

Capítulo 1

Introducción

Este texto es la continuación natural del libro Algebra Lineal, donde se expusieron los capítulos de matrices, espacio vectorial y transformaciones lineales, mantenemos las notaciones que empleamos y que se supone conocido para el desarrollo de presente texto.

Iniciamos el texto realizando una introducción al álgebra de polinomios, de modo de fundamentar la existencia de una base que proporciona la forma canónica de una transformación lineal, lo cual depende del tipo de cuerpo y las dimensiones de los espacios propios.

El el segundo capitulo se aborda el tema de las formas bi(sesqui)lineal, donde se clasifica estas forma y se encuentran condiciones de modo que la matriz asociada sea diagonal, realizando una sección para tratar el caso particular de los Producto Internos sobre los cuerpos de los números reales o complejos.

Se concluye con el último capítulo dedicado al producto tensorial, antisimétrico y el simétrico.

Capítulo 2

Formas Canónicas

Dada una transformación lineal, determinar su forma canónica significa encontrar una base en la cual la matriz asociada a la transformación lineal sea lo mas simple posible, es decir, sea diagonal, triangular o de Jordan.

En el presente capítulo, se explora cuales son las condiciones para la existencia de esta base y con ello esta forma. Para ello es necesario recordar algunas propiedades del álgebra de polinomio.

2.1. Introducción Polinomios.

En general los polinomios se presenta como expresiones formales en una o en varias variables con coeficiente en algún cuerpos $\mathbb{K}$.

Definición 1 Sea $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ una función.

Se dice que f tiene soporte finito, si y sólo si el conjunto

$$f^{-1}(\mathbb{K} - \{0\}) = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f(n) \in \mathbb{K} - \{0\}\}$$

es finito.

Definición 2 El conjunto de los polinomios se denota por

$$\mathbb{K}[x] = \{f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ tiene soporte finito}\}$$

Las operaciones suma y el producto en $\mathbb{K}[x]$ están dadas por

Suma: Sea $f, g \in \mathbb{K}[x]$, luego $f + g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$(f + g)(i) := f(i) + g(i).$$

Producto: Sea $f, g \in \mathbb{K}[x]$, luego $fg : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$(fg)(i) = \sum_{t=0}^i f(i-t) \cdot g(t).$$

Propiedad 1 $\mathbb{K}[x]$ con esta suma y con este producto es un anillo conmutativo con unidad.
Es decir,

1. $(\mathbb{K}[x], +)$ es un grupo abeliano
2. $(\mathbb{K}[x], \cdot)$ es un monoide conmutativo
3. Distributividad del producto sobre la suma.

Definición 3 Sea f un polinomio no nulo, se dice que n es el grado de f si y sólo si

$$n = gr(f) = deg(f) = \max\{f^{-1}(\mathbb{K} - \{0\})\}.$$

Teorema 2 Sean f y g dos polinomios en $\mathbb{K}[x]$, entonces:

1. $f \cdot g = 0 \Leftrightarrow f = 0 \vee g = 0$.
2. Si f, g son no nulos, entonces

$$gr(fg) = gr(f) + gr(g).$$

Función Polinomial: Sea $f \in \mathbb{K}[x]$

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ a &\longmapsto \sum_{i=0}^{gr(f)} f(i)a^i = f(0) + \sum_{i=1}^{gr(f)} f(i)a^i \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto \sum_{i=0}^{gr(f)} f(i)A^i = f(0)Id + \sum_{i=1}^{gr(f)} f(i)A^i \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f : End(V) &\longrightarrow End(V) \\ T &\longmapsto \sum_{i=0}^{gr(f)} f(i)T^i = f(0)Id + \sum_{i=1}^{gr(f)} f(i)T^i \end{aligned}$$

Notación: Sea $f \in \mathbb{K}[x]$, no nulo entonces denotamos

$$f = \sum_{i=0}^{gr(f)} f(i)x^i$$

Ejemplo 1 Sea $f = 1 + 3x + x^2 \in \mathbb{R}[x]$, donde

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}_0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto f(i) = \begin{cases} 1 & i \in \{0, 2\} \\ 3 & i = 1 \\ 0 & i \notin \{0, 1, 2\} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, luego

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$$

2. Si $T(x, y) = (3x + y, 4x + 3y)$, luego

$$\begin{aligned} T^2(x, y) &= T(T(x, y)) \\ &= T(3x + y, 4x + 3y) \\ &= (3(3x + y) + (4x + 3y), 4(3x + y) + 3(4x + 3y)) \\ &= (13x + 6y, 24x + 13y). \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} f(T) &= Id + 3T + T^2 \\ f(T)(x, y) &= Id(x, y) + 3T(x, y) + T^2(x, y) \\ &= (x, y) + 3(3x + y, 4x + 3y) + (13x + 6y, 24x + 13y) \\ &= (23x + 9y, 23y + 36x) \end{aligned}$$

Propiedad 3 Si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ entonces

$$End(V) \simeq M_n(\mathbb{K}),$$

Definición 4 Sea f un polinomio y $\alpha \in \mathbb{K}$,
 α es una raíz de f si y sólo si $f(\alpha) = 0$

Teorema 4 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, $T \in End(V)$, $f, g \in \mathbb{K}[x]$, entonces

1. $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$, $(f + g)(T) = f(T) + g(T)$
2. $(fg)(A) = f(A) \cdot g(A)$, $(fg)(T) = f(T) \cdot g(T)$

Demostración:

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \sum_i f(i)A^i \sum_j g(j)A^j \\ &= \sum_{i,j} f(i)g(j)A^{i+j} \\ &= \sum_t \left(\sum_j f(t-j)g(j) \right) A^t \\ &= (fg)(A) \end{aligned}$$

□

Teorema 5 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces existe un polinomio f en $\mathbb{K}[x]$ no nulo tal que

$$f(A) = 0.$$

Demostración: Sabemos que la dimensión de las matrices $M_n(\mathbb{K})$ es n^2 , luego el conjunto $\{Id, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$ es linealmente dependiente (ya que tiene $n^2 + 1$ elementos), es decir existen algún $0 \neq \alpha_i \in \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0,$$

definimos

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n^2} x^{n^2} \in \mathbb{K}[x],$$

y $f(A) = 0$. □

Corolario 6 Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \text{End}(V)$, entonces existe un polinomio f en $\mathbb{K}[x]$ no nulo tal que

$$f(T) = 0.$$

Propiedad 7 Sean $f \in \mathbb{R}[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ una raíz de f y $n \in \mathbb{N}^*$ es la multiplicidad de α en f si y sólo si

$$\left(\frac{d^j f}{dx^j} \right) (\alpha) = f^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j < n$$

$$f^{(n)}(\alpha) \neq 0.$$

Observación: La demostración se obtiene usando la siguiente propiedad

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ i & \longmapsto & f(i) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f' = f^{(1)} : \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ i & \longmapsto & (i+1)f(i+1) \end{array}$$

De otro modo, tenemos si $f = \sum_{i=0}^n f(i)x^i$, entonces

$$f' = \sum_{i=1}^n i f(i) x^{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) f(j+1) x^j$$

Si $f, g \in \mathbb{R}[x]$ entonces

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

Teorema 8 Sean $f, g \in \mathbb{K}[x]$, entonces existen $h, r \in \mathbb{K}[x]$ únicos tales que

$$f = g \cdot h + r,$$

con $r = 0 \quad \vee \quad \text{gr}(g) > \text{gr}(r)$.

Corolario 9 Sean $f \in \mathbb{K}[x]$, $\alpha \in \mathbb{K}$

α es una raíz de f si y sólo si existe $h \in \mathbb{K}[x]$ tal que $f = (x - \alpha)h$

Definición 5 Sea A un anillo conmutativo. Se dice que I es un ideal de A si y sólo si

1. Si $g, f \in I$, entonces $g + f \in I$.
2. Si $g \in I$, $h \in A$, entonces $gh \in I$.

Ejemplo 2 Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $g \in \mathbb{K}[x]$. Demostrar

$$\langle g \rangle = \{g \cdot h \mid h \in \mathbb{K}[x]\}.$$

es un ideal de $\mathbb{K}[x]$, llamado ideal generado por g .

Teorema 10 Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, entonces todo los ideales de $\mathbb{K}[x]$ están generados por un elemento, es decir

Si el ideal I es no nulo, entonces existe un único polinomio mónico que lo genera.

Demostración: Sea I un ideal de $\mathbb{K}[x]$ no nulo, luego

$$\begin{array}{ccc} gr : I - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ f & \longmapsto & gr(f) \end{array}$$

como $Im(gr) \subseteq \mathbb{N}_0$ y es no vacío, luego existe el mínimo, sea $p \in I$, tal que p es mónico y $gr(p) = \min(Im(gr))$.

Ahora demostraremos que $\langle p \rangle = I$

La primera contención es inmediata, ya que I es un ideal.

En el otro sentido, sea $f \in I$, luego aplicando teorema 8, tenemos

$$f = p \cdot d + r,$$

donde $r = 0 \quad \vee \quad gr(p) > gr(r)$, luego

$$f = pd + r \iff f - pd = r,$$

donde $f \in I$ y $pd \in I$, luego $r \in I$, si $r \neq 0$ es una contradicción.

De este modo se tiene que $r = 0$ y

$$f = pd \subseteq \langle p \rangle$$

La unicidad se obtiene de $I = \langle p \rangle = \langle q \rangle$ entonces, existe $f, g \in \mathbb{K}[x]$ tales que $fp = q$, $p = qg$, reemplazando y comparando grado se obtiene la unicidad

□

Propiedad 11 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces $\{f \in \mathbb{K}[x] \mid f(A) = 0\}$ es un ideal de $\mathbb{K}[x]$.

Demostración:

1. $I = \{f \in \mathbb{K}[x] \mid f(A) = 0\} \neq \emptyset$, por teorema 5.

2. Sean $f, g \in I$, luego

$$(f \pm g)(A) = f(A) \pm g(A) = 0 \pm 0 = 0.$$

3. Sean $f \in I$ y $h \in \mathbb{K}[x]$, luego

$$(fh)(A) = f(A)h(A) = 0h(A) = 0,$$

□

Corolario 12 Sea $A \in M_n(\mathbb{K}) - \{0\}$, entonces existe un único polinómico mónico ϕ_A tal que

$$\{f \in \mathbb{K}[x] \mid f(A) = 0\} = \langle \phi_A \rangle.$$

Propiedad 13 Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \text{End}(V)$ no nulo, entonces existe un único polinómico mónico ϕ_T tal que

$$\{f \in \mathbb{K}[x] \mid f(T) = 0\} = \langle \phi_T \rangle.$$

Definición 6 Sea $A \in M_n(\mathbb{K}) - \{0\}$, ϕ_A es llamado el **polinomio minimal** de A , es decir, ϕ_A es el polinomio de grado menor, con coeficiente principal igual a 1 que cumple con $\phi_A(A) = 0$, y todo otro polinomio que anule a la matriz A se puede factorizar, donde uno de los factores es el polinomio minimal.

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \text{End}(V)$ no nulo, ϕ_T es llamado el **polinomio minimal** asociado T , es decir,

ϕ_T es el polinomio de grado menor, con coeficiente principal igual a 1 que cumple con $\phi_T(T) = 0$, y todo otro polinomio que anule a T se puede factorizar, donde uno de los factores es el polinomio minimal.

Ejemplo 3 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Sea $Id \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $\phi_{Id} = x - 1$

2. Sea $\alpha Id \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $\phi_{\alpha Id} = x - \alpha$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $\phi_A = (x - 1)(x - 2)$

2.2. Diagonalización

Definición 7 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$

1. α es un **valor propio** de A si y sólo si existe $v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$ tal que $A \cdot v^t = \alpha v^t$.

2. $v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$ es un **vector propio** de A si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $A \cdot v^t = \alpha v^t$.

3. El **espacio propio** asociado a α es el conjunto

$$V_\alpha = \{v \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot v^t = \alpha v^t\}.$$

Análogamente la nociones para transformaciones lineales

Definición 8 Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \text{End}(V)$, $\alpha \in \mathbb{K}$

1. α es un **valor propio** de T si y sólo si existe $v \in V - \{0\}$ tal que $T(v) = \alpha v$.
2. $v \in V - \{0\}$ es un **vector propio** de T si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \alpha v$.
3. El **espacio propio** asociado a α es el conjunto

$$V_\alpha = \{v \in V \mid T(v) = \alpha v\}.$$

Propiedad 14 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

α un valor propio de A si y sólo si α es una raíz de ϕ_A .

Demostración: Como $A \cdot v = \alpha v$, notemos por inducción lo siguiente

$$A^2 v^t = A(Av^t) = A(\alpha v^t) = \alpha Av^t = \alpha^2 v^t.$$

además se tiene que

$$A^{n+1} v^t = AA^n v^t = A(\alpha^n v^t) = \alpha^n (Av^t) = \alpha^{n+1} v^t.$$

Por lo tanto $A^n v^t = \alpha^n v^t$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea

$$\phi_A(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i.$$

Veamos ahora la demostración, para ello recordemos que $\phi_A(A) = 0$, evaluando en α tenemos

$\phi_A(\alpha) = \sum_{i=0}^r a_i \alpha^i$, además

$$\phi_A(\alpha)(v^t) = \sum_{i=0}^r a_i (\alpha^i v^t) = \sum_{i=0}^r a_i (A^i v^t) = \left(\sum_{i=0}^r a_i A^i \right) v^t = \phi_A(A) \cdot v^t = 0 \cdot v^t = 0$$

es decir,

$$\phi_A(\alpha)(v^t) = 0$$

Como $v \neq 0$, luego $\phi_A(\alpha) = 0$, de lo cual α es una raíz ϕ_A .

El recíproco, sea α es una raíz de ϕ_A , luego

$$\phi_A = (x - \alpha) \cdot h,$$

y

$$\phi_A(A) = (A - \alpha Id)h(A) = 0$$

1. Si $h(A)$ es invertible, entonces

$$A - \alpha Id = 0, \quad \phi_A = x - \alpha,$$

de donde $A = \alpha Id$.

2. Si $h(A)$ no es invertible, notemos que $gr(\phi_A) > gr(h)$, y $h(A) \neq 0$, ya que ϕ_A es el polinomio minimal de A (es decir el menor polinomio que anula a A).

Luego existe $w \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$h(A) \cdot w^t = v^t \neq 0$$

Reemplazando se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_A(A) \cdot w^t &= 0 \\ (A - \alpha Id)(h(A) \cdot w^t) &= 0 \\ (A - \alpha Id)v^t &= 0 \\ Av^t - \alpha v^t &= 0 \\ Av^t &= \alpha v^t. \end{aligned}$$

De este modo, α es un valor propio de A . □

Corolario 15 Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \text{End}(V)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces α un valor propio de T si y sólo si α es una raíz de ϕ_T .

Definición 9 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$,

Se define el **polinomio característico** asociado a una matriz como

$$P_A = \det(A - xId) \in \mathbb{K}[x]$$

Ejemplo 4 Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

Determinar $P_A(x)$ el polinomio característico.

Solución: Reemplazando

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \begin{vmatrix} 5-x & -6 & -6 \\ -1 & 4-x & 2 \\ 3 & -6 & -4-x \end{vmatrix} \\ &= -(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) \\ &= -(x-1)(-x^2 + 4x - 4) \\ &= -(x-1)(x-2)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $P_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$.

Observación: En caso de endomorfismo la definición es similar ya que

$$\begin{aligned}
 \det(A - xId) &= \det(A - xId)\det(P^{-1}P) \\
 &= \det(P^{-1})\det(A - xId)\det(P) \\
 &= \det(P^{-1}(A - xId)P) \\
 &= \det(P^{-1}AP - xId)
 \end{aligned}$$

Luego el determinante, no depende de la base, de otro modo es invariante de la base.

Definición 10 Sean $T \in \text{End}(V)$, donde V es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita, y $\mathcal{B}$ una base de V .

Se define el **polinomio característico** asociado a una transformación lineal como

$$P_T(x) = \det([T]_{\mathcal{B}} - xId).$$

Ejemplo 5 Sea

$$\begin{aligned}
 T : \quad \mathbb{K}^2 &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\
 (x, y) &\longmapsto (x + y, 4x - 2y)
 \end{aligned}$$

Determinar el polinomio característico de T .

Consideremos $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ base canónica de $\mathbb{K}^2$, luego

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Donde el polinomio característico es:

$$P_T = \det \begin{bmatrix} 1 - x & 1 \\ 4 & -2 - x \end{bmatrix} = x^2 + x - 6.$$

Observación: En general para una matriz $A \in M_2(\mathbb{K})$, se tiene que

$$P_A = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A),$$

ya que

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{bmatrix} &= (a - x)(d - x) - bc \\
 &= ad - ax - dx + x^2 - bc \\
 &= x^2 - (a + d)x + (ad - bc) \\
 &= x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A).
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6 Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$T(x, y, z) = (z, 3z - y - x, -x + 4y + 2z)$$

Calcular $P_T(x)$ el polinomio característico.

Solución: La matriz asociada es

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} P_T(x) &= \begin{vmatrix} 0-x & 0 & 1 \\ -1 & -1-x & 3 \\ -1 & 4 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= -x[(-1-x)(2-x) - 12] + (-4 - 1 - x) \\ &= 14x + x^2 - x^3 - 5 - x \\ &= -x^3 + x^2 + 13x - 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto $P_T(x) = -x^3 + x^2 + 13x - 5$

Teorema 16 (Cayley- Hamilton) *Sea T un endomorfismo sobre un espacio de dimension finita, entonces*

$$P_T(T) = 0$$

Demostración: Sea T un endomorfismo sobre un espacio de dimension n y $A = [T]_{\mathcal{B}}$ la matriz asociada en alguna base del espacio.

Luego tenemos que $P_A(x) = \det(A - xId_n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ Además $B(x) = \text{adj}(A - xId_n)$. Cada coeficiente de $B(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a $n-1$, de este modo podemos descomponer la matriz del siguiente manera

$$B(x) = D_{n-1}x^{n-1} + D_{n-2}x^{n-2} + \dots + D_1x + D_0$$

Recordando la propiedad de la matriz adjunta tenemos que

$$\begin{aligned} P_A(x)Id_n &= B(x)(A - xId_n) \\ &= (D_{n-1}x^{n-1} + D_{n-2}x^{n-2} + \dots + D_1x + D_0)(A - xId_n) \\ &= -D_{n-1}x^n + (D_{n-1}A - D_{n-2})x^{n-1} + \dots + (D_1A - D_0)x + D_0A \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} a_n Id_n &= -D_{n-1} \\ a_{n-1} Id_n &= D_{n-1}A - D_{n-2} \\ a_r Id_n &= D_r A - D_{r-1}; r > 0 \\ a_0 Id_n &= D_0 A \end{aligned}$$

Realicemos el reemplazo ahora

$$\begin{aligned}
 P_A(A) &= a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 \\
 &= a_n Id_n A^n + a_{n-1} Id_n A^{n-1} + \dots + a_1 Id_n A + a_0 Id_n \\
 &= -D_{n-1} A^n + (D_{n-1} A - D_{n-2}) A^{n-1} + \dots (D_2 A + D_1) A^2 + (D_1 A - D_0) A + D_0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Corolario 17 Sea T un endomorfismo sobre un espacio de dimension finita, entonces

$$\phi_T \text{ divide a } P_T$$

o bien

$$\text{Existe } h \in \mathbb{K}[x] \text{ tal que } P_T = \phi_T \cdot h$$

Propiedad 18 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. α es un valor propio de A .
2. $\ker(A - \alpha Id) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av^t = \alpha v^t\} \neq \{0\}$.
3. $A - \alpha Id$ es singular.
4. $\det(A - \alpha Id) = 0$.
5. α es una raíz del polinomio característico.

Demostración: Sea α es una raíz del polinomio característico, luego $\det(A - \alpha Id) = 0$, es decir, es singular, de lo cual, se obtiene que $\ker(A - \alpha Id) \neq \{0\}$, y finalmente es un valor propio.

Si α es un valor propio de A , luego se tiene que existe $v \in V - \{0\}$, tal que $Av^t = \alpha v^t$, es decir $v \in \ker(A - \alpha Id)$, por ello la matriz es singular, lo cual indica $\det(A - \alpha Id) = 0$, con lo cual es una raíz del polinomio característico. □

Corolario 19 Sean $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha \text{ es una raíz de } \phi_A \text{ si y sólo si } \alpha \text{ es una raíz de } P_A.$$

Corolario 20 Sean V un espacio vectorial dimension finita sobre $\mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $T \in \text{End}(V)$ entonces

$$\alpha \text{ es una raíz de } \phi_T \text{ si y sólo si } \alpha \text{ es una raíz de } P_T.$$

Ejemplo 7 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Determinar los espacio propios asociado a A .

Solución: Del ejemplo 4, tenemos que

$$P_A(x) = -(x-1)(x-2)^2.$$

Del corolario anterior tenemos que

$$\phi_A(x) = (x-1)(x-2)^2 \text{ o bien } \phi_A(x) = (x-1)(x-2).$$

luego los únicos valores propios son 1 y 2.

Ahora veremos los espacios propios asociados correspondientes. El valor propio 1 tiene el siguiente espacio propio,

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av^t = 1v^t\} \\ V_1 &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - Id)(v^t) = 0\} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con lo cual obtenemos que $v = (x, y, z) = (z, -z/3, z)$. Luego

$$V_1 = \langle (1, -1/3, 1) \rangle = \langle (3, -1, 3) \rangle$$

Para el otro valor propio, se tiene el espacio propio dado por:

$$\begin{aligned} V_2 &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av^t = 2v^t\} \\ V_2 &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2Id)(v^t) = 0\} \\ V_2 &= \ker(A - 2Id) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

así obtenemos que $v = (x, y, z) = (2y + 2z, y, z)$. Luego

$$V_2 = \langle (2, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle.$$

Note además si construimos la matriz $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, se tiene que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Y queda de ejercicio, comprobar que se obtiene

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observación: La generalización del resultado obtenido anteriormente, consideremos las matrices P, P^{-1}, A del ejercicio anterior, se tienen:

$$\begin{array}{ll} i) & P \cdot e_1^t = v_1^t \in V_1 & ii) & P^{-1} \cdot v_1^t = e_1^t \\ & P \cdot e_2^t = v_2^t \in V_2 & & P^{-1} \cdot 2v_2^t = 2e_2^t \\ & P \cdot e_3^t = v_3^t \in V_2 & & P^{-1} \cdot 2v_3^t = 2e_3^t \end{array}$$

También tenemos:

$$Av_1^t = v_1^t \quad Av_2^t = 2v_2^t \quad Av_3^t = 2v_3^t$$

Por último se tiene

$$P^{-1}APe_1^t = e_1^t \quad P^{-1}APe_2^t = 2e_2^t \quad P^{-1}APe_3^t = 2e_3^t$$

De este modo la matriz $P^{-1}AP$ es diagonal.

Sea A una matriz de orden n , con coeficientes en $\mathbb{K}$, podemos asociar una transformación lineal del siguiente modo

$$\begin{array}{ccc} T_A : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ v & \longmapsto & vA^t \end{array}$$

Luego T_A es una transformación lineal, ya que

$$I) \quad T_A(v + w) = (v + w)A^t = vA^t + wA^t = T_A(v) + T_A(w).$$

$$II) \quad T_A(\alpha v) = (\alpha v)A^t = \alpha(vA^t) = \alpha T_A(v).$$

Es fácil obtener que $[T_A]_C = A$.

Si consideremos la base $B = \{(3, -1, 3), (2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$, formado por los vectores encontrados anteriormente, tenemos la matrices cambio de base $P = [Id]_B^C$, de donde se obtiene

$$P^{-1}AP = [Id]_C^B \cdot [T_A]_C^C \cdot [Id]_B^C = [T_A]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definición 11 Sean $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $T \in \text{End}(V)$.

1. Se dice que A es **diagonalizable** si y sólo si existe $P \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$ (matrices invertibles) tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.
2. Se dice que T es **diagonalizable** si y sólo si existe B una base de V tal que $[T]_B$ es diagonal.

Teorema 21 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces

A es diagonalizable si y sólo si T_A es diagonalizable.

Demostración: Si A es diagonalizable existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Pero notemos que en la base canónica se tiene que

$$[T_A]_C = A$$

Luego

$$P^{-1}[T_A]_C P = P^{-1}AP$$

Definimos la base $\mathcal{B}$ de V modo que $P = [Id]_{\mathcal{B}}^C$, de lo cual

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T_A]_C P = P^{-1}AP$$

es decir, T en la base $\mathcal{B}$ es diagonal.

El recíproco, tenemos que existe una base $\mathcal{B}$ de V , tal que $[T_A]_{\mathcal{B}}$ es diagonal,

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}^C [T_A]_C [Id]_C^{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$$

es decir, existe P invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. $\square$

Propiedad 22 Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, tal que existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ de modo que $B = P^{-1}AP$, entonces

$$\phi_A(x) = \phi_B(x).$$

Demostración: Notemos primero lo siguiente

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^2 &= P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P \\ (P^{-1}AP)^{n+1} &= (P^{-1}AP)^n P^{-1}AP = P^{-1}A^n P P^{-1}AP = P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

Luego se obtiene que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ((P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^n P)$$

Por otro lado se tiene que $\phi_A(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i$, luego evaluamos en B , donde

$$\phi_A(B) = \sum_{i=0}^r a_i (P^{-1}AP)^i = \sum_{i=0}^r a_i (P^{-1}A^i P) = P^{-1} \left(\sum_{i=0}^r a_i A^i \right) P = P^{-1}(\phi_A(A))P = 0.$$

Así

$$\phi_A \in \langle \phi_B \rangle,$$

de donde $\phi_A = \phi_B \cdot h$.

Con un desarrollo similar, obtenemos que $\phi_B = \phi_A \cdot h'$, reemplazamos

$$\phi_A = \phi_A h' h.$$

Cancelando y debido a que ϕ_B y ϕ_A son mónicos, entonces h' y h deben ser 1. $\square$

Ejercicio 8 Sea

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (3x - iy, 2x + 3y) \end{aligned}$$

Determine:

1. El polinomio característico de T con $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.
2. El polinomio característico de T con $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Propiedad 23 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, ϕ_A su polinomio minimal tal que

$$\phi_A = \phi_1 \cdot \phi_2,$$

con ϕ_1, ϕ_2 primos relativos mónicos, consideremos

$$V_i = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \phi_i(A) \cdot v^t = 0\},$$

entonces

1. $V_1 = \{v \cdot \phi_2(A)^t \mid v \in \mathbb{K}^n\}$; $V_2 = \{v \cdot \phi_1(A)^t \mid v \in \mathbb{K}^n\}$
2. $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus V_2 \quad \wedge \quad A(V_1) \subseteq V_1 \quad \wedge \quad A(V_2) \subseteq V_2.$
3. $T_A|_{V_i} = T_{A_i}$, entonces $\phi_{A_i} = \phi_i$

Observación: Debemos tener presente para la demostración que, si $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{K}[x]$ son primos relativos, entonces existen $h_1, h_2 \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$\phi_1 h_1 + \phi_2 h_2 = 1$$

Evalutando tenemos

$$\phi_1(A)h_1(A) + \phi_2(A)h_2(A) = Id \quad (*)$$

o bien

$$(\phi_1(A))^t(h_1(A))^t + (\phi_2(A))^t(h_2(A))^t = Id \quad (*)$$

Demostración:

1. Demostraremos que

$$\{v \in \mathbb{K}^n \mid v \cdot \phi_1(A)^t = 0\} = \{v \cdot \phi_2(A)^t \mid v \in \mathbb{K}^n\}$$

Veamos la primera contención, sea $w \in \{v \cdot \phi_2(A)^t \mid v \in \mathbb{K}^n\}$, luego $w = v \cdot \phi_2(A)^t$

$$\phi_1(A) \cdot w^t = \phi_1(A) \cdot \phi_2(A) \cdot v^t = \phi_A(A) \cdot v^t = 0 \cdot v^t = 0$$

Para la otra contención se tiene que, dado $w \in \{v \in \mathbb{K}^n \mid \phi_1(A) \cdot v^t = 0\}$. Por (*) tenemos

$$\begin{aligned} \phi_1(A)h_1(A) + \phi_2(A)h_2(A) &= Id \\ \phi_1(A)h_1(A)w^t + \phi_2(A)h_2(A)w^t &= w^t \\ \phi_2(A)(h_2(A) \cdot w^t) &= w^t \end{aligned}$$

escogemos $v^t = h_2(A) \cdot w^t$, y tenemos

$$\phi_2(A) \cdot v^t = w^t$$

2. Ahora probaremos la suma directa y la estabilidad.

Demostrar que $\mathbb{K}^n = V_1 + V_2$

$$\begin{aligned}\phi_1(A)h_1(A) + \phi_2(A)h_2(A) &= Id \quad (*) \\ h_1(A)^t \phi_1(A)^t \cdot v + h_2(A)^t \phi_2(A)^t \cdot v &= v \\ \phi_1(A)^t (h_1(A)^t \cdot v) + \phi_2(A)^t (h_2(A)^t \cdot v) &= v\end{aligned}$$

pero $\phi_1(A)^t (h_1(A)^t \cdot v) \in V_2$ y $\phi_2(A)^t (h_2(A)^t \cdot v) \in V_1$, luego

$$\mathbb{K}^n = V_1 + V_2$$

Sea $w \in V_1 \cap V_2$, en (*) se tiene

$$\begin{aligned}\phi_1(A)h_1(A) \cdot w^t + \phi_2(A)h_2(A) \cdot w^t &= w^t \\ h_1(A)(\phi_1(A) \cdot w^t) + h_2(A)(\phi_2(A) \cdot w^t) &= w^t\end{aligned}$$

ya que $w \in V_1 \cap V_2$, tenemos que $\phi_1(A) \cdot w^t = 0$ y $\phi_2(A) \cdot w^t = 0$, de donde concluimos que $w = 0$

Ahora la estabilidad, para ello notemos lo siguiente:

$$A^j \cdot \sum_{i=0}^r a_i A^i = \sum_{i=0}^r a_i A^j A^i = \sum_{i=0}^r a_i A^i A^j = \left(\sum_{i=0}^r a_i A^i \right) A^j$$

Sea $w \in V_1$ entonces es claro que $w \cdot A^t \in \mathbb{K}^n$, además

$$\phi_1(A)(A \cdot w^t) = (\phi_1(A) \cdot A)w^t = A \cdot \phi_1(A) \cdot w^t = A \cdot 0 = 0.$$

Luego $w \cdot A^t \in V_1$

3. Sea

$$\begin{aligned}T_A : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ v &\longmapsto v \cdot A^t,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}T_{A_1} = T_A|_{V_1} : V_1 &\longrightarrow V_1 \\ v &\longmapsto v \cdot A^t\end{aligned}$$

Sea ψ_i el polinomio minimal asociado a T_{A_i} , entonces $\psi_i(T_{A_i}) = 0$, es decir

$$(\forall v \in V_i)(\psi_i(A) \cdot v^t = 0),$$

luego $\phi_i = \psi_i t_i$. (**)

Además, sea $v \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned}\psi_1(A)\psi_2(A) \cdot v^t &= (\psi_1(A)\psi_2(A))(v_1^t + v_2^t), \\ &= \psi_1(A)\psi_2(A)v_1^t + \psi_1(A)\psi_2(A)v_2^t \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así $(\forall v \in \mathbb{K}^n)(\psi_1(A)\psi_2(A)v^t = 0)$, luego

$$\psi_1(A)\psi_2(A) = 0,$$

donde $\psi_1\psi_2$ es un polinomio que se anula en la matriz A , de lo cual se obtiene que

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_2 &= \phi t_3 \\ &= \phi_1\phi_2 t_3 \\ &= \psi_1\psi_2 t_3 t_2 t_1\end{aligned}$$

cancelando y como ψ_i, ϕ_i son mónicos en $(**)$ obtenemos que

$$t_1 = t_2 = 1.$$

□

Propiedad 24 Sean V un espacio vectorial dimension finita sobre $\mathbb{K}$, ϕ_T su polinomio minimal tal que

$$\phi_T = \phi_1 \cdot \phi_2,$$

con ϕ_1, ϕ_2 primos relativos mónicos, consideremos

$$V_i = \{v \in V \mid \phi_i(T)v = 0\},$$

entonces

1. $V_1 = \{\phi_2(T)v \mid v \in V\}; \quad V_2 = \{\phi_1(T)v \mid v \in V\}$
2. $V = V_1 \oplus V_2 \quad \wedge \quad T(V_1) \subseteq V_1 \quad \wedge \quad T(V_2) \subseteq V_2.$
3. $T|_{V_i} = T_i$, entonces $\phi_{T_i} = \phi_i$

Observación: Con el siguiente ejemplo revisaremos los paso de la demostración

Ejemplo 9 Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned}T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, 4x - 2y)\end{aligned}$$

Tenemos que la matriz cambio de base en la base canónica, esta dada por

$$[T]_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

y tenemos que el polinomio característico corresponde a $P_T(x) = (x - 2)(x + 3) = \phi_T(x)$, luego

$$\phi_T(x) = \phi_1(x) \cdot \phi_2(x),$$

donde $\phi_1(x) = x - 2$, $\phi_2(x) = x + 3$, además

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_1(T) \cdot v = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (T - 2Id) \cdot v = 0\} \\ &= \{\phi_2(T)v \mid v \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(T + 3Id)v \mid v \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V_2 &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_2(T) \cdot v = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (T + 3Id) \cdot v = 0\} \\ &= \{(T - 2Id)v \mid v \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2.$$

Además tenemos, la restricción

$$\begin{array}{ccc} T_1 : V_1 & \longrightarrow & V_1 \\ v & \longmapsto & T(v) = 2v \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} T_2 : V_2 & \longrightarrow & V_2 \\ v & \longmapsto & T(v) = -3v \end{array}$$

donde el polinomio minimal de T_1 es $\phi_1(x) = x - 2$ y el de T_2 es $\phi_2(x) = x + 3$.

Corolario 25 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $\phi_A(x) = \phi_1(x) \cdots \phi_r(x)$, tal que $\phi_1(x), \dots, \phi_r(x)$ son primos relativos mónicos.

Si

$$V_i = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \phi_i(A) \cdot v^t = 0\},$$

entonces

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r V_i.$$

Corolario 26 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \text{End}(V)$, $\phi_T(x) = \phi_1(x) \cdots \phi_r(x)$, tal que $\phi_1(x), \dots, \phi_r(x)$ son primos relativos mónicos.

Si

$$V_i = \{v \in V \mid \phi_i(T)v = 0\},$$

entonces

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_i.$$

Teorema 27 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \text{End}(V)$, tal que su polinomio minimal, se factoriza del siguiente modo

$$\phi_T(x) = (x - \alpha_1)^{p_1} (x - \alpha_2)^{p_2} \cdots (x - \alpha_r)^{p_r},$$

con α_i todos distintos. Entonces

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_i,$$

donde $V_i = \{v \in V \mid (T - \alpha_i Id)^{p_i} v = 0\}$ y $T(V_i) \subseteq V_i$.

Demostración: Como las raíces α_i son distintas, entonces los factores $(x - \alpha_i)^{p_i}$, son primos relativos, luego las propiedades anterior se obtiene el teorema $\square$

Corolario 28 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \text{End}(V)$,

Si el polinomio minimal ϕ_T tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ y cada una tiene multiplicidad 1 en entonces T es diagonalizable.

Corolario 29 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$

Si el polinomio minimal ϕ_A tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ y cada una tiene multiplicidad 1 en entonces A es diagonalizable.

Ejemplo 10 Sea $T \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$, tal que

$$T(x, y, z) = (z, 3z - y - x, -x + 4z - 2y),$$

Determinar el polinomio minimal examinando los posibles espacio anuladores

Solución: La matriz asociada a T en la base canónica es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego el polinomio característico es $P_T(x) = (1 - x)^3$, de lo cual, el polinomio minimal debe ser algunos de los siguientes

$$\phi_A = x - 1, \phi_A = (x - 1)^2, \phi_A = (x - 1)^3,$$

Investiguemos, determinando los siguientes espacio.

1. $W_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (T - Id)v = 0\}$, se sigue

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde se concluye que

$$W_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

2. $W_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (T - Id)^2 v = 0\}$, luego

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de aquí concluimos que

$$W_2 = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle.$$

3. $W_3 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (T - Id)^3 v = 0\}$, donde

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$W_3 = \langle (1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$$

Claramente tenemos que $\phi_T(x) = (x - 1)^3$, ya que $W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \mathbb{R}^3$. Consideramos la base

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\},$$

luego

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 12

1. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se dice que A es **triangularizable** si y sólo si existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP$ es triangular.
2. Sea $T \in End(V)$. Se dice que T es **triangularizable** si y sólo si existe B base de V tal que $[T]_B$ es triangular.

Note que la transformación del ejercicio anterior es triangularizable

Teorema 30 Sea $T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, tal que $\phi_A(x) = (x - c)^p$, donde

$$W_i = \{v \in \mathbb{K}^n \mid (A - cId)^i \cdot v^t = 0\},$$

entonces

1. $W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_p = \mathbb{K}^n$
2. $W_j(A - cId)^t \subseteq W_{j-1}$
3. Si $W_i = W_{i+1}$ entonces $W_{i+1} = W_{i+2}$

Demostración:

1. Veamos las contenciones

$$W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_p = \mathbb{K}^n$$

Sea j , tal que $1 \leq j < p$, y $v \in W_j$, luego $(A - cId)^j \cdot v^t = 0$, multiplican obtenemos

$$(A - cId)^{j+1} \cdot v^t = (A - cId)(A - cId)^j \cdot v^t = (A - cId) \cdot 0 = 0$$

por lo tanto $v \in W_{j+1}$.

2. Sea j , tal que $1 \leq j < p$, veamos ahora

$$W_j(A - cId)^t \subseteq W_{j-1},$$

es decir, si $v \in W_j(A - cId)^t$, debemos demostrar que $(A - cId)^{j-1} \cdot v^t = 0$.

Para ello, sea $v \in W_j(A - cId)^t$, entonces $v = w(A - cId)^t$, con $w \in W_j$, luego

$$(A - cId)^{j-1} \cdot v^t = (A - cId)^{j-1} \cdot (A - cId)^t w^t = (A - cId)^j w^t = 0,$$

por lo tanto $v \in W_{j-1}$

3. Supongamos que

$$W_i = W_{i+1}$$

implica $W_{i+1} = W_{i+2}$.

De la primera parte se tiene $W_{i+1} \subset W_{i+2}$.

Para la otra contención tenemos de la segunda parte que $W_{i+2}(A - cId)^t = W_{i+1}$. Ahora bien, si $w \in W_{i+2}$, luego $w(A - cId)^t \in W_{i+1} = W_i$, por hipótesis, entonces $0 = (A - cId)^i(A - cId)^t w^t = (A - cId)^{i+1} w^t$, es decir $w \in W_{i+1}$.

$$W_{i+1} = W_{i+2}$$

□

Corolario 31 Sea $T \in \text{End}(V)$, tal que $\phi_T(x) = (x - c)^p$, si

$$W_i = \{v \in V \mid (T - cId)^i v = 0\},$$

entonces

1. $W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_p = \mathbb{K}^n$
2. $(T - cId)W_j = \{Tv \mid v \in W_j\} \subseteq W_{j-1}$
3. Si $W_i = W_{i+1}$ entonces $W_{i+1} = W_{i+2}$

Corolario 32 Si A es una matriz tal que el polinomio característico se puede factorizar, sólo con factores lineales entonces A es triangularizable.

Demostración: De la primera afirmación del teorema tenemos que una base de W_i , se puede extender a una base de W_{i+1} , aplicando en forma reiterada, lo anterior podemos obtener una base del espacio total.

De otro modo tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} B_1 &= \{w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1s_1}\} \text{ una base de } W_1 \text{ y como } W_1 \subseteq W_2, \text{ se extiende a} \\ B_2 &= \{w_{11}, \dots, w_{1s_1}, w_{21}, \dots, w_{2s_2}\} \text{ una base de } W_2 \text{ y como } W_2 \subseteq W_3, \\ &\vdots \\ B_p &= \{w_{11}, \dots, w_{1s_1}, w_{21}, \dots, w_{2s_2}, \dots, w_{p1}, \dots, w_{ps_p}\} \text{ una base de } W_p = \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

De la definición de W_1 tenemos que,

$$(A - cId)w_{1j}^t = 0 \Leftrightarrow Aw_{1j}^t = cw_{1j}^t,$$

De la segunda afirmación,

$$W_2(A - cId)^t \subseteq W_1,$$

luego,

$$(A - cId)w_{2j}^t = \sum_i \alpha_{j,i} w_{2i}^t \Leftrightarrow Aw_{2j}^t = cw_{2j}^t + \sum_i \alpha_{i,j} w_{1i}^t,$$

En general tenemos que $W_j(A - cId)^t \subseteq W_{j-1}$,

$$w_{jr}(A - cId)^t \in W_{j-1} \Leftrightarrow Aw_{jr}^t = cw_{jr}^t + \sum \sum \alpha_{i,r} w_{hi}^t,$$

Con ello tenemos que la matriz de $[T_A]_{B_p}$ es triangular superior. $\square$

Corolario 33 Si $T \in \text{End}(V)$ es una matriz tal que el polinomio característico se puede factorizar, sólo con factores lineales entonces T es triangularizable.

Ejemplo 11 Sea $T \in \text{End}(\mathbb{R}^5)$, tal que la matriz en la base canónica es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico es $P_T(x) = (x - 2)^5$.

Determinar una base en la que la matriz asociada a T sea triangular.

Solución: Ya que el único valor propio es 2, debemos calcular los espacios correspondiente del teorema anterior

1. $W_1 = \{v \in \mathbb{R}^5 \mid (T - 2Id)v = 0\}$, se sigue

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde

$$W_1 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1) \rangle$$

2. $W_2 = \{v \in \mathbb{R}^5 \mid (T - 2Id)^2 v = 0\}$, se sigue

$$(A - 2Id)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

luego

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde

$$W_2 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0) \rangle$$

Hemos completar la base de W_1 para obtener una base de W_2 .

Finalmente

$$W_3 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0) \rangle,$$

Recuerde que los espacios no pueden ser iguales teorema 30, por ello la dimensión debe aumentar, por lo cual $W_3 = \mathbb{R}^5$,

$$B = \{(0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0)\}$$

Sabemos por el corolario anterior que la matriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & - & - & - \\ 0 & 2 & - & - & - \\ 0 & 0 & 2 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 2 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Veamos ahora los coeficiente que falta

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \\ &= -4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Así

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observación: En la proxima sección veremos el Teorema Jordan, la dimensión de W_1 nos indica cuantos bloques tiene asociado este valor propio, ya que cada bloque tiene asociado un valor propio.

Teorema 34 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y P_A el polinomio característico

A es diagonalizable si y sólo si P_A tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ y la dimensión del espacio propio es igual a la multiplicidad de la raíz en P_A .

Demostración: Supongamos que P_A tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$, luego ϕ_A tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ aplicando el teorema 27, tenemos que $\mathbb{K}^n = \oplus V_i$ correspondiente, si B_i es base de V_i , entonces

$$B = \bigcup_{i=1}^r B_i,$$

es una base de V , al mantener el orden de los elementos de la base se obtiene que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & A_r \end{bmatrix}$$

Notemos que por teorema 30 tercera parte, una vez obtenida la dimension correcta, luego se mantiene

$$\begin{aligned} P_T &= |A_1 - xId| \cdot |A_2 - xId| \cdots |A_r - xId| \\ &= P_{A_1} \cdot P_{A_2} \cdots P_{A_r} \end{aligned}$$

Por lo tanto P_{A_i} es el polinomio característico y $(x - \alpha_i)$ es el polinomio minimal asociado $T|_{V_i}$.

El recíproco es inmediato. $\square$

Teorema 35 Sean $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ y P_T el polinomio característico

T es diagonalizable si y sólo si P_T tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ y la dimensión del espacio propio es igual a la multiplicidad de la raíz en P_T .

Ejemplo 12 Sea $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 0, 1), (1, 1, 2, 1, 2)\}$ base de $\mathbb{U}$ y T una transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $P_T(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4)$

Determine una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{U}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal

Solución: Los valores propios asociados a T son 1, 2, 4, para determine los espacios propios, consideremos $u_1 = (1, 0, 0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 2, 2)$, $u_3 = (1, 2, 1, 0, 1)$, $u_4 = (1, 1, 2, 1, 2)$.

$$1. V_1 = \{v \in \mathbb{U} \mid ([T]_{\mathcal{C}} - Id)[u]_{\mathcal{C}} = 0\},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$[u]_{\mathcal{C}} = a \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Con lo cual tenemos que

$$V_1 = \langle 3u_1 - 2u_2, u_3 - 2u_4 \rangle = \langle (1, 0, -2, -1, -1), (1, 3, 0, -1, 0) \rangle$$

$$2. V_2 = \{v \in \mathbb{U} \mid ([T]_{\mathcal{C}} - 2Id)[u]_{\mathcal{C}} = 0\},$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así

$$[u]_{\mathcal{C}} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De lo cual tenemos que

$$V_2 = \langle u_1 - u_2 \rangle = \langle (0, 0, -1, -1, -1) \rangle$$

$$3. V_4 = \{v \in \mathbb{U} \mid ([T] - 4Id)[u]_{\mathcal{C}} = 0\},$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$[u]_{\mathcal{C}} = d \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

De lo cual tenemos que

$$V_4 = \langle 3u_1 - 3u_2 - 2y_3 - 2u_4 \rangle = \langle (-4, -6, -9, -5, -9) \rangle$$

Luego es diagonalizable y la base es:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -2, -1, -1), (1, 3, 0, -1, 0), (0, 0, -1, -1, -1), (-4, -6, -9, -5, -9)\}$$

y se obtiene que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2.1. Ejercicios

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ y $p(x) = (x-3)(x-1)$.

a) Calcular $p(A)$ y $p(C)$.

b) Determinar el valor “ a ” tal que $p(B) = 0$

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, y $p(x) = (x-4)(x-1)$.

a) Calcular $p(A)$

b) Calcular A^2BA^2

c) Determinar el valor “ a ” tal que $p(B) = 0$

3. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcular el Polinomio Característico.

b) Determinar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$, tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

c) Calcular $T^n(1-x^2)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

4. Sea $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ $T(x, y, z) = (x+z, x+y, y+z)$ una transformación lineal de $\mathbb{C}$ espacios vectoriales. Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar

5. Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal y

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ base ordenada de $M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que el Polinomio Característico es $P_T(x) = x(x-4)(x-1)^2$

Determinar una base $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$, tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sea diagonal

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar

7. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x-x^2\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$, tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar.

8. Sea $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 2), (1, 2, 1, 0), (1, 1, 2, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^4$ y T una transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $P_T(x) = (x-1)^2(x-2)(x-4)$

Determine una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal

9. Sea $\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 5z = 0\}$ un espacio vectorial, y

$$\begin{array}{ccc} T : & \mathbb{U} & \rightarrow \mathbb{U} \\ & (x, y, z) & \rightsquigarrow (4y - 3z - 2x, 3z - y, -y + z) \end{array}$$

una transformación lineal. Determinar si T es diagonalizable.

10. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, A^t su transpuesta. Demostrar que $\phi_A(x) = \phi_{A^t}(x)$.
11. Sea $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, con A invertible. Demostrar que $\phi_{AB}(x) = \phi_{BA}(x)$.
12. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, singulares tal que

$$\phi_{AB}(x) \neq \phi_{BA}(x).$$

13. En $M_3(\mathbb{K})$. Determine las funciones coeficiente del polinomio característico.
14. Demostrar Si A es diagonalizable y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces $A - \alpha I$ es diagonalizable.
15. Clasificar todas las matrices 3×3 similares
(Def: A es similar a B si y sólo si existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP = B$).
16. Diagonalizar las siguientes matrices, si es posible

$$1. \begin{bmatrix} 0 & 8 & -3 & -10 & -7 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -6 & 4 & 8 & 5 & -12 \\ -1 & 8 & -3 & -9 & -7 & 16 \\ -1 & 6 & -3 & -8 & -4 & 12 \\ -1 & 7 & -3 & -9 & -6 & 15 \end{bmatrix} \quad 2. \begin{bmatrix} -4 & 24 & -9 & -30 & -21 & 48 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -3 & 6 \\ 3 & -20 & 10 & 28 & 19 & -42 \\ -3 & 26 & -11 & -35 & -25 & 54 \\ -3 & 16 & -7 & -20 & -12 & 30 \\ -3 & 21 & -9 & -27 & -18 & 41 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 & 6 & 4 & -10 \\ -2 & 9 & -4 & -12 & -8 & 18 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & 7 & 4 & -10 \\ 2 & -12 & 6 & 16 & 11 & -24 \\ 2 & -14 & 6 & 18 & 12 & -27 \end{bmatrix} \quad 4. \begin{bmatrix} 3 & -16 & 6 & 20 & 14 & -32 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ -2 & 14 & -7 & -20 & -14 & 30 \\ 2 & -18 & 8 & 25 & 18 & -38 \\ 2 & -10 & 4 & 12 & 7 & -18 \\ 2 & -14 & 6 & 18 & 12 & -27 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 4 & -16 & 7 & 22 & 15 & -32 \\ 0 & 6 & -2 & -5 & -3 & 6 \\ -1 & 4 & 0 & -6 & -5 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 & -6 \\ 1 & -8 & 3 & 10 & 8 & -14 \\ 1 & -7 & 3 & 9 & 6 & -11 \end{bmatrix} \quad 6. \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 & 8 & 5 & -10 \\ -2 & 16 & -6 & -19 & -13 & 28 \\ 1 & -8 & 6 & 12 & 9 & -18 \\ -1 & 10 & -5 & -13 & -11 & 22 \\ 1 & -10 & 5 & 14 & 12 & -20 \\ 1 & -7 & 3 & 9 & 6 & -11 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 & -9 & -6 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 5 & 11 & 8 & -17 \\ -1 & 8 & -4 & -10 & -8 & 17 \\ -1 & 6 & -2 & -7 & -3 & 11 \\ -1 & 7 & -3 & -9 & -6 & 15 \end{bmatrix} \quad 8. \begin{bmatrix} -2 & 14 & -5 & -16 & -11 & 26 \\ 2 & -8 & 4 & 11 & 7 & -16 \\ 1 & -10 & 6 & 14 & 9 & -20 \\ -1 & 16 & -7 & -21 & -15 & 32 \\ -3 & 16 & -7 & -20 & -12 & 30 \\ -3 & 21 & -9 & -27 & -18 & 41 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 10. \begin{bmatrix} 3 & -24 & 10 & 32 & 22 & -48 \\ 0 & 3 & -2 & -4 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & -3 & -10 & -6 & 16 \\ 2 & -8 & 2 & 9 & 6 & -16 \\ 2 & -16 & 8 & 22 & 15 & -32 \\ 2 & -14 & 6 & 18 & 12 & -27 \end{bmatrix}$$

$$11. \begin{bmatrix} 0 & 12 & -5 & -18 & -13 & 28 \\ -4 & 22 & -8 & -27 & -19 & 42 \\ 3 & -10 & 4 & 12 & 7 & -20 \\ -3 & 8 & -1 & -7 & -5 & 16 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 3 & 9 & 6 & -11 \end{bmatrix} \quad 12. \begin{bmatrix} -4 & 36 & -15 & -46 & -31 & 68 \\ 4 & -26 & 12 & 35 & 23 & -50 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ -5 & 38 & -19 & -52 & -36 & 76 \\ -5 & 35 & -15 & -45 & -30 & 67 \end{bmatrix}$$

2.2.2. Problemas Propuestos

Problema 1.

Si A es una matriz diagonalizable de $M_n(\mathbb{R})$. Demostrar que A^2 es diagonalizable

Problema 2.

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = (2a + 2b + c)x^2 + (a + 3b + c)x + (-2a - 4b - c)$$

Diagonalizar T .

Problema 3.

Sea $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$ es una transformación lineal de $\mathbb{C}$ espacios vectoriales.

Diagonalizar T si es posible.

Problema 4.

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar.

Problema 5.

Sea $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ una transformación lineal de $\mathbb{C}$ espacios vectoriales y $\mathcal{C}$ base canónica de $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalizar T si es posible.

Problema 6.

Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y T_{α} en endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ tal que 1 es un valor propio.

$$[T_{\alpha}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

- (a) Determinar $P_{T_{\alpha}}(x)$ (Polinomio Característico)
- (b) Para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, el endomorfismo T_{α} es diagonalizable.
- (c) Para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, el endomorfismo T_{α} es triangularizable.

Problema 7.

Sea A una matriz simétrica de $M_2(\mathbb{R})$. Demostrar que A es diagonalizable

Problema 8.

Determinar si es verdadero o falso la afirmación

Si A^2 es una matriz diagonalizable de $M_n(\mathbb{R})$ entonces A es diagonalizable

Problema 9.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, de modo que existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ y $P^{-1}BP$ son matrices diagonales entonces

Demostrar que $AB = BA$

Problema 10.

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$

¿Existe alguna relación entre $\phi_A(x)$ y $\phi_{A^2}(x)$?

2.3. Formas de Jordan

Una matriz de Jordan es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_k(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

donde

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} \in M_{n_i}(\mathbb{K})$$

son los bloques de Jordan

Definición 13 Sea $T \in \text{End}(V)$, un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{K}$.

Se dice que existe una **Base de Jordan** asociada a T si y sólo si la matriz de T asociada a esta base es una matriz de Jordan.

Ejemplo 13 La siguiente matriz, es una matriz de Jordan con 4 bloques

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observación: Por el teorema (30), se tiene que dada una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$, tal que el polinomio minimal se factoriza $\phi_T = \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{n_i}$ y definimos los subespacios

$$V_i = \{v \in V \mid (T - \alpha_i Id)^{n_i} v = 0\},$$

y cada T_i esta dado por

$$T_i = T|_{V_i} : V_i \longrightarrow V_i; \quad \phi_{T_i} = (x - \alpha_i)^{n_i}; \quad \phi_{T_i - \alpha_i Id} = y^{n_i},$$

entonces

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$$

Definición 14

1. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, se dice que A es **nilpotente** de índice k si y sólo si

$$\phi_A(x) = x^k.$$

2. Sea $T \in \text{End}(V)$, se dice que T es **nilpotente** de índice k si y sólo si

$$\phi_T(x) = x^k.$$

Propiedad 36 Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $T \in \text{End}(V)$ es nilpotente, tal que $\dim V = m$ entonces

$$P_A(x) = x^n; \quad P_T(x) = x^m$$

Ejemplo 14 Sea $T \in \text{End}(V)$, tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, además $\phi_T(x) = x^5$, tenemos:

$$T(v_5) = v_4 = T(v_5)$$

$$T(v_4) = v_3 = T^2(v_5)$$

$$T(v_3) = v_2 = T^3(v_5)$$

$$T(v_2) = v_1 = T^4(v_5)$$

$$T(v_1) = 0 = T^5(v_5)$$

luego, reemplazando obtenemos que la base se puede reescribir del siguiente modo

$$B = \{T^4(v_5), T^3(v_5), T^2(v_5), T(v_5), v_5\}$$

Ejemplo 15 En el ejemplo (11), tenemos que

$$W_1 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1) \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$$

$$W_2 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0) \rangle = \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$$

$$W_3 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0) \rangle$$

La dimensión de los espacios lo podemos escribir o anotar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} W_1 &: * * \\ W_2 &: * * * * \\ W_3 &: * * * * * \end{aligned}$$

Y en esta nueva base $B = \{T(v), v, T^2(e_1), T(e_1), e_1\}$, obtenemos

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es decir, tenemos dos bloques uno de 3×3 y otro de 2×2 .

Para determinar el elemento que falta definir, debemos tener presente

$$W_1 = \langle w'_1, T^2(e_1) \rangle, \quad W_2 = \langle w'_1, T^2(e_1), w'_3, T(e_1) \rangle, \quad W_3 = \langle w_1, w_2, w_3, w_4, e_1 \rangle$$

En W_1 extendemos a una base y obtenemos w'_1 y realizando algo similar en W_2 se obtiene $v = w'_3$ el elemento deseado.

Ahora veremos que lo anterior, siempre es posible realizarlo.

Espacio Cociente

Sea $W \leq V$, se define la relación de equivalencia en V por:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in W,$$

luego la clase de un vector esta dada por

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{y \in V \mid x \sim y\} \\ &= \{y \in V \mid x - y \in W\} \\ &= \{y \in V \mid x - y = w\} \\ &= \{y \in V \mid x - w = y\} \\ &= x + W \end{aligned}$$

Note que dos elementos son iguales, cuando la diferencia de ellos pertenece al subespacio

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x - y \in W$$

De esta manera tenemos que el conjunto cociente que esta constituido por

$$V/W = \{x + W \mid x \in V\}.$$

Además el conjunto cociente tiene una estructura natural de espacio vectorial, dado por:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}, \quad \alpha \overline{x} = \overline{\alpha x}.$$

Ejemplo 16 Sea $\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 5z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$, en este caso tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{(a, b, c)} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a, y - b, z - c) \in \mathbb{U}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a) - 3(y - b) + 5(z - c) = 0\} \end{aligned}$$

es un plano paralelos a $\mathbb{U}$ que contiene al punto (a, b, c) .

Las operaciones están dada por:

$$\overline{(a, b, c)} + \overline{(f, g, h)} = \overline{(a + f, b + g, c + h)}; \quad \alpha \overline{(a, b, c)} = \overline{(\alpha a, \alpha b, \alpha c)}$$

De forma similar obtenemos que, el conjunto $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s\}$ es linealmente independiente en V/W , si y sólo si

$$\sum \alpha_i \bar{v}_i = \bar{0} \text{ entonces, } \alpha_i = 0, \text{ para todo } i.$$

Propiedad 37 Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita entonces

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

Definición 15 Se dice que $B = \{v_1, \dots, v_s\} \subset V$ es **linealmente independiente módulo** W si y sólo si

$$\sum \alpha_i v_i \in W, \text{ entonces, } \alpha_i = 0, \text{ para todo } i.$$

Propiedad 38 Sea $T \in \text{End}(V)$ nilpotente de índice k y $W_{k-1} = \ker(T^{k-1})$.

Si el conjunto $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ es linealmente independientes en V/W_{k-1} , entonces

$$A = \{v_1, Tv_1, \dots, T^{k-1}v_1, v_2, \dots, T^{k-1}v_2, \dots, v_m, \dots, T^{k-1}v_m\}$$

es linealmente independiente en V .

Demostración: El conjunto $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ en V/W_{k-1} es linealmente independiente, entonces se tiene que

$$\sum \alpha_i (v_i + W_{k-1}) = 0 \Leftrightarrow \sum \alpha_i v_i \in W_{k-1} \Leftrightarrow (\forall i)(\alpha_i = 0)$$

Veamos que A es linealmente independiente para ello consideremos una combinación lineal

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, k-1}} c_{ij} T^j v_i = 0$$

Aplicado T^{k-1} , se tiene

$$\sum_{i,j} c_{ij} T^{k-1+j}(v_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} c_{i0} T^{k-1} v_i = 0$$

así

$$T^{k-1} \left(\sum_i c_{i0} v_i \right) = 0.$$

Luego $\sum c_{i0} v_i \in W_{k-1}$, por lo tanto

$$c_{i0} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Ahora aplicando T^{k-2} , y con argumento similar, obtenemos $c_{i1} = 0$.

Análogamente se tiene que los otros $c_{ij} = 0$ para todo j y para todo i . □

Corolario 39 Sea $T \in \text{End}(V)$ nilpotente de índice k y $W_{k-1} = \ker(T^{k-1})$.

Si $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ es linealmente independientes en V/W_{k-1} ,

$$U = \langle \{v_1, T v_1, \dots, T^{k-1} v_1, v_2, \dots, T^{k-1} v_2, \dots, v_m, \dots, T^{k-1} v_m\} \rangle$$

entonces $T(U) \subseteq U$

Demostración: Sea $u \in U$, luego

$$u = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, k-1}} c_{ij} T^j v_i$$

Aplicado T , se tiene

$$T(u) = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, k-1}} c_{ij} T^{j+1}(v_i) = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ t=2, \dots, k-1}} c_{i(t-1)} T^t(v_i) \in U$$

□

Observación: Note que hemos demostrado que cada bloque es estable, y que el número de ellos de longitud maxima es igual a

$$\dim V - \dim \ker(T^{k-1})$$

Corolario 40 Sea $T \in \text{End}(V)$ nilpotente de índice k y $W_{k-1} = \ker(T^{k-1})$, $W_{k-2} = \ker(T^{k-2})$.

Si $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ es linealmente independientes en el espacio cociente V/W_{k-1} , entonces $\{T v_1 + W_{k-2}, \dots, T v_m + W_{k-2}\}$ es linealmente independientes en el espacio cociente W_{k-1}/W_{k-2} .

Demostración: Por teorema 30, se tiene que $T(V) = T(W_k) \subset W_{k-1}$, luego tenemos que

$$\{Tv_1 + W_{k-2}, \dots, Tv_m + W_{k-2}\} \subset W_{k-1}/W_{k-2}.$$

Además $T : W_{k-1} \longrightarrow W_{k-1}$, es una transformación lineal de nilpotente de índice $k-1$ y $W_{k-2} = \{v \in W_{k-1} \mid T^{k-2}(v) = 0\}$

Consideremos la siguiente combinación lineal

$$\sum_{i=0}^m c_i(Tv_i + W_{k-2}) = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m c_i Tv_i &\in W_{k-2} \\ T^{k-2} \left(\sum_{i=0}^m c_i Tv_i \right) &= 0 \\ T^{k-2} \left(T \left(\sum_{i=0}^m c_i v_i \right) \right) &= 0 \\ T^{k-1} \left(\sum_{i=0}^m c_i v_i \right) &= 0. \end{aligned}$$

Luego $\sum c_i v_i \in W_{k-1}$, pero por hipótesis $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ es linealmente independientes, luego $c_i = 0$. $\square$

Observación: Notemos que si $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ es linealmente independientes W_k/W_{k-1} , en forma recursiva se obtiene

$$\{T^j(v_1) + W_{k-j-1}, \dots, T^j(v_m) + W_{k-j-1}\} \text{ es linealmente independientes } W_{k-j}/W_{k-j-1}$$

Propiedad 41 Sea $T \in \text{End}(V)$ nilpotente de índice k y $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ linealmente independiente en V/W_{k-1} , y $W_{k-1} = \ker(T^{k-1})$.

Si $U = \langle \{T^i v_j \mid 1 \leq j \leq m, 0 \leq i \leq k-1\} \rangle$, entonces existe un subespacio $S \leq V$ tal que

$$V = U \oplus S, \quad T(S) \subseteq S$$

Demostración: Por inducción en la dimensión de V . Supongamos válida la proposición para espacios de dimensión menor que r .

Sea $\{w_1, \dots, w_r\}$ una base de W , y como $\{v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente módulo W_{k-1} , entonces $\{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r\}$ es linealmente independiente en V .

Luego existen elementos de V tales que $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+p}, w_1, \dots, w_r\}$ es una base de V .

Además se tiene que $T \in \text{End}(W_{k-1})$ nilpotente de índice $k-1$ y

$$\{Tv_1 + W_{k-2}, \dots, Tv_m + W_{k-2}\} \text{ es linealmente independiente en } W_{k-1}/W_{k-2}$$

Con esta notaciones definimos

$$U_1 = \langle \{T^i v_j \mid 1 \leq j \leq m+p, 1 \leq i \leq k-1\} \rangle \leq W_{k-1}$$

Por hipótesis de inducción tenemos que existe S_1 tal que

$$W_{k-1} = U_1 \oplus S_1 \quad T(S_1) \subseteq S_1,$$

además

$$V = \langle v_1, \dots, v_{m+p} \rangle \oplus W_{k-1}.$$

de otro modo tenemos

$$\begin{aligned} V &= \langle v_1, \dots, v_{m+p} \rangle \oplus U_1 \oplus S_1 \\ &= \langle v_1, \dots, v_{m+p} \rangle \oplus \langle \{T^i v_j \mid \begin{smallmatrix} 1 \leq j \leq m+p, \\ 1 \leq i \leq k-1 \end{smallmatrix} \} \rangle \oplus S_1 \\ &= \langle \{T^i v_j \mid \begin{smallmatrix} 1 \leq j \leq m+p, \\ 0 \leq i \leq k-1 \end{smallmatrix} \} \rangle \oplus S_1 \\ &= \langle \{T^i v_j \mid \begin{smallmatrix} 1 \leq j \leq m, \\ 0 \leq i \leq k-1 \end{smallmatrix} \} \rangle \oplus \langle \{T^i v_j \mid \begin{smallmatrix} m+1 \leq j \leq m+p, \\ 0 \leq i \leq k-1 \end{smallmatrix} \} \rangle \oplus S_1 \\ &= \langle \{T^i v_j \mid \begin{smallmatrix} 1 \leq j \leq m, \\ 0 \leq i \leq k-1 \end{smallmatrix} \} \rangle \oplus S \\ &= U \oplus S \end{aligned}$$

donde

$$S = \langle \{T^i v_j \mid \begin{smallmatrix} m+1 \leq j \leq m+p, \\ 0 \leq i \leq k-1 \end{smallmatrix} \} \rangle \oplus S_1$$

y cada uno de los sumando es estable, luego S es estable. $\square$

Teorema 42 Sea $T \in \text{End}(V)$, nilpotente de índice k , entonces existe un único entero positivo p tal que:

1. Existen p enteros positivos k_i que cumplen con

$$k = k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p,$$

$$\text{además } \sum_{i=1}^p k_i = \dim V$$

2. Existen p vectores v_i en V tales que

$$T^{k_i} v_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

y además

$$B = \left\{ \begin{array}{cccc} T^{k_1-1} v_1, & \dots, & T v_1, & v_1, \\ T^{k_2-1} v_2, & \dots, & T v_2, & v_2, \\ \vdots & & & \\ T^{k_p-1} v_p & \dots, & T v_p & v_p \end{array} \right\}$$

es una base de V .

Demostración: La demostración es por inducción en el índice de nilpotencia,

Sea $W_t = \ker(T^t)$, y $B = \{w_1, \dots, w_r\}$ una base de W_{k-1} .

Luego escogemos vectores de modo que

$$\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\},$$

es una base de V .

De lo cual, se tiene que el conjunto

$$\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_s + W_{k-1}\}$$

es linealmente independiente en V/W_{k-1} .

Si $U = \left\langle \left\{ T^i v_j \mid \begin{array}{l} 1 \leq j \leq s, \\ 0 \leq i \leq k-1 \end{array} \right\} \right\rangle$, luego por los resultados anteriores, se tiene que existe S tal que

$$V = W_k = U \oplus S \quad T(S) \subseteq S.$$

Además $T : S \rightarrow S$, es nilpotente de índice menor, luego hemos disminuido la dimension del espacio y construido s bloque de Jordan de longitud k , por hipótesis de inducción sobre el espacio S concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 17 Aplicaremos el teorema en el ejemplo (11), en primer lugar la transformación lineal T no es nilpotente, pero $T - 2Id$, si es nilpotente, ya que $P_T(x) = (x - 2)^5$, luego $P_{T-2Id}(x) = x^5$, donde

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = A$$

luego

1. $V_2^{(1)} = W_1 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1) \rangle$
2. $V_2^{(2)} = W_2 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0) \rangle$
3. $V_2^{(3)} = W_3 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0) \rangle$

Note que

$$V_2^{(3)} = V_2^{(2)} \oplus \langle e_1 \rangle$$

Sobre la matriz nilpotente hay que trabajar:

$$(T - 2Id)^1(e_1) = (-1, -4, -2, -3, -8), \quad (T - 2Id)^2(e_1) = (0, 0, -1, -1, -1)$$

Luego tenemos que

$$V_2^{(3)} = \langle \{(A - 2Id)^2 e_1, (A - 2Id)e_1, e_1\} \rangle \oplus S, \quad (T - 2Id)(S) \subset S$$

Observación: Para determinar los vectores que falta, debemos tener presente que necesitamos reordenar y reemplazar algunos vectores en las bases correspondientes, para ello recordemos el siguiente resultado.

Si $\vec{0} \neq w \in V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, tal que $w = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$, entonces existe $\alpha_{i_0} \neq 0$, de lo cual obtenemos

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w, v_1, \widehat{v_{i_0}}, \dots, v_r \rangle$$

donde $\widehat{v_{i_0}}$, indica que el vector se omitido

Continuemos con el ejemplo, ahora cambiaremos las bases de los espacio $V_i^{(i)}$

Como $(T - 2Id)^2(e_1) \in V_2^{(1)}$, escribimos $(T - 2Id)^2(e_1)$ en combinación lineal de la base de $V_2^{(1)}$

$$(0, 0, -1, -1, -1) = -1(0, -1, 1, 1, 0) - 1(0, 1, 0, 0, 1)$$

luego

$$V_2^{(1)} = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 0, -1, -1, -1) \rangle$$

Como $(A - 2Id)(e_1) \in V_2^{(2)}$, escribimos ahora $(A - 2Id)(e_1)$ en combinación lineal de la base de $V_2^{(2)}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$V_2^{(2)} = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 0, -1, -1, -1), (-1, 0, 1, 0, 0), (-1, -4, -2, -3, -8) \rangle$$

Por último tenemos a:

$$V_2^{(3)} = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 0, -1, -1, -1), (-1, 0, 1, 0, 0), (-1, -4, -2, -3, -8), (1, 0, 0, 0, 0) \rangle$$

Notemos que debemos escoger otro bloque, pero hemos escogido todo lo posible en $V_2^{(3)}$, ya que existía en la base un solo un vector que no pertenecía a la base de $V_2^{(2)}$.

Si marcamos con color rojo los vectores obtenido, nos percatamos que en la base de $V_2^{(2)}$, existe un solo vector que no esta en la base de $V_2^{(1)}$

$$\begin{array}{lcl} V_2^{(1)} : & * & * \\ V_2^{(2)} : & * & * \quad * \quad * \\ V_2^{(3)} : & * & * \quad * \quad * \quad * \end{array}$$

$$(-1, 0, 1, 0, 0) \in V_2^{(2)}, \quad \text{donde} \quad (T - 2Id)(-1, 0, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0, 1)$$

Como no hay mas vectores hemos concluido la formación de la base.

$$V_2^{(3)} = \langle (0, 0, -1, -1, -1), (-1, -4, -2, -3, -8), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0, 0) \rangle$$

Es decir la base es:

$$B = \{(0, 0, -1, -1, -1), (-1, -4, -2, -3, -8), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0, 0)\}$$

Comprobemos que la base es la que buscamos, para ello,

$$1. A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2. A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -5 \\ -7 \\ -17 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$3. A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4. A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5. A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De este modo tenemos que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema 43 Sea $T \in \text{End}(V)$, con V espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$

Existe una base de Jordan para T si y sólo si $P_T(x)$ tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$

La demostración es inmediata aplicando los resultados anteriores, si

$$P_T(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \dots (x - \alpha_p)^{m_p},$$

luego

$$\phi_T(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} (x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x - \alpha_p)^{n_p},$$

por teorema 30 tenemos que

$$V = \oplus_i V_{\alpha_i}, \text{ donde } V_{\alpha_i} = \{v \in V \mid Tv = \alpha_i v\}$$

Luego $T - \alpha_i Id : V_{\alpha_i} \rightarrow V_{\alpha_i}$ es nilpotente de índice n_i y $\dim V_{\alpha_i} = m_i$, en cada uno de estos espacio se aplica el teorema 42, obteniendo finalmente la base

2.3.1. Ejercicios

1. Sea $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 + x_1)$.
Determinar el polinomio característico de T y el polinomio minimal.
Determine una base de Jordan.
2. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y T_t en endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T_t]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -t \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

- a) Determinar los posibles formas de Jordan de T_t de acuerdo a valor de t .
 - b) Encuentre una base de Jordan para T_t cuando sea triangular y no diagonal
3. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y T en endomorfismos de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Encuentre una base de Jordan para T .

4. Dado $T \in \text{End}(\mathbb{C}^6)$ y tenemos que $P_T(x) = (x-5)^2(x+3)^4$, además $\dim \ker(T-5Id) = 1$, $\dim \ker(T+3Id) = 2$, $\dim \ker(T+3Id)^2 = 3$. Determinar la forma de la matriz de Jordan para T .
5. Dado $T \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$. Determinar una base J de Jordan de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_J$ sea una matriz de Jordan .

Sabiendo que la matriz de T en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y su polinomio característico es $P_T(x) = (x - 1)^4$.

6. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^7$ y T en endomorfismos de $\mathbb{R}^7$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

además, se tiene que

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}} - Id &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & ([T]_{\mathcal{C}} - Id)^2 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ ([T]_{\mathcal{C}} - Id)^3 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Determinar una base de Jordan

7. Dado $T \in \text{End}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$, tal que $\mathcal{D} = \{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_2 + e_4\}$

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & -3 & 19 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar una base $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_{\mathcal{J}}$ sea una matriz de Jordan.

8. Sea D el operador derivada de los polinomios de grado menor o igual que n (es decir $D \in \text{End}(\mathbb{K}_n[x])$)

- a) Demostrar que D es operador nilpotente
- b) ¿Cual es su índice?
- c) Determinar una base de Jordan

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre K , tal que $V = W_1 \oplus W_2$, y la $\dim W_1 = m$, además definimos P de V en W_1 por $P(w_1 + w_2) = w_1$. Calcular el polinomio característico y polinomio minimal de P (proyector).

10. Sea $\sigma \in S_3 = \{\sigma : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}$ definimos la transformación lineal T_σ de $\mathbb{K}^3$ en $\mathbb{K}^3$ por

$$T_\sigma(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) = a_1e_{\sigma(1)} + a_2e_{\sigma(2)} + a_3e_{\sigma(3)}$$

T_σ es diagonalizable para todo $\sigma \in S_3$?

11. Sea $A \in M_n(C)$ nilpotente, se define $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

- a) Demostrar que $\text{traza}(A) = 0$.
- b) Demostrar $\det(\exp(A)) = 1 = \exp(\text{traza}(A))$ (Ayuda: escoger base de Jordan).

12. Determinar si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones:

- a) Si A, B son diagonalizables entonces AB es diagonalizable.
- b) Si A es diagonalizable entonces $A - D$ (D diagonal) es diagonalizable.
- c) Si A es diagonalizable entonces A^2 es diagonalizable.

13. Sean $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Determine $P \in M_2(K)$ invertible tal que $P^{-1}AP$ y $P^{-1}BP$ son diagonales.

14. Sea A matriz nilpotente de índice $k > 2$. Demostrar que

$$\dim \ker(A) < \dim \ker(A^2).$$

15. Sea A nilpotente de índice mayor a 3. Demostrar directamente que

$$\dim \ker A^2 \leq 2 \dim \ker A$$

16. Para cada una de las siguientes matrices determinar la forma de Jordan

$$\begin{aligned}
a) & \begin{bmatrix} -34 & 17 & -43 & 66 & 104 & -134 & 9 & 33 & -18 \\ 77 & -37 & 92 & -140 & -225 & 287 & 0 & 0 & 0 \\ 82 & -40 & 101 & -152 & -242 & 310 & 9 & 33 & -18 \\ 151 & -74 & 181 & -275 & -443 & 565 & 6 & 22 & -12 \\ 45 & -22 & 54 & -82 & -131 & 168 & 3 & 11 & -6 \\ 102 & -50 & 122 & -186 & -299 & 382 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 9 \end{bmatrix} \\
b) & \begin{bmatrix} -81 & 40 & -101 & 154 & 243 & -313 & 9 & 33 & -18 \\ 59 & -28 & 70 & -106 & -173 & 219 & 0 & 0 & 0 \\ 52 & -25 & 66 & -98 & -155 & 199 & 9 & 33 & -18 \\ 122 & -60 & 146 & -221 & -359 & 457 & 6 & 22 & -12 \\ 26 & -13 & 31 & -47 & -75 & 97 & 3 & 11 & -6 \\ 93 & -46 & 111 & -169 & -273 & 349 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 9 \end{bmatrix} \\
c) & \begin{bmatrix} 53 & -26 & 62 & -94 & -151 & 193 & 9 & 33 & -18 \\ 108 & -52 & 130 & -198 & -318 & 406 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 7 & -15 & 26 & 41 & -53 & 9 & 33 & -18 \\ 214 & -105 & 258 & -391 & -630 & 804 & 6 & 22 & -12 \\ 53 & -26 & 64 & -97 & -155 & 199 & 3 & 11 & -6 \\ 151 & -74 & 182 & -277 & -445 & 569 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 10 \end{bmatrix} \\
d) & \begin{bmatrix} 53 & -26 & 62 & -94 & -151 & 193 & 9 & 33 & -18 \\ 108 & -52 & 130 & -198 & -318 & 406 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 7 & -15 & 26 & 41 & -53 & 9 & 33 & -18 \\ 214 & -105 & 258 & -391 & -630 & 804 & 6 & 22 & -12 \\ 53 & -26 & 64 & -97 & -155 & 199 & 3 & 11 & -6 \\ 151 & -74 & 182 & -277 & -445 & 569 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 10 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e) & \begin{bmatrix} 6 & -1 & 7 & -11 & -14 & 20 & 9 & 33 & -18 \\ 79 & -37 & 95 & -146 & -230 & 296 & 0 & 0 & 0 \\ 89 & -44 & 108 & -163 & -262 & 334 & 9 & 33 & -18 \\ 198 & -97 & 238 & -363 & -580 & 742 & 6 & 22 & -12 \\ 73 & -36 & 88 & -134 & -214 & 274 & 3 & 11 & -6 \\ 134 & -66 & 161 & -246 & -393 & 503 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 9 \end{bmatrix} \\
f) & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & 6 & 9 & -11 & 9 & 33 & -18 \\ 81 & -39 & 97 & -148 & -238 & 304 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & -19 & 51 & -74 & -119 & 151 & 9 & 33 & -18 \\ 160 & -79 & 192 & -291 & -470 & 600 & 6 & 22 & -12 \\ 26 & -13 & 31 & -47 & -75 & 97 & 3 & 11 & -6 \\ 97 & -48 & 116 & -177 & -285 & 365 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 10 \end{bmatrix} \\
g) & \begin{bmatrix} 43 & -21 & 52 & -79 & -127 & 162 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & -11 & 26 & -40 & -64 & 82 & 0 & 0 & 0 \\ -41 & 20 & -50 & 76 & 12 & -155 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 7 & -17 & 26 & 41 & -53 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & -9 & 23 & -35 & -55 & 71 & -3 & -11 & 6 \\ 10 & -5 & 12 & -18 & -29 & 37 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -7 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2.3.2. Problemas Propuestos

Problema 11.

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = (3a + 2b)x^2 + (-8a + 8b + 2c)x + (12a - 9b - 1c)$$

Hallar una base de Jordan para T si existe.

Problema 12.

Sea D el operador derivada de los polinomios de grado menor o igual que 4, es decir $D \in \text{End}(\mathbb{K}_4[x])$

1. Demostrar que D es operador nilpotente
2. ¿Cual es su índice?

3. Determinar una base de Jordan

Problema 13.

Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y T en endomorfismos de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Encuentre una base de Jordan para T .

Problema 14.

Sea $\mathcal{C} = \{1 - x^2, 2x, 3 - x^4\}$ una base de $\mathbb{U}$ subespacio de $\mathbb{R}_4[x]$ y T en endomorfismos de $\mathbb{U}$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre una base de Jordan para T .

Problema 15.

Sea $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 0, 1), (1, 1, 2, 1, 2)\}$ base de $\mathbb{U}$ y T una transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & -16 \\ -1 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $P_T(x) = (x - 1)^3(x - 2)$

Determine una base de Jordan $\mathcal{B}$ de $\mathbb{U}$ para T

Problema 16.

Sean $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 1, 3), (0, 0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ base ordenada de $\mathbb{U}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

y su polinomio característico es $(x - 1)^4$. Encuentre si existe, una base de Jordan para T .

Problema 17.

Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 96 & -21 & 4 & 4 \\ -21 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y su polinomio característico es $(x-2)^4$. Encuentre si existe, una base de Jordan para T .

Problema 18.

Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1-x, 1+x, 1+x-x^2, x^2+x^3\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y su polinomio característico es $(x-1)^4$. Encuentre si existe, una base de Jordan para T .

Problema 19.

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 2 \\ 0 & 12 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

y sus valores propios son 1 y 2.

Encuentre si existe, una base de Jordan para T .

Problema 20.

Dado $T \in \text{End}(\mathbb{C}^7)$, tal que $P_T(x) = (x-2)^3(x-3)^4$ polinomio característico, y además $\dim \ker(T-2Id) = 2, \dim \ker(T+3Id)^2 > 3$.

Determinar la posibles forma Jordan para T .

Problema 21.

Sea $T \in \text{End}(\mathbb{C}^8)$, tal que $P_T(x) = (x-2)^3(x-3)^5$ polinomio característico, y además $\dim \ker(T-2Id) = 2, \dim \ker(T-3Id)^2 > 3$.

Determinar todas las posibles forma Jordan para T .

Problema 22.

Sea $T \in \text{End}(\mathbb{C}^8)$, tal que $\phi_T(x) = (x+2)(x+1)^3$ polinomio minimal,
y además $\dim \ker(T + Id)^3 = 5$.
Determinar las posibles forma Jordan para T .

Problema 23.

Sea $T \in \text{End}(\mathbb{C}^9)$, tal que $P_T(x) = (x+2)^4(x-3)^5$ polinomio característico,
además $\dim \ker(T + 2Id) = 2$, $\dim \ker(T - 3Id)^2 > 3$.
Determinar las posibles formas de Jordan para T

Problema 24.

Sea $T \in \text{End}(\mathbb{C}^9)$ tal que $P_T(x) = (x-2)^3(x+3)^6$ polinomio característico,
además $\dim \ker(T - 2Id) = 1$, $\dim \ker(T + 3Id)^2 > 4$.
Determinar las posibles formas de Jordan para T

Problema 25.

Sea $T \in \text{End}(\mathbb{C}^9)$ tal que $\phi_T(x) = (x+2)(x+1)^3$ polinomio minimal,
y además $\dim \ker(T + Id)^3 = 6$.
Determinar las posibles forma Jordan para T

Problema 26.

Sea $T \in \text{End}(\mathbb{C}^{10})$, tal que $P_T(x) = (x-2)^4(x-3)^6$ polinomio característico,
y además $\dim \ker(T - 2Id) = 2$, $\dim \ker(T - 3Id)^2 < 4$.
Determinar todas las posibles forma Jordan para T .

Problema 27.

Sean A nilpotente de índice mayor a 3 y $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_r\}$ linealmente independiente en $\ker A^2 \setminus \ker A$.

Demostrar directamente que $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_r\}$ es linealmente independiente en $\ker A$

Problema 28.

Sea T es una endomorfismo nilpotente de índice 3 de V .
Demostrar directamente que

1. $\ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq \ker T^3 = V$.
2. $\ker T \neq \ker T^2 \neq \ker T^3 = V$.

Problema 29.

Determinar si es verdadero o falso la afirmación justifique

1. Si A es una matriz diagonalizable de $M_n(\mathbb{R})$, entonces que A^n es diagonalizable.
2. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ entonces existe P matrices invertible tal que PAP^{-1} es una matriz de Jordan.
3. Sea $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que conmutan y AB es nilpotente entonces A o B es nilpotente.
4. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es nilpotente entonces existe P matrices invertible tal que PAP^{-1} es una matriz de Jordan.
5. Si A es una matriz que es conjugada de matriz de Jordan en $M_n(\mathbb{R})$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A^k es diagonalizable.
6. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es nilpotente entonces existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $P(A - \lambda Id)P^{-1}$ es una matriz de Jordan.
7. Si $E_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz que tiene un 1 en la posición (i, j) y en el resto es cero, entonces es una matriz nilpotente.