Capítulo 2

Números Naturales

2.1 Construcción de los Naturales

Existe variadas construcciones de los números naturales, la que en este texto se describirá, tiene como punto de partida la existencia de los números reales, y a continuación se definirán los conjuntos inductivos, que pueden ser definido a partir de cualquier número real, con el afán de mantener lo más operativa la definición, iniciamos desde cero, aunque estoy consiente de la controversia que existe, si el cero es un numero natural, pero con el fin de que muchas formulas sean mas fáciles de escribir lo incluimos.

Definición 2.1.1 Sea A un subconjunto de los números $\mathbb{R}$, se dice que A es inductivo si y sólo si sucede dos cosas:

i) $0 \in A$.

ii) $(\forall x \in A)(x+1 \in A)$.

$\Diamond$

Ejemplo 2.1.2 Demostrar que $A = [-1, \infty[$ es inductivo. $\square$

Solución 1. i) Dado que $0 \geq -1$, tenemos que $0 \in [-1, \infty[= A$.

ii) Sea $x \in A$, luego

$$\begin{array}{lll} x \geq -1 & & \\ x+1 \geq 0 & \wedge & 0 \geq -1 \\ x+1 \geq -1 & . & \end{array}$$

Entonces $x+1 \in [-1, \infty[= A$.

Así se cumple que $(\forall x \in A)(x+1 \in A)$.

Luego hemos demostrado que A es un conjunto inductivo.

Ejemplo 2.1.3 Los siguientes conjuntos no son inductivos.

i $A = \{-3\}$, ya que $0 \notin A$.

ii $A =]-\infty, -2]$, ya que $0 \notin A$.

iii $A = [-1, 4]$, se tiene que $0 \in A$, pero $(4 \in A \Rightarrow 5 \in A)$ es falsa.

$\square$

Ejercicios

Sea el conjunto $A = [-1/2, \infty[- \{\sqrt{2}\}$.

Determine si A es un conjunto inductivo.

Definición 2.1.4 Sea I el conjunto formado por todos los subconjuntos **inductivos** de los números Reales.
Se define, el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$, como la intersección de todos los conjuntos inductivos, es decir,

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \in I} M.$$

$\lozenge$

Proposición 2.1.5 *El conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$*, es un conjunto inductivo, es decir,*

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. $(\forall x \in \mathbb{N})(x + 1 \in \mathbb{N})$.

La definición anterior, lleva implícito que el conjunto de los números Naturales es el más pequeño de los conjuntos inductivos

Teorema 2.1.6 [de inducción]. *Sea* $p(n)$ *una función proposicional en el conjunto de los números naturales. Si*

i) $p(0)$ *y*

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$

entonces

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n))$$

Demostración. Sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n)\}$$

Demostraremos que A es inductivo, en primer lugar tenemos $0 \in A$, ya que $p(0)$ es verdadero.

Para la segunda condición, supongamos que $k \in A$ luego $p(k)$ es verdadero y como se cumple que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$$

es verdadero, por lo tanto $p(k + 1)$ es verdadero, de los cual obtenemos que $k + 1 \in A$.

Así A es inductivo, de ello obtenemos que

$$\mathbb{N} \subseteq A,$$

pero además por definición de A se tiene que $A \subseteq \mathbb{N}$. Luego tenemos que

$$A = \mathbb{N}$$

por lo tanto

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n)). \qquad \blacksquare$$

Veamos una aplicación del anterior resultado, consideremos el siguiente arreglo

$$\left.\underbrace{\begin{array}{cccccc} * & + & + & + & \cdots & + \\ * & * & + & + & & + \\ * & * & * & + & \cdots & + \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & \cdots & + \end{array}}_{n+1 \text{ columnas}}\right\} n \text{ filas}$$

El contar cuántos casilleros hay con los símbolos $+$ o $*$ hay en cada caso, lo podemos relacionar con la siguiente sucesión de números naturales

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 + 1 \\ a_2 &= 0 + 1 + 2 \\ a_n &= a_{n-1} + n \end{aligned}$$

lo que es igual a calcular la siguiente suma $1 + 2 + 3 + ... + n$.

La cantidad total de casilleros es $n(n+1)$ y en ellos existe la misma cantidad de signos $+$ y $*$.

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para asegúranos que nuestra deducción es correcta, definamos la siguiente función proposicional

$$p(n) : 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

luego

i) $p(0) : 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0,$

ii) $p(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$

iii) $p(2) : 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2},$

iv) $p(3) : 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}.$

Lo cual no es suficiente, para saber que la proposición es válida en todos los números Naturales.

Ejemplo 2.1.7 Demostrar mediante inducción que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2})$$

□

Solución 2. Definiremos $p(n)$ a la siguiente función proposicional

$$p(n) : 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

i) $p(0): 0 = \frac{0(0+1)}{2}$, es verdadero.
ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$.

Supongamos que $p(n)$ es verdadero y queremos demostrar que $p(n+1)$ también es verdadero.

Sea

$$p(n): 0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

luego debemos demostrar que

$$p(n+1): 0+1+2+\ldots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

de donde

$$\begin{aligned}
0+1+2+\ldots+(n+1) &= \underbrace{0+1+2+\ldots+(n-1)+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) \\
&= \tfrac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\
&= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2},
\end{aligned}$$

es decir $p(n+1)$ es verdadero, por ello

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$$

es verdadero y por teorema de inducción se obtiene,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}).$$

Ejercicios

Demostrar por inducción.

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1)$.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(n+(n+1)+\ldots+(2n) = \frac{3}{2}n(n+1))$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2})$.

Teorema 2.1.8 [Inducción a partir de k]. *Sea $p(n)$ una función proposicional en los números Naturales, y existe $k \in \mathbb{N}$ fijo, es tal que cumple con*

i) $p(k)$ es verdadero,

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})[(n \geq k \wedge p(n) \Rightarrow (p(n+1))]$ *es verdadero,*

entonces se cumple

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow p(n))$$

Observación: Recordemos la noción de múltiplos.

i) 6 es múltiplo de 2, ya que

$$6 = 2 \cdot 3.$$

ii) x es múltiplo de 3, si y sólo si

$$x = 3 \cdot y, \quad (y \in \mathbb{Z}).$$

iii) x es múltiplo de y, es equivalente a escribir

$$(\exists k \in \mathbb{Z})(x = yk).$$

Finalmente denotamos $x = \dot{y}$, que es equivalente a decir, x es múltiplo de y.

Ejemplo 2.1.9 Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N})(4^n - 1 = \dot{3})$. □

Solución 3. Definamos como $p(n) : 4^n - 1 = \dot{3}$, entonces

i) veamos que sucede con $p(0)$:

$$p(0) : 4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \cdot 0.$$

ii) Supongamos que $p(n)$ es verdadero, es decir:

$$p(n) : 4^n - 1 = \dot{3},$$

por demostrar que $p(n+1)$ es verdadero, donde

$$p(n+1) : 4^{n+1} - 1 = \dot{3}.$$

Luego

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4(4^n - 1 + 1) - 1 \\ &= 4(3k + 1) - 1 \\ &= 3(4k) + 4 - 1 \\ &= 3(4k) + 3 \\ &= 3(4k + 1) \\ &= \dot{3}. \end{aligned}$$

Así $p(n+1)$ es verdadero. Luego

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$$

se cumple y por teorema de inducción tenemos que, $(\forall n \in \mathbb{N})(4^n - 1 = \dot{3})$

Ejercicios

Demostrar por inducción.

i) $(\forall n \in \mathbb{N})((13)^n - 7^n = \dot{6})$.

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})((11)^{n+1} + 2^n = \dot{3})$.

iii) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)((14)^n + 8^n + (-4)^n = \dot{6})$.

Teorema 2.1.10 [Inducción Generalizada]. *Sea $p(n)$ una función proposicional en los números Naturales, tal que cumple con*

i) $p(0)$ *es verdadero,*

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})[(p(0) \wedge p(1) \wedge \cdots \wedge p(n)) \Rightarrow (p(n+1))]$ *es verdadero,*

entonces se cumple

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n))$$

2.2 Sucesiones

En esta sección, se definirá el concepto de sucesión y se hará un estudio de las principales sucesiones en los números naturales, cada una de ellas con distintas aplicaciones

Definición 2.2.1 Se llama **sucesión** de números Reales a toda correspondencia o función de un subconjunto infinito de los Naturales en los Reales. $\lozenge$

Ejemplo 2.2.2 Las siguientes funciones son sucesiones.

$$\begin{array}{llllll} i. & f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \qquad \{n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ & & n & \longmapsto & n & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} ii. & f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \qquad \{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ & & n & \longmapsto & 2^n & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} iii. & f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \qquad \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \\ & & n & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} iv. & f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \qquad \{0+1+2+\ldots+n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ & & n & \longmapsto & 0+1+2+\ldots+n & \end{array}$$

Cada una de estas sucesiones está definida en forma explícita, debido a que cualquier imagen de un valor se calcula a través de la formula, explícitamente. $\square$

Definición 2.2.3 La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que esta definida por **recurrencia** si y sólo si el término a_n se obtiene a partir de los términos anteriores por alguna regla de formación. $\lozenge$

Ejemplo 2.2.4 Consideremos la siguiente sucesión definida por recurrencia

$$a_0 = 1, \qquad a_n = n \cdot a_{n-1},\ n \geq 1.$$

Luego tenemos que

$$\begin{array}{lll} a_0 & = & 1 \\ a_1 & = & 1 \cdot a_0 = 1 \cdot 1 = 1 \\ a_2 & = & 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \\ a_3 & = & 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6 \\ a_4 & = & 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24 \\ a_n & = & n! \end{array}$$

La anterior sucesión a_n, es una sucesión importante por ello se denota en forma especial por $n!$ y se lee "n factorial". □

Algunos ejemplos notables de sucesiones definidas por recurrencia:
Sean $a, d, r \in \mathbb{R}$, con $r \neq 0$.
i. Una sucesión definimos por recurrencia, es la siguiente

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d, \ n \geq 0$$

Algunos valores de esta sucesión:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & a \\ a_1 & = & a_0 + d = a + d \\ a_2 & = & a_1 + d = a + 2d \\ a_3 & = & a_2 + d = a + 3d \\ a_{n+1} & = & a_{n-1} + d = a + nd. \end{array}$$

La anterior sucesión es llamada progresión aritmética

$$a_n = a + nd$$

ii. Una sucesión definimos por recurrencia, es la siguiente

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot r, \ n \geq 0$$

Algunos valores de esta sucesión:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & a \\ a_1 & = & a_0 \cdot r = a \cdot r \\ a_2 & = & a_1 \cdot r = a \cdot r^2 \\ a_3 & = & a_2 \cdot r = a \cdot r^3 \\ a_{n+1} & = & a_{n-1} \cdot r = a \cdot r^n. \end{array}$$

La anterior sucesión es llamada progresión geométrica

$$a_n = a \cdot r^n$$

Para las otras, sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$.
iii. Una sucesión definimos por recurrencia, es la siguiente

$$b_0 = a_k, \quad b_{n+1} = b_n + a_{n+k+1}, \ n \geq 0$$

Algunos valores de esta sucesión:

$$\begin{array}{lcl} b_0 & = & a_k \\ b_1 & = & b_0 + a_{0+k+1} = a_k + a_{k+1} \\ b_2 & = & b_1 + a_{1+k+1} = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \\ b_3 & = & b_2 + a_{k+3} = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} \\ b_n & = & b_{n-1} + a_{n+k} = a_k + ... + a_{n+k}. \end{array}$$

La anterior sucesión es llamada sumatoria y se denota por

$$\sum_{i=k}^{n+k} a_i = a_k + ... + a_{n+k}$$

iv. Otra sucesión definida por recurrencia, es la siguiente

$$c_0 = a_k, \quad c_{n+1} = c_n \cdot a_{n+k+1}, \ n \geq 0$$

Algunos ejemplos

$$\begin{array}{rcl} c_0 & = & a_k \\ c_1 & = & c_0 \cdot a_{0+k+1} = a_r \cdot a_{k+1} \\ c_2 & = & c_1 \cdot a_{1+k+1} = a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \\ c_3 & = & c_2 \cdot a_{k+3} = a_r \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot a_{k+3} \\ c_n & = & c_{n-1} \cdot a_{n+k} = a_k \cdot ... \cdot a_{n+k}. \end{array}$$

La anterior sucesión es llamada productoria y se denota por

$$\prod_{i=k}^{n+k} a_i = a_k \cdot ... \cdot a_{n+k}.$$

En general tenemos la siguiente definición

2.3 Sumatoria y Productoria

Definición 2.3.1 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, r \leq s$ una sucesión y $r, s \in \mathbb{N}$, entonces definimos a:
i) **Sumatoria**

$$\sum_{i=r}^{s} a_i = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_s.$$

ii) **Productoria**

$$\prod_{i=r}^{s} a_i = a_r \cdot a_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdots a_s.$$

$\Diamond$

Ejemplo 2.3.2 Calcular

1) $\sum_{i=3}^{5} i = 3 + 4 + 5 = 12.$

2) $\sum_{i=2}^{4} 2^i = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 4 + 8 + 16 = 28.$

3) $\sum_{n=3}^{6} (n \cdot i) = i \sum_{n=3}^{6} n = i(3 + 4 + 5 + 6) = i(18) = 18i.$

4) $\sum_{i=2}^{4} \left(\sum_{j=2}^{3} j^i \right)$, donde

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{4} \left(\sum_{j=2}^{3} j^i \right) &= \sum_{i=2}^{4} (2^i + 3^i) \\ &= \sum_{i=2}^{4} 2^i + \sum_{i=2}^{4} 3^i \\ &= (2^2 + 2^3 + 2^4) + (3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 145 \end{aligned}$$

□

Algunas Sumatorias Básicas:

1 $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$

2 $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

3 $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$

4 $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, r \neq 0; r \neq 1.$

Proposición 2.3.3 *Dada las siguientes sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ de números Reales y $c \in \mathbb{R}$ entonces*

1 $\sum_{i=r}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=r}^{n} a_i.$

2 $\sum_{i=r}^{s} (a_i + b_i) = \sum_{i=r}^{s} a_i + \sum_{i=r}^{s} b_i.$

3 $\sum_{i=r}^{s} a_i = \sum_{i=r}^{t} a_i + \sum_{i=t+1}^{s} a_i$ *, donde* $r \leq < ts.$

4 $\sum_{i=r}^{s} (a_i - a_{i+1}) = a_r - a_{s+1},$ *propiedad telescópica.*

5) $\sum_{i=r}^{s} c = (s - r + 1)c.$

6 $\sum_{i=r}^{s} a_i = \sum_{i=r-p}^{s-p} a_{i+p}$, *donde* $r - p \geq 0$.

Ejemplo 2.3.4 Calcular

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1).$$

$\square$

Solución 1. Usando propiedades tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}(2i+1) &= \sum_{i=0}^{n}2i + \sum_{i=0}^{n}1 \\
&= 2\sum_{i=0}^{n}i + \sum_{i=0}^{n}1 \\
&= 2\left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right) + (n+1) \\
&= n^2 + n + n + 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.5 Calcular

$$\sum_{i=r}^{n} i$$

$\square$

Solución 2. Usando propiedades tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=r}^{n} i &= \sum_{i=r-r}^{n-r}(i+r) \\
&= \sum_{i=0}^{n-r}(i+r) \\
&= \sum_{i=0}^{n-r} i + \sum_{i=0}^{n-r} r \\
&= \tfrac{(n-r)(n-r+1)}{2} + (n-r+1)r \\
&= \tfrac{(n-r+1)(n-r+2r)}{2} \\
&= \tfrac{(n-r+1)(n+r)}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

Calcular las siguientes sumatorias:

1. $\sum_{i=0}^{100}(i+7)^2$

2. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} k3^k$Ayuda:
$$(k+1)3^{k+1} - k3^k = 2k3^k + 3^{k+1}.$$

Ejemplo 2.3.6 Sea $r \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ Calcular $\sum\limits_{k=0}^{n} kr^k$ □

Solución 3. Veamos primero que, por propiedad telescópica se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\, r^{k+1} - kr^k \right] = (n+1)\, r^{n+1}$$

Reescribiendo las sumatoria tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\, r^{k+1} - kr^k \right] &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \left[(r-1)\, kr^k + r^{k+1} \right] \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (r-1)\, kr^k + \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \\ &= (r-1) \textstyle\sum_{k=0}^{n} kr^k + r\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \end{aligned}$$

Igualando los resultados tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\, r^{k+1} - kr^k \right] &= \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\, r^{k+1} - kr^k \right] \\ (r-1) \textstyle\sum_{k=0}^{n} kr^k + r\frac{r^{n+1}-1}{r-1} &= (n+1)\, r^{n+1} \\ \textstyle\sum_{k=0}^{n} kr^k &= \frac{(n+1)}{r-1} r^{n+1} - r\frac{r^{n+1}-1}{(r-1)^2} \end{aligned}$$

De lo cual se obtiene que

$$\sum_{k=0}^{n} kr^k = \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + 1}{(r-1)^2}$$

Proposición 2.3.7 *Dada las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de Números Reales y $c \in \mathbb{R}$*

1. $\prod\limits_{k=r}^{s} (a_k \cdot b_k) = \prod\limits_{k=r}^{s} a_k \cdot \prod\limits_{k=r}^{s} b_k.$

2. $\prod\limits_{k=r}^{s} c \cdot a_k = c^{s-r+1} \cdot \prod\limits_{k=r}^{s} a_k.$

3. $\prod\limits_{k=r}^{s} c = c^{s-r+1}.$

4. $\prod\limits_{k=r}^{s} a_k = \prod\limits_{k=r}^{t} a_k \cdot \prod\limits_{k=t+1}^{s} a_k$, *donde $r \leq t < s$.*

5. *Propiedad Telescópica.*

   Si $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \neq 0)$, *entonces*

$$\prod_{k=r}^{s} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{s+1}}{a_r}.$$

6. $\prod_{k=r}^{s} a_k = \prod_{k=r-p}^{s-p} a_{k+p}.$

7. $\prod_{k=r}^{s} c^{a_k} = c^{\sum_{k=r}^{s} a_k}$, *con* $c > 0$

Demostración. Por inducción demostraremos la propiedad telescópica. Se define

$$p(n) : \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}.$$

Verifiquemos $p(0)$

$$\begin{aligned} p(0) : \prod_{k=0}^{0} \tfrac{a_{k+1}}{a_k} &= \tfrac{a_1}{a_0} \\ \tfrac{a_{0+1}}{a_0} &= \tfrac{a_1}{a_0} \\ \tfrac{a_1}{a_0} &= \tfrac{a_1}{a_0}. \end{aligned}$$

Luego $p(0)$ es verdadero. Ahora veamos

$$(\forall n \in \mathbb{N})[p(n) \Rightarrow p(n+1)]$$

es decir, hipótesis

$$p(n) : \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0},$$

Tesis:

$$p(n+1) : \prod_{k=0}^{n+1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+2}}{a_0},$$

entonces

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n+1} \tfrac{a_{k+1}}{a_k} &= \prod_{k=0}^{n} \tfrac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \left(\tfrac{a_{n+1+1}}{a_{n+1}}\right) \\ &= \left(\tfrac{a_{n+1}}{a_0}\right) \cdot \left(\tfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right) \\ &= \tfrac{a_{n+1}}{a_0} \cdot \tfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ &= \tfrac{a_{n+2}}{a_0}. \end{aligned}$$

Así tenemos la segunda parte y por teorema de inducción concluimos

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0} \right)$$

con $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. ■

Ejercicios

Demostrar por inducción la propiedad telescópica,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 \right).$$

Ejemplo 2.3.8 Calcular

$$\prod_{k=3}^{s} 3^{(k^2)}$$

□

Solución 4. Por la propiedad 5 se tiene que

$$\begin{aligned} \prod_{k=3}^{7} 3^{(k^2)} &= 3^{3^2} \cdot 3^{4^2} \cdots 3^{7^2} \\ &= 3^{(3^2+4^2+\cdots+7^2)} \\ &= 3^{\sum\limits_{k=3}^{7} k^2} = 3^{140-5} = 3^{135}. \end{aligned}$$

2.4 Progresiones

Dos de las principales progresiones en los números Naturales, son las llamadas progresiones Aritméticas y progresiones Geométricas, y las principales aplicaciones de estas sucesiones son el interés simple o compuesto.

2.4.1 Progresiones Aritméticas (P. A.)

Sean $a, d \in \mathbb{R}$, se llama progresión aritmética a la sucesión $\{a_n\}$, definida por

$$a_n = a + nd,$$

de primer término a y diferencia d, es decir,

$$\begin{array}{lcll} a_0 & = & a & 1^{er} \text{ término} \\ a_1 & = & a + 1d & 2^{do} \text{ término} \\ a_2 & = & a + 2d & 3^{ro} \text{ término} \\ & \vdots & & \\ a_{n-1} & = & a + (n-1)d & n - simo \text{ término} \\ a_n & = & a + nd & (n+1) - simo \text{ término .} \end{array}$$

Consideremos la siguiente igualdad, con ello la razón del nombre

$$a_{k+1} - a_k = [a + (k+1)d] - [a + kd] = d,$$

Calculemos la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

$$\sum_{k=0}^{n} a_k,$$

reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n}(a+kd) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a + d\sum_{k=0}^{n} k \\
&= a(n+1) + d\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)}{2}\cdot(2a+dn) \\
&= \frac{(n+1)}{2}\cdot(a+(a+nd)) \\
&= \frac{(n+1)}{2}\cdot(a_0+a_n).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = \frac{(n+1)}{2}\cdot(a_0+a_n) = (n+1)\left(a+\frac{n}{2}d\right).$$

En general

$$\sum_{k=r}^{n}(a+kd) = \frac{(n-r+1)}{2}\cdot(a_r+a_n) = (n-r+1)\left(a+\frac{(n+r)}{2}d\right).$$

Intercalar términos: Supongamos que tenemos dos números $x, y \in \mathbb{R}$ y deseamos intercalar n-términos de modo que se obtenga una Progresión Aritmética.

Para ello debemos tener los siguiente términos $a_0 = x, ..., a_{n-1} = y$

De este modo se tiene que

$$\begin{aligned}
a &= x \\
a+(n-1)d &= y
\end{aligned}$$

Despejando, se obtiene

$$\begin{aligned}
x &= a \\
d &= \tfrac{y-x}{n-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la progresión aritmética esta dada por

$$a_k = x + k\frac{y-x}{n-1}$$

Cuando intercalamos un sólo término, nos referimos a este término como el medio aritmético.

Ejemplo 2.4.1 En una progresión aritmética el primer término es 2 y el n -ésimo término es 29, la suma de los primeros n término es 155.

Hallar cuántos términos se sumaron y la diferencia. □

Solución. Se sabe que

$$\begin{aligned}
&a_0 = 2 \\
&a_{n-1} = 29 \\
&\sum_{k=0}^{n-1} a_k = 155,
\end{aligned}$$

de la última igualdad se sigue

$$\begin{aligned} 155 &= \tfrac{n(2+29)}{2} \\ 310 &= 31n \\ 10 &= n, \end{aligned}$$

luego como $a_9 = 29$, se sigue

$$\begin{aligned} a + 9d &= 29 \\ 2 + 9d &= 29 \\ 9d &= 27 \\ d &= 3. \end{aligned}$$

En resumen obtenemos que son 10 los términos sumados y que la diferencia es 3.

Ejercicios

Si la suma de los primeros siete términos de una progresión aritmética es 49 y la suma de los primeros 17 términos es 289. Calcular la suma de los primeros n términos.

2.4.2 Progresiones Geométricas (P.G.)

Sean $a, r \in \mathbb{R}^*$. Se llama progresión geométrica a la sucesión

$$a_n = ar^n,$$

donde a es el primer término y r la razón.

Observación: . De acuerdo a lo anterior se tiene la siguientes igualdades:

$$\begin{array}{lcll} a_0 & = & a & 1^{ero} \text{ término} \\ a_1 & = & a \cdot r & 2^{do} \text{ término} \\ a_2 & = & a \cdot r^2 & 3^{ro} \text{ término} \\ & \vdots & & \\ a_n & = & a \cdot r^n & (n+1)\text{-ésimo término.} \end{array}$$

1. La razón la podemos encontrar en:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a \cdot r^{n+1}}{a \cdot r^n} = \frac{r^{n+1}}{r^n} = r.$$

2. La suma de los términos

$$\sum_{k=0}^{n} a \cdot r^k,$$

se sigue

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a \cdot r^k &= a \sum_{k=0}^{n} r^k \\ &= a \left(\tfrac{r^{n+1}-1}{r-1} \right) \quad r \neq 1. \end{aligned}$$

Observación: Para la suma de los términos comenzando la suma en un $k \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=s}^{n} a \cdot r^k &= \sum_{k=s-s}^{n-s} a \cdot r^{k+s} \\
&= ar^s \sum_{k=0}^{n-s} r^k \\
&= ar^s \left(\frac{r^{n-s+1}-1}{r-1}\right) \\
&= a \left(\frac{r^{n+1}-r^s}{r-1}\right).
\end{aligned}$$

Intercalar términos: Supongamos que tenemos dos números $x, y \in \mathbb{R}^*$ y deseamos que intercalar n-términos de modo que obtengamos un Progresión Geométrica. Luego $a_0 = x, ..., a_{n-1} = y$

De lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned}
a &= x \\
ar^{n-1} &= y
\end{aligned}$$

reemplazando en la segunda ecuación

$$r^{n-1} = \frac{y}{x}$$

la cual puede tener solución vacía, una solución o dos soluciones.

Supongamos que tiene una solución, luego

$$x = a \ ; \ r = \sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}.$$

Por lo tanto la progresión geométrica es:

$$a_k = x \left(\sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}\right)^k$$

Supongamos que tiene dos soluciones, luego

$$x = a \ ; \ r = \pm \sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}.$$

Por lo tanto, existen dos respuesta y están dadas por las progresiones geométricas:

$$a_k = x \left(\sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}\right)^k \ ; \ b_k = x \left(-\sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}\right)^k$$

Cuando intercalamos un sólo término (cuando existen dos, nos referimos al positivo), decimos que es el medio geométrico.

Ejemplo 2.4.2 El cuarto término de una P.G es 1/4 y el noveno término es 1/64. Determinar el sexto término. □

Solución. Se tiene que

$$a_3 = 1/64 \quad \wedge \quad a_8 = 1/64,$$

de aquí tenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} ar^3 & = & 1/4 \\ ar^8 & = & 1/64 \end{array}\right|$$

de la primera ecuación podemos despejar a en función de r y nos resulta

$$a = \frac{1}{4r^3},$$

luego reemplazamos a en la segunda ecuación

$$\begin{array}{rcl} ar^8 & = & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{4r^3}r^8 & = & \frac{1}{64} \\ r^5 & = & \frac{4}{64} \\ r & = & \frac{1}{\sqrt[5]{16}}, \end{array}$$

luego

$$\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{4r^3} \\ & = & \frac{1}{4\frac{1}{(\sqrt[5]{16})^3}} \\ & = & \frac{1}{4}\cdot(\sqrt[5]{16})^3. \end{array}$$

Así

$$a_5 = a\cdot r^5 = \frac{1}{4}(\sqrt[5]{16})^3)\frac{1}{16} = \frac{1}{64}(\sqrt[5]{16})^3.$$

Ejercicios

Si la suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 52 y el primer término es 5. Determinar la suma de los primeros seis términos.

2.4.3 Interés Simple y Compuesto.

Podemos considerar la siguiente situación, una persona pide un préstamo de monto P a un amigo, y llegan al siguiente acuerdo, todo los meses el pagará D pesos hasta que la deuda este salda. Modelemos la situación descrita.

$a_0 = P$	Cuando pide el préstamo
$a_1 = P - D$	Cumplido el primer mes
$a_2 = P - D - D$	Cumplido el segundo mes
$a_n = P - nD$	Cumplido los meses.

En este caso hemos encontrado una progresión aritmética que describe el problema del interés simple.

Una situación parecida pero la persona pide un préstamo a un banco este monto a un interés de I mensual, de manera similar modelemos la situación

$a_0 = P$	Cuando pide el préstamo
$a_1 = P + \frac{I}{100}P = \left(1+\frac{I}{100}\right)P$	Cumplido el primer mes
$a_2 = \left(1+\frac{I}{100}\right)P + \frac{I}{100}\left(1+\frac{I}{100}\right)P$	Cumplido el segundo mes
$a_2 = \left(1+\frac{I}{100}\right)^2 P$	

es decir, que $a_{n+1} = a_n + \frac{I}{100}a_n = \left(1 + \frac{I}{100}\right) a_n$.

$$a_n = \left(1 + \frac{I}{100}\right)^n P$$

es la deuda en el mes n -ésimo. En este caso obtenemos una progresión geométrica de razón $1 + \frac{I}{100}$

Finalmente ahora consideremos que el deudor paga una cuota fija al banco C, para un mejor escritura definamos $R = 1 + \frac{I}{100}$

$a_0 = P$	Cuando pide el préstamo
$a_1 = P + \frac{I}{100}P - C = \left(1 + \frac{I}{100}\right) P - C = RP - C$	Cumplido el primer mes
$a_2 = RP - C + \frac{I}{100}\left(RP - C\right) - C$	Cumplido el segundo mes
$a_2 = R^2P - C(R+1)$	

En general tenemos que a_n es la deuda con el banco transcurrido n meses

$$a_{n+1} = a_n + \frac{I}{100}a_n - C = Ra_n - C.$$

Por inducción podemos probar que

$$a_n = R^nP - C\left(\frac{1-R^n}{1-R}\right)$$

$n > 0$

Ejemplo 2.4.3 Un banco tiene un interés de 1,5 mensual, para un crédito de \$ 450.000.- pagaderos en 12 cuotas iguales.
Calcular el valor de la cuota □

Solución. Como la deuda con el banco esta dada por:

$$a_n = R^nP - C\left(\frac{R^n - 1}{R-1}\right)$$

donde $R = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1,015$ y la deuda pasado 12 meses debe ser cero, para no deber nada al banco, tenemos que

$$a_{12} = 450000(1,015)^{12} - C\left(\frac{(1,015)^{12} - 1}{0,015}\right) = 0$$

luego tenemos que despejar C

$$C = 450000(1,015)^{12}\left(\frac{0,015}{(1,015)^{12} - 1}\right) \approx 41256$$

Hacemos una tabla de la deuda al banco durante los 12 meses, para comprobar nuestro resultado.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 450000 \\
a_1 &= 415494 = a_0 * 1.015 - 41256 \\
a_2 &= 380470 = a_1 * 1.015 - 41256 \\
a_3 &= 344921 = a_2 * 1.015 - 41256 \\
a_4 &= 308839 = a_3 * 1.015 - 41256 \\
a_5 &= 272216 = a_4 * 1.015 - 41256 \\
a_6 &= 235043 = a_5 * 1.015 - 41256 \\
a_7 &= 197313 = a_6 * 1.015 - 41256 \\
a_8 &= 159017 = a_7 * 1.015 - 41256 \\
a_9 &= 120146 = a_8 * 1.015 - 41256 \\
a_{10} &= 80692 = a_9 * 1.015 - 41256 \\
a_{11} &= 40646 = a_{10} * 1.015 - 41256 \\
a_{12} &= 0 = a_{11} * 1.015 - 41256
\end{aligned}$$

2.5 Teorema del Binomio

Definición 2.5.1 Sean $n, r \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq r$, entonces se define el **Número Binomial** n sobre r como

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

◊

Ejemplo 2.5.2 Calcular los siguientes valores

$$\binom{3}{1}; \binom{3}{2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\binom{3}{1} &= \tfrac{3!}{1!(3-1)!} = \tfrac{6}{2} = 3. \\
\binom{3}{2} &= \tfrac{3!}{2!(3-2)!} = \tfrac{6}{2} = 3.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.5.3 *Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $k < n$, entonces*

1 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2 $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Demostración. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $k < n$, entonces

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.5.4 Usemos la propiedad anterior para calcular

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$$

□

Solución 1. Por la propiedad anterior tenemos que

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$$

Luego tenemos que

$$6 = 3 + 3 = \binom{4}{2}$$

Teorema 2.5.5 [del Binomio]. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$, y $n \in \mathbb{N}^*$, entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Ejemplo 2.5.6 Calcularemos $(a+b)^3$. □

Solución 2.

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot a^{3-k} \cdot b^k \\
&= \binom{3}{0} \cdot a^3 + \binom{3}{1} \cdot a^2 \cdot b + \binom{3}{2} \cdot a \cdot b^2 + \binom{3}{3} \cdot b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

Demostración del Teorema del Binomio.. Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$, y $n \in \mathbb{N}^*$, entonces

$$p(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

luego verifiquemos $p(1)$, para ello

$$\begin{aligned} p(1) = (a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot a^{1-k} \cdot b^k \\ &= \binom{1}{0} \cdot a^{1-0} \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^{1-1} \cdot b^1 \\ &= a^1 b^0 + a^0 b^1 \end{aligned}$$

luego $p(1)$ es verdadero.

ii) Hipótesis $p(n)$. Tesis $p(n+1)$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k \end{aligned}$$

Así tenemos que $p(n+1)$ es verdadero, luego $(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$ se cumple, por teorema de inducción tenemos el teorema del binomio. ■

Observación: El término de lugar k-ésimo de $(a+b)^n$ es

$$\binom{n}{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}.$$

Ejemplo 2.5.7 Calcular $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. □

Solución 3. Por teorema del binomio tenemos

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k \\ &= (1+1)^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Ejercicios

Calcular $\sum\limits_{k=0}^{18} \begin{pmatrix} 18 \\ k \end{pmatrix} \cdot 2^{18+k}$. tenga presente lo siguiente

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^k.$$

Ejemplo 2.5.8 Determinar el coeficiente de x^{11} y x^4 en el desarrollo de $(x^2 - \frac{3}{x})^{16}$ □

Solución 4. Expresemos el desarrollo del binomio, simplificado

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \tfrac{3}{x}\right)^{16} &= \sum_{k=0}^{16} \begin{pmatrix} 16 \\ k \end{pmatrix} \cdot \left(x^2\right)^{16-k} \cdot \left(\tfrac{-3}{x}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{16} \begin{pmatrix} 16 \\ k \end{pmatrix} \cdot x^{32-3k} \cdot (-3)^k \end{aligned}$$

a) Para determinar el coeficiente de x^{11} debemos determinar el valor de k

$$\begin{aligned} 32 - 3k &= 11 \\ 21 &= 3k \\ k &= \tfrac{21}{3} = 7 \in \mathbb{N} \cap [0, 16] \end{aligned}$$

luego el coeficiente x^{11} es

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot (-3)^7 = \frac{16!}{7!9!} (-3)^7 = -25\,019\,280$$

b) Análogamente para determinar el coeficiente de x^4 debemos determinar el valor de k

$$\begin{aligned} 32 - 3k &= 4 \\ 28 &= 3k \\ k &= \tfrac{28}{3} \notin \mathbb{N} \cap [0, 16] \end{aligned}$$

luego el coeficiente x^4 es cero.

Caso General del Teorema del Binomio

Sean $a_1, a_2, a_3, ..., a_r \in \mathbb{R}^*$, y $n \in \mathbb{N}^*$, entonces

$$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, ..., n_r \in \mathbb{N} \\ n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_r = n}} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! ... n_r!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3} ... a_r^{n_r}.$$

Ejemplo 2.5.9 Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(2 - x^2 - 3x)^6$ □

Solución 5. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$, luego

$$\begin{aligned} (1 - x^2 - 3x)^6 &= \sum_{a+b+c=6} \tfrac{6!}{a!b!c!} \cdot (2)^a \left(-x^2\right)^b \cdot (-3x)^c \\ &= \sum_{a+b+c=6} \tfrac{6!}{a!b!c!} (2)^a (-1)^b \cdot x^{2b+c} \cdot (-3)^c \end{aligned}$$

Para determinar el coeficiente de x^{41} debemos determinar los valores de a, b, c

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 6 \\ 2b+c & = & 4 \end{array}\right|$$

despejando las variables a, c tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} a & = & 2+b \\ c & = & 4-2b \end{array}\right|$$

es decir, construyamos una tabla con las posibilidades

a	b	c
$2+b$	b	$4-2b$
2	0	4
3	1	2
4	2	0

luego el coeficiente x^4 es

$$\frac{6!}{2!0!4!}(2)^2(-1)^0(-3)^4 + \frac{6!}{3!1!2!}(2)^3(-1)^1(-3)^2 + \frac{6!}{4!2!0!}(2)^4(-1)^2(-3)^0$$
$$= 4860 - 4320 + 240 = 780$$

2.6 Permutaciones y Combinatoria

Permutaciones Sea A un conjunto de cardinal n y $r \in \mathbb{N}^*$, tal que $r \leq n$.
Se define

$$\mathcal{P}_r(A) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_r) \in A \times A \times \cdots \times A \quad | \quad \text{con } a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\},$$

La interrogante que surge es ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{P}_r(A)$?

Ejemplo 2.6.1 Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Luego

$$\begin{array}{rcr} \mathcal{P}_1(A) & = & \{(a), (b), (c), (d)\}, \\ \mathcal{P}_2(A) & = & \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), \\ & & ...(c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c)\}, \end{array}$$

Así, se obtiene que

$$P_2^4 = \#(\mathcal{P}_2(A)) = 12.$$

Continuando:
$\mathcal{P}_3(A) = \{(a,b,c), (a,c,b), (a,b,d), \ldots\}$, luego

$$P_3^4 = \#(\mathcal{P}_3(A)) = 24.$$

$\mathcal{P}_4(A) = \{(a,b,c,d), (a,b,d,c), (a,c,b,d), (a,c,d,b), \ldots\}$, y

$$P_4^4 = \#(\mathcal{P}_4(A)) = 24.$$

□

Teorema 2.6.2 *Sea A un conjunto con n elementos entonces número de* ***permutaciones*** *de n elementos sobre $r \leq n$ es*

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \#(\mathcal{P}_r(A)).$$

Ahora si $n = 4$, veamos los siguientes cálculos:

i) Si $r = 1$, entonces:
$$\frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4.$$

ii) Si $r = 2$, entonces:
$$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

iii) Si $r = 3$, entonces:
$$\frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24.$$

iv) Si $r = 4$, entonces:
$$\frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 24.$$

Ejemplo 2.6.3 En cada uno de los siguiente caso considere número de cuatro dígitos

a) ¿Cuántos números con todos sus dígitos distintos se pueden construir?

b) ¿Cuántos números pares con todos sus dígitos distintos se pueden construir?

□

Solución 1. a) Como el primer dígito no pude ser cero tenemos nueve posibilidades y de los otro nueve dígito ordeno 3 luego

$$9P_3^9 = 9\frac{9!}{6!} = 4536$$

b) Tenemos dos posibilidades, la primera es que el número tenga en el dígito de las unidades un cero.

$$P_3^9 = \frac{9!}{6!} = 504$$

La segunda posibilidad es que no sea cero, luego hay que tener cuidado con la cifra de la unidades de mil, ya que no puede ser cero. Para la cuenta argumentamos del siguiente modo, considero que la cifra de las unidades es 2 luego tengo nueve dígitos incluido el cero

$$8P_2^8 = 8\frac{8!}{6!} = 224$$

al repetir la cuenta para 4,6,8

$$8P_2^8 + 8P_2^8 + 8P_2^8 = 3 \cdot 224$$

La cantidad total es

$$P_3^9 + 8P_2^8 + 8P_2^8 + 8P_2^8 + 8P_2^8 = 504 + 4 \cdot 224 = 1400$$

Ejercicios

Repita el ejemplo anterior para números de dos dígitos y después para tres dígitos
Ejemplo 2.6.4 Usando sólo los siguientes dígitos 1,2,3,4,6,8,9. ¿Cuántos números de cuatro dígitos distintos se pueden construir menores que 4000? □

Solución 2. Como los números tiene que ser menores que 4000, luego el dígito de las unidades de mil debe ser 1,2,3 por lo tanto, si es 1 tenemos

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = 120$$

que es el mismo valor para 2 y 3. Luego el total es

$$P_3^6 + P_3^6 + P_3^6 = 3P_3^6 = 360$$

Combinatoria

Sea A un conjunto de cardinal n y $r \in \mathbb{N}$, tal que $r \leq n$.

Se define
$$\mathcal{C}_r(A) = \{B \subseteq A \quad | \quad \#(B) = r\}.$$

La interrogante que surge es ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{C}_r(A)$?.
Ejemplo 2.6.5 Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Determine por extensión $\mathcal{C}_r(A)$ y su cardinal □

Solución 3. Para los primeros caso lo podemos hacer por extensión

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_0(A) = \{\phi\}\,, \\
&\mathcal{C}_1(A) = \{\{a\}\,, \{b\}\,, \{c\}\,, \{d\}\}, \\
&\mathcal{C}_2(A) = \{\{a, b\}\,, \{a, c\}\,, \{a, d\}\,, \{b, c\}\,, \{b, d\}\,, \{c, d\}\},
\end{aligned}$$

Así, se obtiene que
$$C_2^4 = \#(\mathcal{C}_2(A)) = 6.$$

Para el siguiente caso tenemos que $\mathcal{C}_3(A) = \{\{a, b, c\}\,, \{a, b, d\}\,, \{a, c, d\}\,, \{b, c, d\}\}$, luego

$$C_3^4 = \#(\mathcal{C}_3(A)) = 4.$$

Finalmente $\mathcal{C}_4(A) = \{\{a, b, c, d\}\}$, con lo cual obtenemos

$$C_4^4 = \#(\mathcal{C}_4(A)) = 1.$$

Teorema 2.6.6 *Sea A un conjunto con n elementos entonces número de* ***combinatoria*** *de*

n elementos sobre $r \leq n$ es

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \#(\mathcal{C}_r(A)).$$

Ejemplo 2.6.7 En un juego de azar tenemos que escoger 12 números para formar un cartón de un total de 30 números.
¿Cuántos cartones distintos se pueden fabricar?

$$C_{12}^{30} = \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{30!}{18! \cdot 12!} = 86\,493\,225$$

$\square$

Ejemplo 2.6.8 Usando sólo los siguientes dígitos 1,2,3,4,6,8,9. ¿Cuántos números pares de cuatro dígitos distintos se pueden construir menores que 4000? $\square$

Solución 4. Como los números tiene que ser menores que 4000, luego el dígito de las unidades de mil debe ser 1,2,3 por lo tanto, si es 1 tenemos puede terminar en 2,4,6,8

$$C_1^4 P_2^5 = 4\frac{5!}{3!} = 80$$

que es el mismo valor para 3.

Pero para 2 tenemos que puede terminar en 4,6,8

$$C_1^3 P_2^5 = 3\frac{5!}{3!} = 60$$

Luego el total es

$$2C_1^4 P_2^5 + C_1^3 P_2^5 = 220$$

Permutaciones con Repetición

Teorema 2.6.9 *Sean R colores tales que hay n_i repetidos de color i, donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_R$. Entonces el número de permutaciones con repetición es:*

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_R}^n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_R!}$$

Ejemplo 2.6.10 Consideremos tres lápices dos de color rojo (iguales) y uno azul representados por las letras R, R, A, tenemos que:

$$P_{2,1}^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

esta número representa la cantidad de arreglos que podemos hacer con los tres lápices, que podemos distinguir

$$ARR; \quad RAR; \quad RRA$$

$\square$

Ejemplo 2.6.11 Con las letras de la palabra CONTRATO. ¿Cuántas palabras (agrupación de letras) de cuatro letras se pueden construir? $\square$

Solución 5. a) La palabra posee seis letras diferentes, (C,O,N,T,R,A) luego tenemos:

$$P_4^6 = \frac{6!}{2!} = 360.$$

b) La palabra puede tener dos letras repetidas (OO ; TT), para completar la palabra de cuatro letras se necesitan dos letras más distinta entre ella, es decir la cantidad es

$$P_{2,1,1}^4 = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$$

pero para escoger estas dos letra distintas tengo C_2^5 posibilidades, es decir

$$C_2^5 P_{2,1,1}^4 = \frac{5!}{3!2!} \frac{4!}{2!1!1!} = 120$$

pero hemos contado solamente una posibilidad, falta la otra letra, de esta manera tenemos:

$$2C_2^5 P_{2,1,1}^4 = 2\frac{5!}{3!2!} \frac{4!}{2!1!1!} = 240$$

c) Por último nos falta cuando las dos letras repetidas aparecen

$$P_{2,2}^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Así, finalmente tenemos que el número es:

$$P_4^6 + 2C_2^5 P_{2,1,1}^4 + P_{2,2}^4 = \frac{6!}{2!} + 2\frac{5!}{3!2!} \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!2!} = 360 + 240 + 6 = 606$$

Ejercicios

Determinar usando dos método distintos, cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5231 se pueden formar.

2.7 Guía Ejercicios

I Demostrar por Inducción

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\, (1 + 3 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2)$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left(0 + 1 + 3 + \cdots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}\right)$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left(-0 + 1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)\right)$
4. $(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left(\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \dfrac{1}{(4n+1)(4n+5)} = \dfrac{n+1}{4n+5}\right)$

5. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(0 \cdot 0! + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1\ )$
6. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(2 \cdot 1! + 5 \cdot 2! + \cdots + (n^2+1) \cdot n! = n \cdot (n+1)!\ )$
7. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{4}{(n+1)\,(n+3)} = \frac{3n^2+11n+8}{(n+2)(n+3)} \right)$
8. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(0^3{+}2^3 + 4^3 + \cdots {+} (2n)^3{=}2n^2(n+1)^2)$
9. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left((2+1/2) + (4+1/4) + \cdots + (2^{n+1}{+}1/2^{n+1}){=}2^{n+2}{-}\frac{1}{2^{n+1}}{-}1 \right)$
10. $(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n+1}{2^{n+1}} = 3 - (2n+5)\frac{1}{2^{n+1}} \right)$
11. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n+1){=}\frac{3n^2+7n+2}{2} \right)$
12. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^n\,(n+1) = (-1)^n \frac{2n+3+(-1)^n}{4} \right)$
13. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(n + (n+1) + (n+2) + ... + (3n-2) = (2n-1)^2 \right)$
14. $(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} {=}\ \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots {+} (-1)^{2n}\frac{1}{2n+1} \right)$
15. $(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left(0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n+1}n{=}(-1)^{n+1}\frac{2n+1+(-1)^{n+1}}{4} \right)$
16. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^n(2n+1){=}\ (-1)^n\,(n+1))$
17. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2)$
18. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(n^2 + n$ es múltiplo de 2)
19. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(n^3 - n$ es múltiplo de 6)
20. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(2 \cdot 4^n + 1$ es múltiplo de 3)
21. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(5^{2n} - 7^n$ es múltiplo de 6)
22. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(5^n - 7^{2n} = \dot{4})$
23. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(n^3 + 2n$ es múltiplo de 3)

II Sumatoria y Productoria

Calcular

1 $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} i(i-2)$

2 $\displaystyle\sum_{k=3}^{9} (k+1)$

3 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{4}\left(\frac{(i-j)^2}{2}\right)$

4 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i}(i-j)$

5 $\displaystyle\sum_{i,k=1}^{6}(2i-3k)$

6 $\displaystyle\sum_{i=2}^{5}\sum_{j=1}^{4}(ij^2-ji^2)$

7 $\sum_{k=1}^{7}(2k-n)$

8 $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}(ij^2+2i)$

Calcular

1 $\displaystyle\sum_{k=3}^{27}(2^k-3k)$

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{510}(2k+1)^2$

3 $\displaystyle\sum_{k=21}^{53}(1+\tfrac{3}{2}k)$

4 $\displaystyle\sum_{k=7}^{61}k(n-2)$

5 $\displaystyle\sum_{k=0}^{50}(k-i)$

6 $\displaystyle\sum_{k=23}^{101}k(k-3)$

7 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}(2k+1)^2$

8 $\displaystyle\sum_{k=12}^{105}(2^k+8k^3-k)$

9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{56}(2k+3t).$

10 $\displaystyle\sum_{k=1}^{510}(2k+1)(2k-1)$

11 $\displaystyle\sum_{k=1}^{56}(2k+3i).$

12 $\displaystyle\sum_{k=35}^{52}(2+3k+5^k)$

13 $\displaystyle\sum_{k=0}^{50}(k-i)$

14 $\displaystyle\sum_{k=1}^{125}\left(\frac{3^k+2^k}{5^k}+1+k^2\right)$

15 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}k(2+k)$

16 $\displaystyle\sum_{k=1}^{125}\left(\frac{3^k-2^k}{5^k}+1\right).$

17 $\displaystyle\sum_{k=11}^{73}(k(k+2)+2^k)$

18 $\displaystyle\sum_{k=1}^{33}\tbinom{33}{k}(-2)^{10-k}4^{2k}$

Calcular

1 $\displaystyle\prod_{k=4}^{120}(k-3)$

2 $\displaystyle\prod_{k=1}^{10}3k\frac{k+1}{2k-1}$

3 $\displaystyle\prod_{k=3}^{6}\left(\frac{3i}{i-2}\right)$

4 $\displaystyle\prod_{k=15}^{20}(3k-44)$

5 $\displaystyle\frac{1}{5!}\prod_{k=2}^{6}i$

6 $\displaystyle\prod_{k=1}^{60}\left(\frac{2^k k}{3}\right)$

7 $\displaystyle\prod_{k=1}^{7}(3-i)$

8 $\displaystyle\prod_{k=4}^{120}(k-3$

9 $\displaystyle\prod_{j=10}^{32}3i\left(\tfrac{i-1}{2i-6}\right)$

10 $\displaystyle\prod_{k=1}^{60}\left(1-\tfrac{2}{k}\right)$

11 $\displaystyle\prod_{k=1}^{16}3\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Calcular

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{35}\sum_{j=3}^{2k-3}(k^2-j)$

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}\sum_{j=k}^{2k+1}(j-k)$

3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{121}\sum_{j=k}^{2k}(jk)$

4 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{k}(2k+3i).$

5 $\displaystyle\sum_{k=10}^{82}\sum_{j=1}^{2k-3}(k-j)$

6 $\displaystyle\sum_{k=0}^{30}\sum_{i=0}^{k}(k-i)$

7 $\displaystyle\sum_{k=0}^{30}\sum_{i=0}^{k}(k-i)$

8 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{k}(2k+3i).$

9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}\left[\sum_{j=2}^{2k+1}(j+k)\right]$

10 $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(\prod_{j=1}^{4}(2i-j)\right)$

11 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}\sum_{j=1}^{2k+1}jk$

12 $\displaystyle\prod_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{5}(2i-j)\right)$

13 $\displaystyle\sum_{k=1}^{35}\left[\sum_{j=2}^{2k+1}(jk)\right]$

14 $\displaystyle\prod_{k=1}^{10}\prod_{j=1}^{k}2^j$

15 $\sum_{r=1}^{10}\sum_{t=1}^{2r}(2k+3t).$

16 $\prod_{k=1}^{20}\prod_{j=k}^{2k-1}2^j$

Calcular

1. $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

2. $\sum_{k=1}^{n}k2^k$

3. $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2\cdot k!$

4. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)\cdot k!$

5. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

6. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

7. $\sum_{k=1}^{n}(3^k-2^k)$

8. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-2}{(k+2)!}$

9. $\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}$

10. $\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}$

11. Considere la sucesión definida por recurrencia

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_n &= a_{n-1}+n-2; \qquad n\geq 2 \end{aligned}$$

a Determinar un formula explícita para a_n

b Calcular $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k =$

12. Considere la sucesión definida por recurrencia

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1}+3n-3; \qquad n\geq 2 \end{aligned}$$

a Determinar un formula explícita para a_n

b Calcular $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k =$

III Progresiones Aritméticas y Geométricas

1. Calcular la suma de las $n$primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones

    1. $2;\ 3,25;\ 4,5;\ \cdots\ \ (n=20)$
    2. $-2;\ 2\frac{1}{2};\ -3\frac{1}{8}\ \cdots\ \ (n=51)$
    3. $\frac{3}{\sqrt{5}};\ \frac{4}{\sqrt{5}};\ \sqrt{5};\ \cdots\ \ (n=25)$

4. $a-3b;\ 2a-5b;\ 3a-7b;\ \cdots\ \ (n=18),\ a,b\in\mathbb{R}$
5. $2a-b;\ 4a-3b;\ 6a-5b;\ \cdots\ \ (n=23),\ a,b\in\mathbb{R}$
6. $\frac{3}{4};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{20}\ \cdots\ \ (n=49)$
7. $\frac{a+b}{2};\ a;\ \frac{3a-b}{2}\ \cdots\ \ (n=42)$
8. $1;\ 2\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{4}\ \cdots\ \ (n=51)$

2. En una Progresión Aritmética el tercer término es igual a 20 y el sexto término es 36. Escriba los seis primeros términos.

3. Los términos del lugar 2, 31, y el k-ésimo término de un Progresión Aritmética son 12, -18 y -56 respectivamente. Hallar el primer término y el valor de k.

4. En una Progresión Aritmética el tercer término es igual a 4 veces el primer término y el octavo es 21 veces. Calcular la suma de los diez primeros términos.

5. En una progresión Aritmética el tercer término es igual a 4 veces el primer término y el sexto término es 17. Escriba los seis primeros términos de la progresión.

6. Los términos de los lugares segundo, trigésimo primero y de $n-$ésimo término de una progresión aritmética son $7\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $-6\frac{1}{2}$ respectivamente. Hallar el primer término y el valor de n.

7. Intercalar siete números entre 3 y 15 de modo que formen una progresión aritmética de nueve términos.

8. Intercalar siete números entre el 3 y el 15 de forma que resulte una Progresión Aritmética.

9. Dada una Progresión Aritmética cuyo quinto término es 17 y noveno término es 28. Determinar la suma de los 20 primero términos.

10. En una Progresión Aritmética cuyo quinto término es 15 y la suma de los 7 primeros término es 28. Determinar el noveno términos.

11. Dada una Progresión Aritmética cuyo cuarto término es 13 y la suma de los 7 primeros término es 32. Determinar el noveno términos.

12. Determinar tres números en Progresión Aritmética tales que la suma de ellos es 36 si al primero se le resta 1, al segundo se le resta 2 y al tercero se le suma 2, obtenemos un progresión geométrica en el mismo orden.

13. Un maderero apila en forma piramidal $19k+12$ tablones, de tal manera que hay k filas y en la última de ellas hay 8 tablones. Cada fila tiene un tablón más que su inmediata superior. Determinar el número de tablones.

14. Un maderero apila en forma piramidal $14k+7$ tablones, de tal manera que hay k filas y en la última de ellas hay 8 tablones. Cada fila tiene un tablón más que su inmediata superior. Determinar el número de tablones.

15. El quinto término de una Progresión Geométrica es 162 y el segundo término es 48. Escriba los cinco primeros términos de la Progresión.

16. Si el primer término de una Progresión Geométrica es 6 y la suma de los tres primeros términos es 18. Hallar la razón y el noveno término.

17. El cuarto término de una Progresión Geométrica es $1/4$ y el séptimo término es $1/32$. Hallar el sexto término.

18. Interpolar tres números ente 5 y 3125 de manera que estén en Progresión Geométrica.

19. Se compra una finca de 2000 hectáreas a pagar en 15 años, de modo que el primer año paga US$ 100, el segundo año US$ 300, sabiendo que los pagos están el Progresión Geométrica.

    ¿ Cuánto pago por la finca?.

20. A los 3 primeros términos de una Progresión Geométrica de razón 3. Si se suma 2 al primero de ello, el segundo se mantiene y se le resta 12 al tercero, se obtiene una nueva Progresión Geométrica en el mismo orden. Hallar los números.

21. Una pelota cae desde una altura de 1002 metros si cada vez que rebota sube un tercio de la altura que cayo. ¿ Hasta qué altura desde el suelo sube después de haber rebotado por décima vez?

22. Tres personas A, B, C. se reparten una herencia de US$ 210.000.- La cantidad que recibe cada uno es proporcional a su edad.

    La edad están en progresión geométrica y se sabe que A es menor que B y éste es menor que C.

    Si B tiene 6 años y recibe A recibe US$ 30.000.-

    ¿Cuánto recibe cada personas y cuales son sus edades?

23. Sea una Progresión Geométrica cuyo cuarto término es 12 y décimo término es 96. Determinar la suma de los 5 primero términos.

24. Dada la Progresión Geométrica cuyo segundo término es 20 y octavo término es 5 Determinar la suma de los 6 primero términos.

25. Se tiene dos grupos de números cada uno constituido por 3 término en progresión aritmética y la suma de cada grupo es 15, la diferencia del primer grupo es una unidad mayor que la diferencia del segundo grupo y el producto de los números del primer grupo es al producto de los números de segundo grupo como 7 es a 8.

    Hallar los números que forman cada grupo.

26. La suma de los tres primeros términos de una progresión aritmética es 48 y al primero se le suma 1 al segundo se le suma 4 y al tercero se le suma 17 resulta una progresión geométrica. Hallar los números.

27. Hallar dos números tales que su medio aritmético sea 13 y su medio geométrico sea 12

28. Demostrar que dos números tales que su medio geométrico es igual al medio aritmético son iguales.

29. Demuestre que el medio aritmético entre dos números reales positivos es siempre mayor o igual al medio geométrico.

30. Una persona viaja 50 km el primer día e incrementa 1km, en cada día posterior, el décimo día decide devolverse por el mismo camino. ¿Cuántos km recorre para volver al punto de partida?.

31. Se tiene 3 números en Progresión Geométrica de razón -3. Si se suma 14 al primero de ello y se le suma 21 al tercero, se obtiene una nueva Progresión Geométrica en el mismo orden. Hallar los números.

32. Dada la Progresión Geométrica cuyo segundo término es 5 y octavo término es 15 Determinar la suma de los 6 primero términos.

33. La suma de 3 primeros términos de una Progresión Geométrica es $13/3$. Si al tercero se le suma $-4/3$ y los demás quedan igual resulta una Progresión Aritmética en el mismo orden. Hallar los números.

34. El banco tiene el interés a $1,8$ mensual y se pide un préstamo de \$ 1.255.000.- Si el préstamo es a 36 meses

    ¿Cuál es el valor de la cuota?

35. El banco tiene el interés a $0,7$ mensual y se coloca un capital de \$1.000.000.- Al trascurrido 48 meses

    ¿Cuál es la ganancia?

36. El banco tiene el interés a $1,2$ mensual. Se pide un préstamo de \$ 450.000.- Si el préstamo es a 18 meses

    ¿Cuál es el valor de la cuota?

37. El banco tiene el interés a $1,1$ mensual. Se coloca un capital de \$ 450.000.- Al trascurrido 18 meses

    ¿Cuál es la ganancia?

IV Teorema del Binomio

1. Escribir simplificando

   a El quinto término del desarrollo de $(2a - \frac{b}{3})^8$ con $a, b \in \mathbb{R}$

   b El séptimo término del desarrollo de $(\frac{4x}{5} + \frac{5}{2x})^9$ con $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

c El quinto término del desarrollo de $(\dfrac{x^{3/2}}{a^{1/2}} - \dfrac{y^{5/2}}{b^{3/2}})^8$ con $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$

d El cuarto término del desarrollo de $(\dfrac{a}{3} + 9b)^{10}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

2. Determinar el coeficiente de x^n en el desarrollo de

   a $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x})^{21}$, para $n = 4$
   b $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x})^{20}$, para $n = 1$
   c $(\dfrac{3}{x} - 2x^3)^{10}$, para $n = 6$
   d $(x^2 + x + 1)^{15}$, para $n = 5$
   e $(x^2 - x + 1)^{15}$, para $n = 2$
   f $(x^3 + 2x + 1)^{15}$, para $n = 7$
   g $(x + 2x^2 + 1)^{10}$, para $n = 6$
   h $(2 + x^2 - x^{-3})^7$, para $n = 5$
   i $(2 + (2x)^{-3} + x^2)^7$, para $n = 7$

3. Determinar el coeficiente de a en el desarrollo de $\left(2a^2 - \dfrac{1}{2a}\right)^{17}$, con $a \in \mathbb{R}$

4. ¿Cuál es el coeficiente de x^2 que aparece en el desarrollo de:

$$\left(\frac{5}{3}x^3y^4 + \frac{1}{xy^2}\right)^{14} \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

5. Determinar el coeficiente de x^{32} y el de x^{-17} que aparecen en el desarrollo de

$$\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$$

6. Hallar el coeficiente de x^5 que aparece en la expresión reducida del desarrollo de

$$\left(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 1\right)^6$$

7. Hallar el coeficiente de $x^{11}y^4$ que aparece en la expresión reducida del desarrollo de

$$\left(2x^3 - 3xy^2 + z\right)^5$$

V Combinatoria y Permutaciones

1. Un estadio tiene 7 puertas de acceso, cada una de las cuales lleva hasta las gradería por tres pasillos diferentes. ¿De cuántas formas puede llegar hasta las graderías?

2. El menú del casino de la universidad, se ofrecen 7 tipos de entrada, 3 sopas distintas, 2 platos de fondo y 5 postres diferentes.

   ¿De cuántas formas puede hacer un menú que contenga una entrada, una sopa, un plato de fondo y un postre?

3. Una persona tiene 7 novelas y otra 9 revista. ¿De cuántas formas se puede intercambiar 2 revista por una novela?

4. Cinco muchachas y tres muchachos juegan a la pelota ¿De cuántas formas puede dividirse en dos equipos de cuatro personas cada uno, si en cada equipo debe haber por lo menos una muchacho?

5. ¿Cuántos números hay entre 100 y 1000 con todas las cifras distintas?

   ¿De ellos cuantos son pares?

6. Una persona tiene 8 amigos y quiere invitar diariamente a 4 de ellos de modo que el grupo no se repita. ¿Cuántos días puede cursar esta invitación?

7. En un campeonato de tenis donde participan 20 jugadores, se forman dos serie eliminatorias, pasan a la segunda etapa el que obtiene el segundo lugar y el ganador de cada serie, formado un cuadrangular.

   a ¿De cuántas formas se puede obtener tal cuadrangular?. Si los cuatro finalista se les premia de acuerdo al lugar obtenido.

   b ¿De cuántas formas se puede obtener tal situación?

   c ¿De cuántas equipo de doble se pueden realizar con los finalistas?

8. En cierto campeonato de tenis participan los siguientes asociaciones: de Concepción, con 4 jugadores, de Santiago, con 6 jugadores, de Valparaíso, con 8 jugadores, y de Arica, con 4 jugadores.

   a) En un campeonato abierto para todos los jugadores se premian los cinco primeros lugares ¿De cuántas formas se puede obtener tal situación?

   b) En un campeonato abierto para todo los jugadores los 7 últimos bajan en el ranking ¿De cuántas manera se puede obtener tal situación?

   c) ¿De cuántas manera se puede hacer un equipo de doble de cada ciudad para hacer un cuadrangular entre las ciudades? ¿Cuántos cuadrangulares?

   d) Suponga que todos los equipos se forman en una línea, agrupados por asociación ¿De cuántas forma distintas se pueden formar los equipos?

9. En cierto campeonato de tenis participan los siguientes asociaciones: de Concepción, con 3 jugadores, de Santiago, con 7 jugadores, de Valparaíso, con 9 jugadores, y de Arica, con 2 jugadores

   a) En un campeonato abierto para todos los jugadores se premian los 5 primeros lugares ¿De cuántas formas se puede obtener tal situación?

b) En un campeonato abierto para todo los jugadores los 6 últimos bajan en el ranking ¿De cuántas manera se puede obtener tal situación?

c) ¿De cuántas manera se puede hacer un equipo de doble de cada ciudad?

d) Al realizar un cuadrangular entre las ciudades ¿Cuántos cuadrangulares?

e) Suponga que todos los equipos se forman en cuatro filas una por ciudad. ¿De cuántas forma distintas se pueden formar los equipos?

10. ¿De cuántas manera se puede elegir 5 ampolleta de colores de entre 8 ampolleta de colores diferentes?, sabiendo que hay una roja, una azul otra verde en lo siguientes casos

    a Siempre se saca una azul y una verde.

    b No se elige la roja.

    c Siempre se elige la roja y la azul pero no la verde.

11. Hay 12 equipos en competencia oficial de fútbol.

    a ¿Dé cuántas formas puede bajar tres equipos a segunda división?

    b ¿Dé cuántas formas se pueden salir tres equipos campeón vice-campeón, tercer lugar?

12. ¿Dé cuántas formas se puede escoger de los naturales del 1 al 40 dos de ellos de modo que suma sea par?

13. ¿Cuántos diccionarios se necesitan para traducir directamente 12 idiomas diferentes?

14. En una reunión deben intervenir 5 personas, entre ellas esta Juan y Carlos.

    ¿Dé cuántas maneras se pueden hacer una lista de oradores?. Con la condición de Juan no debe hablar antes que Carlos.

15. En un juego de poker con 52 cartas. ¿Cuántas manos distintas pueden construirse? de modo que

    a Aparecen solamente un par.

    b Aparecen un par y un trío(full).

    c Aparecen solamente dos números pares (2,4,6,8 y 10).

    d Aparece una Escalera Real.

    e Aparece una Escalera Sucia.

16. ¿Cuántas palabras de nueve letras se pueden formar con las letras de la palabra "PROBLEMAS" si la palabra debe empezar por una vocal y terminar en consonante?

17. Para las siguientes pregunta considere las letras de la palabra CAMINOS

    a ¿Cuántas palabra de 7 letras diferentes se pueden formar?

b ¿Cuántas palabras de 7 letras diferentes se pueden formar, si no deben tener dos consonantes en lugares consecutivos?

c ¿Cuántas palabras de pueden formar, si todas las vocales deben estar en lugares consecutivos?

18. Para las siguientes pregunta considere las letras de la palabra ENDOSAR

    a ¿Cuántas palabra de 6 letras diferentes se pueden formar?

    b ¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes se pueden formar, si no deben tener dos consonantes en lugares consecutivos?

    c ¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes se pueden formar, si todas las vocales deben estar en lugares consecutivos?

19. Dada la letras de la palabra "PARALELA "

    a ¿Cuántas palabras con todas las letras distintas se pueden formar?

    b ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar?

    c ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar, con las tres A juntas?

    d ¿Cuántas palabras con 7 letras se pueden formar que comiencen y terminen con la letra L?

20. Dada la letras de la palabra "COCINERO"

    a ¿Cuántas palabras con todas las letras distintas se pueden formar?

    b ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar que comiencen y terminen con la letra O?

21. Dada la letras de la palabra "MESONERO"

    a ¿Cuántas palabras con todas las letras distintas se pueden formar?

    b ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar?

    c ¿Cuántas palabras con 4 letras se pueden formar?

    d ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar que comiencen **o** terminen con la letra O?

22. Se disponen de 3 fichas Rojas, de 3 fichas Azules y 2 fichas Negras.

    a ¿De cuántas maneras se pueden ordenar todas las fichas?

    b ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 fichas?

    c ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 fichas de modo que la primera sea Azul?

23. Se disponen de 2 fichas Rojas, de 2 fichas Azules y 2 fichas Negras.

    a ¿De cuántas maneras se pueden ordenar todas las fichas?

b ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 fichas?

c ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 fichas de modo que la dos fichas Azul estén juntas?

24. Entre 0 y 999

a ¿ En cuántos figura la cifra 7?.

b ¿En cuántos números figura dos veces?.

c ¿En cuántos números figura la dígito cero?

d ¿En cuántos números figura dos veces el dígito cero?

e ¿En cuántos números figura las cifras 5 y 0 ?

f ¿En cuántos números figura los dígitos 5 y 7?

25. Determinar cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5231 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 1,1,5,5,6,8,9 en cada uno de los siguientes caso:

a) Sin dígitos repetidos.

b) Con un dígito repetido.

c) Con dos dígitos repetidos.

26. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5301 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 3,3,5,5,6,7,8,9 en cada uno de los siguientes caso?

a Sin dígitos repetidos.

b Con un dígito repetido.

c Con dos dígitos repetidos.

27. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5351 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 3,5,5,6,6,7,8,9 en cada uno de los siguientes caso?

a) Sin dígitos repetidos.

b) Con un dígito repetido.

c) Con dos dígitos repetidos.

28. ¿Determinar cuántos números naturales menores que 3825 pueden formarse, usando solamente los dígitos dados a continuación 1,2,3,3,3,4,4,5?

29. ¿Determinar cuántos números naturales menores que 3825 pueden formarse, usando solamente los dígitos dados a continuación 1,2,3,3,4,4,5,6?

30. ¿Determinar cuántos números naturales menores que 3825 pueden formarse, usando solamente los dígitos dados a continuación 1,2,3,3,4,4,5?

31. Determinar cuántos números naturales de cuatro cifras menores que 3825 pueden formarse, usando solamente los dígitos dados a continuación 1,1,2,2,3,3,4,5.

32. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5231 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 1,1,5,5,6,8,9 en cada uno de los siguientes caso?

    a Sin dígitos repetidos.

    b Con un dígito repetido.

    c Con dos dígitos repetidos.

33. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos menores que 6500 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 3,3,5,5,6,7,8,9 en cada uno de los siguientes caso?

    a Sin dígitos repetidos.

    b Con un dígito repetido.

    c Con dos dígitos repetidos.

34. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos menores que 6500 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 2,3,5,5,6,7,9,9 en cada uno de los siguientes caso?

    a) Sin dígitos repetidos.

    b) Con un dígito repetido.

    c) Con dos dígitos repetidos.

35. En un tren se encuentran 83 pasajeros, el cual debe hacer 10 paradas. ¿De cuántas formas puede distribuirse los pasajeros entre estas parada?

36. En un tren se encuentran 83 pasajeros, el cual debe hacer 10 paradas.

    a ¿De cuántas distribuirse los pasajeros entre estas parada?

    b Si 5 quieren bajarse en una de las estaciones.

    c Si los cinco quieren bajarse juntos.