal{P}(E)$.



Luego el elemento maximal es E, pues

$$\begin{gathered}(\forall B \in \mathcal{P}(E))(E \subseteq B \Rightarrow E = B)\\ E \subseteq B \wedge B \in \mathcal{P}(E)\\ E \subseteq B \wedge B \subseteq E\\ E = B.\end{gathered}$$

Por otra parte el elemento minimal es ϕ, ya que

$$(\forall B \in \mathcal{P}(E))(B \subseteq \phi \Rightarrow B = \phi).$$

□

Ejercicios

Sea $A = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,1)\}$, luego definimos la siguiente relación

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow [x < x' \vee (x = x' \wedge y' \leq y)],$$

donde $(A,\mathcal{R})$ es un conjunto ordenado.

Determinar primer elemento, último elemento, elemento maximal, elemento minimal.**Observación:** Recuerde que si un conjunto A posee una propiedad universal P y $B \subseteq A$, entonces la propiedad P se cumple en el subconjunto B.

Definición 3.2.7 Se dice que un conjunto ordenado $(A,\ \mathcal{R})$ esta **bien ordenado** si y sólo si todo subconjunto ordenado de $(A,\mathcal{R})$, no vacío tiene primer elemento. En este caso, también se dice que $\mathcal{R}$ es un **buen orden** en A. ◊

Ejemplo 3.2.8 Sea $(\mathbb{N},\leq)$ es un conjunto bien ordenado. □

Ejemplo 3.2.9 $(\mathbb{Z},\leq)$ no es un conjunto bien ordenado. □

Ejemplo 3.2.10 Sea $E = \{a,b,c\}$, donde $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$, consideraremos el conjunto

$$A = \{\{a\},\{b\},\{a,c\}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

luego $(A,\subseteq)$ no tiene primer elemento, por tanto $(\mathcal{P}(E),\ \subseteq)$ no es un conjunto bien ordenado. □

Proposición 3.2.11 *Sea $\mathcal{R}$ una relación de orden en A.*
Si $\mathcal{R}$ es un buen orden en A entonces $\mathcal{R}$ es orden total en A

Demostración. Sean $a, b \in A$, luego $\{a, b\} \subseteq A$, por lo tanto $\{a, b\}$ tiene primer elementos.
Si a es el primer elemento de $\{a, b\}$ luego

$$a\mathcal{R}b$$

Si b es el primer elemento de $\{a, b\}$, luego

$$b\mathcal{R}a$$

Por lo tanto

$$a\mathcal{R}b \quad \vee \quad b\mathcal{R}a$$ ■

Observación: No todos los ordenes totales son buen orden, para ello tenemos.

a $\leq$ no es un buen orden en $\mathbb{Z}$

b $\leq$ no es un buen orden en $]0, \infty[$

c $\leq$ no es un buen orden en $[0, \infty[$

Axioma de Elección

Todo producto cartesiano de una familia no vacía de conjunto no vacío es no vacía.

Observación: El anterior axioma nos dice que dado $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía $I \neq \phi$ de conjunto y los conjuntos son no vacíos $(\forall i \in I)(A_i \neq \phi)$, entonces

$$\underset{i\in I}{\times} A_i \neq \phi.$$

Teorema 3.2.12 [Zermelo]. *Si A es un conjunto no vacío, entonces existe una relación sobre A que es un buen orden.*

Teorema 3.2.13 [Lema Zorn]. *Sea $(A, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado inductivo (es decir, si $C \subseteq A$ no vacío, totalmente ordenado entonces C tiene cota superior). Entonces A tiene un elemento maximal.*

3.3 Relación de Equivalencia

Definición 3.3.1 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A. Se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación de equivalencia** en A si y sólo si $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva. ◊

Ejemplo 3.3.2 Sea $n \in \mathbb{N}$, se define en $\mathbb{Z}$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = \dot{n}.$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. □

Solución.

1. Refleja: $(\forall x \in \mathbb{Z})(x\mathcal{R}x)$, donde

$$x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x - x = 0 = \dot{n} = 0n,$$

por lo tanto se cumple la proposición.

2. Simétrica: $(\forall x, y \in \mathbb{Z})(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$, es decir,

$$x - y = \dot{n} \Rightarrow y - x = \dot{n},$$

suponemos que se cumple que $x\mathcal{R}y$, entonces

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x - y = \dot{n} \\ &\Leftrightarrow x - y = nk \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow -(x - y) = -nk \\ &\Leftrightarrow y - x = n(-k) \quad (-k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow y - x = \dot{n} \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

Luego es simétrica

3. Transitiva: $(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})[(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z]$.

   Suponemos que se cumple que $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$, es decir:

$$x - y = \dot{n} \wedge y - z = \dot{n},$$

si sumamos las dos expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} (x - y) + (y - z) &= \dot{n} + \dot{n} \\ x - z &= nk_0 + nk_1 \\ x - z &= n(k_0 + k_1) \\ x - z &= nk_2 \\ x - z &= \dot{n}, \end{aligned}$$

luego $x\mathcal{R}z$, por ello es transitiva.

De este modo, tenemos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

Ejercicios

Se define en $\mathbb{R}$ la relación

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x - y = k).$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.

Ejercicios

Se define en $\mathbb{Z}$ la relación

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(x = yk^2).$$

Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Definición 3.3.3 Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Para todo $x \in A$ se define la **clase de equivalencia** de x modulo $\mathcal{R}$ al conjunto

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}.$$

$\Diamond$

Proposición 3.3.4 *Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A, entonces se cumple*

1. $(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y))$
2. $(\forall x, y \in A)(x\not\mathcal{R}y \Leftrightarrow \mathcal{R}(x) \neq \mathcal{R}(y))$
3. $(\forall x, y \in A)(x\not\mathcal{R}y \Leftrightarrow \mathcal{R}(x) \cap \mathcal{R}(y) = \phi)$

Definición 3.3.5 Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Se define el **conjunto cuociente** de A por $\mathcal{R}$ al conjunto de las clases de equivalencia

$$A/\mathcal{R} = \{\mathcal{R}(x) \mid x \in A\}$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.3.6 Sean $x, y \in J_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, y la relación de equivalencia

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = \dot{3},$$

Encontraremos las clases de equivalencias para los elementos de J_8.

1. $$\begin{aligned} \mathcal{R}(0) &= \{y \in J_8 \mid 0\mathcal{R}y\} \\ &= \{y \in J_8 \mid 0 - y = \dot{3}\} \\ &= \{0, 3, 6\}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \mathcal{R}(1) &= \{y \in J_8 \mid 1\mathcal{R}y\} \\ &= \{y \in J_8 \mid 1 - y = \dot{3}\} \\ &= \{1, 4, 7\}. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \mathcal{R}(2) &= \{y \in J_8 \mid 2\mathcal{R}y\} \\ &= \{y \in J_8 \mid 2 - y = \dot{3}\} \\ &= \{2, 5, 8\}. \end{aligned}$$

Luego concluimos que

1. $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}(3) = \mathcal{R}(6)$,
2. $\mathcal{R}(1) = \mathcal{R}(4) = \mathcal{R}(7)$,
3. $\mathcal{R}(2) = \mathcal{R}(5) = \mathcal{R}(8)$.

Así obtenemos que el conjunto cuociente esta dado por

$$J_8/\mathcal{R} = \{\{0, 3, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}\}.$$

$\square$

Ejercicios

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, donde
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = \dot{3}.$$

$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Determinar $\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1)$ y $\mathcal{R}(2)$.Recordemos el **Algoritmo de la División** que dice lo siguiente

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces existen $d, r \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a = bd + r, \quad 0 \leq r < b$$

Definición 3.3.7 Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A, y $S \subseteq A$.
Se dice que S es un Sistema de Representante de la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ si y sólo si

1. $(\forall x, y \in S)(x \neq y \Rightarrow \mathcal{R}(x) \neq \mathcal{R}(y))$
2. $(\forall x \in A)(\exists y \in S)(x\mathcal{R}y)$

$\lozenge$

En el ejemplo anterior habíamos obtenido que

$$J_8 \diagup \mathcal{R} = \{\{0, 3, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}\}.$$

En este caso, podemos comprobar que

a $S_1 = \{0, 1, 2\}$ es un sistema de representante,

b $S_1 = \{3, 7, 2\}$ es un sistema de representante,

c $S_1 = \{0, 1\}$ no es un sistema de representante,

d $S_1 = \{0, 1, 5, 8\}$ no es un sistema de representante,

Teorema 3.3.8 *Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A, entonces*

$$A = \dot{\bigcup_{x \in A \diagup \mathcal{R}}} \mathcal{R}(x),$$

es decir $A \diagup \mathcal{R}$ es una partición de A.

En el ejemplo anterior teníamos en J_8 las clases $\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1)$ y $\mathcal{R}(2)$, luego

$$J_8 \diagup \mathcal{R} = \{\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1), \mathcal{R}(2)\} = \{\{0, 3, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}\},$$

por lo tanto
$$J_8 = \{0, 3, 6\} \dot{\cup} \{1, 4, 7\} \dot{\cup} \{2, 5, 8\},$$

es decir J_8 es la unión disjunta de las tres clases de equivalencia.

Teorema 3.3.9 *Sea A un conjunto y C una partición de A ($A = \dot{\bigcup}_{B \in C} B$), entonces se define la relación en A dada por*
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists B \in C)(x, y \in B),$$

esta es una relación de equivalencia en A y $A/\mathcal{R} = C$.

Entero Módulo n.

Recordemos que

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = \dot{n},$$

es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, luego la clase de un elemento x esta dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x) &= \{y \in \mathbb{Z} \mid x - y = \dot{n}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid -y = \dot{n} - x\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y = \dot{n} + x\} \end{aligned}$$

luego

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1), \ldots, \mathcal{R}(n-1)\},$$

es decir, un sistema de representante de la relación de equivalencia es $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, de donde se obtiene que $\#(\mathbb{Z}/\mathcal{R}) = n$.

Notación: Para la relación dada anteriormente establecemos una notación particular, dada por:

i $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \mathbb{Z}_n$.

ii $\mathcal{R}(a) = \overline{a}$, denotando la clase de a.

iii $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \equiv b \quad (n)$, se lee a es congruente con b módulo n.

Ejemplo 3.3.10 Para $n = 4$ tenemos que $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, ya que todo elemento al dividir por 4 obtenemos resto un numero entre 0 y 3. □

Proposición 3.3.11 *Sean $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, tales que*

$$x \equiv y \quad (n) \quad \wedge \quad z \equiv w \quad (n).$$

Entonces

1. $x + z \equiv w + y \quad (n)$.

2. $xz \equiv wy \quad (n)$.

Demostración. Sean $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ tal que $x \equiv y(n) \quad \wedge \quad z \equiv w(n)$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} x - y &= \dot{n} \\ z - w &= \dot{n} \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} x - y + z - w &= \dot{n} \\ (x + z) - (y + w) &= \dot{n} \end{aligned}$$

Así obtenemos la primera igualdad.

$$x + z \equiv w + y \quad (n).$$

Para la segunda amplificamos las ecuaciones por z la primera y por y la segunda sumando obtenemos

$$\begin{aligned} z(x-y)+y(z-w) &= \dot{n} \\ (xz)-(yw) &= \dot{n} \end{aligned}$$

Lo cual demuestra la proposición. ■

Definición 3.3.12 Sean $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$, se define

1. $\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$.

2. $\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{xy}$.

◊

Ejemplo 3.3.13 En $\mathbb{Z}_7$se tiene que

i $\overline{3}\cdot\overline{4}=\overline{12}=\overline{5}$.

ii $\overline{2}\cdot\overline{5}=\overline{10}=\overline{3}$.

iii $\overline{3}\cdot\overline{4}+\overline{2}\cdot\overline{6}=\overline{12}+\overline{12}=\overline{24}=\overline{3}$.

□

Proposición 3.3.14 *La suma cumple:*

1. *Asociatividad: Dado $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$$

2. *Neutro: Dado $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$\overline{x}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{x}=\overline{x}$$

3. *Inverso: Dado $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$\overline{x}+\overline{-x}=\overline{-x}+\overline{x}=\overline{0}$$

4. *Conmutatividad: Dado $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}.$$

Proposición 3.3.15 *La multiplicación cumple:*

1. *Asociatividad: Dado $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$(\overline{x}\cdot\overline{y})\cdot\overline{z}=\overline{x}\cdot(\overline{y}\cdot\overline{z})$$

2. *Neutro: Dado $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$\overline{x}\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{x}=\overline{x}$$

3. *Conmutatividad: Dado $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}.$$

Además

4. *Distributividad: Dado $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z})$$

3.4 Funciones

Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, se dice que $\mathcal{R}$ es una función si y sólo si

$$(\forall x, y, z \in A)([x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z] \Rightarrow y = z)$$

Ejemplo 3.4.1 Sea $A = \{a, b, c\}$, y la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}.$$

en A. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función. □

Solución 1. La relación $\mathcal{R}$ no es una función, ya que la proposición

$$[a\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \Rightarrow a = b$$

es falsa.

Recuerde que una proposición con cuantificador universal basta un caso falso, para que sea la proposición sea falsa.

Ejercicios

La relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad |x - y| < 3\}$$

en $\mathbb{N}$. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función.

Proposición 3.4.2 *Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces$\mathcal{R}$ es una función si y sólo si $|\mathcal{R}(a)| \leq 1$, para todo $a \in A$donde $\mathcal{R}(a) = \{b \in A \ : \ a\mathcal{R}b\}$*

Note que el si $\mathcal{R}$ una relación en A y $B \subseteq A$ entonces se puede definir

$$\mathcal{R}(B) = \{c \in A \ : \ (\exists a \in B)(\ a\mathcal{R}c)\}$$

Definición 3.4.3 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces

a **Dominio**.

El elemento $a \in A$ pertenece al dominio de la función si y sólo si existe $b \in A$ tal que

$a\mathcal{R}b$, es decir, el dominio es el siguiente conjunto

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A \ : \ (\exists b \in A)(a\mathcal{R}b) \ \}.$$

b **Recorrido**.

El elemento $b \in A$ pertenece al recorrido de la función si y sólo si existe $a \in A$ tal que $a\mathcal{R}b$, es decir, el recorrido es el siguiente conjunto

$$Rec(\mathcal{R}) = \{b \in A \ : \ (\exists a \in A)(a\mathcal{R}b) \ \}.$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.4.4 Sea $A = \{a, b, c\}$, y la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, c), (b, c)\}.$$

en A. Determinar el recorrido y dominio de la relación. $\square$

Solución 2. En este caso el dominio es $Dom(\mathcal{R}) = \{a, b\}$ y su recorrido es $Rec(\mathcal{R}) = \{a, c\}$.

Ejercicios

La relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ |x - y| < 3\}$$

en $\mathbb{N}$. Determinar el recorrido y dominio de la relación.

Definición 3.4.5 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, se define la relación inversa como el conjunto

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(a, b) \in A \times A \ : \ (b, a) \in \mathcal{R} \ \}.$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.4.6 Sea $A = \{a, b, c\}$, y la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, c), (b, c)\}.$$

en A. Determinar la relación inversa de $\mathcal{R}$.
La relación inversa es

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(a, a), (c, a), (c, b)\}.$$

$\square$

Proposición 3.4.7 *Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces se tiene*

$$Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Rec(\mathcal{R}); \qquad Rec(\mathcal{R}^{-1}) = Dom(\mathcal{R})$$

Definición 3.4.8 Sean $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ dos relaciones en A, se define la compuesta de las relaciones al conjunto

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(a, b) \in A \times A \ : \ (\exists c \in A)(a\mathcal{S}c \wedge c\mathcal{R}b) \ \}.$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.4.9 Sea $A = \{a, b, c\}$, y las relaciones

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, c), (b, c)\}, \quad \mathcal{S} = \{(b, a), (b, c), (c, a\}$$

en A. Determinar las relaciones de las siguientes compuestas $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. $\square$

Solución 3. En primer lugar veremos $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, para ello, el primer elemento en $\mathcal{S}$ es (b, a), notemos lo siguiente $(b, a) \in \mathcal{S} \wedge (a, a) \in \mathcal{R}$ luego $(b, a) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$,

De forma similar, $(b, a) \in \mathcal{S} \wedge (a, c) \in \mathcal{R}$ luego $(b, c) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, no hay otro elemento en $\mathcal{R}$ que tenga primer coordenada a.

Si continuamos con el segundo elemento de $\mathcal{S}$ es decir,(b, c) del mismo modo, nos encontramos que no existe elemento en $\mathcal{R}$ que tenga primer coordenada c.

Para el último elemento de $\mathcal{S}$ es decir,(c, a), encontramos que los elementos en $\mathcal{R}$ que tenga primer coordenada a son $(a, a), (a, c)$, con ellos construimos los elementos $(c, a), (c, c)$.

Revisando todos los casos obtenemos

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(b, a), (b, c), (c, a), (c, c)\}$$

Análogamente calculamos

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a, a), (b, a)\}$$

Definición 3.4.10 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A.
Se dice que $\mathcal{R}$ es biyectiva si y sólo si $\mathcal{R}^{-1}$ y $\mathcal{R}$ son funciones $\Diamond$

Ejemplo 3.4.11 Dada la relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad : \quad 2x + 3y = xy\}.$$

en $\mathbb{R}$.

a Determinar el dominio, recorrido de la relación.

b Determine si $\mathcal{R}$ es biyectiva

c Determinar $\mathcal{R}^{-1}$

$\square$

Solución 4. Veamos el Dominio, sea $x \in \mathbb{R}$, luego debe existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y$, es decir, $2x + 3y = xy$, luego $y(3 - x) = 2x$, podemos encontrar el valor de y si $x \neq 3$.

Notemos que si $x = 3$, luego obtenemos $6 + 3y = 3y$, lo cual es imposible.

$$Dom(\mathcal{R}) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\}$$

Note que el valor de y es único, luego $\mathbb{R}$ es una función.

El recorrido lo obtenemos, sea $y \in \mathbb{R}$, luego debe existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y$, es decir, $2x + 3y = xy$, luego $x(2 - y) = 3y$, podemos encontrar el valor de x si $y \neq 2$.

Análogamente si $y = 2$, luego obtenemos $2x + 6 = 2x$, lo cual es imposible.

$$Rec(\mathcal{R}) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

De forma similar el valor de x es único, luego $\mathcal{R}^{-1}$ es una función, por lo tanto $\mathbb{R}$ es biyectiva.

La relación inversas esta dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{-1} &= \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad b\mathcal{R}a\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad 2b+3a=ba\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad 2y+3x=yx\}. \end{aligned}$$

3.5 Guía Ejercicios

1. Determinar si las siguientes relaciones $\mathcal{R}_i$, son refleja, simétricas, antisimétricas o transitiva

   a $\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad 2x+3y=xy\}$.

   b $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad x^2=y^2\}$.

   c $\mathcal{R}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad x^2y-y^2x>0\}$.

2. Determinar si las siguientes relaciones $\mathcal{R}_i$, es refleja, simétricas, antisimétricas o transitiva

   a $\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \quad : \quad 2x+3y=\dot{5}\}$.

   b $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \quad : \quad 4x+3y=\dot{7}\}$.

   c $\mathcal{R}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \quad : \quad x \text{ es múltiplo de } y\}$.

3. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad x^2y \leq y^2x\}$$

   Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica transitiva

4. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* \quad : \quad \frac{x}{z} \leq \frac{z}{x}\}$$

   Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica y transitiva

5. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad : \quad x^2+x \leq y^2+y\}$$

   Demostrar que $\mathcal{R}_2$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$.

6. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad : \quad x^2+3x \leq y^2+3y\}$$

   Demostrar que $\mathcal{R}_2$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$.

7. Sea $\mathbb{J}_n = \{x \in \mathbb{N} \quad : \quad x \leq n\}$. Dada la relación en $\mathbb{J}_{10}$ definida por

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (3x^2 - 16x \leq 3y^2 - 16y)$$

   a Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathbb{J}_{10}$

   b ¿$\mathcal{R}$ es una relación de orden total?

   c Ordenar de mayor a menor según $\mathcal{R}$

$$1, 3, 5, 7$$

   d Sea $X = \{2, 3, 6\}$. Determinar cota superior e inferior de X.

   e Hacer un gráfico de la situación

   f Determinar, si existe, elemento maximal, y/o elemento minimal.

8. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_{10}$

$$x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 19x \leq 2y^2 - 19y$$

   Determinar elementos maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

9. Dada la relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \Longleftrightarrow [(x + y < x' + y') \vee (x + y = x' + y' \wedge x \leq x')]$$

   a Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   b Ordenar los siguientes elementos de menor a mayor según $\mathcal{R}$

$$(3, 0), (1, 1), (1, 2), (0, 2)$$

   c Sea $X = \{(3, 0), (1, 3), (2, 1), (0, 3)\}$. Determinar cota superior de X y cota inferior de X.

   d Hacer un gráfico de la situación

   e Determinar, si existe, elemento maximal, y/o elemento minimal.

10. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad (x \leq x' \quad \wedge \quad y \geq y')$$

   Determinar en caso que existen los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

11. Dada la siguiente relación $\mathcal{R}_1$ en $\mathbb{R}^*$ definida por:

$$(x, y) \in \mathcal{R}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x^2 \leq y^2\right)$$

   Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva.

12. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \quad : \quad \frac{x}{z} \leq \frac{z}{x}\}$$

    Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica transitiva

13. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad : \quad x^3 + y^3 \text{ es múltiplo de } 2\}$$

    Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica transitiva

14. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad : \quad x^2 y \leq y^2 x\}$$

    Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica transitiva

15. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad : \quad x^3 - y^3 \text{ es múltiplo de } 3\}$$

    Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva

16. Dada la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^*$ definida por:

$$(x,y) \in \mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 \leq \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right)$$

    Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva.

17. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad x^2 + x \leq y^2 + y\}$$

    Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$.

18. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad (x \leq x' \quad \wedge \quad y \geq y')$$

    Determinar en caso que existen los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

19. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_{10}$

$$x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 19x \leq 2y^2 - 19y$$

    Determinar elementos maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

20. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$ definida por:

$$(x,y)\in\mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(2x^2 - 23x \geq 2y^2 - 23y\big)$$

   a ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden total en $\mathbb{N}$?
   b Sea $X = \{1,3,4,7\}$. Determinar cotas superiores e inferiores de X
   c Determinar los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{N}$ si existen.

21. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$ definida por:

$$(x,y)\in\mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(2x^2 - 17x \leq 2y^2 - 17y\big)$$

   a) ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden total en $\mathbb{N}$?
   b) Sea $X = \{1,3,4,7\}$. Determinar cotas superiores e inferiores de X
   c) Determinar los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{N}$ si existen

22. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_{10}$ definida por:

$$x\mathcal{R}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(3x^2 - 14x \geq 3y^2 - 14y\big)$$

   a Sea $X = \{1,3,4,7\}$. Determinar el conjunto de todas las cotas superiores e inferiores de X en $\mathbb{J}_{10}$
   b Determinar en caso que existan los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$

23. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_{10}$ definida por:

$$x\mathcal{R}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(2x^2 - 17x \geq 2y^2 - 17y\big)$$

   a Sea $X = \{3,4,6,8\}$. Determinar el conjunto de todas las cotas superiores e inferiores de X en $\mathbb{J}_{10}$
   b Determinar en caso que existan los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

24. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_{10}$ definida por:

$$(x,y)\in\mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x^2 - \frac{13}{2}x \geq y^2 - \frac{13}{2}y\right)$$

   a ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden total en $\mathbb{N}$?
   b Sea $X = \{1,3,4,7\}$. Determinar el conjunto de todas las cotas superiores e inferiores de X en $\mathbb{J}_{10}$
   c Determinar en caso que existan los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

25. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_{10}$

$$x\mathcal{R}y \quad \iff \quad 2x^2 - 19x \leq 2y^2 - 19y$$

Determinar elementos maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

26. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \quad \iff \quad (x \leq x' \quad \wedge \quad y \geq y')$$

Determinar en caso que existen los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

27. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad x^2 + x \leq y^2 + y\}$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en$\mathbb{N}$.

28. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad x^2 + 3x \leq y^2 + 3y\}$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$.

29. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_6 \times \mathbb{J}_8$

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \quad \iff \quad \big(2x + 3x' = \dot{5} \quad \wedge \quad 3y + 4y' = \dot{7}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2, 7)$

   b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_6 \times \mathbb{J}_8)\,/\mathcal{R}$

30. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \quad \iff \quad \big(2x + 3x' = \dot{5} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2, 3)$

   b Calcular $|(\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5)\,/\mathcal{R}|$ (cardinal)

   c Determinar por extensión $(\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5)\,/\mathcal{R}$

31. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3$.

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \quad \iff \quad \big(x + 2x\text{‘} = \dot{3} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2, 3)$

   b Calcular $|(\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3)\,/\mathcal{R}|$ (cardinal)

   c Determinar por extensión $(\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3)\,/\mathcal{R}$

32. Dada la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_4$
$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x - x' = \dot{2} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\right)$$
    a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$ (clase de $(2,3)$)
    b Determinar por extensión $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_4 / \mathcal{R}$ (conjunto cuociente)
33. Dada la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_5$
$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x - x' = \dot{3} \quad \wedge \quad y + y' = \dot{2}\right)$$
    a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$ (clase de $(2,3)$)
    b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_5) / \mathcal{R}$ (conjunto cuociente)
34. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_6 \times \mathbb{J}_8$
$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\ 2x + 3x' = \dot{5} \quad \wedge \quad 3y + 4y' = \dot{7}\right)$$
    a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,7)$
    b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_6 \times \mathbb{J}_8) / \mathcal{R}$
35. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_4$
$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\ 2x + x' = \dot{3} \quad \wedge \quad y + y' = \dot{2}\right)$$
    a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$
    b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_4) / \mathcal{R}$
36. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$
$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\ 2x + x' = \dot{3} \quad \wedge \quad y + y' = \dot{2}\right)$$
    a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$
    b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_4) / \mathcal{R}$
37. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$
$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\ 2x + 3x' = \dot{5} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\right)$$
    a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$
    b Calcular $|(\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5) / \mathcal{R}|$ (cardinal)
    c Determinar por extensión $(\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5) / \mathcal{R}$
38. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3$.
$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x + 2x` = \dot{3} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\right)$$
    a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$
    b Calcular $|(\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3) / \mathcal{R}|$ (cardinal)
    c Determinar por extensión $(\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3) / \mathcal{R}$