Universidad de Valparaíso
CHILE
Tradición Excelencia Innovación

Algebra Multilineal

Daniel Jiménez.

Tercera Versión
2018

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este texto es la continuación natural del libro Algebra Lineal, donde se expusieron los capítulos de matrices, espacio vectorial y transformaciones lineales, mantenemos las notaciones que empleamos y que se supone conocido para el desarrollo de presente texto.

Iniciamos el texto realizando una introducción al álgebra de polinomios, de modo de fundamentar la existencia de una base que proporciona la forma canónica de una transformación lineal, lo cual depende del tipo de cuerpo y las dimensiones de los espacios propios.

El el segundo capitulo se aborda el tema de las formas bi(sesqui)lineal, donde se clasifica estas forma y se encuentran condiciones de modo que la matriz asociada sea diagonal, realizando una sección para tratar el caso particular de los Producto Internos sobre los cuerpos de los números reales o complejos.

Se concluye con el último capítulo dedicado al producto tensorial, antisimétrico y el simétrico.

Capítulo 2

Formas Canónicas

Dada una transformación lineal, determinar su forma canónica significa encontrar una base en la cual la matriz asociada a la transformación lineal sea lo mas simple posible, es decir, sea diagonal, triangular o de Jordan.

En el presente capítulo, se explora cuales son las condiciones para la existencia de esta base y con ello esta forma. Para ello es necesario recordar algunas propiedades del álgebra de polinomio.

2.1. Introducción Polinomios.

En general los polinomios se presenta como expresiones formales en una o en varias variables con coeficiente en algún cuerpos $\mathbb{K}$.

Definición 1 *Sea $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ una función.*

Se dice que f tiene soporte finito, si y sólo si el conjunto

$$f^{-1}(\mathbb{K} - \{0\}) = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f(n) \in \mathbb{K} - \{0\}\}$$

es finito.

Definición 2 *El conjunto de los polinomios se denota por*

$$\mathbb{K}[x] = \{f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ tiene soporte finito}\}$$

Las operaciones suma y el producto en $\mathbb{K}[x]$ están dadas por
Suma: Sea $f, g \in \mathbb{K}[x]$, luego $f + g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$(f + g)(i) := f(i) + g(i).$$

Producto: Sea $f, g \in \mathbb{K}[x]$, luego $fg : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$(fg)(i) = \sum_{t=0}^{i} f(i - t) \cdot g(t).$$

Propiedad 1 *$\mathbb{K}[x]$ con esta suma y con este producto es un anillo conmutativo con unidad. Es decir,*

1. *$(\mathbb{K}[x], +)$ es un grupo abeliano*
2. *$(\mathbb{K}[x], \cdot)$ es un monoide conmutativo*
3. *Distributividad del producto sobre la suma.*

Definición 3 *Sea f un polinomio no nulo, se dice que n es el grado de f si y sólo si*

$$n = gr(f) = deg(f) = max\{f^{-1}(\mathbb{K} - \{0\})\}.$$

Teorema 2 *Sean f y g dos polinomios en $\mathbb{K}[x]$, entonces:*

1. *$f \cdot g = 0 \Leftrightarrow f = 0 \vee g = 0$.*
2. *Si f, g son no nulos, entonces*

$$gr(fg) = gr(f) + gr(g).$$

Función Polinomial: Sea $f \in \mathbb{K}[x]$

1.
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & a & \longmapsto & \sum_{i=0}^{gr(f)} f(i)a^i = f(0) + \sum_{i=1}^{gr(f)} f(i)a^i \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rccl} f: & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto & \sum_{i=0}^{gr(f)} f(i)A^i = f(0)Id + \sum_{i=1}^{gr(f)} f(i)A^i \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rccl} f: & End(V) & \longrightarrow & End(V) \\ & T & \longmapsto & \sum_{i=0}^{gr(f)} f(i)T^i = f(0)Id + \sum_{i=1}^{gr(f)} f(i)T^i \end{array}$$

Notación: Sea $f \in \mathbb{K}[x]$, no nulo entonces denotamos

$$f = \sum_{i=0}^{gr(f)} f(i)x^i$$

Ejemplo 1 *Sea $f = 1 + 3x + x^2 \in \mathbb{R}[x]$, donde*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & i & \longmapsto & f(i) = \begin{cases} 1 & i \in \{0, 2\} \\ 3 & i = 1 \\ 0 & i \notin \{0, 1, 2\} \end{cases} \end{array}$$

1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, *luego*

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$$

2. *Si* $T(x,y) = (3x+y, 4x+3y)$, *luego*

$$\begin{aligned} T^2(x,y) &= T(T(x,y)) \\ &= T(3x+y, 4x+3y) \\ &= (3(3x+y)+(4x+3y), 4(3x+y)+3(4x+3y)) \\ &= (13x+6y, 24x+13y). \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} f(T) &= Id + 3T + T^2 \\ f(T)(x,y) &= Id(x,y) + 3T(x,y) + T^2(x,y) \\ &= (x,y) + 3(3x+y, 4x+3y) + (13x+6y, 24x+13y) \\ &= (23x+9y, 23y+36x) \end{aligned}$$

Propiedad 3 *Si* $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ *entonces*

$$End(V) \simeq M_n(\mathbb{K}),$$

Definición 4 *Sea* f *un polinomio y* $\alpha \in \mathbb{K}$,
α *es una raíz de* f *si y sólo si* $f(\alpha) = 0$

Teorema 4 *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$, $T \in End(V)$, $f, g \in \mathbb{K}[x]$, *entonces*

1. $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$, $(f+g)(T) = f(T) + g(T)$

2. $(fg)(A) = f(A) \cdot g(A)$, $(fg)(T) = f(T) \cdot g(T)$

Demostración:

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \sum_i f(i)A^i \sum_j g(j)A^j \\ &= \sum_{i,j} f(i)g(j)A^{i+j} \\ &= \sum_t \left(\sum_j f(t-j)g(j) \right) A^t \\ &= (fg)(A) \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 5 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces existe un polinomio f en $\mathbb{K}[x]$ no nulo tal que*

$$f(A) = 0.$$

Demostración: Sabemos que la dimensión de las matrices $M_n(\mathbb{K})$ es n^2, luego el conjunto $\{Id, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ es linealmente dependiente (ya que tiene $n^2 + 1$ elementos), es decir existen algún $0 \neq \alpha_i \in \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha_0 + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0,$$

definimos

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n^2} x^{n^2} \in \mathbb{K}[x],$$

y $f(A) = 0$. □

Corolario 6 *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $T \in End(V)$, entonces existe un polinomio f en $\mathbb{K}[x]$ no nulo tal que*

$$f(T) = 0.$$

Propiedad 7 *Sean $f \in \mathbb{R}[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ una raíz de f y $n \in \mathbb{N}^*$ es la multiplicidad de α en f si y sólo si*

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^j f}{dx^j}\right)(\alpha) = f^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j < n \\ f^{(n)}(\alpha) \neq 0. \end{aligned}$$

Observación: La demostración se obtiene usando la siguiente propiedad

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & i & \longmapsto & f(i) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f' = f^{(1)}: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & i & \longmapsto & (i+1)f(i+1) \end{array}$$

De otro modo, tenemos si $f = \sum_{i=0}^{n} f(i)x^i$, entonces

$$f' = \sum_{i=1}^{n} i f(i) x^{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) f(j+1) x^j$$

Si $f, g \in \mathbb{R}[x]$ entonces

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

Teorema 8 *Sean $f, g \in \mathbb{K}[x]$, entonces existen $h, r \in \mathbb{K}[x]$ únicos tales que*

$$f = g \cdot h + r,$$

con $r = 0 \quad \veebar \quad gr(g) > gr(r)$.

Corolario 9 *Sean* $f \in \mathbb{K}[x]$, $\alpha \in \mathbb{K}$
α es una raíz de f si y sólo si existe $h \in \mathbb{K}[x]$ tal que $f = (x - \alpha)h$

Definición 5 *Sea A un anillo conmutativo. Se dice que I es un ideal de A si y sólo si*

1. *Si $g, f \in I$, entonces $g + f \in I$.*

2. *Si $g \in I$, $h \in A$, entonces $gh \in I$.*

Ejemplo 2 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $g \in \mathbb{K}[x]$. Demostrar*

$$\langle g \rangle = \{g \cdot h \mid h \in \mathbb{K}[x]\}.$$

es un ideal de $\mathbb{K}[x]$, llamado ideal generado por g.

Teorema 10 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, entonces todo los ideales de $\mathbb{K}[x]$ están generados por un elemento, es decir*
Si el ideal I es no nulo, entonces existe un único polinomio mónico que lo genera.

Demostración: Sea I un ideal de $\mathbb{K}[x]$ no nulo, luego

$$\begin{array}{rccl} gr: & I - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & f & \longmapsto & gr(f) \end{array}$$

como $Im(gr) \subseteq \mathbb{N}_0$ y es no vacío, luego existe el mínimo, sea $p \in I$, tal que p es mónico y $gr(p) = min(Im(gr))$.

Ahora demostraremos que $\langle p \rangle = I$

La primera contención es inmediata, ya que I es un ideal.

En el otro sentido, sea $f \in I$, luego aplicando teorema 8, tenemos

$$f = p \cdot d + r,$$

donde $r = 0 \quad \veebar \quad gr(p) > gr(r)$, luego

$$f = pd + r \Longleftrightarrow f - pd = r,$$

donde $f \in I$ y $pd \in I$, luego $r \in I$, si $r \neq 0$ es una contradicción.

De este modo se tiene que $r = 0$ y

$$f = pd \subseteq \langle p \rangle$$

La unicidad se obtiene de $I =< p >=< q >$ entonces, existe $f, g \in \mathbb{K}[x]$ tales que $fp = q$, $p = qg$, reemplazando y comparando grado se obtiene la unicidad

$\square$

Propiedad 11 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces $\{f \in \mathbb{K}[x] \mid f(A) = 0\}$ es un ideal de $\mathbb{K}[x]$.*

Demostración:

1. $I = \{f \in \mathbb{K}[x] \mid f(A) = 0\} \neq \phi$, por teorema 5.
2. Sean $f, g \in I$, luego
$$(f \pm g)(A) = f(A) \pm g(A) = 0 \pm 0 = 0.$$
3. Sean $f \in I$ y $h \in \mathbb{K}[x]$, luego
$$(fh)(A) = f(A)h(A) = 0h(A) = 0,$$

□

Corolario 12 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K}) - \{0\}$, entonces existe un único polinómico mónico ϕ_A tal que*
$$\{f \in \mathbb{K}[x] \mid f(A) = 0\} = \langle \phi_A \rangle.$$

Propiedad 13 *Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $T \in End(V))$ no nulo, entonces existe un único polinómico mónico ϕ_T tal que*
$$\{f \in \mathbb{K}[x] \mid f(T) = 0\} = \langle \phi_T \rangle.$$

Definición 6 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K}) - \{0\}$, ϕ_A es llamado el* ***polinomio minimal*** *de A, es decir,*

ϕ_A es el polinomio de grado menor, con coeficiente principal igual a 1 que cumple con $\phi_A(A) = 0$, y todo otro polinomio que anule a la matriz A se puede factorizar, donde uno de los factores es el polinomio minimal.

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $T \in End(V))$ no nulo, ϕ_T es llamado el ***polinomio minimal*** *asociado T, es decir,*

ϕ_T es el polinomio de grado menor, con coeficiente principal igual a 1 que cumple con $\phi_T(T) = 0$, y todo otro polinomio que anule a T se puede factorizar, donde uno de los factores es el polinomio minimal.

Ejemplo 3 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Sea $Id \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $\phi_{Id} = x - 1$*
2. *Sea $\alpha Id \in M_n(\mathbb{R})$ entonces $\phi_{\alpha Id} = x - \alpha$*
3. *Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $\phi_A = (x-1)(x-2)$*

2.2. Diagonalización

Definición 7 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$*

1. *α es un* ***valor propio*** *de A si y sólo si existe $v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$ tal que $A \cdot v^t = \alpha v^t$.*
2. *$v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$ es un* ***vector propio*** *de A si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $A \cdot v^t = \alpha v^t$.*

3. *El* ***espacio propio*** *asociado a* α *es el conjunto*

$$V_\alpha = \{v \in \mathbb{K}^n \ \mid \ A \cdot v^t = \alpha v^t\}.$$

Análogamente la nociones para transformaciones lineales

Definición 8 *Sean* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y* $T \in End(V))$, $\alpha \in \mathbb{K}$

1. α *es un* ***valor propio*** *de* T *si y sólo si existe* $v \in V - \{0\}$ *tal que* $T(v) = \alpha v$.

2. $v \in V - \{0\}$ *es un* ***vector propio*** *de* T *si y sólo si existe* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tal que* $T(v) = \alpha v$.

3. *El* ***espacio propio*** *asociado a* α *es el conjunto*

$$V_\alpha = \{v \in V \ \mid \ T(v) = \alpha v\}.$$

Propiedad 14 *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, *entonces*
α *un valor propio de* A *si y sólo si* α *es una raíz de* ϕ_A.

Demostración: Como $A \cdot v = \alpha v$, notemos por inducción lo siguiente

$$A^2 v^t = A(Av^t) = A(\alpha v^t) = \alpha A v^t = \alpha^2 v^t.$$

además se tiene que

$$A^{n+1} v^t = AA^n v^t = A(\alpha^n v^t) = \alpha^n (Av^t) = \alpha^{n+1} v^t.$$

Por lo tanto $A^n v^t = \alpha^n v^t$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea

$$\phi_A(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i.$$

Veamos ahora la demostración, para ello recordemos que $\phi_A(A) = 0$, evaluando en α tenemos $\phi_A(\alpha) = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i \alpha^i$, además

$$\phi_A(\alpha)(v^t) = \sum_{i=0}^{r} a_i(\alpha^i v^t) = \sum_{i=0}^{r} a_i(A^i v^t) = \left(\sum_{i=0}^{r} a_i A^i\right) v^t = \phi_A(A) \cdot v^t = 0 \cdot v^t = 0$$

es decir,

$$\phi_A(\alpha)(v^t) = 0$$

Como $v \neq 0$, luego $\phi_A(\alpha) = 0$, de lo cual α es una raíz ϕ_A.

El recíproco, sea α es una raíz de ϕ_A, luego

$$\phi_A = (x - \alpha) \cdot h,$$

y

$$\phi_A(A) = (A - \alpha Id)h(A) = 0$$

1. Si $h(A)$ es invertible, entonces
$$A - \alpha Id = 0, \quad \phi_A = x - \alpha,$$
de donde $A = \alpha Id$.

2. Si $h(A)$ no es invertible, notemos que $gr(\phi_A) > gr(h)$, y $h(A) \neq 0$, ya que ϕ_A es el polinomio minimal de A (es decir el menor polinomio que anula a A).

   Luego existe $w \in \mathbb{K}^n$ tal que
$$h(A) \cdot w^t = v^t \neq 0$$
   Reemplazando se tiene que
$$\begin{aligned} \phi_A(A) \cdot w^t &= 0 \\ (A - \alpha Id)(h(A) \cdot w^t) &= 0 \\ (A - \alpha Id)v^t &= 0 \\ Av^t - \alpha v^t &= 0 \\ Av^t &= \alpha v^t. \end{aligned}$$
   De este modo, α es un valor propio de A. □

Corolario 15 *Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T \in End(V))$, $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces α un valor propio de T si y sólo si α es una raíz de ϕ_T.*

Definición 9 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$,*
Se define el **`polinomio característico`** *asociado a una matriz como*
$$P_A = det(A - xId) \in \mathbb{K}[x]$$

Ejemplo 4 *Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.*
Determinar $P_A(x)$ el polinomio característico.

Solución: Reemplazando
$$\begin{aligned} P_A(x) &= \begin{vmatrix} 5-x & -6 & -6 \\ -1 & 4-x & 2 \\ 3 & -6 & -4-x \end{vmatrix} \\ &= -(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) \\ &= -(x-1)(-x^2 + 4x - 4) \\ &= -(x-1)(x-2)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $P_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$.

Observación: En caso de endomorfismo la definición es similar ya que

$$\begin{aligned} det(A - xId) &= det(A - xId)det(P^{-1}P) \\ &= det(P^{-1})det(A - xId)det(P) \\ &= det(P^{-1}(A - xId)P) \\ &= det(P^{-1}AP - xId) \end{aligned}$$

Luego el determinante, no depende de la base, de otro modo es invariante de la base.

Definición 10 *Sean $T \in End(V)$, donde V es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita, y $\mathcal{B}$ una base de V.*

*Se define el **polinomio característico** asociado a una transformación lineal como*

$$P_T(x) = det([T]_{\mathcal{B}} - xId).$$

Ejemplo 5 *Sea*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 4x-2y) \end{array}$$

Determinar el polinomio característico de T.

Consideremos $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{K}^2$, luego

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Donde el polinomio característico es:

$$P_T = det\begin{bmatrix} 1-x & 1 \\ 4 & -2-x \end{bmatrix} = x^2 + x - 6.$$

Observación: En general para una matriz $A \in M_2(\mathbb{K})$, se tiene que

$$P_A = x^2 - tr(A)x + det(A),$$

ya que

$$\begin{aligned} det\begin{bmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{bmatrix} &= (a-x)(d-x) - bc \\ &= ad - ax - dx + x^2 - bc \\ &= x^2 - (a+d)x + (ad - bc) \\ &= x^2 - tr(A)x + det(A). \end{aligned}$$

Ejemplo 6 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que*

$$T(x,y,z) = (z, 3z - y - x, -x + 4y + 2z)$$

Calcular $P_T(x)$ el polinomio característico.

Solución: La matriz asociada es

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} P_T(x) &= \begin{vmatrix} 0-x & 0 & 1 \\ -1 & -1-x & 3 \\ -1 & 4 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= -x[(-1-x)(2-x)-12]+(-4-1-x) \\ &= 14x+x^2-x^3-5-x \\ &= -x^3+x^2+13x-5 \end{aligned}$$

Por lo tanto $P_T(x) = -x^3 + x^2 + 13x - 5$

Teorema 16 (Cayley- Hamilton) *Sea T un endomorfismo sobre un espacio de dimension finita, entonces*

$$P_T(T) = 0$$

Demostración: Sea T un endomorfismo sobre un espacio de dimension n y $A = [T]_{\mathcal{B}}$ la matriz asociada en alguna base del espacio.

Luego tenemos que $P_A(x) = det(A - xId_n) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ Además $B(x) = adj(A - xId_n)$. Cada coeficiente de $B(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a $n-1$, de este modo podemos descomponer la matriz del siguiente manera

$$B(x) = D_{n-1}x^{n-1} + D_{n-2}x^{n-2} + \ldots + D_1 x + D_0$$

Recordando la propiedad de la matriz adjunta tenemos que

$$\begin{aligned} P_A(x)Id_n &= B(x)(A - xId_n) \\ &= (D_{n-1}x^{n-1} + D_{n-2}x^{n-2} + \ldots + D_1x + D_0)(A - xId) \\ &= -D_{n-1}x^n + (D_{n-1}A - D_{n-2})x^{n-1} + \ldots + (D_1A - D_0)x + D_0A \end{aligned}$$

De lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} a_n Id_n &= -D_{n-1} \\ a_{n-1}Id_n &= D_{n-1}A - D_{n-2} \\ a_r Id_n &= D_r A - D_{r-1}; r > 0 \\ a_0 Id_n &= D_0 A \end{aligned}$$

Realicemos el reemplazo ahora

$$\begin{aligned}
P_A(A) &= a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0 \\
&= a_nId_nA^n + a_{n-1}Id_nA^{n-1} + \ldots + a_1Id_nA + a_0Id_n \\
&= -D_{n-1}A^n + (D_{n-1}A - D_{n-2})A^{n-1} + \ldots (D_2A + D_1)A^2 + (D_1A - D_0)A + D_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Corolario 17 *Sea T un endomorfismo sobre un espacio de dimension finita, entonces*

$$\phi_T \textit{ divide a } P_T$$

o bien

$$\textit{Existe } h \in \mathbb{K}[x] \textit{ tal que } P_T = \phi_T \cdot h$$

Propiedad 18 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *α es un valor propio de A.*
2. *$ker(A - \alpha Id) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av^t = \alpha v^t\} \neq \{0\}$.*
3. *$A - \alpha Id$ es singular.*
4. *$det(A - \alpha Id) = 0$.*
5. *α es una raíz del polinomio característico.*

Demostración: Sea α es una raíz del polinomio característico, luego $det(A - \alpha Id) = 0$, es decir, es singular, de lo cual, se obtiene que $ker(A - \alpha Id) \neq \{0\}$, y finalmente es un valor propio.

Si α es un valor propio de A, luego se tiene que existe $v \in V - \{0\}$, tal que $Av^t = \alpha v^t$, es decir $v \in ker(A - \alpha Id)$, por ello la matriz es singular, lo cual indica $det(A - \alpha Id) = 0$, con lo cual es una raíz del polinomio característico. □

Corolario 19 *Sean $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$*

$$\alpha \textit{ es una raíz de } \phi_A \textit{ si y sólo si } \alpha \textit{ es una raíz de } P_A.$$

Corolario 20 *Sean V un espacio vectorial dimension finita sobre $\mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $T \in End(V))$ entonces*

$$\alpha \textit{ es una raíz de } \phi_T \textit{ si y sólo si } \alpha \textit{ es una raíz de } P_T.$$

Ejemplo 7 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Determinar los espacio propios asociado a A.

Solución: Del ejemplo 4, tenemos que

$$P_A(x) = -(x-1)(x-2)^2.$$

Del corolario anterior tenemos que

$$\phi_A(x) = (x-1)(x-2)^2 \text{ o bien } \phi_A(x) = (x-1)(x-2).$$

luego los únicos valores propios son 1 y 2.

Ahora veremos los espacios propios asociados correspondientes. El valor propio 1 tiene el siguiente espacio propio,

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av^t = 1v^t\} \\ V_1 &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - Id)(v^t) = 0\} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con lo cual obtenemos que $v = (x, y, z) = (z, -z/3, z)$. Luego

$$V_1 = \langle (1, -1/3, 1) \rangle = \langle (3, -1, 3) \rangle$$

Para el otro valor propio, se tiene el espacio propio dado por:

$$\begin{aligned} V_2 &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av^t = 2v^t\} \\ V_2 &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2Id)(v^t) = 0\} \\ V_2 &= ker(A - 2Id) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

así obtenemos que $v = (x, y, z) = (2y + 2z, y, z)$. Luego

$$V_2 = \langle (2, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle .$$

Note además si construimos la matriz $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, se tiene que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Y queda de ejercicio, comprar que se obtiene

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observación: La generalización del resultado obtenido anteriormente, consideremos las matrices P, P^{-1}, A del ejercicio anterior, se tienen:

$$\begin{array}{llll} i) & P \cdot e_1^t = v_1^t \in V_1 & ii) & P^{-1} \cdot v_1^t = e_1^t \\ & P \cdot e_2^t = v_2^t \in V_2 & & P^{-1} \cdot 2v_2^t = 2e_2^t \\ & P \cdot e_3^t = v_3^t \in V_2 & & P^{-1} \cdot 2v_3^t = 2e_3^t \end{array}$$

También tenemos:

$$Av_1^t = v_1^t \quad Av_2^t = 2v_2^t \quad Av_3^t = 2v_3^t$$

Por último se tiene

$$P^{-1}APe_1^t = e_1^t \quad P^{-1}APe_2^t = 2e_2^t \quad P^{-1}APe_3^t = 2e_3^t$$

De este modo la matriz $P^{-1}AP$ es diagonal.

Sea A una matriz de orden n, con coeficientes en $\mathbb{K}$, podemos asociar una transformación lineal del siguiente modo

$$\begin{array}{rccc} T_A : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & v & \longmapsto & vA^t \end{array}$$

Luego T_A es una transformación lineal, ya que

I) $T_A(v + w) = (v + w)A^t = vA^t + wA^t = T_A(v) + T_(w)$.

II) $T_A(\alpha v) = (\alpha v)A^t = \alpha(vA^t) = \alpha T_A(v)$.

Es fácil obtener que $[T_A]_{\mathcal{C}} = A$.

Si consideremos la base $B = \{(3, -1, 3), (2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$, formado por los vectores encontrados anteriormente, tenemos la matrices cambio de base $P = [Id]_B^{\mathcal{C}}$, de donde se obtiene

$$P^{-1}AP = [Id]_{\mathcal{C}}^B \cdot [T_A]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \cdot [Id]_B^{\mathcal{C}} = [T_A]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definición 11 *Sean $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $T \in End(V)$.*

1. *Se dice que A es* ***diagonalizable*** *si y sólo si existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ (matrices invertibles) tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.*

2. *Se dice que T es* ***diagonalizable*** *si y sólo si existe B una base de V tal que $[T]_B$ es diagonal.*

Teorema 21 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, entonces*

A es diagonalizable si y sólo si T_A es diagonalizable.

Demostración: Si A es diagonalizable existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Pero notemos que el la base canónica se tiene que

$$[T_A]_{\mathcal{C}} = A$$

Luego

$$P^{-1}[T_A]_{\mathcal{C}}P = P^{-1}AP$$

Definimos la base $\mathcal{B}$ de V modo que $P = [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, de lo cual

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T_A]_{\mathcal{C}}P = P^{-1}AP$$

es decir, T en la base $\mathcal{B}$ es diagonal.

El recíproco, tenemos que existe una base $\mathcal{B}$ de V, tal que $[T_A]_{\mathcal{B}}$ es diagonal,

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[T_A]_{\mathcal{C}}[Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$$

es decir, existe P invertible tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. $\square$

Propiedad 22 *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, tal que existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ de modo que $B = P^{-1}AP$, entonces*

$$\phi_A(x) = \phi_B(x).$$

Demostración: Notemos primero lo siguiente

$$\begin{array}{rcl} (P^{-1}AP)^2 & = & P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P \\ (P^{-1}AP)^{n+1} & = & (P^{-1}AP)^nP^{-1}AP = P^{-1}A^nPP^{-1}AP = P^{-1}A^{n+1}P \end{array}$$

Luego se obtiene que

$$(\forall n \in \mathbb{N})((P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP)$$

Por otro lado se tiene que $\phi_A(x) = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i x^i$, luego evaluamos en B, donde

$$\phi_A(B) = \sum_{i=0}^{r} a_i(P^{-1}AP)^i = \sum_{i=0}^{r} a_i(P^{-1}A^iP) = P^{-1}\left(\sum_{i=0}^{r} a_iA^i\right)P = P^{-1}(\phi_A(A))P = 0.$$

Así

$$\phi_A \in \langle \phi_B \rangle,$$

de donde $\phi_A = \phi_B \cdot h$.

Con un desarrollo similar, obtenemos que $\phi_B = \phi_A \cdot h'$, reemplazamos

$$\phi_A = \phi_A h' h.$$

Cancelando y debido a que ϕ_B y ϕ_A son mónicos, entonces h' y h deben ser 1. $\square$

Ejercicio 8 *Sea*

$$\begin{array}{rlcl} T: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x - iy, 2x + 3y) \end{array}$$

Determine:

1. *El polinomio característico de T con $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.*

2. *El polinomio característico de T con $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

Propiedad 23 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, ϕ_A su polinomio minimal tal que*

$$\phi_A = \phi_1 \cdot \phi_2,$$

con ϕ_1, ϕ_2 primos relativos mónicos, consideremos

$$V_i = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \phi_i(A) \cdot v^t = 0\},$$

entonces

1. $V_1 = \{v \cdot \phi_2(A)^t \mid v \in \mathbb{K}^n\}$; $\quad V_2 = \{v \cdot \phi_1(A)^t \mid v \in \mathbb{K}^n\}$

2. $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus V_2 \quad \wedge \quad A(V_1) \subseteq V_1 \quad \wedge \quad A(V_2) \subseteq V_2$.

3. $T_A|_{V_i} = T_{A_i}$*, entonces* $\phi_{A_i} = \phi_i$

Observación: Debemos tener presente para la demostración que, si $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{K}[x]$ son primos relativos, entonces existen $h_1, h_2 \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$\phi_1 h_1 + \phi_2 h_2 = 1$$

Evaluando tenemos

$$\phi_1(A)h_1(A) + \phi_2(A)h_2(A) = Id \qquad (*)$$

o bien

$$(\phi_1(A))^t(h_1(A))^t + (\phi_2(A))^t(h_2(A))^t = Id \qquad (*)$$

Demostración:

1. Demostraremos que

$$\{v \in \mathbb{K}^n \ \mid \ v \cdot \phi_1(A)^t = 0\} = \{v \cdot \phi_2(A)^t \ \mid \ v \in \mathbb{K}^n\}$$

Veamos la primera contención, sea $w \in \{v \cdot \phi_2(A)^t \ \mid \ v \in \mathbb{K}^n\}$, luego $w = v \cdot \phi_2(A)^t$

$$\phi_1(A) \cdot w^t = \phi_1(A) \cdot \phi_2(A) \cdot v^t = \phi_A(A) \cdot v^t = 0 \cdot v^t = 0$$

Para la otra contención se tiene que, dado $w \in \{v \in \mathbb{K}^n \mid \phi_1(A) \cdot v^t = 0\}$. Por (*) tenemos

$$\begin{aligned} \phi_1(A)h_1(A) + \phi_2(A)h_2(A) &= Id \\ \phi_1(A)h_1(A)w^t + \phi_2(A)h_2(A)w^t &= w^t \\ \phi_2(A)(h_2(A) \cdot w^t) &= w^t \end{aligned}$$

escogemos $v^t = h_2(A) \cdot w^t$, y tenemos

$$\phi_2(A) \cdot v^t = w^t$$

2. Ahora probaremos la suma directa y la estabilidad.

   Demostrar que $\mathbb{K}^n = V_1 + V_2$

$$\begin{aligned} \phi_1(A)h_1(A) + \phi_2(A)h_2(A) &= Id \quad (*) \\ h_1(A)^t\phi_1(A)^t \cdot v + h_2(A)^t(\phi_2(A)^t \cdot v &= v \\ \phi_1(A)^t \left(h_1(A)^t \cdot v\right) + \phi_2(A^t)\left(h_2(A)^t \cdot v\right) &= v \end{aligned}$$

   pero $\phi_1(A)^t\,(h_1(A)^t \cdot v) \in V_2$ y $\phi_2(A)^t\,(h_2(A)^t \cdot v) \in V_1$, luego

$$\mathbb{K}^n = V_1 + V_2$$

   Sea $w \in V_1 \cap V_2$, en (*) se tiene

$$\begin{aligned} \phi_1(A)h_1(A) \cdot w^t + \phi_2(A)h_2(A) \cdot w^t &= w^t \\ h_1(A)(\phi_1(A) \cdot w^t) + h_2(A)(\phi_2(A) \cdot w^t) &= w^t \end{aligned}$$

   ya que $w \in V_1 \cap V_2$, tenemos que $\phi_1(A) \cdot w^t = 0$ y $\phi_2(A) \cdot w^t = 0$, de donde concluimos que $w = 0$

   Ahora la estabilidad, para ello notemos lo siguiente:

$$A^j \cdot \sum_{i=0}^{r} a_i A^i = \sum_{i=0}^{r} a_i A^j A^i = \sum_{i=0}^{r} a_i A^i A^j = \left(\sum_{i=0}^{r} a_i A^i\right) A^j$$

   Sea $w \in V_1$ entonces es claro que $w \cdot A^t \in \mathbb{K}^n$, además

$$\phi_1(A)(A \cdot w^t) = (\phi_1(A) \cdot A)w^t = A \cdot \phi_1(A) \cdot w^t = A \cdot 0 = 0.$$

   Luego $w \cdot A^t \in V_1$

3. Sea

$$\begin{array}{rccc} T_A: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & v & \longmapsto & v \cdot A^t, \end{array}$$

   luego

$$\begin{array}{rccc} T_{A_1} = T_A|_{V_1}: & V_1 & \longrightarrow & V_1 \\ & v & \longmapsto & v \cdot A^t \end{array}$$

   Sea ψ_i el polinomio minimal asociado a T_{A_i}, entonces $\psi_i(T_{A_i}) = 0$, es decir

$$(\forall v \in V_i)(\psi_i(A) \cdot v^t = 0),$$

   luego $\phi_i = \psi_i t_i$. $(**)$

   Además, sea $v \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} \psi_1(A)\psi_2(A) \cdot v^t &= (\psi_1(A)\psi_2(A))(v_1^t + v_2^t)), \\ &= \psi_1(A)\psi_2(A)v_1^t + \psi_1(A)\psi_2(A)v_2^t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así $(\forall v \in \mathbb{K}^n)(\psi_1(A)\psi_2(A)v^t = 0)$, luego

$$\psi_1(A)\psi_2(A) = 0,$$

donde $\psi_1\psi_2$ es un polinomio que se anula en la matriz A, de lo cual se obtiene que

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_2 &= \phi t_3\\ &= \phi_1\phi_2 t_3\\ &= \psi_1\psi_2 t_3 t_2 t_1\end{aligned}$$

cancelando y como $\psi_i,\ \phi_i$ son mónicos en (**) obtenemos que

$$t_1 = t_2 = 1.$$

$\square$

Propiedad 24 *Sean V un espacio vectorial dimension finita sobre $\mathbb{K}$, ϕ_T su polinomio minimal tal que*

$$\phi_T = \phi_1 \cdot \phi_2,$$

con ϕ_1, ϕ_2 primos relativos mónicos, consideremos

$$V_i = \{v \in V \ \mid\ \phi_i(T)v = 0\},$$

entonces

1. $V_1 = \{\phi_2(T)v \ \mid\ v \in V\};\quad V_2 = \{\phi_1(T)v \ \mid\ v \in V\}$
2. $V = V_1 \oplus V_2 \quad \wedge \quad T(V_1) \subseteq V_1 \quad \wedge \quad T(V_2) \subseteq V_2.$
3. $T|_{V_i} = T_i$, *entonces* $\phi_{T_i} = \phi_i$

Observación: Con el siguiente ejemplo revisaremos los paso de la demostración

Ejemplo 9 *Dada la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 4x-2y) \end{array}$$

Tenemos que la matriz cambio de base en la base canónica, esta dada por

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

y tenemos que el polinomio característico corresponde a $P_T(x) = (x-2)(x+3) = \phi_T(x)$, luego

$$\phi_T(x) = \phi_1(x) \cdot \phi_2(x),$$

donde $\phi_1(x) = x - 2, \quad \phi_2(x) = x + 3$*, además*

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ \phi_1(T) \cdot v = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ (T - 2Id) \cdot v = 0\} \\ &= \{\phi_2(T)v \ \mid \ v \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(T + 3Id)v \ \mid \ v \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V_2 &= \{v \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ \phi_2(T) \cdot v = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ (T + 3Id) \cdot v = 0\} \\ &= \{(T - 2Id)v \ \mid \ v \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2.$$

Además tenemos, la restricción

$$\begin{array}{rccc} T_1 : & V_1 & \longrightarrow & V_1 \\ & v & \longmapsto & T(v) = 2v \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} T_2 : & V_2 & \longrightarrow & V_2 \\ & v & \longmapsto & T(v) = -3v \end{array}$$

donde el polinomio minimal de T_1 *es* $\phi_1(x) = x - 2$ *y el de* T_2 *es* $\phi_2(x) = x + 3$.

Corolario 25 *Sea* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *y* $\phi_A(x) = \phi_1(x) \cdots \phi_r(x)$*, tal que* $\phi_1(x), \ldots, \phi_r(x)$ *son primos relativos mónicos.*

Si

$$V_i = \{v \in \mathbb{K}^n \ \mid \ \phi_i(A) \cdot v^t = 0\},$$

entonces

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i.$$

Corolario 26 *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita y* $T \in End(V)$, $\phi_T(x) = \phi_1(x) \cdots \phi_r(x)$*, tal que* $\phi_1(x), \ldots, \phi_r(x)$ *son primos relativos mónicos.*

Si

$$V_i = \{v \in V \ \mid \ \phi_i(T)v = 0\},$$

entonces

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i.$$

Teorema 27 *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita y* $T \in End(V)$*, tal que su polinomio minimal, se factoriza del siguiente modo*

$$\phi_T(x) = (x - \alpha_1)^{p_1}(x - \alpha_2)^{p_2} \cdots (x - \alpha_r)^{p_r},$$

con α_i *todos distintos. Entonces*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i,$$

donde $V_i = \{v \in V \mid (T - \alpha_i Id)^{p_i} v = 0\}$ *y* $T(V_i) \subseteq V_i$.

Demostración: Como las raíces α_i son distintas, entonces los factores $(x-\alpha_1)^{p_i}$, son primos relativos, luego las propiedades anterior se obtiene el teorema $\square$

Corolario 28 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in End(V)$,*

Si el polinomio minimal ϕ_T tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ y cada una tiene multiplicidad 1 en entonces T es diagonalizable.

Corolario 29 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$*

Si el polinomio minimal ϕ_A tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ y cada una tiene multiplicidad 1 en entonces A es diagonalizable.

Ejemplo 10 *Sea $T \in End(\mathbb{R}^3)$, tal que*

$$T(x, y, z) = (z, 3z - y - x, -x + 4z - 2y),$$

Determinar el polinomio minimal examinando los posibles espacio anuladores

Solución: La matriz asociada a T en la base canónica es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego el polinomio característico es $P_T(x) = (1-x)^3$, de lo cual, el polinomio minimal debe ser algunos de los siguientes

$$\phi_A = x - 1,\ \phi_A = (x-1)^2,\ \phi_A = (x-1)^3,$$

Investiguemos, determinando los siguientes espacio.

1. $W_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (T - Id)v = 0\}$, se sigue

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde se concluye que

$$W_1 = \langle (1,1,1) \rangle .$$

2. $W_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (T - Id)^2 v = 0\}$, luego

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de aquí concluimos que

$$W_2 = \langle (1,1,1)\, , (0,1,1) \rangle .$$

3. $W_3 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (T - Id)^3 v = 0\}$, donde

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   por lo tanto

$$W_3 = \langle (1,1,1), (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$

Claramente tenemos que $\phi_T(x) = (x-1)^3$, ya que $W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \mathbb{R}^3$. Consideramos la base

$$B = \{(1,1,1), (1,0,0), (0,1,0)\},$$

luego

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 12

1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se dice que A es **triangularizable** si y sólo si existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP$ es triangular.*

2. *Sea $T \in End(V)$. Se dice que T es **triangularizable** si y sólo si existe B base de V tal que $[T]_B$ es triangular.*

Note que la transformación del ejercicio anterior es triangularizable

Teorema 30 *Sea $T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, tal que $\phi_A(x) = (x-c)^p$, donde*

$$W_i = \{v \in \mathbb{K}^n \mid (A - cId)^i \cdot v^t = 0\},$$

entonces

1. $W_1 \leq W_2 \leq \cdots \leq W_p = \mathbb{K}^n$

2. $W_j(A - cId)^t \subseteq W_{j-1}$

3. *Si* $W_i = W_{i+1}$ *entonces* $W_{i+1} = W_{i+2}$

Demostración:

1. Veamos las contenciones

$$W_1 \leq W_2 \leq \cdots \leq W_p = \mathbb{K}^n$$

   Sea j, tal que $1 \leq j < p$, y $v \in W_j$, luego $(A - cId)^j \cdot v^t = 0$, multiplican obtenemos

$$(A - cId)^{j+1} \cdot v^t = (A - cId)(A - cId)^j \cdot v^t = (A - cId) \cdot 0 = 0$$

   por lo tanto $v \in W_{j+1}$.

2. Sea j, tal que $1 \leq j < p$, veamos ahora

$$W_j(A - cId)^t \subseteq W_{j-1},$$

es decir, si $v \in W_j(A - cId)^t$, debemos demostrar que $(A - cId)^{j-1} \cdot v^t = 0$.

Para ello, sea $v \in W_j(A - cId)^t$, entonces $v = w(A - cId)^t$, con $w \in W_j$, luego

$$(A - cId)^{j-1} \cdot v^t = (A - cId)^{j-1} \cdot (A - cId)w^t = (A - cId)^j w^t = 0,$$

por lo tanto $v \in W_{j-1}$

3. Supongamos que

$$W_i = W_{i+1}$$

implica $W_{i+1} = W_{i+2}$.

De la primera parte se tiene $W_{i+1} \subset W_{i+2}$.

Para la otra contención tenemos de la segunda parte que $W_{i+2}(A - cId)^t = W_{i+1}$. Ahora bien, si $w \in W_{i+2}$, luego $w(A - cId)^t \in W_{i+1} = W_i$, por hipótesis, entonces $0 = (A - cId)^i(A - cId)w^t = (A - cId)^{i+1}w^t$, es decir $w \in W_{i+1}$.

$$W_{i+1} = W_{i+2}$$

□

Corolario 31 *Sea $T \in End(V)$, tal que $\phi_T(x) = (x - c)^p$, si*

$$W_i = \{v \in V \ \mid \ (T - cId)^i v = 0\},$$

entonces

1. $W_1 \leq W_2 \leq \cdots \leq W_p = \mathbb{K}^n$

2. $(T - cId)W_j = \{Tv \ \mid \ v \in W_j\} \subseteq W_{j-1}$

3. *Si* $W_i = W_{i+1}$ *entonces* $W_{i+1} = W_{i+2}$

Corolario 32 *Si A es una matriz tal que el polinomio característico se puede factorizar, sólo con factores lineales entonces A es triangularizable.*

Demostración: De la primera afirmación del teorema tenemos que una base de W_i, se puede extender a una base de W_{i+1}, aplicando en forma reiterada, lo anterior podemos obtener una base del espacio total.

De otro modo tenemos lo siguiente

$$\begin{array}{l} B_1 = \{w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1s_1}\} \text{ una base de } \mathrm{W_1} \text{ y como } \mathrm{W_1} \subseteq \mathrm{W_2}, \text{ se extiende a} \\ B_2 = \{w_{11}, \ldots, w_{1s_1}, w_{21}, \ldots, w_{2s_2}\} \text{ una base de } \mathrm{W_2} \text{ y como } \mathrm{W_2} \subseteq \mathrm{W_3}, \\ \vdots \\ B_p = \{w_{11}, \ldots, w_{1s_1}, w_{21}, \ldots, w_{2s_2}, \ldots, w_{p1}, \ldots, w_{ps_p}\} \text{ una base de } \mathrm{W_p} = \mathbb{K}^{\mathrm{n}} \end{array}$$

De la definición de W_1 tenemos que,

$$(A - cId)w_{1j}^t = 0 \Leftrightarrow Aw_j^t = cw_{1j}^t,$$

De la segunda afirmación,

$$W_2(A - cId)^t \subseteq W_1,$$

luego,

$$(A - cId)w_{2j}^t = \sum \alpha_{j,i} w_{2i}^t \Leftrightarrow Aw_{2j}^t = cw_{2j}^t + \sum_i \alpha_{i,j} w_{1i}^t,$$

En general tenemos que $W_j(A - cId)^t \subseteq W_{j-1}$,

$$w_{jr}(A - cId)^t \in W_{j-1} \Leftrightarrow Aw_{jr}^t = cw_{jr}^t + \sum\sum \alpha_{i,r} w_{hi}^t,$$

Con ello tenemos que la matriz de $[T_A]_{B_p}$ es triangular superior. $\square$

Corolario 33 *Si $T \in End(V)$ es una matriz tal que el polinomio característico se puede factorizar, sólo con factores lineales entonces T es triangularizable.*

Ejemplo 11 *Sea $T \in End(\mathbb{R}^5)$, tal que la matriz en la base canónica es*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico es $P_T(x) = (x-2)^5$.

Determinar una base en la que la matriz asociada a T sea triangular.

Solución: Ya que el único valor propio es 2, debemos calcular los espacios correspondiente del teorema anterior

1. $W_1 = \{v \in \mathbb{R}^5 \mid (T - 2Id)v = 0\}$, se sigue

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde

$$W_1 = \langle (0,-1,1,1,0), (0,1,0,0,1) \rangle$$

2. $W_2 = \{v \in \mathbb{R}^5 \mid (T - 2Id)^2 v = 0\}$, se sigue

$$(A - 2Id)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

luego

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde

$$W_2 = \langle (0,-1,1,1,0), (0,1,0,0,1), (1,0,-1,0,0), (1,0,0,1,0) \rangle$$

Hemos completar la base de W_1 para obtener una base de W_2.
Finalmente

$$W_3 = \langle (0,-1,1,1,0), (0,1,0,0,1), (1,0,-1,0,0), (1,0,0,1,0), (1,0,0,0,0) \rangle,$$

Recuerde que los espacios no pueden ser iguales teorema 30, por ello la dimensión debe aumentar, por lo cual $W_3 = \mathbb{R}^5$,

$$B = \{ (0,-1,1,1,0), (0,1,0,0,1), (1,0,-1,0,0), (1,0,0,1,0), (1,0,0,0,0) \}$$

Sabemos por el corolario anterior que la matriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & - & - & - \\ 0 & 2 & - & - & - \\ 0 & 0 & 2 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 2 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Veamos ahora los coeficiente que falta

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \\ &= -4\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Así

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observación: En la proxima sección veremos el Teorema Jordan, la dimensión de W_1 nos indica cuantos bloques tiene asociado este valor propio, ya que cada bloque tiene asociado un valor propio.

Teorema 34 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ y P_A el polinomio característico*

A es diagonalizable si y sólo si P_A tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ y la dimensión del espacio propio es igual a la multiplicidad de la raíz en P_A.

Demostración: Supongamos que P_A tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$, luego ϕ_A tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ aplicando l teorema 27, tenemos que $\mathbb{K}^n = \oplus V_i$ correspondiente, si B_i es base de V_i, entonces

$$B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i,$$

es una base de V, al mantener el orden de los elementos de la base se obtiene que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & A_r \end{bmatrix}$$

Notemos que por teorema 30 tercera parte, una vez obtenida la dimension correcta, luego se mantiene

$$\begin{aligned} P_T &= |A_1 - xId| \cdot |A_2 - xId| \cdots |A_r - xId| \\ &= P_{A_1} \cdot P_{A_2} \cdots P_{A_r} \end{aligned}$$

Por lo tanto P_{A_i} es el polinomio característico y $(x-\alpha_i)$ es el polinomio minimal asociado $T|_{V_i}$.

El recíproco es inmediato. □

Teorema 35 *Sean $T \in End_{\mathbb{K}}(V)$ y P_T el polinomio característico*

T es diagonalizable si y sólo si P_T tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$ y la dimensión del espacio propio es igual a la multiplicidad de la raíz en P_T.

Ejemplo 12 *Sea $\mathcal{C} = \{(1,0,0,1,1),(1,0,1,2,2),(1,2,1,0,1),(1,1,2,1,2)\}$ base de $\mathbb{U}$ y T una transformación lineal tal que*

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $P_T(x) = (x-1)^2(x-2)(x-4)$

Determine una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{U}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal

Solución: Los valores propios asociados a T son $1, 2, 4$, para determine los espacios propios, consideremos $u_1 = (1,0,0,1,1), u_2 = (1,0,1,2,2), u_3 = (1,2,1,0,1), u_4 = (1,1,2,1,2)$.

1. $V_1 = \{v \in \mathbb{U} \mid ([T]_{\mathcal{C}} - Id)[u]_{\mathcal{C}} = 0\}$,

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$[u]_{\mathcal{C}} = a \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Con lo cual tenemos que

$$V_1 = \langle 3u_1 - 2u_2 1u_3 - 2u_4 \rangle = \langle (1,0,-2,-1,-1),(1,3,0,-1,0) \rangle$$

2. $V_2 = \{v \in \mathbb{U} \mid ([T]_{\mathcal{C}} - 2Id)[u]_{\mathcal{C}} = 0\}$,

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así

$$[u]_{\mathcal{C}} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De lo cual tenemos que

$$V_2 = \langle u_1 - u_2 \rangle = \langle (0, 0, -1, -1, -1) \rangle$$

3. $V_4 = \{v \in \mathbb{U} \mid ([T] - 4Id)[u]_{\mathcal{C}} = 0\}$,

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$[u]_{\mathcal{C}} = d \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

De lo cual tenemos que

$$V_4 = \langle 3u_1 - 3u_2 - 2y_3 - 2u_4 \rangle = \langle (-4, -6, -9, -5, -9) \rangle$$

Luego es diagonalizable y la base es:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -2, -1, -1), (1, 3, 0, -1, 0), (0, 0, -1, -1, -1), (-4, -6, -9, -5, -9)\}$$

y se obtiene que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2.1. Ejercicios

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ y $p(x) = (x-3)(x-1)$.

   a) Calcular $p(A)$ y $p(C)$.

   b) Determinar el valor "a" tal que $p(B) = 0$

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, y $p(x) = (x-4)(x-1)$.

   a) Calcular $p(A)$

   b) Calcular A^2BA^2

   c) Determinar el valor "a" tal que $p(B) = 0$

3. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que
$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   a) Calcular el Polinomio Característico.

   b) Determinar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$,tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

   c) Calcular $T^n(1-x^2)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

4. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ $T(x,y,z) = (x+z, x+y, y+z)$ una transformación lineal de $\mathbb{C}$ espacios vectoriales. Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar

5. Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal y
$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ base ordenada de $M_2(\mathbb{R})$ tal que
$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
   Sabiendo que el Polinomio Característico es $P_T(x) = x\,(x-4)\,(x-1)^2$

   Determinar una base $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$, tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sea diagonal

6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1.,1,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$, tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar

7. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x-x^2\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$, tal que
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar.

8. Sea $\mathcal{C} = \{(1,0,0,1), (1,0,1,2), (1,2,1,0), (1,1,2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^4$ y T una transformación lineal tal que
$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
cuyo polinomio característico es $P_T(x) = (x-1)^2 (x-2)(x-4)$
Determine una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal

9. Sea $\mathbb{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad 2x - 3y + 5z = 0\}$ un espacio vectorial, y
$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{U} & \to & \mathbb{U} \\ & (x,y,z) & \rightsquigarrow & (4y-3z-2x, 3z-y, -y+z) \end{array}$$
una transformación lineal. Determinar si T es diagonalizable.

10. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, A^t su transpuesta. Demostrar que $\phi_A(x) = \phi_{A^t}(x)$.

11. Sea $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, con A invertible. Demostrar que $\phi_{AB}(x) = \phi_{BA}(x)$.

12. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, singulares tal que
$$\phi_{AB}(x) \neq \phi_{BA}(x).$$

13. En $M_3(\mathbb{K})$. Determine las funciones coeficiente del polinomio característico.

14. Demostrar Si A es diagonalizable y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces $A - \alpha I$ es diagonalizable.

15. Clasificar todas las matrices 3×3 similares
(Def: A es similar a B si y sólo si existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP = B$).

16. Diagonalizar las siguientes matrices, si es posible

1. $$\begin{bmatrix} 0 & 8 & -3 & -10 & -7 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -6 & 4 & 8 & 5 & -12 \\ -1 & 8 & -3 & -9 & -7 & 16 \\ -1 & 6 & -3 & -8 & -4 & 12 \\ -1 & 7 & -3 & -9 & -6 & 15 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} -4 & 24 & -9 & -30 & -21 & 48 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -3 & 6 \\ 3 & -20 & 10 & 28 & 19 & -42 \\ -3 & 26 & -11 & -35 & -25 & 54 \\ -3 & 16 & -7 & -20 & -12 & 30 \\ -3 & 21 & -9 & -27 & -18 & 41 \end{bmatrix}$$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 & 6 & 4 & -10 \\ -2 & 9 & -4 & -12 & -8 & 18 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & 7 & 4 & -10 \\ 2 & -12 & 6 & 16 & 11 & -24 \\ 2 & -14 & 6 & 18 & 12 & -27 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & -16 & 6 & 20 & 14 & -32 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ -2 & 14 & -7 & -20 & -14 & 30 \\ 2 & -18 & 8 & 25 & 18 & -38 \\ 2 & -10 & 4 & 12 & 7 & -18 \\ 2 & -14 & 6 & 18 & 12 & -27 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 4 & -16 & 7 & 22 & 15 & -32 \\ 0 & 6 & -2 & -5 & -3 & 6 \\ -1 & 4 & 0 & -6 & -5 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 & -6 \\ 1 & -8 & 3 & 10 & 8 & -14 \\ 1 & -7 & 3 & 9 & 6 & -11 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 & 8 & 5 & -10 \\ -2 & 16 & -6 & -19 & -13 & 28 \\ 1 & -8 & 6 & 12 & 9 & -18 \\ -1 & 10 & -5 & -13 & -11 & 22 \\ 1 & -10 & 5 & 14 & 12 & -20 \\ 1 & -7 & 3 & 9 & 6 & -11 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 & -9 & -6 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 5 & 11 & 8 & -17 \\ -1 & 8 & -4 & -10 & -8 & 17 \\ -1 & 6 & -2 & -7 & -3 & 11 \\ -1 & 7 & -3 & -9 & -6 & 15 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -2 & 14 & -5 & -16 & -11 & 26 \\ 2 & -8 & 4 & 11 & 7 & -16 \\ 1 & -10 & 6 & 14 & 9 & -20 \\ -1 & 16 & -7 & -21 & -15 & 32 \\ -3 & 16 & -7 & -20 & -12 & 30 \\ -3 & 21 & -9 & -27 & -18 & 41 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & -24 & 10 & 32 & 22 & -48 \\ 0 & 3 & -2 & -4 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & -3 & -10 & -6 & 16 \\ 2 & -8 & 2 & 9 & 6 & -16 \\ 2 & -16 & 8 & 22 & 15 & -32 \\ 2 & -14 & 6 & 18 & 12 & -27 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 12 & -5 & -18 & -13 & 28 \\ -4 & 22 & -8 & -27 & -19 & 42 \\ 3 & -10 & 4 & 12 & 7 & -20 \\ -3 & 8 & -1 & -7 & -5 & 16 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 3 & 9 & 6 & -11 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -4 & 36 & -15 & -46 & -31 & 68 \\ 4 & -26 & 12 & 35 & 23 & -50 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ -5 & 38 & -19 & -52 & -36 & 76 \\ -5 & 35 & -15 & -45 & -30 & 67 \end{bmatrix}$

2.2.2. Problemas Propuestos

Problema 1.

Si A es una matriz diagonalizable de $M_n(\mathbb{R})$. Demostrar que A^2 es diagonalizable

Problema 2.

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = (2a + 2b + c)\,x^2 + (a + 3b + c)\,x + (-2a - 4b - c)$$

Diagonalizar T.

Problema 3.

Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$ es una transformación lineal de $\mathbb{C}$ espacios vectoriales.

Diagonalizar T si es posible.

Problema 4.

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinar si T es diagonalizable, en caso afirmativo diagonalizar.

Problema 5.

Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ una transformación lineal de $\mathbb{C}$ espacios vectoriales y $\mathcal{C}$ base canónica de $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalizar T si es posible.

Problema 6.

Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y T_α en endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ tal que 1 es un valor propio.

$$[T_\alpha]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Determinar $P_{T_\alpha}(x)$ (Polinomio Característico)

(b) Para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, el endomorfismo T_α es diagonalizable.

(c) Para que valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, el endomorfismo T_α es triangularizable.

Problema 7.

Sea A una matriz simétrica de $M_2(\mathbb{R})$. Demostrar que A es diagonalizable

Problema 8.

Determinar si es verdadero o falso la afirmación
Si A^2 es una matriz diagonalizable de $M_n(\mathbb{R})$ entonces A es diagonalizable

Problema 9.

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, de modo que existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ y $P^{-1}BP$ son matrices diagonales entonces
Demostrar que $AB = BA$

Problema 10.

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$
¿Existe alguna relación entre $\phi_A(x)$ y $\phi_{A^2}(x)$?

2.3. Formas de Jordan

Una matriz de Jordan es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_3(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_k(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

donde

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix} \in M_{n_i}(\mathbb{K})$$

son los bloques de Jordan

Definición 13 *Sea $T \in End(V)$, un espacio vectorial de dimension finita sobre $\mathbb{K}$.*

Se dice que existe una **`Base de Jordan`** *asociada a T si y sólo si la matriz de T asociada a esta base es una matriz de Jordan.*

Ejemplo 13 *La siguiente matriz, es una matriz de Jordan con 4 bloques*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observación: Por el teorema (30), se tiene que dada una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$, tal que el polinomio minimal se factoriza $\phi_T = \prod_{i=1}^{r}(x - \alpha_i)^{n_i}$ y definimos los subespacios

$$V_i = \{v \in V \mid (T - \alpha_i Id)^{n_i} v = 0\},$$

y cada T_i esta dado por

$$T_i = T|_{V_i} : V_i \longrightarrow V_i; \quad \phi_{T_i} = (x - \alpha_i)^{n_i}; \quad \phi_{T_i - \alpha Id} = y^{n_i},$$

entonces

$$V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$$

Definición 14

1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$, se dice que A es* ***nilpotente*** *de índice k si y sólo si*

$$\phi_A(x) = x^k.$$

2. *Sea $T \in End(V)$, se dice que T es* ***nilpotente*** *de índice k si y sólo si*

$$\phi_T(x) = x^k.$$

Propiedad 36 *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $T \in End(V)$ es nilpotente, tal que $dim V = m$ entonces*

$$P_A(x) = x^n; \quad P_T(x) = x^m$$

Ejemplo 14 *Sea $T \in End(V)$, tal que*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, además $\phi_T(x) = x^5$, tenemos:

$$\begin{aligned} T(v_5) &= v_4 = T(v_5) \\ T(v_4) &= v_3 = T^2(v_5) \\ T(v_3) &= v_2 = T^3(v_5) \\ T(v_2) &= v_1 = T^4(v_5) \\ T(v_1) &= 0 = T^5(v_5) \end{aligned}$$

luego, reemplazando obtenemos que la base se puede reescribir del siguiente modo

$$B = \{T^4(v_5), T^3(v_5), T^2(v_5), T(v_5), v_5\}$$

Ejemplo 15 *En el ejemplo (11), tenemos que*

$$
\begin{aligned}
W_1 &= < (0,-1,1,1,0), (0,1,0,0,1) > = < w_1, w_2 > \\
W_2 &= < (0,-1,1,1,0), (0,1,0,0,1), (1,0,-1,0,0), (1,0,0,1,0) > = < w_1, w_2, w_3, w_4 > \\
W_3 &= < (0,-1,1,1,0), (0,1,0,0,1), (1,0,-1,0,0), (1,0,0,1,0), (1,0,0,0,0) >
\end{aligned}
$$

La dimensión de los espacios lo podemos escribir o anotar del siguiente modo:

$$
\begin{array}{lccccc}
W_1: & * & * & & & \\
W_2: & * & * & * & * & \\
W_3: & * & * & * & * & *
\end{array}
$$

Y en esta nueva base $B = \{T(v), v, T^2(e_1), T(e_1), e_1\}$, *obtenemos*

$$
[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

es decir, tenemos dos bloques uno de 3×3 *y otro de* 2×2.

Para determinar el elemento que falta definir, debemos tener presente

$$
W_1 = < w_1', T^2(e_1) >, \quad W_2 = < w_1', T^2(e_1), w_3', T(e_1) >, \quad W_3 = < w_1, w_2, w_3, w_4, e_1 >
$$

En W_1 *extendemos a una base y obtenemos* w_1' *y realizando algo similar en* W_2 *se obtiene* $v = w_3'$ *el elemento deseado.*

Ahora veremos que lo anterior, siempre es posible realizarlo.

Espacio Cociente

Sea $W \leq V$, se define la relación de equivalencia en V por:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in W,$$

luego la clase de un vector esta dada por

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \{y \in V \mid x \sim y\} \\
&= \{y \in V \mid x - y \in W\} \\
&= \{y \in V \mid x - y = w\} \\
&= \{y \in V \mid x - w = y\} \\
&= x + W
\end{aligned}
$$

Note que dos elementos son iguales, cuando la diferencia de ellos pertenece al subespacio

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x - y \in W$$

De esta manera tenemos que el conjunto cociente que esta constituido por

$$V\diagup W = \{x + W \mid x \in V\}.$$

Además el conjunto cociente tiene una estructura natural de espacio vectorial, dado por:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}, \qquad \alpha\overline{x} = \overline{\alpha x}.$$

Ejemplo 16 *Sea* $\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - 3y + 5z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$*, en este caso tenemos que*

$$\begin{aligned} \overline{(a, b, c)} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a, y - b, z - c) \in \mathbb{U}\ \} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a) - 3(y - b) + 5(z - c) = 0\ \} \end{aligned}$$

es un plano paralelos a $\mathbb{U}$ *que contiene al punto* (a, b, c)*.*

Las operaciones están dada por:

$$\overline{(a, b, c)} + \overline{(f, g, h)} = \overline{(a + f, b + g, c + h)}; \qquad \alpha\overline{(a, b, c)} = \overline{(\alpha a, \alpha b, \alpha c)}$$

De forma similar obtenemos que, el conjunto $B = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_s\}$ es linealmente independiente en $V\diagup W$, si y sólo si

$$\sum \alpha_i\overline{v}_i = \overline{0} \text{ entonces, } \alpha_i = 0, \text{ para todo } i.$$

Propiedad 37 *Sea* V *un* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial de dimensión finita entonces*

$$dim(V\diagup W) = dim(V) - dim(W)$$

Definición 15 *Se dice que* $B = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset V$ *es* ***linealmente independiente módulo*** W *si y sólo si*

$$\sum \alpha_i v_i \in W, \text{ entonces, } \alpha_i = 0, \text{ para todo } i.$$

Propiedad 38 *Sea* $T \in End(V)$ *nilpotente de índice* k *y* $W_{k-1} = ker(T^{k-1})$*.*

Si el conjunto $\{v_1 + W_{k-1}, \ldots, v_m + W_{k-1}\}$ *es linealmente independientes en* $V\diagup W_{k-1}$*, entonces*

$$A = \{v_1, Tv_1, \ldots, T^{k-1}v_1, v_2, \ldots, T^{k-1}v_2, \ldots, v_m, \ldots, T^{k-1}v_m\}$$

es linealmente independiente en V*.*

Demostración: El conjunto $\{v_1 + W_{k-1}, \ldots, v_m + W_{k-1}\}$ en $V\diagup W_{k-1}$ es linealmente independiente, entonces se tiene que

$$\sum \alpha_i(v_i + W_{k-1}) = 0 \Leftrightarrow \sum \alpha_i v_i \in W_{k-1} \Leftrightarrow (\forall i)(\alpha_i = 0)$$

Veamos que A es linealmente independiente para ello consideremos una combinación lineal

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k-1}} c_{ij}T^j v_i = 0$$

Aplicado T^{k-1}, se tiene

$$\sum_{i,j} c_{ij} T^{k-1+j}(v_i) = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i,j} c_{i0} T^{k-1} v_i = 0$$

así

$$T^{k-1}\left(\sum_i c_{i0} v_i\right) = 0.$$

Luego $\sum c_{i0} v_i \in W_{k-1}$, por lo tanto

$$c_{i0} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Ahora aplicando T^{k-2}, y con argumento similar, obtenemos $c_{i1} = 0$.

Análogamente se tiene que los otros $c_{ij} = 0$ para todo j y para todo i. $\square$

Corolario 39 *Sea $T \in End(V)$ nilpotente de índice k y $W_{k-1} = ker(T^{k-1})$.*

Si $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ es linealmente independientes en $V \diagup W_{k-1}$,

$$U =< \{v_1, Tv_1, \dots, T^{k-1} v_1, v_2, \dots, T^{k-1} v_2, \dots, v_m, \dots, T^{k-1} v_m\} >$$

entonces $T(U) \subseteq U$

Demostración: Sea $u \in U$, luego

$$u = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,k-1}} c_{ij} T^j v_i$$

Aplicado T, se tiene

$$T(u) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,k-1}} c_{ij} T^{j+1}(v_i) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ t=2,\dots,k-1}} c_{i(t-1)} T^t(v_i) \in U$$

$\square$

Observación: Note que hemos demostrado que cada bloque es estable, y que el número de ellos de longitud maxima es igual a

$$dimV - dimker(T^{k-1})$$

Corolario 40 *Sea $T \in End(V)$ nilpotente de índice k y $W_{k-1} = ker(T^{k-1})$, $W_{k-2} = ker(T^{k-2})$.*

Si $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ es linealmente independientes en el espacio cociente $V \diagup W_{k-1}$, entonces $\{Tv_1 + W_{k-2}, \dots, Tv_m + W_{k-2}\}$ es linealmente independientes en el espacio cociente $W_{k-1} \diagup W_{k-2}$.

Demostración: Por teorema 30, se tiene que $T(V) = T(W_k) \subset W_{k-1}$, luego tenemos que

$$\{Tv_1 + W_{k-2}, \dots, Tv_m + W_{k-2}\} \subset W_{k-1} \diagup W_{k-2}.$$

Además $T : W_{k-1} \longrightarrow W_{k-1}$, es una transformación lineal de nilpotente de índice $k-1$ y $W_{k-2} = \{v \in W_{k-1} \mid T^{k-2}(v) = 0\}$

Consideremos la siguiente combinación lineal

$$\sum_{i=0}^{m} c_i(Tv_i + W_{k-2}) = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} c_i T v_i &\in W_{k-2} \\ T^{k-2}\left(\sum_{i=0}^{m} c_i T v_i\right) &= 0 \\ T^{k-2}\left(T\left(\sum c_i v_i\right)\right) &= 0 \\ T^{k-1}\left(\sum c_i v_i\right) &= 0. \end{aligned}$$

Luego $\sum c_i v_i \in W_{k-1}$, pero por hipótesis $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ es linealmente independientes, luego $c_i = 0$. $\square$

Observación: Notemos que si $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ es linealmente independientes W_k/W_{k-1}, en forma recursiva se obtiene

$$\{T^j(v_1) + W_{k-j-1}, \dots, T^j(v_m) + W_{k-j-1}\} \text{ es linealmente independientes } W_{k-j}/W_{k-j-1}$$

Propiedad 41 *Sea $T \in End(V)$ nilpotente de índice k y $\{v_1 + W_{k-1}, \dots, v_m + W_{k-1}\}$ linealmente independiente en $V \diagup W_{k-1}$, y $W_{k-1} = ker(T^{k-1})$.*

Si $U = \langle \{T^i v_j \mid 1 \leq j \leq m, 0 \leq i \leq k-1\}\rangle$, entonces existe un subespacio $S \leq V$ tal que

$$V = U \oplus S, \quad T(S) \subseteq S$$

Demostración: Por inducción en la dimensión de V. Supongamos válida la proposición para espacios de dimensión menor que r.

Sea $\{w_1, \dots, w_r\}$ una base de W, y como $\{v_1, \dots, v_m\}$ es linealmente independiente módulo W_{k-1}, entonces $\{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r\}$ es linealmente independiente en V.

Luego existen elementos de V tales que $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+p}, w_1, \dots, w_r\}$ es una base de V.

Además se tiene que $T \in End(W_{k-1})$ nilpotente de índice $k-1$ y

$$\{Tv_1 + W_{k-2}, \dots, Tv_m + W_{k-2}\} \text{ es linealmente independiente en } W_{k-1} \diagup W_{k-2}$$

Con esta notaciones definimos

$$U_1 = \langle \{T^i v_j \mid 1 \leq j \leq m+p, 1 \leq i \leq k-1\}\rangle \leq W_{k-1}$$

Por hipótesis de inducción tenemos que existe S_1 tal que

$$W_{k-1} = U_1 \oplus S_1 \quad T(S_1) \subseteq S_1,$$

además

$$V = \langle v_1, \ldots, v_{m+p} \rangle \oplus W_{k-1}.$$

de otro modo tenemos

$$\begin{aligned}
V &= \langle v_1, \ldots, v_{m+p} \rangle \oplus U_1 \oplus S_1 \\
&= \langle v_1, \ldots, v_{m+p} \rangle \oplus \langle \{T^i v_j \mid {}^{1\leq j\leq m+p,}_{1\leq i\leq k-1} \} \rangle \oplus S_1 \\
&= \langle \{T^i v_j \mid {}^{1\leq j\leq m+p,}_{0\leq i\leq k-1} \} \rangle \oplus S_1 \\
&= \langle \{T^i v_j \mid {}^{1\leq j\leq m,}_{0\leq i\leq k-1} \} \rangle \oplus \langle \{T^i v_j \mid {}^{m+1\leq j\leq m+p,}_{0\leq i\leq k-1} \} \rangle \oplus S_1 \\
&= \langle \{T^i v_j \mid {}^{1\leq j\leq m,}_{0\leq i\leq k-1} \} \rangle \oplus S \\
&= U \oplus S
\end{aligned}$$

donde

$$S = \langle \{T^i v_j \mid {}^{m+1\leq j\leq m+p,}_{0\leq i\leq k-1} \} \rangle \oplus S_1$$

y cada uno de los sumando es estable, luego S es estable. $\square$

Teorema 42 *Sea $T \in End(V)$, nilpotente de índice k, entonces existe un único entero positivo p tal que:*

1. *Existen p enteros positivos k_i que cumplen con*

$$k = k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_p,$$

además $\sum_{i=1}^{p} k_i = dimV$

2. *Existen p vectores v_i en V tales que*

$$T^{k_i} v_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, p$$

y además

$$B = \left\{ \begin{array}{llll} T^{k_1-1}v_1, & \ldots, & Tv_1, & v_1, \\ T^{k_2-1}v_2, & \ldots, & Tv_2, & v_2, \\ \vdots & & & \\ T^{k_p-1}v_p & \ldots, & Tv_p & v_p \end{array} \right\}$$

es una base de V.

Demostración: La demostración es por inducción en el índice de nilpotencia,

Sea $W_t = ker(T^t)$, y $B = \{w_1, \ldots, w_r\}$ una base de W_{k-1}.

Luego escogemos vectores de modo que

$$\{w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_s\},$$

es una base de V.

De lo cual, se tiene que el conjunto

$$\{v_1 + W_{k-1}, \ldots, v_s + W_{k-1}\}$$

es linealmente independiente en V/W_{k-1}.

Si $U = \left\langle \left\{ T^i v_j \mid \begin{smallmatrix} 1 \leq j \leq s, \\ 0 \leq i \leq k-1 \end{smallmatrix} \right\} \right\rangle$, luego por los resultados anteriores, se tiene que existe S tal que

$$V = W_k = U \oplus S \quad T(S) \subseteq S.$$

Además $T : S \to S$, es nilpotente de índice menor, luego hemos disminuido la dimension del espacio y construido s bloque de Jordan de longitud k, por hipótesis de inducción sobre el espacio S concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 17 *Aplicaremos el teorema en el ejemplo (11), en primer lugar la transformación lineal T no es nilpotente, pero $T - 2Id$, si es nilpotente, ya que $P_T(x) = (x-2)^5$, luego $P_{T-2Id}(x) = x^5$, donde*

$$[T]_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = A$$

luego

1. $V_2^{(1)} = W_1 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1) \rangle$

2. $V_2^{(2)} = W_2 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0) \rangle$

3. $V_2^{(3)} = W_3 = \langle (0, -1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0) \rangle$

Note que

$$V_2^{(3)} = V_2^{(2)} \oplus < e_1 >$$

Sobre la matriz nilpotente hay que trabajar:

$$(T - 2Id)^1(e_1) = (-1, -4, -2, -3, -8), \quad (T - 2Id)^2(e_1) = (0, 0, -1, -1, -1)$$

Luego tenemos que

$$V_2^{(3)} =< \{(A - 2Id)^2 e_1, (A - 2Id)e_1, e_1\} > \oplus S, \; (T - 2Id)(S) \subset S$$

Observación: *Para determinar los vectores que falta, debemos tener presente que necesitamos reordenar y reemplazar algunos vectores en las bases correspondientes, para ello recordemos el siguiente resultado.*

Si $\vec{0} \neq w \in V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$*, tal que* $w = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$*, entonces existe* $\alpha_{i_0} \neq 0$*, de lo cual obtenemos*

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w, v_1, \widehat{v_{i_0}}, \dots, v_r \rangle$$

donde $\widehat{v_{i_0}}$*, indica que el vector se omitido*

Continuemos con el ejemplo, ahora cambiaremos las bases de los espacio $V_i^{(i)}$

Como $(T-2Id)^2(e_1) \in V_2^{(1)}$*, escribimos* $(T-2Id)^2(e_1)$ *en combinación lineal de la base de* $V_2^{(1)}$

$$(0,0,-1,-1,-1) = -1\,(0,-1,1,1,0) - 1\,(0,1,0,0,1)$$

luego

$$V_2^{(1)} = \langle (0,-1,1,1,0)\,, (0,0,-1,-1,-1) \rangle$$

Como $(A-2Id)(e_1) \in V_2^{(2)}$*, escribimos ahora* $(A-2Id)(e_1)$ *en combinación lineal de la base de* $V_2^{(2)}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$V_2^{(2)} = \langle (0,-1,1,1,0)\,, (0,0,-1,-1,-1)\,, (-1,0,1,0,0)\,, (-1,-4,-2,-3,-8) \rangle$$

Por último tenemos a:

$$V_2^{(3)} = \langle (0,-1,1,1,0)\,, (0,0,-1,-1,-1)\,, (-1,0,1,0,0)\,, (-1,-4,-2,-3,-8)\,, (1,0,0,0,0) \rangle$$

Notemos que debemos escoger otro bloque, pero hemos escogido todo lo posible en $V_2^{(3)}$*, ya que existía en la base un solo un vector que no pertenecía a la base de* $V_2^{(2)}$*.*

Si marcamos con color rojo los vectores obtenido, nos percatamos que en la base de $V_2^{(2)}$*, existe un solo vector que no esta en la base de* $V_2^{(1)}$

$$\begin{array}{lccccc} V_2^{(1)}: & * & * & & & \\ V_2^{(2)}: & * & * & * & * & \\ V_2^{(3)}: & * & * & * & * & * \end{array}$$

$$(-1,0,1,0,0) \in V_2^{(2)}, \qquad \textit{donde} \quad (T-2Id)\,(-1,0,1,0,0) = (0,1,0,0,1)$$

Como no hay mas vectores hemos concluido la formación de la base.

$$V_2^{(3)} = \langle (0,0,-1,-1,-1)\,, (-1,-4,-2,-3,-8)\,, (1,0,0,0,0)\,, (0,1,0,0,1)\,, (-1,0,1,0,0) \rangle$$

Es decir la base es:

$$B = \{(0,0,-1,-1,-1), (-1,-4,-2,-3,-8), (1,0,0,0,0), (0,1,0,0,1), (-1,0,1,0,0)\}$$

Comprobemos que la base es la que buscamos, para ello,

1. $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -5 \\ -7 \\ -17 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

3. $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De este modo tenemos que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Teorema 43 *Sea $T \in End(V)$, con V espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$*
Existe una base de Jordan para T si y sólo si $P_T(x)$ tiene todas las raíces en $\mathbb{K}$

La demostración es inmediata aplicando los resultados anteriores, si

$$P_T(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_p)^{m_p},$$

luego

$$\phi_T(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\dots(x-\alpha_p)^{n_p},$$

por teorema 30 tenemos que

$$V = \oplus_i V_{\alpha_i},\ \text{donde } V_{\alpha_i} = \{v\in V \mid Tv = \alpha_i v\}$$

Luego $T-\alpha_i Id : V_{\alpha_i}\to V_{\alpha_i}$ es nilpotente de índice n_i y $dimV_{\alpha_i} = m_i$, en cada uno de estos espacio se aplica el teorema 42, obteniendo finalmente la base

2.3.1. Ejercicios

1. Sea $T(x_1,x_2,x_3) = (x_2+x_3, x_1+x_3, x_2+x_1)$.
   Determinar el polinomio característico de T y el polinomio minimal.
   Determine una base de Jordan.

2. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y T_t en endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ tal que

   $$[T_t]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -t\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -4 & -3\end{bmatrix}$$

   a) Determinar los posibles formas de Jordan de T_t de acuerdo a valor de t.

   b) Encuentre una base de Jordan para T_t cuando sea triangular y no diagonal

3. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y T en endomorfismos de $\mathbb{R}^5$ tal que

   $$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

   Encuentre una base de Jordan para T.

4. Dado $T\in End(\mathbb{C}^6)$ y tenemos que $P_T(x) = (x-5)^2(x+3)^4$, además $\dim\ker(T-5Id) = 1, \dim\ker(T+3Id) = 2, \dim\ker(T+3Id)^2 = 3$. Determinar la forma de la matriz de Jordan para T.

5. Dado $T\in End(\mathbb{R}^4)$. Determinar una base J de Jordan de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_J$ sea una matriz de Jordan .

Sabiendo que la matriz de T en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y su polinomio característico es $P_T(x) = (x-1)^4$.

6. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^7$ y T en endomorfismos de $\mathbb{R}^7$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

además, se tiene que

$$[T]_{\mathcal{C}} - Id \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad ([T]_{\mathcal{C}} - Id)^2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$([T]_{\mathcal{C}} - Id)^3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar una base de Jordan

7. Dado $T \in End(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$, tal que $\mathcal{D} = \{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_2 + e_4\}$

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & -3 & 19 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar una base $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_{\mathcal{J}}$ sea una matriz de Jordan.

8. Sea D el operador derivada de los polinomio de grado menor o igual que n (es decir $D \in End(\mathbb{K}_n[x])$

   a) Demostrar que D es operador nilpotente
   b) ¿Cual es su índice?
   c) Determinar una base de Jordan

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre K , tal que $V = W_1 \oplus W_2$, y la $\dim W_1 = m$, además definimos P de V en W_1 por $P(w_1 + w_2) = w_1$. Calcular el polinomio característico y polinomio minimal de P (proyector).

10. Sea $\sigma \in S_3 = \{\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \ / \ \sigma$ es biyectiva $\}$ definimos la transformación lineal T_σ de $\mathbb{K}^3$ en $\mathbb{K}^3$ por

$$T_\sigma\left(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3\right) = a_1e_{\sigma(1)} + a_2e_{\sigma(2)} + a_3e_{\sigma(3)}$$

    T_σ es diagonalizable para todo $\sigma \in S_3$?

11. Sea $A \in M_n(C)$ nilpotente, se define $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$.

    a) Demostrar que traza$(A) = 0$.
    b) Demostrar $\det\left(\exp(A)\right) = 1 = \exp(\text{traza}(A))$ (Ayuda: escoger base de Jordan).

12. Determinar si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones:

    a) Si A, B son diagonalizables entonces AB es diagonalizable.
    b) Si A es diagonalizable entonces $A - D$ (D diagonal) es diagonalizable.
    c) Si A es diagonalizable entonces A^2 es diagonalizable.

13. Sean $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Determine $P \in M_2(K)$ invertible tal que $P^{-1}AP$ y $P^{-1}BP$ son diagonales.

14. Sea A matriz nilpotente de índice $k > 2$. Demostrar que

$$\dim\ker(A) \ < \ \dim\ker(A^2).$$

15. Sea A nilpotente de índice mayor a 3. Demostrar directamente que

$$\dim\ker A^2 \leq 2\dim\ker A$$

16. Para cada una de las siguientes matrices determinar la forma de Jordan

$$a)\ \begin{bmatrix} -34 & 17 & -43 & 66 & 104 & -134 & 9 & 33 & -18 \\ 77 & -37 & 92 & -140 & -225 & 287 & 0 & 0 & 0 \\ 82 & -40 & 101 & -152 & -242 & 310 & 9 & 33 & -18 \\ 151 & -74 & 181 & -275 & -443 & 565 & 6 & 22 & -12 \\ 45 & -22 & 54 & -82 & -131 & 168 & 3 & 11 & -6 \\ 102 & -50 & 122 & -186 & -299 & 382 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \begin{bmatrix} -81 & 40 & -101 & 154 & 243 & -313 & 9 & 33 & -18 \\ 59 & -28 & 70 & -106 & -173 & 219 & 0 & 0 & 0 \\ 52 & -25 & 66 & -98 & -155 & 199 & 9 & 33 & -18 \\ 122 & -60 & 146 & -221 & -359 & 457 & 6 & 22 & -12 \\ 26 & -13 & 31 & -47 & -75 & 97 & 3 & 11 & -6 \\ 93 & -46 & 111 & -169 & -273 & 349 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$c)\ \begin{bmatrix} 53 & -26 & 62 & -94 & -151 & 193 & 9 & 33 & -18 \\ 108 & -52 & 130 & -198 & -318 & 406 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 7 & -15 & 26 & 41 & -53 & 9 & 33 & -18 \\ 214 & -105 & 258 & -391 & -630 & 804 & 6 & 22 & -12 \\ 53 & -26 & 64 & -97 & -155 & 199 & 3 & 11 & -6 \\ 151 & -74 & 182 & -277 & -445 & 569 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 53 & -26 & 62 & -94 & -151 & 193 & 9 & 33 & -18 \\ 108 & -52 & 130 & -198 & -318 & 406 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 7 & -15 & 26 & 41 & -53 & 9 & 33 & -18 \\ 214 & -105 & 258 & -391 & -630 & 804 & 6 & 22 & -12 \\ 53 & -26 & 64 & -97 & -155 & 199 & 3 & 11 & -6 \\ 151 & -74 & 182 & -277 & -445 & 569 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$e)\ \begin{bmatrix} 6 & -1 & 7 & -11 & -14 & 20 & 9 & 33 & -18 \\ 79 & -37 & 95 & -146 & -230 & 296 & 0 & 0 & 0 \\ 89 & -44 & 108 & -163 & -262 & 334 & 9 & 33 & -18 \\ 198 & -97 & 238 & -363 & -580 & 742 & 6 & 22 & -12 \\ 73 & -36 & 88 & -134 & -214 & 274 & 3 & 11 & -6 \\ 134 & -66 & 161 & -246 & -393 & 503 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$f)\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & 6 & 9 & -11 & 9 & 33 & -18 \\ 81 & -39 & 97 & -148 & -238 & 304 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & -19 & 51 & -74 & -119 & 151 & 9 & 33 & -18 \\ 160 & -79 & 192 & -291 & -470 & 600 & 6 & 22 & -12 \\ 26 & -13 & 31 & -47 & -75 & 97 & 3 & 11 & -6 \\ 97 & -48 & 116 & -177 & -285 & 365 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$g)\ \begin{bmatrix} 43 & -21 & 52 & -79 & -127 & 162 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & -11 & 26 & -40 & -64 & 82 & 0 & 0 & 0 \\ -41 & 20 & -50 & 76 & 12\ 1 & -155 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 7 & -17 & 26 & 41 & -53 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & -9 & 23 & -35 & -55 & 71 & -3 & -11 & 6 \\ 10 & -5 & 12 & -18 & -29 & 37 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3.2. Problemas Propuestos

Problema 11.

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = (3a + 2b)\,x^2 + (-8a + 8b + 2c)\,x + (12a - 9b - 1c)$$

Hallar una base de Jordan para T si existe.

Problema 12.

Sea D el operador derivada de los polinomio de grado menor o igual que 4, es decir $D \in End(\mathbb{K}_4[x])$

1. Demostrar que D es operador nilpotente
2. ¿Cual es su índice?

3. Determinar una base de Jordan

Problema 13.

Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y T en endomorfismos de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Encuentre una base de Jordan para T.

Problema 14.

Sea $\mathcal{C} = \{1 - x^2, 2x, 3 - x^4\}$ una base de $\mathbb{U}$ subespacio de $\mathbb{R}_4[x]$ y T en endomorfismos de $\mathbb{U}$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre una base de Jordan para T.

Problema 15.

Sea $\mathcal{C} = \{(1,0,0,1,1),(1,0,1,2,2),(1,2,1,0,1),(1,1,2,1,2)\}$ base de $\mathbb{U}$ y T una transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & -16 \\ -1 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $P_T(x) = (x-1)^3(x-2)$

Determine una base de Jordan $\mathcal{B}$ de $\mathbb{U}$ para T

Problema 16.

Sean $\mathcal{B} = \{(1,0,1,1,1),(0,1,2,1,3),(0,0,1,2,0),(0,0,0,0,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{U}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

y su polinomio característico es $(x-1)^4$. Encuentre si existe, una base de Jordan para T.

Problema 17.

Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 96 & -21 & 4 & 4 \\ -21 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y su polinomio característico es $(x-2)^4$. Encuentre si existe, una base de Jordan para T.

Problema 18.

Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1-x, 1+x, 1+x-x^2, x^2+x^3\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y su polinomio característico es $(x-1)^4$. Encuentre si existe, una base de Jordan para T.

Problema 19.

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 2 \\ 0 & 12 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

y sus valores propios son 1 y 2.

Encuentre si existe, una base de Jordan para T.

Problema 20.

Dado $T \in End(\mathbb{C}^7)$, tal que $P_T(x) = (x-2)^3(x-3)^4$ polinomio característico, y además $\dim\ker(T-2Id) = 2, \dim\ker(T+3Id)^2 > 3$.

Determinar la posibles forma Jordan para T.

Problema 21.

Sea $T \in End(\mathbb{C}^8)$, tal que $P_T(x) = (x-2)^3(x-3)^5$ polinomio característico, y además $\dim\ker(T-2Id) = 2, \dim\ker(T-3Id)^2 > 3$.

Determinar todas las posibles forma Jordan para T.

Problema 22.

Sea $T \in End(\mathbb{C}^8)$, tal que $\phi_T(x) = (x+2)(x+1)^3$ polinomio minimal,
y además $\dim \ker(T + Id)^3 = 5$.
Determinar las posibles forma Jordan para T.

Problema 23.

Sea $T \in End(\mathbb{C}^9)$, tal que $P_T(x) = (x+2)^4(x-3)^5$ polinomio característico,
además $\dim \ker(T + 2Id) = 2$, $\dim \ker(T - 3Id)^2 > 3$.
Determinar las posibles formas de Jordan para T

Problema 24.

Sea $T \in End(\mathbb{C}^9)$ tal que $P_T(x) = (x-2)^3(x+3)^6$ polinomio característico,
además $\dim \ker(T - 2Id) = 1$, $\dim \ker(T + 3Id)^2 > 4$.
Determinar las posibles formas de Jordan para T

Problema 25.

Sea $T \in End(\mathbb{C}^9)$ tal que $\phi_T(x) = (x+2)(x+1)^3$ polinomio minimal,
y además $\dim \ker(T + Id)^3 = 6$.
Determinar las posibles forma Jordan para T

Problema 26.

Sea $T \in End(\mathbb{C}^{10})$, tal que $P_T(x) = (x-2)^4(x-3)^6$ polinomio característico,
y además $\dim \ker(T - 2Id) = 2$, $\dim \ker(T - 3Id)^2 < 4$.
Determinar todas las posibles forma Jordan para T.

Problema 27.

Sean A nilpotente de índice mayor a 3 y $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r\}$ linealmente independiente en $\ker A^2 \diagup \ker A$.
Demostrar directamente que $\{Av_1, Av_2, ..., Av_r\}$ es linealmente independiente en $\ker A$

Problema 28.

Sea T es una endomorfismo nilpotente de índice 3 de V.
Demostrar directamente que

1. $\ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq \ker T^3 = V$.
2. $\ker T \neq \ker T^2 \neq \ker T^3 = V$.

Problema 29.

Determinar si es verdadero o falso la afirmación justifique

1. Si A es una matriz diagonalizable de $M_n(\mathbb{R})$, entonces que A^n es diagonalizable.

2. Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ entonces existe P matrices invertible tal que PAP^{-1} es una matriz de Jordan.

3. Sea $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que conmutan y AB es nilpotente entonces A o B es nilpotente.

4. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es nilpotente entonces existe P matrices invertible tal que PAP^{-1} es una matriz de Jordan.

5. Si A es una matriz que es conjugada de matriz de Jordan en $M_n(\mathbb{R})$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A^k es diagonalizable.

6. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es nilpotente entonces existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tal que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $P\,(A - \lambda Id)\,P^{-1}$ es una matriz de Jordan.

7. Si $E_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz que tiene un 1 en la posición (i,j) y en el resto es cero, entonces es una matriz nilpotente.

Capítulo 3

Formas τ-lineal

La necesidad de estudiar las formas multilineal esta íntimamente relacionado con cálculo vectorial, una de las funciones multilineal con la cual primero nos relacionamos es el determinante.

En este capitulo enfatizaremos en las bi-lineales y las sesqui-lineales

3.1. Formas Bilineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, tal que $2 \neq 0$ y $f : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ una función.

Se dice que f es una `forma bilineal` si y sólo si:

1. $f(v + \alpha v', w) = f(v, w) + \alpha f(v', w), \quad$ para todo $v, v' \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{K}$.
2. $f(v, w + \alpha w') = f(v, w) + \alpha f(v, w'), \quad$ para todo $v \in V; w, w' \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

Ejemplo 18 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Demostrar que f *es una forma bilineal*

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}^2$, luego tenemos

i)

$$\begin{aligned}
f(x + \alpha x', y) &= f((x_1, x_2) + \alpha(x_1', x_2'), (y_1, y_2)) \\
&= f((x_1 + \alpha x_1', x_2 + \alpha x_2'), (y_1, y_2)) \\
&= (x_1 + \alpha x_1')y_1 + (x_2 + \alpha x_2')y_2 \\
&= x_1 y_1 + \alpha x_1' y_1 + x_2 y_2 + \alpha x_2' y_2 \\
&= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \alpha(x_1' y_1 + x_2' y_2) \\
&= f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \alpha f((x_1', x_2'), (y_1, y_2)) \\
&= f(x, y) + \alpha f(x', y)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f(x, y+\alpha y') &= f((x_1,x_2),(y_1,y_2)+\alpha(y_1',y_2')) \\ &= f((x_1,x_2),(y_1+\alpha y_1', y_2+\alpha y_2')) \\ &= x_1y_1+\alpha x_1y_1'+x_2y_2+\alpha x_2y_2' \\ &= x_1y_1+x_2y_2+\alpha(x_1y_1'+x_2y_2') \\ &= f(x,y)+\alpha f(x,y') \end{aligned}$$

Por lo tanto f es una forma bilineal.

Ejemplo 19 *Sea $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$$

Demostrar que f es una forma bilineal.

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}^2$, luego tenemos

i)

$$\begin{aligned} f(x+\alpha x', y) &= f((x_1,x_2)+\alpha(x_1',x_2'),(y_1,y_2)) \\ &= f((x_1+\alpha x_1', x_2+\alpha x_2'),(y_1,y_2)) \\ &= (x_1+\alpha x_1')y_2-(x_2+\alpha x_2')y_1 \\ &= x_1y_2+\alpha x_1'y_2-x_2y_1-\alpha x_2'y_1 \\ &= x_1y_2-x_2y_1+\alpha(x_1'y_2-x_2'y_1) \\ &= f((x_1,x_2),(y_1,y_2))+\alpha f((x_1',x_2'),(y_1,y_2)) \\ &= f(x,y)+\alpha f(x',y) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f(x, y+\alpha y') &= f((x_1,x_2),(y_1,y_2)+\alpha(y_1',y_2')) \\ &= f((x_1,x_2),(y_1+\alpha y_1', y_2+\alpha y_2')) \\ &= x_1y_2+\alpha x_1y_2'-x_2y_1-\alpha x_2y_1' \\ &= x_1y_2-x_2y_1+\alpha(x_1y_2'-x_2y_1') \\ &= f(x,y)+\alpha f(x,y') \end{aligned}$$

Por lo tanto f es una forma bilineal.

Ejercicio 20 *Demuestre que $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

es una forma bilineal.

Definición 16 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, se denota por*

$$V^* = L(V, \mathbb{K}) = \{f : V \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es lineal } \}.$$

el Espacio Dual.

Ejercicio 21 *Sean $f, g \in V^*$ y*

$$\begin{array}{rccc} f \times g : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (v, w) & \longmapsto & f(v) \cdot g(w) \end{array}$$

Demuestre que $f \times g$ es una forma bilineal.

Ejercicio 22 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f \in V^*$, $g \in W^*$, entonces*

$$\begin{array}{rccc} f \times g : & V \times W & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (v, w) & \longmapsto & f(v) \cdot g(w) \end{array}$$

Demuestre que $f \times g$ es una forma bilineal.

Ejemplo 23 *Un caso particular, del ejercicio anterior lo tenemos con, dada las transformaciones lineales*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{tal que } f(x) = 3x_1 + 2x_2,$$

y

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{tal que } g(y) = 7y_3 + y_2 + 5y_1.$$

Luego

$$\begin{array}{rccc} f \times g : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & (3x_1 + 2x_2)(7y_3 + y_2 + 5y_1) \end{array}$$

es bilineal.

Notación: Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales,

$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) = \{f : V \times W \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es una forma bilineal } \}$$

Propiedad 44 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, $v_0 \in V, w_0 \in W$ entonces*

$$\begin{array}{rccc} f_{(v_0,\ )} : & W & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & w & \longmapsto & f(v_0, w) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_{(\ ,w_0)} : & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & v & \longmapsto & f(v, w_0) \end{array}$$

son transformaciones lineales

Demostración: es inmediata. $\square$

Corolario 45 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, $v_1, v_2, \cdots v_r \in V$ entonces*

$$\begin{array}{rccl} f_{v_1,v_2,\cdots,v_r}: & W & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ & w & \longmapsto & (f(v_1,w), f(v_2,w), \cdot, f(v_r,w)) \end{array}$$

es una transformación lineal.

Propiedad 46 *Sean V, W dos espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) \text{ es un } \mathbb{K} - \text{espacio vectorial.}$$

es decir,

$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) \leq F(V \times W, \mathbb{K})$$

Definición 17 *Sea $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$.*

Se dice que f es una **`forma bilineal simétrica`** *si y sólo si*

$$(\forall v, w \in V)(f(v,w) = f(w,v)).$$

Se dice que f es una **`forma bilineal antisimétrica`** *si y sólo si*

$$(\forall v, w \in V)(f(v,w) = -f(w,v)).$$

Ejemplo 24

1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x,y) = \sum x_i y_i,$$

   luego

$$f(x,y) = \sum x_i y_i = \sum y_i x_i = f(y,x).$$

   Por lo tanto f es una forma bilineal simétrica.

2. *Sea $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, entonces*

$$\begin{array}{rccl} F := f \times f : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x) \cdot f(y) \end{array}$$

   $f \times f$ es una forma bilineal simétrica.

3. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$,*

   Dado $x, y \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$f(y,x) = y_1 x_2 - y_2 x_1 = x_2 y_1 - x_1 y_2 = -(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -f(x,y)$$

   f es una forma bilineal antisimétrica.

4. *Sea $f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$, entonces*

$$\begin{array}{rlcl} G: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x)\cdot g(y) - f(y)\cdot g(x) \end{array}$$

G es una forma bilineal antisimétrica.

Notación: Sean V un $\mathbb{K}$-espacios vectoriales,
$Bil_s(V \times V, \mathbb{K}) = \{f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \mid f$ es una forma bilineal simétrica $\}$.
$Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) = \{f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \mid f$ es una forma bilineal antisimétrica $\}$.

Propiedad 47 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

$$Bil_s(V \times V, \mathbb{K}) \leq Bil(V \times V, \mathbb{K})$$

$$Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) \leq Bil(V \times V, \mathbb{K})$$

Propiedad 48 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $2 \neq 0$.*

$$Bil_s(V \times V, \mathbb{K}) \oplus Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) = Bil(V \times V, \mathbb{K})$$

Demostración: Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$, una forma bilineal, entonces tenemos que

$$\begin{array}{rlcl} f_s: & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) + f(y,x) \end{array}$$

es una forma bilineal simétrica, además

$$\begin{array}{rlcl} f_a: & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) - f(y,x) \end{array}$$

es una forma bilineal antisimétrica.

Luego tenemos que

$$f_s(x,y) + f_a(x,y) = 2f(x,y)$$

Además si f es una forma simétrica y antisimétrica, tenemos que

$$f(y,x) = f(x,y) = -f(y,x)$$

luego la función es nula. $\square$

3.1.1. Matriz Asociada

Sea $f \in L(V, \mathbb{R})$, y $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$, una base de V, entonces dado $v \in V$ existe escalares tales que $v = \sum \alpha_i v_i$ luego

$$f(v) = f\left(\sum \alpha_i v_i\right) = \sum \alpha_i f(v_i) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \cdot \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_r) \end{pmatrix}$$

Ahora consideremos $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, y podemos realizar algo similar, para ello sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ base de V y $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_s\}$ base de W. Luego dado $v \in V, w \in W$ tenemos que existen los escalares tales que

$$v = \sum^{r} \alpha_i v_i; \quad w = \sum^{s} \beta_j w_j,$$

de donde se sigue que

$$f(v, w) = f\left(\sum^{r} \alpha_i v_i, w\right) = \sum^{r} \alpha_i f(v_i, w).$$

Luego

$$[f(v, w)] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \cdot \begin{pmatrix} f(v_1, w) \\ \vdots \\ f(v_r, w) \end{pmatrix} = [v]_B^t \cdot \begin{pmatrix} \sum^{s} \beta_j f(v_1, w_j) \\ \sum^{s} \beta_j f(v_2, w_j) \\ \vdots \\ \sum^{s} \beta_j f(v_r, w_j) \end{pmatrix}$$

$$= [v]_B^t \cdot \begin{pmatrix} f(v_1, w_1) & f(v_1, w_2) & \cdots & f(v_1, w_s) \\ \vdots & & & \\ f(v_r, w_1) & f(v_r, w_2) & \cdots & f(v_r, w_s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}$$

$$= [v]_B^t \cdot [f(v_i, w_j)]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} \cdot [w]_{\mathcal{C}}$$

Lo anterior, nos permite definir lo siguiente con la respectiva propiedad

Definición 18 *Sean $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, $\mathcal{B}$ una base ordenada de V y $\mathcal{C}$ una base ordenada de W.*

Se define la matriz asociada a la forma bilineal por

$$[f]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} = [(f(v_i, w_j))_{ij}]_{r \times s},$$

donde $dim(V) = r$ y $dim(W) = s$.

Si $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$ y $\mathcal{C}$ una base ordenada de V, entonces denotamos simplemente.

$$[f]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}$$

Propiedad 49 *Sea $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, entonces*

$$[f(v,w)] = [v]_{\mathcal{B}}^t \cdot [f]_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}} \cdot [w]_{\mathcal{C}}.$$

Ejemplo 25 *Dada la forma bilineal*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) \end{array}$$

Determina la matriz asociada en la base canónica $\mathcal{C}$.

Solución: Veamos los valores en

$$\begin{array}{rcr} f(e_1,e_1) & = & 1 \\ f(e_1,e_2) & = & 1 \\ f(e_2,e_1) & = & -1 \\ f(e_2,e_2) & = & -1 \end{array}$$

Por lo tanto

$$[f]_{\mathcal{C}} = [b]_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

además tenemos que

$$f(e_1,e_2) = -f(e_2,e_1),$$

y además

$$(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) = [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 26 *Dada la forma bilineal*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x_1y_1 + x_2y_2 \end{array}$$

Determina la matriz asociada en la base canónica $\mathcal{C}$.

Solución: En este caso tenemos que luego

$$[f]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y finalmente se tiene

$$x_1y_1 + x_2y_2 = [x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Propiedad 50 *Sean $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$ y $\mathcal{B}$ una base ordenada de V, entonces*

1. *f es simétrica si y sólo si $[f]_{\mathcal{B}}$ es simétrica*

2. *f es antisimétrica si y sólo si $[f]_{\mathcal{B}}$ es antisimétrica*

Demostración: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V

1. Si f es simétrica,luego $f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i)$, por lo tanto la matriz es simétrica,

   En el otro sentido, si $[f]_{\mathcal{B}}$ es simétrica, luego $f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i)$, sean $x, y \in V$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\left(\sum x_i v_i, \sum y_j v_j\right) = \sum x_i y_j f(v_i, v_j) \\ &= \sum x_i y_j f(v_j, v_i) = f\left(\sum y_j v_j, \sum x_i v_i\right) \\ &= f(y,x) \end{aligned}$$

2. Si f es antisimétrica,luego $f(v_i, v_j) = -f(v_j, v_i)$, por lo tanto la matriz es antisimétrica,

   En el otro sentido, si $[f]_{\mathcal{B}}$ es antisimétrica, luego $f(v_i, v_j) = -f(v_j, v_i)$, sean $x, y \in V$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\left(\sum x_i v_i, \sum y_j v_j\right) = \sum x_i y_j f(v_i, v_j) \\ &= -\sum x_i y_j f(v_j, v_i) = -f\left(\sum y_j v_j, \sum x_i v_i\right) \\ &= -f(y,x) \end{aligned}$$

$\square$

Propiedad 51 *Sean $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, las bases ordenadas $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V y $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ bases ordenadas de W, entonces:*

$$[f]_{\mathcal{B}' \times \mathcal{C}'} = ([Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^t \cdot [f]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} \cdot [Id]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}.$$

En particular se tiene $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}, \mathcal{B}$ bases ordenadas de V, entonces:

$$[f]_{\mathcal{B}} = ([Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

Demostración:

$$f(v,w) = ([v]_{\mathcal{B}})^t \cdot [f]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} \cdot [w]_{\mathcal{C}},$$

pero

$$[w]_{\mathcal{C}} = [Id]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot [w]_{\mathcal{C}'}, \quad [v]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}'},$$

luego

$$f(v,w) = [v]_{\mathcal{B}'}^t \cdot ([Id]_{B'}^{B})^t \cdot [f]_{B \times \mathcal{C}} \cdot [Id]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \cdot [w]_{\mathcal{C}'}$$

con lo cual obtenemos

$$[f]_{B' \times \mathcal{C}'} = ([Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^t \cdot [f]_{\mathcal{B} \times \mathcal{C}} \cdot [Id]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}.$$

$\square$

Observación: Note que la segunda parte de la propiedad anterior define una relación de equivalencia en $M_n(\mathbb{K})$

$$A \sim B \Longleftrightarrow (\exists P \in GL_n(\mathbb{K}))\left(B = P^t \cdot A \cdot P\right)$$

Definición 19 *Sea $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$, tal que la dimensión de V es finita*

Se dice que f es **`no degenerada`** *si y sólo si $det([f]_B) \neq 0$, donde B es una base de V.*

En caso contrario se dice que f es **`degenerada`** *o bien f es una* **`forma degenerada`**.

Ejemplo 27 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2,$$

Demostrar que f es una forma bilineal simétrica no degenerada

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, luego se tiene que:

1. f es simétrica pues

$$\begin{aligned} f(y, x) &= y_1x_1 - y_2x_2 \\ &= x_1y_1 - x_2y_2 \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

2. f es bilineal, basta probar un sola linealidad, ya que es simétrica.

$$\begin{aligned} f(x + \alpha x', y) &= f((x_1, x_2) + \alpha(x'_1, x'_2), (y_1, y_2)) \\ &= f((x_1 + \alpha x'_1, x_2 + \alpha x'_2), (y_1, y_2)) \\ &= (x_1 + \alpha x'_1)y_1 - (x_2 + \alpha x'_2)y_2 \\ &= x_1y_1 + \alpha x'_1y_1 - x_2y_2 - \alpha x'_2y_2 \\ &= x_1y_1 - x_2y_2 + \alpha(x'_1y_1 - x'_2y_2) \\ &= f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \alpha f((x'_1, x'_2), (y_1, y_2)) \\ &= f(x, y) + \alpha f(x', y) \end{aligned}$$

3. f es no degenerada, para ello sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$, luego

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad det([f]_{\mathcal{C}}) = -1 \neq 0$$

Ejercicio 28 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

Demuestre que

1. *f es bilineal*
2. *f es simétrica*
3. *f es degenerada.*

Propiedad 52 *Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $f \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$, D base de W y $B = \{v_1, v_2, \cdots v_r\}$ base de V entonces la matriz asociada a*

$$\begin{array}{rccl} f_{v_1, v_2, \cdots, v_r} : & W & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ & w & \longmapsto & (f(v_1, w), f(v_2, w), \cdot, f(v_r, w)) \end{array}$$

en la base D es

$$[f_{v_1, v_2, \cdots, v_r}]_D^C = [f]_{B \times D}$$

Además si f es no degenerada entonces $f_{v_1, v_2, \cdots, v_r}$ es un isomorfismo

Definición 20 (Ortogonal) *Sean $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ y $S \subseteq V$, no vacío.*
Se define el ortogonal S del siguiente modo:

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid (\forall u \in S)(f(u, v) = 0)\}.$$

Note que la definición incluye el caso que $S \leq V$.

Observación: la definición se puede ampliar a una bilineal arbitraria, en cuyo caso el ortogonal debe diferenciarse entre el ortogonal izquierdo del ortogonal derecho.

Sean $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$ y $S \subseteq V$, no vacío.
Se define el ortogonal a izquierda de S del siguiente modo:

$$S^{\perp}_{izq} = \{v \in V \mid (\forall u \in S)(f(v, u) = 0)\}.$$

Se define el ortogonal a derecha de S del siguiente modo:

$$S^{\perp}_{der} = \{v \in V \mid (\forall u \in S)(f(u, v) = 0)\}.$$

Propiedad 53 *Sea $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$, $U \leq V$ y B es una base de U entonces*

$$U^{\perp} = B^{\perp} \leq V$$

Demostración: Veremos que, si $v \in U^{\perp}$, luego se tiene que $(\forall u \in U)(f(u, v) = 0)$, en particular para un subconjunto, luego $(\forall u \in B)(f(u, v) = 0)$, por lo tanto $v \in B^{\perp}$.

La otra contención se tiene que, dado $v \in B^{\perp}$ luego, $(\forall u \in B)(f(u, v) = 0)$.

Si $x \in U$, se tiene que

$$x = \sum \alpha_i u_i$$

donde $u_i \in B$ y $\alpha_i \in \mathbb{K}$, ya que B es base de U.

$$f(x, v) = f(\sum \alpha_i u_i, v) = \sum \alpha_i f(u_i, v) = 0$$

por lo tanto $v \in U^{\perp}$. □

Ejemplo 29 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

y $U = \langle(1, -1)\rangle$. Determinar el espacio ortogonal a U.

Solución:

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{v \in V \ \mid \ f(v, (1, -1)) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid 0 = 0\} \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Así

$$\langle(1, -1)\rangle^{\perp} = \mathbb{R}^2.$$

Ejemplo 30 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

y $U = \langle(1,1)\rangle$. Determine $U^\perp$.

Solución: Sea $x \in U^\perp$, luego

$$f(x,(1,1)) = x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

luego

$$x \in U^\perp \Leftrightarrow x = \alpha(1,1),$$

por tanto $U^\perp = \langle(1,1)\rangle = U$.

Teorema 54 *Sea $U \leq V$, tal que $dim(V) < \infty$.*
Si $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ simétrica y no degenerada, entonces

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp).$$

Demostración: Sea $B' = \{u_1, \dots, u_r\}$ base de U, por propiedad anterior

$$v \in U^\perp \Leftrightarrow (\forall u \in B')(f(u,v) = 0$$

Al extender la base B' de U a la base B de V, tenemos la matriz asociada correspondiente $[f]_B$, con ello podemos volver a reescribir la condición que $v \in U^\perp$, del siguiente modo

$$f(u_i, v) = [u_i]_B^t \cdot [f]_B \cdot [v]_B = 0$$

Lo cual corresponde a sistema de ecuaciones, cuyas filas de la matriz del sistema son:

$$[u_i]_B^t \cdot [f]_B,$$

Como son filas de una matriz invertible, luego el rango de la matriz del sistema es máximo.

De otro modo las filas son independiente, lo cual también se puede demostrar directamente, del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\sum(\beta_i[u_i]_B^t \cdot [f]_B) &= \vec{0} \\
\left(\sum \beta_i[u_i]_B^t\right) \cdot [f]_B &= \vec{0} \qquad /([f]_B)^{-1} \\
\sum \beta_i[u_i]_B^t &= \vec{0} \\
\\
\left[\sum \beta_i u_i\right]_B^t &= \vec{0} \\
\sum \beta_i u_i &= \vec{0} \\
\beta_i &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $dim(U^\perp) = n - r = \dim(V) - dim(U)$, de donde obtenemos

$$dim(V) = dim(U) + dim(U^\perp).$$

$\square$

Ejemplo 31 *Sea $f : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$, una forma bilineal tal que*

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado el subespacio vectorial

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ x_4 - x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_5 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Determinar $U^{\perp}$ respecto a la forma bilineal f.

Solución: Es fácil obtener que

$$U = \langle (-3,0,1,0,0), (2,-1,0,1,1) \rangle$$

luego

$$B = \{(-3,0,1,0,0), (2,-1,0,1,1)\}$$

es una base de U, entonces

$$U^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f(x,u_1) = 0 \wedge f(x,u_2) = 0\}$$

Determine las ecuaciones, para el primer vector

$$\begin{aligned} 0 &= f(x,u_1) \\ &= [x]^t_{\mathcal{C}} \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [x]^t_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= -4x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 2x_5. \end{aligned}$$

En el otro vector de la base

$$\begin{aligned} 0 &= f(x,u_2) \\ &= [x]^t_{\mathcal{C}} \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [x]^t_{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= 4x_1 + 8x_2 + 6x_4 + 3x_5. \end{aligned}$$

Luego debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -4x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 2x_5 & = & 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_4 + 3x_5 & = & 0 \end{array}\right|$$

Para ello vemos la escalonada del sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 6 & 3 \\ -4 & -4 & 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longmapsto$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longmapsto \Big([\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

luego

$$x_1 = -2x_3 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5,$$

y

$$x_2 = -x_3 - \frac{1}{4}x_5$$

Por lo tanto

$$U^\perp = \langle (2,-1,1,0,0), (-3/2,0,0,1,0), (-1/4,-1/4,0,0,1)\rangle.$$

3.1.2. Diagonalización Formas Bilineales

Definición 21 *Sea $x \in V$ no nulo y $f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$.*

*Se dice que x es un vector **isótopro** si y sólo si $f(x,x) = 0$.*

*En caso contrario se dice que el vector es **anisótropo**, es decir $f(x,x) \neq 0$.*

*Un espacio es **totalmente isótropo** si dados dos vectores en el espacio estos son ortogonales.*

Ejemplo 32 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$.*

Determinaremos los vectores isótropos.

Solución: Sea $x \neq 0$ tal que

$$\begin{array}{c} f(x,x) = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{array}$$

entonces

$$x_1 = x_2 \ \vee \ x_1 = -x_2.$$

Luego el conjunto de vectores isótropos es:

$$\{\alpha(1,1), \beta(1,-1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*\}.$$

Ejemplo 33 *Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3.$$

Determinaremos los vectores isótropos.

Dado $x \in \mathbb{R}^3$

$$f(x,x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

de donde $x_1^2 + x_3^2 = x_2^2$. Por lo tanto el conjunto de vectores isótropos es:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \mid x_1^2 + x_3^2 = x_2^2\}.$$

Propiedad 55 *Sea $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ no nula entonces f tiene un vector anisótropo.*

Demostración: Supongamos que todos los vectores son isótropos, es decir

$$(\forall x \in V)(f(x,x) = 0).$$

Sean $x, y \in V$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= f(x+y, x+y) \\
0 &= f(x+y, x) + f(x+y, y) \\
0 &= f(x,x) + f(y,x) + f(x,y) + f(y,y) \\
0 &= 2f(x,y)
\end{aligned}$$

luego

$$f(x,y) = 0,$$

y esto es una contradicción. $\square$

Corolario 56 *Sea $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ y $B = \{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ base del espacio vectorial V. Si f es no nula entonces existen i, j tales que v_i o $v_i + v_j$ es un vector anisótropo.*

Demostración: Si v_i y $v_i + v_j$ son vector isótropo, entonces $f(v_i, v_j) = 0$, luego la matriz es nula en esta base B, y por ende f es nula $\square$

Teorema 57 (Diagonalización método Ortogonal) *Sea V un espacio de dimensión finita, $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ y x_0 vector anisótropo entonces tenemos que*

1. $\dim < x_0 >^{\perp} = \dim V - 1$.
2. $V = < x_0 > \oplus < x_0 >^{\perp}$.

Demostración: Sea $U = \langle x_0 \rangle$, luego

$$U^{\perp} = \{y \in V \mid f(y, x_0) = 0\},$$

pero notemos lo siguientes

$$f_{(\ ,x_0)} : V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f_{(\ ,x_0)}(y) = f(y, x_0)$$

$f_{(\ ,x_0)}$ es una transformación lineal no nula ya que $T(x_0) = f(x_0, x_0) \neq 0$, luego $Imf_{(\ ,x_0)} = \mathbb{K}$ y por lo tanto $\dim \ker f_{(\ ,x_0)} = \dim V - 1$ de donde

$$\dim(U^{\perp}) = \dim(V) - 1.$$

ya que $U^{\perp} = \ker f_{(\ ,x_0)}$.

Además tenemos que $v \in U \cap U^{\perp}$, luego $v = tx_0$ y $0 = f(v,v) = t^2 f(x_0, x_0)$ con lo cual obtenemos que $t = 0$ y por lo tanto $v = 0$.

Así

$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

Observación: Sea $f \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$, no nula $\dim V < \infty$, por propiedad 55 tenemos que existe x_1 vector anisótropo. Luego por propiedad 57 tenemos que $V =< x_1 > \oplus < x_1 >^{\perp}$ sea B' una base de $U^{\perp}$, entonces $B = \{x_1\} \cup B'$ es una base de V, luego

$$[f]_B = \left[\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & [f]_{B'} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

donde $f : U^{\perp} \times U^{\perp}$ es bilineal y simétrica, $a = f(x_1, x_1)$.

Ejemplo 34 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Determinar $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tal que $P^t A P$ sea diagonal.

Solución: Apliquemos el teorema anterior, para diagonalizar.

Primer Paso: Búsqueda de un vector anisótropo y su ortogonal

$$f(x,y) = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [y]_{\mathcal{C}},$$

y $f(e_1, e_1) = 1$.

Tomemos a $x = e_1$.

$$\langle e_1 \rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(e_1, v) = 0\}$$

como $v \in \mathbb{R}^3$, entonces $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$, luego

$$[e_1]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [v]_{\mathcal{C}} = 0,$$

donde

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 + 3v_2 + v_3 = 0.$$

Por lo tanto

$$\langle e_1 \rangle^{\perp} = \langle 3e_1 - e_2, -e_1 + e_3 \rangle.$$

Segundo Paso Búsqueda de otro vector anisótropo en $\langle e_1 \rangle^{\perp}$ y su espacio ortogonal.

Como $f(-e_1 + e_{3,} - e_1 + e_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,$

es decir, el vector $-e_1 + e_3$, es anisótropo.

Su espacio ortogonal es:

$$\langle -e_1 + e_3\rangle^{\perp} = \{v \in \langle e_1\rangle^{\perp} \mid f(v, -e_1 + e_3) = 0,$$

luego

$$\langle e_1, -e_1 + e_3\rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v, e_1) = 0 \wedge f(v, -e_1 + e_3) = 0\}$$

donde

$$f(v, e_1) = v_1 + 3v_2 + v_3 \quad \text{y} \quad f(v, -e_1 + e_3) = -4v_2 + v_3$$

por tanto $\left.\begin{array}{rcl} v_1 + 3v_2 + v_3 & = & 0 \\ -4v_2 + v_3 & = & 0 \end{array}\right|$ de donde $v_3 = 4v_2, v_1 = -7v_2$, luego

$$\langle -e_1 + e_3\rangle^{\perp} = \langle -7e_1 + e_2 + 4e_3\rangle$$

Ahora $B = \{(1,0,0), (-1,0,1), (-7,1,4)\}$, de donde obtenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = [Id]_B^{\mathcal{C}}$$

Por último

$$\begin{aligned} P^tAP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 35 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determinar $P \in Gl_3(\mathbb{R})$, *tal que* P^tAP *sea diagonal*

Solución: Apliquemos el teorema anterior, para diagonalizar.
Primer Paso: Búsqueda de un vector anisótropo y su ortogonal

$$f(x, y) = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [y]_{\mathcal{C}},$$

y $f(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 2$.

Tomemos a $x = e_1 + e_2$.

$$\langle e_1 + e_2\rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(e_1 + e_2, v) = 0\}$$

como $v \in \mathbb{R}^3$, entonces $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, luego

$$[e_1 + e_2]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [v]_{\mathcal{C}} = 0,$$

donde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 + v_2 + 3v_3 = 0.$$

Por lo tanto

$$\langle e_1 \rangle^\perp = \langle e_1 - e_2, 3e_1 - e_3 \rangle.$$

Segundo Paso Búsqueda de otro vector anisótropo en $\langle e_1 + e_2 \rangle^\perp$ y su espacio ortogonal.

Como $f(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2,$
es decir, el vector $e_1 - e_2$, es anisótropo.

Su espacio ortogonal es:

$$\langle e_1 - e_2 \rangle^\perp = \{v \in \langle e_1 \rangle^\perp \mid f(v, e_1 - e_2) = 0,$$

luego

$$\langle e_1, e_1 - e_2 \rangle^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v, e_1) = 0 \wedge f(v, e_1 - e_2) = 0\}$$

donde

$$f(v, e_1) = v_1 + v_2 + 3v_3 \quad \text{y} \quad f(v, e_1 - e_3) = -v_1 + v_2 + v_3$$

por tanto $\begin{array}{rcl} v_1 + v_2 + 3v_3 & = & 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 & = & 0 \end{array}$ de donde $v_2 = -2v_3, v_1 = -v_3$, luego

$$\langle e_1 - e_2 \rangle^\perp = \langle -e_1 - 2e_2 + e_3 \rangle$$

Ahora $B = \{(1,0,0), (1,-1,0), (-1,-2,1)\}$, de donde obtenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [Id]_B^{\mathcal{C}}$$

Por último

$$\begin{aligned} P^t A P &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 58 (Diagonalización Mediante Operaciones Elementales) *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ simétrica, entonces existe una matriz invertible P tal que P^tAP es diagonal.*

Demostración: Sea A una matriz simétrica
Primer Caso: Supongamos que $a_{11} \neq 0$, aplicando las operaciones elementales filas

$$F_{i1}\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right), \forall i = 2, \ldots, n,$$

y luego las correspondientes operaciones elementales columnas

$$C_{i1}=\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right), \forall i=2,\ldots,n.$$

Luego

$$\left[\prod_{i=2}^{n} F_{i1}\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right)\right]\cdot A\cdot\left[\prod_{i=2}^{n} C_{i1}\left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\right)\right]=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Segundo Caso: Supongamos $a_{11}=0$, pero existe i tal que $a_{ii}\neq 0$, luego aplicamos

$$F_{1i}\cdot A\cdot C_{1i}$$

es una matriz, que en la posición $(1,1)$ el coeficiente $a_{ii}\neq 0$. Luego aplicamos el Primer Caso.

Tercer Caso: Supongamos que todos los $a_{ii}=0$, sean $a_{ij}\neq 0$. Luego aplicamos

$$F_{ij}(1)\cdot A\cdot C_{ij}(1)$$

Es una matriz que en la posición (i,i) tiene por coeficiente a $2a_{ij}\neq 0$. Aplicando el Segundo Caso.

En cada caso se reduce a una matriz del tipo :

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$$

Y por inducción se obtiene que A es diagonalizable. $\square$

Observación: Note que el método inductivo, a concluir la posición $(1,1)$ antes de continuar a la otra posición.

Ejemplo 36 *Sea* $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

Diagonalizar usando operaciones elementales

Solución: Luego

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \underset{F_{31}(-1)}{\overset{F_{21}(-3)}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \underset{C_{31}(-1)}{\overset{C_{21}(-3)}{\longmapsto}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1\\ \hline 1 & -3 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \overset{F_{32}(\frac{-4}{7})}{\longmapsto} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} & 1\\ \hline 1 & -3 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \overset{C_{32}(\frac{-4}{7})}{\longmapsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} & 1 \\ \hline 1 & -3 & \frac{5}{7} & & & \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{7} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 37 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Diagonalizar usando operaciones elementales*

Solución: Solo marcaremos las operaciones filas

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{F_{12}(1)}{\longmapsto} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{C_{12}(1)}{\longmapsto}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{31}(-\frac{3}{2})}{\overset{F_{21}(-\frac{1}{2})}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \underset{C_{31}(-\frac{3}{2})}{\overset{C_{21}(-\frac{1}{2})}{\longmapsto}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \underset{C_{32}(-1)}{\overset{F_{32}(-1)}{\longmapsto}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Observación: Consideremos ahora la base canónica, $\mathcal{C} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, entonces la forma bilineal que tenemos es

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x,y) &= [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [y]_{\mathcal{C}} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$\mathcal{B}(x,y) = x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2.$$

En cambio, si consideramos la base $B = \{(1,1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (-1,-2,1)\}$, entonces la forma bilineal que obtenemos es

Sea $[x]_B = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$ e $[y]_B = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}$ y además

$$[v]_{\mathcal{C}} = [Id]_B^{\mathcal{C}} \cdot [v]_B$$

se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x,y) &= [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot A \cdot [y]_{\mathcal{C}} \\ &= ([Id]_B^{\mathcal{C}} \cdot [x]_B)^t \cdot A \cdot [Id]_B^{\mathcal{C}} \cdot [y]_B \\ &= [x]_B^t \cdot ([Id]_B^{\mathcal{C}})^t \cdot A \cdot [Id]_B^{\mathcal{C}} \cdot [y]_B \end{aligned}$$

Aquí tenemos $\mathcal{B}$, la forma bilineal, escrita en la base B. Tomando el ejemplo anterior

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2y_1' \\ -\frac{1}{2}y_2' \\ -4y_3' \end{bmatrix} \\ &= 2x_1'y_1' - \frac{1}{2}x_2'y_2' - 4x_3'y_3'. \end{aligned}$$

3.1.3. Ejercicios

1. Sea $B : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $B(z,w) = 3z_1w_2 + 3z_2w_1$.

   Demostrar que B es una forma bilineal

2. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ y dada la función $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

   $$f(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

   a) Demostrar que f es una forma bilineal simétrica

   b) ¿Es f una forma no degenerada?

   c) ¿Existen un vectores isótropos?

3. Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por $\{1, \sin x, \cos x\}$ y la función

   $$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

   definida por

   $$f(p,q) = \int_0^{\pi/2} p(x)q(x)dx$$

   a) Demostrar que f es una forma bilineal simétrica

b) ¿Es f una forma no degenerada?

c) Determinar $\langle \cos x\rangle^{\perp}$

4. Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal y los coeficiente de la matriz sean 0 o 1 o -1.

5. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ y dada la función $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(p,q) = \sum_{i=0}^{4} p^{(i)}(0)q^{(i)}(0)$$

a) Demostrar que f es una forma bilineal simétrica

b) ¿Es f una forma no degenerada?

6. Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^4$, tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

a) Determinar una base de $< e_1 + e_2, e_2 + 2e_3 + e_4 >^{\perp}$

b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

7. Sea $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida por

$$B((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

y el espacio vectorial

$$\mathbb{U} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 2x + y - z = 0\}$$

Determinar una base de $\mathbb{U}^{\perp}$.

8. Sea $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida por

$$B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

   y el espacio vectorial

$$\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y - z = 0\}$$

   Determinar una base de $\mathbb{U}^{\perp}$.

9. Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $U =< e_1 + e_4, e_1 - e_3 >$. Determinar $U^{\perp}$

10. Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}_3[x] =< \mathcal{B} >$; con $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

    a) Hallar $< 1 + x, 1 - x^2 >^{\perp}$

    b) Hallar una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $[f]_{\mathcal{B}'}$ es diagonal.

11. Sean V y W espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y m respectivamente.

$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) = \{f : V \times W \to \mathbb{K} \quad | \quad f \text{ es una forma bilineal}\}.$$

    Demostrar $Bil(V \times W, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial y calcular su dimensión

12. Demostrar que dada una forma bilineal simétrica no degenerada, siempre existe un vector no isótropo.

13. Sea g una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

    En la base $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, encuentre de dos maneras diferentes la matriz asociada a g.

14. Sea $V =< \sin(t), \cos(t) >$, h una forma bilineal definida por $h(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. Hallar la matriz de h, con respecto a la base $\{\sin(t), \cos(t)\}$.

15. Sea $V = M(n, \mathbb{C})$. Demostrar que $f(A, B) = n \cdot tr(AB) - tr(A)tr(B)$ es una forma bilineal simétrica sobre V,

    a) ¿f tiene vectores isótropos?

    b) ¿Existe un espacio isótropo para f?

    c) ¿Existe un espacio totalmente isótropos para f?

16. Sea f una forma bilineal sobre un espacio de dimensión finita entonces
    f es antisimétrica si y sólo si la matriz asociada a esta forma es antisimétrica

17. Sea $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$$

    a) Demostrar que B es una forma bilineal

    b) ¿B es una forma simétrica?

    c) Gráficas el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad B((x, y), (x, y)) = 0\}$

18. Sea $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

    a) Demostrar que B es una forma bilineal

    b) ¿B es una forma simétrica?

    c) Gráficas el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad B((x, y), (x, y)) = 0\}$

19. Sea $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

    a) ¿f es degenerada?

    b) ¿f es positiva definida?

    c) Determinar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal y los elementos de ella sean $0, 1, -1$.

3.1.4. Problemas Propuestos

Problema 30.

Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida por

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d, a'x^3 + b'x^2 + c'x + d) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix}.$$

1. Determinar una base de $V =< \{1 - x, 3 + x - 2x^2\} >^{\perp}$.
2. Determinar la matriz asociada a f en la base $\{1 - x, x, 1 + x + x^2, x^3 - x^2\}$

Problema 31.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica definida por

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Determinar la matriz asociada a f en la base $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

Problema 32.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}_3[x] =< \mathcal{B} >$; con $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar $< 1 - x + x^2, 1 - x^2, 2 - x >^{\perp}$

Problema 33.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^5$, tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^5$. Determinar una base de $< e_1 + e_2, e_2 + 2e_3 + e_4 >^{\perp}$

Problema 34.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x+y = z \wedge 3x-2y+z = w\}$.

Determinar $U^{\perp}$

Problema 35.

Sea $V = M_{2\times 1}(\mathbb{R})$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(A, B) = \det(C)$, donde C es la matriz cuya primera columna es A y la segunda columna es B.

1. Demostrar que f es una forma bilineal.
2. Determinar si f es simétrica o antisimétrica ($f(A, B) = -f(B, A)$)
3. Determinar el conjunto vectores isótropos.

Problema 36.

Sean $U, W \leq V$, tales que $V = U\oplus, W$ y $f \in Bil(U \times U, \mathbb{K}), g \in Bil(W \times W, \mathbb{K})$, se define la función dada por $h(u_1 + w_1, u_2 + w_2) = f(u_1, u_2) + g(w_1, w_2)$, con $u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$

1. Demostrar que $h \in Bil(V \times V, \mathbb{K})$
2. Si f, g es simétrica entonces h es simétrica

Problema 37.

Sea $V = M_2(\mathbb{R})$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(A, B) = 2tr(AB) - tr(A)tr(B)$

1. Demostrar que es una forma bilineal simétrica
2. Determinar la matriz asociada en la base $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$
3. Determinar la matriz asociada en la base $\{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$

Problema 38.

Para cada una de las siguientes funciones. Determine si es una forma bilineal (y en caso afirmativo es) simétrica

1. $V = M_2(\mathbb{R})$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(A, B) = \det(AB) - \det(A)\det(B)$
2. $V = \mathbb{R}^3$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$

3.2. Formas Cuadráticas

Definición 22 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.*
Una ***forma cuadrática*** *Q sobre V es una función $Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que*

1. $(\forall t \in \mathbb{K})(\forall v \in V)(Q(t \cdot v) = t^2 Q(v))$
2. $B(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$ *es una forma bilineal simétrica asociada a Q.*

Propiedad 59 *Sea $B \in Bil_s(V \times V, \mathbb{K})$ entonces la función*

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & f(x) = B(x, x) \end{array}$$

es una forma cuadrática

Demostración: Verifiquemos que f es una forma cuadrática, sean $x, y \in V,\ t \in \mathbb{K}$

$$\begin{array}{rcl} f(tx) & = & B(tx, tx) \\ & = & t^2 B(x, x) \\ & = & t^2 f(x). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(x + y) - f(x) - f(y) & = & B(x + y, x + y) - B(x, x) - B(y, y) \\ & = & B(x, x + y) + B(y, x + y) - B(x, x) - B(y, y) \\ & = & B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) - B(x, x) - B(y, y) \\ & = & 2B(x, y) \end{array}$$

luego f es una forma cuadrática. □

Ejemplo 38 *Dada la forma bilineal simétrica tenemos la forma cuadrática asociada*

1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, luego*
$$Q(x) = B(x, x) = x_1^2 + x_2^2.$$
2. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$, $B(x, y) = 2x_1 y_2 - \frac{1}{2} x_2 y_2 - 4x_3 y_3$, luego*
$$Q(x) = 2x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 - 4x_3^2.$$
3. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$, luego*
$$Q(x) = 2x_1 x_2.$$

Propiedad 60 *Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial.*

$$Q(V) = \{q : V \to \mathbb{K} \quad | \quad q \text{ es una forma cuadrática}\}.$$

Entonces $Q(V)$ es un $\mathbb{K}$- espacio vectorial
Además si V tiene dimensión finita entonces $Q(V)$ también tiene dimensión finita

Observación: Si $\mathcal{B}$ es una forma bilineal, entonces tenemos que

$$Q(x) = \mathcal{B}(x,x) = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot [\mathcal{B}]_{\mathcal{C}} \cdot [x]_{\mathcal{C}},$$

si $[\mathcal{B}]_{\mathcal{C}}$ es diagonal tenemos

$$Q(x) = [x]_{\mathcal{C}}^t \cdot \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2, \quad \text{donde } [x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Note que algunos a_{ii} podrían ser ceros.

Propiedad 61 *Sea $Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática, entonces existe B base de V tal que*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2, \qquad [x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{K} - \{0\}$

Observación: Note que por cambio de base el rango de la matriz no cambia, ya que

$$[\mathcal{B}]_B = ([Id]_B^C)^t \cdot [\mathcal{B}]_C \cdot [Id]_B^C,$$

como $[Id]_B^C$ y $([Id]_B^C)^t$ son matrices invertibles, es decir, se están realizando operaciones elementales filas y columnas y a través de ellas el rango se mantiene. Así tenemos

$$Rg([\mathcal{B}]_B) = Rg([\mathcal{B}]_C) = r \leq n.$$

Por lo tanto, en cualquier base el rango de la matriz es el mismo, es decir. Si D y E son dos bases ordenadas tal que la matriz asociada a B es diagonal entonces

$$B(v,v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i b_i^2$$

donde $[\alpha_i]$ y $[\beta_i]$ son las coordenadas de v respecto a las bases D, E respectivamente.

Definición 23 *Se dice que dos formas cuadráticas Q_1, Q_2 son* **`equivalentes`** *si y sólo si existe $\psi \in Aut(V)$ tal que*

$$Q_1(v) = Q_2(\psi(v)), \quad \forall v \in V.$$

Además note que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(v,w) &= \frac{1}{2}[Q_1(v+w) - Q_1(v) - Q_1(w)] \\ &= \frac{1}{2}[Q_2(\psi(v+w)) - Q_2(\psi(v)) - Q_2(\psi(w))] \\ &= \frac{1}{2}[Q_2(\psi(v)+\psi(w)) - Q_2(\psi(v)) - Q_2(\psi(w))] \\ &= \mathcal{B}_2(\psi(v),\psi(w)), \quad \forall v,w \in V. \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$[\mathcal{B}_2] = P^t[\mathcal{B}_1]P,$$

y con respecto a la base

$$[\mathcal{B}_2]_B = [\psi]_B^t[\mathcal{B}_1][\psi]_B.$$

Teorema 62 *Toda forma cuadrática sobre $\mathbb{C}$ de rango r es equivalente a:*

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2.$$

Demostración: Por la propiedad 61, tenemos que existe $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V tal que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2, \qquad [x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Además $\alpha_i = \mathcal{B}(v_i, v_i) = Q(v_i)$.

Sea $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_i^2 = \alpha_i$, reemplazando

$$\lambda_i^2 = Q(v_i),$$

luego

$$1 = \frac{1}{\lambda_i^2} Q(v_i) = Q\left(\frac{v_i}{\lambda_i}\right)$$

definamos ahora una nueva base,

$$B' = \left\{ \frac{v_1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{v_r}{\lambda_r}, \ldots, \frac{v_n}{\lambda_n} \right\},$$

donde $\lambda_i = 1$, con $i = r+1, \cdots, n$.

Dado $x \in V$, tenemos que

$$\begin{array}{rcll} x & = & x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n & = \sum x_i v_i \\ & = & \lambda_1 x_1 \frac{v_1}{\lambda_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{v_n}{\lambda_n} & = \sum \lambda_i x_i \frac{v_i}{\lambda_i} \end{array}$$

con lo cual tenemos

$$[x]_{B'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

luego

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i^2 x_i^2) = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i x_i)^2 = \sum_{i=1}^{r} (x'_i)^2.$$

□

Teorema 63 *Sea Q una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}$, entonces Q es equivalente a una de la forma:*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 \qquad 0 \leq s \leq r$$

donde s es un número que solo depende de Q.

Demostración: Por la propiedad 61, tenemos que existe $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V tal que

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} Q(v_i) x_i^2, \qquad [x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Reordenando la base de modo que, los primeros s elementos cumplen con $Q(v_i')$ son positivos y los últimos $Q(v_i')$ son negativos, definimos los escalares del siguiente modo

$$Q(v_i) > 0, \quad \forall i \leq s, \ \lambda_i = \sqrt{Q(v_i)}, \quad \lambda_i^2 = Q(v_i),$$

y además

$$Q(v_i) < 0, \quad s < i \leq r, \ \lambda_i = \sqrt{-Q(v_i)}, \quad -\lambda_i^2 = Q(v_i).$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^{s} (\lambda_i x_i)^2 - \sum_{i=s+1}^{r} (\lambda_i x_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s} (x_i')^2 - \sum_{i=s+1}^{r} (x_i')^2, \end{aligned}$$

donde

$$[x]_{B'} = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

además $B' = \left\{ \frac{v_1'}{\lambda_1}, \ldots, \frac{v_r'}{\lambda_r}, \ldots, \frac{v_n'}{\lambda_n} \right\}$.

Veamos la unicidad de s. Supongamos que existen dos bases ortogonales tal que

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s'} y_i^2 - \sum_{i=s'+1}^{r} y_i^2 \end{aligned}$$

donde

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B' = \{v_1'', \ldots, v_n''\}$$

y

$$[x]_{B'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad B'' = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

Definamos los espacios

$$W = \langle v_1'', \ldots, v_s'' \rangle, \quad U = \langle v_{s+1}'', \ldots, v_n'' \rangle; \qquad W' = \langle w_1, \ldots, w_{s'} \rangle, \quad U' = \langle w_{s'+1}, \ldots, w_n \rangle$$

Sea $x \in W \cap U'$ supongamos que $x \neq 0$, entonces

Como $x \in W$, $x = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i v_i$, con $x_{i_0} \neq 0$, luego

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 > 0.$$

Por otro lado tenemos $x \in U'$; $x = \sum\limits_{i=s'+1}^{n} y_i w_i$, con $y_{i_0} \neq 0$, luego

$$Q(x) = -\sum_{i=s'+1}^{r} y_i^2 \leq 0,$$

por lo tanto es una contradicción, luego $W \cap U' = \{0\}$. Análogamente $W' \cap U = \{0\}$.

Ahora calculemos las dimensiones de los subespacios

$$dim(W + U') = s + n - s' \leq n$$

$$dim(W' + U) = s' + n - s \leq n$$

De lo cual obtenemos

$$s - s' \leq 0 \quad \wedge \quad s' - s \leq 0,$$

es decir, $s = s'$. □

Definición 24 *Sea $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática de rango r entonces se define la **signatura** de Q igual a $(s, r-s)$, donde s esta definida en el teorema anterior.*

Ejemplo 39 *Determinar la signatura de la forma cuadrática*

$$Q(x) = x_1(x_1 + 3x_2 + x_3) + x_2(3x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(x_1 - x_2 + 2x_3).$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$.

Solución: Notemos que

$$Q(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

Luego la matriz asociada en la base canónica es

$$[f_Q] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinemos la base y la signatura

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto[F_{31}(-1)]{F_{21}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto[C_{31}(-1)]{C_{21}(-3)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xmapsto[C_{32}(-\frac{4}{7})]{F_{32}(-\frac{4}{7})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \xmapsto[C_2(\frac{1}{\sqrt{7}})]{F_2(\frac{1}{\sqrt{7}})}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \xmapsto[C_3(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}})]{F_3(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{\sqrt{161}} & -\frac{4}{\sqrt{161}} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}} \end{bmatrix}$$

Luego tenemos que la signatura es $(2, 1)$ y la base correspondiente es

$$B = \left\{ (1, 0, 0) , \left(\frac{12}{\sqrt{161}}, -\frac{4}{\sqrt{161}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{23}} \right) , \left(-\frac{3}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, 0 \right) \right\}$$

3.2.1. Método de Gauss

Observación: Cada vez que hemos completamos un cuadrado, para obtener centro o un vértice de una cónica, hemos usado este método, de otro modo, al buscar el centro de

$$x^2 + 2x + y^2 + 3y - 7 = 0$$
$$(x + 1)^2 - 1 + (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{2} - 7 = 0$$

El método de Gauss consiste en escribir la expresión como suma de cuadrado, de modo en cada etapa, la variable escogida no figure en el resto de la expresión, para ello desarrollemos el siguiente ejemplo

Dada la forma cuadrática

$$q(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + xz + z^2$$

Iniciaremos en la variable x

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 + xy + y^2 + xz + z^2 \\ &= x^2 + x(y + z) + y^2 + z^2 \\ &= \left(x + \frac{y + z}{2} \right)^2 - \left(\frac{y + z}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

A continuación reordenemos el resto de la expresión y continuamos con la variable y

$$\begin{aligned}
q(x,y,z) &= \left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}\left(y^2-\frac{2}{3}yz\right)+\frac{3}{4}z^2\\
&= \left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}\left[\left(y-\frac{1}{3}z\right)^2-\frac{1}{9}z^2\right]+\frac{3}{4}z^2\\
&= \left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{1}{3}z\right)^2-\frac{1}{12}z^2+\frac{3}{4}z^2\\
&= \left(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{1}{3}z\right)^2+\frac{2}{3}z^2
\end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable correspondiente, tenemos que

$$q(v)=x_1^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{2}{3}x_3^2,$$

donde

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\\ y-\frac{1}{3}z\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

Notemos que podemos encontrar, una base $\mathcal{B}$ que cumpla lo anterior, ya que la matriz es invertible.

$$[B]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad [B]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

tal que

$$[B]_{\mathcal{C}}=[P]^t[B]_{\mathcal{B}}[P],$$

o de otro modo

$$[B]_{\mathcal{B}}=([P]^{-1})^t[B]_C[P]^{-1},$$

Si

$$P=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\qquad [v]_{\mathcal{B}}=P[v]_{\mathcal{C}}$$

o bien

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\qquad [v]_{\mathcal{C}}=P^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$$

Luego

$$\mathcal{B}=\left\{v_1=(1,0,0),v_2=\left(-\frac{1}{2},1,0\right),v_3=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right)\right\}$$

Además

$$B(v_1,v_2)=0,\quad B(v_1,v_3)=0,\quad B(v_3,v_2)=0$$
$$B(v_1,v_1)=1,\quad B(v_2,v_2)=\frac{3}{4},\quad B(v_3,v_3)=\frac{2}{3}.$$

En Resumen, al considerar la forma cuadrática, utilizamos el método de la eliminación de Gauss, de este modo se obtiene la matriz cambio base, y a partir de ella la base correspondiente.
Observación: El caso anterior se puede realizar siempre que una de las variables este al cuadrado, lo cual no siempre es cierto, (cuando la matriz asociada tiene la diagonal nula). En el caso que que no hay una variable al cuadrado se realiza algo similar, paras ello debemos tener presente lo siguiente

$$\begin{aligned} g(x,y) &= xy \\ &= \frac{1}{4}[4xy] \\ &= \frac{1}{4}[(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)] \\ &= \frac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2] \end{aligned}$$

Teorema 64 (Gauss) *Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces existe una base tal que*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2.$$

Demostración: Sea Q una forma cuadrática
Primer Caso: Supongamos que en Q existe un elemento del tipo x_i^2, es decir $a_{ii} \neq 0$ entonces reordenando tenemos

$$Q(x) = \lambda_i x_i^2 + x_i R(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n) + Q'(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots x_n)$$

Donde $R(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n)$ es una expresión lineal que no contiene x_i y $Q'(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots x_n)$ es una forma cuadrática en las otras variables

$$\begin{aligned} Q(x) = \lambda_i &\left(x_i + \frac{1}{2\lambda_i}R(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n)\right)^2 + Q'(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n) \\ &- \frac{1}{4\lambda_i}R^2(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n) \end{aligned}$$

Recordemos que el producto de dos forma lineal es una forma cuadrática, y suma de cuadrática es cuadrática, luego tenemos el siguiente cambio de base

$$\begin{aligned} u_1 &= x_i + \frac{1}{2\lambda_i}R(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_n) \\ u_i &= x_1 \\ &\vdots \\ u_j &= x_j, \quad \forall j \in \{2,\ldots,n\}-\{i\} \end{aligned}$$

Como R es una expresión lineal, luego es un cambio de variables lineal biunívoco.

Reemplazando obtenemos

$$Q(x) = \lambda_i u_1^2 + Q''(u_2, \ldots, u_n)$$

Luego obtenemos la forma cuadrática en una variable menos.
Segundo Caso: Suponemos que en Q no hay elementos del tipo x_i^2, es decir $a_{ii} = 0$ para todo i y $\lambda = a_{12} \neq 0$.

$$Q(x) = \lambda x_1 x_2 + x_1 R(x_3, \ldots, x_n) + x_2 S(x_3, \ldots, x_n) + Q'(x_3, \ldots, x_n)$$

Donde $R(x_3, \ldots, x_n), S(x_3, \ldots, x_n)$ son expresión lineal y $Q'((x_3, \ldots, x_n)$ es una forma cuadrática.

$$\begin{aligned} Q(x) &= \lambda \left(x_1 + \frac{S}{\lambda} \right) \left(x_2 + \frac{R}{\lambda} \right) - \frac{SR}{\lambda} + Q' \\ &= \frac{\lambda}{4} \left[\left(x_1 + x_2 + \frac{S+R}{\lambda} \right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{S-R}{\lambda} \right)^2 \right] - \frac{SR}{\lambda} + Q' \end{aligned}$$

Así tenemos el cambio de base x_i

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 + x_2 + \frac{S+R}{\lambda} \\ u_2 &= x_1 - x_2 + \frac{S-R}{\lambda} \\ &\vdots \\ u_i &= x_i, \quad \forall i \in \{3, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Como R, S son expresión lineal, luego es un cambio de variables lineal biunívoco.

Reemplazando obtenemos

$$Q(x) = \lambda' u_1^2 - \lambda' u_2^2 + Q''(u_3, \ldots, u_n).$$

Inductivamente se concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 40 *Por el método de Gauss, diagonalizar la siguiente forma cuadrática (primer caso)*

$$g(x, y, z, w) = x^2 + xy + xw + z^2 + zw + w^2$$

Solución:

$$\begin{aligned} g(x, y, z, w) &= x^2 + xy + xw + z^2 + zw + w^2 \\ &= x^2 + x(y + z) + z^2 + zw + w^2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}(y + w) \right)^2 - \frac{1}{4}(y + w)^2 + z^2 + zw + w^2 \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + \frac{w}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}(y + w)^2 + \left(z + \frac{w}{2} \right)^2 - \frac{w^2}{4} + w^2 \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + \frac{w}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}(y + w)^2 + \left(z + \frac{w}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} w^2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
x' &= x + \frac{y}{2} + \frac{w}{2} \\
y' &= y + w \\
z' &= z + \frac{w}{2} \\
w' &= w
\end{aligned}$$

de donde

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{C}}$$

Así

$$q(v) = (x')^2 - \frac{1}{4}(y')^2 + (z')^2 + \frac{3}{4}(w')^2.$$

Ejemplo 41 *Por el método de Gauss, diagonalizar la siguiente forma cuadrática (primer caso).*

$$g(x,y,z,w) = xy + xz + z^2 + zy + w^2 + zw$$

Solución:

$$\begin{aligned}
g(x,y,z,w) &= xy + xz + z^2 + zy + w^2 + zw \\
&= z^2 + z(x+y+w) + xy + w^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+y+w}{2}\right)^2 + xy + w^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}[(x+y)^2 + 2(x+y)w + w^2] + xy + w^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2) - \frac{1}{2}(x+y)w + \frac{3}{4}w^2 + xy \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}\left(w^2 - \frac{4}{6}(x+y)w\right) \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{2}{6}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{12}(x+y)^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{1}{3}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}y^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{2}{6}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{3}(x^2 - xy) - \frac{1}{3}y^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{2}{6}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{3}y^2 \\
&= \left(z + \frac{x+y+w}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(w - \frac{2}{6}(x+y)\right)^2 - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{2}y)^2 - \frac{1}{4}y^2
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x' &= z + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{w}{2} \\ y' &= w - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \\ z' &= x - \frac{y}{2} \\ w' &= y \end{aligned}$$

de donde

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{C}}$$

Así

$$q(v) = (x')^2 + \frac{3}{4}(y')^2 - \frac{1}{3}(z')^2 - \frac{1}{4}(w')^2.$$

Ejemplo 42 *Diagonalizar la siguiente forma cuadrática (segundo caso).*

$$q(x, y, z, w) = xy + yz + yw + xz + zw$$

Solución:

$$\begin{aligned} q(x, y, z, w) &= xy + yz + yw + xz + zw \\ &= xy + xz + y(w + z) + zw \\ &= (x + z + w)(y + z) - z(z + w) + zw \\ &= (x + z + w)(y + z) - z^2 \\ &= \frac{1}{4}[(x + y + 2z + w)^2 - (x + w - y)^2] - z^2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x' &= x + y + 2z + w \\ y' &= x - y + w \\ z' &= z \\ w' &= w \end{aligned}$$

el vector w' se escoge con precaución ya que la matriz obtenida debe ser invertible.

Luego tenemos de donde

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{C}}$$

Así

$$q(v) = \frac{1}{4}(x')^2 - \frac{1}{4}(y')^2 - (z')^2$$

Definición 25 *Sea $\mathcal{B} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que $\mathcal{B}$ es* ***positiva definida*** *si y sólo si*

$$(\forall v \in V - \{0\})(\mathcal{B}(v,v) > 0).$$

además si $\mathcal{B}$ es simétrica, decimos que es un ***producto interno real.***

Observación:

1. En el cuerpo de los números complejo.

   Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ bilineal, se tiene

   $$-f(v,v) = f(iv,iv) = (i^2)f(v,v),$$

   luego

   $$f(v,v) > 0 \Leftrightarrow f(iv,iv) < 0, \text{ para todo } v \in V$$

   Por lo tanto es imposible en el caso complejo, que un forma bilineal sea positiva definida.

2. Es relativamente fácil obtener una condición, para que una forma cuadrática sea positiva, cuando la dimensión del espacio real es 2.

   Sean $B = \{v_1, v_2\}$ una base de V, tal que

   $$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

   Apliquemos el método de Gauss

   $$\begin{aligned} q(x,y) &= f((x,y),(x,y)) \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy\right) + cy^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - a\left(\frac{b}{a}y\right)^2 + cy^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ca - b^2}{a}y^2 \\ &= a(x')^2 + \left(\frac{ca - b^2}{a}\right)(y')^2 \end{aligned}$$

   La forma cuadrática es positiva si y sólo si $a > 0,\ ca - b^2 > 0$.

3.2.2. Ejercicios

1. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión n .

   $$Q(V) = \{q : V \to \mathbb{K} \quad | \quad q \text{ es una forma cuadrática}\}.$$

   Demostrar $Q(V)$ es un espacio vectorial y calcular su dimensión

2. Sea Q una forma cuadrática tal que la matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Determine una base ortogonal por el método del suplemento ortogonal

3. Encontrar el tipo (signatura) de la forma cuadráticas y determine una base ortogonal, en cada caso

   a) $q(x, y, z) = xy + yz$
   b) $q(x, y, z) = 2xy - 2y^2 + z^2 + 4xz + 2yz$
   c) $q(x, y, z) = x^2 + xz + z^2$
   d) $q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz + 3yz$
   e) $q(x, y, z, w) = x^2 + 2y^2 - 2zw + wx + 3xy - yw - 6w^2$

4. Dada la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 2\alpha xy - (\alpha^2 + \alpha - \beta)y^2 + 2\beta^2 yz + \beta z^2$, con $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$

   a) Determinar condiciones para α, β tal que Q sea positiva definida
   b) Determinar condiciones para α, β tal que Q sea del tipo (2,1)
   c) Determinar condiciones para α, β tal que Q tenga un espacio isótropo

5. Sea q la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica f.

   Demuestre
   $$4 \cdot f(u, v) = q(u + v) - q(u - v)$$

6. Sea Q una forma cuadrática con n variables
   $$Q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$
   Probar que existen una base tal que
   $$Q = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \cdots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$$

7. Sea A una matriz cuadrada simétricas de orden n con coeficiente reales.

   Si existe k un entero mayor de 2 tal que $A^k = I$, entonces $A^2 = I$.

8. Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la forma bilineal simétrica f_λ sobre $\mathbb{R}^4$, tal que la matriz asociada en la base canónica es
   $$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$
   sea un producto interno

9. Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la forma bilineal simétrica f_λ sobre $\mathbb{R}^4$, tal que la matriz asociada en la base canónica es

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

sea un producto interno.

10. Sea f_λ una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^4$, tal que la matriz asociada en la base canónica es

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

   a) Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que f_λ sea un producto interno.

   b) Determinar $< e_1 + e_2, e_2 + e_4 >^\perp$ para $\lambda = 5$.

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica

   a) Demostrar que f es un definida positiva si y sólo si $f(e_1, e_1) > 0$ y $\det([f]_{\mathcal{C}}) > 0$

   b) ¿El resultado anterior es válido para $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

12. Determinar una base ortogonal de

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x = z + w\}$$

con el producto usual.

13. Considere el producto usual en $\mathbb{R}^4$. Si

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x = y + z + w, \quad x + 2y - 3z = 0\}$$

   a) Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$

   b) Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

14. Considere el producto usual en $\mathbb{R}^4$ Si

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x = y + w, \quad x + 2y - 3z = 0\}$$

   a) Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$

   b) Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

3.2.3. Ejercicios Propuestos

Problema 39.

Encontrar una base ortogonal de la forma cuadrática

$$q(x, y, z, w) = x^2 + 2xy - 2xz - 2yw - 10zw - w^2$$

por el método de Gauss.

Problema 40.

Encontrar el tipo (signatura) de la forma cuadráticas y Determine una base ortogonal

$$q(x, y, z, w) = x^2 + 2xy - 2xz - y^2 + 2yz - 2z^2 - 4yw + 10zw - 11w^2$$

Problema 41.

Encontrar la signatura de la forma cuadrática y determine una base ortogonal, por "Gauss"

$$q(x, y, z, w) = x^2 + 4y^2 - 2zw + wx + 2xy - yw + 6w^2$$

Problema 42.

Encontrar una base ortogonal de la forma cuadrática

$$q(x, y, z, w) = x^2 + 2xy - 2xz + 2yz - 2z^2 - 2yw + 6zw$$

por el método de Gauss.

Problema 43.

Encontrar la signatura de la forma cuadrática y determine una base ortogonal,

$$q(x, y, z, w) = x^2 + 2xy + 4xz + 6yz + 4z^2 - 4yw + 6zw - 3w^2$$

Problema 44.

Sea Q_t una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^4$

$$Q_t(x, y, z, w) = x^2 + 2xy - 2xz + 2yz - 2z^2 - 2yw + 6zw + tw^2$$

a) Encontrar el tipo (o signatura) de la forma cuadráticas Q_t para todo valor de t.

b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $[B_{Q_0}]_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

Problema 45.

Sea $\mathcal{B} = \{1 + x, 2 - x, x + x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y Q una forma cuadrática tal que la matriz asociada en esta base es $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine una base de $\mathbb{R}_2[x]$ de modo que $[Q]_{\mathcal{B}'}$ sea diagonal

Problema 46.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{U} =< \mathcal{B} >$, donde $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 0, 1), (1, 0, 2, 1, 2)\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< (2, 2, 1, 1, 2), (2, 2, 2, 2, 3) >^{\perp}$
2. Determinar la forma cuadrática asociada a f.
3. Determine una base ortogonal por el método de Gauss.

Problema 47.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{U} =< \mathcal{B} >$, donde $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 0, 0), (-1, 1, 1, 0, 0), (-1, 1, 1, 1, 0), (-1, 1, 1, 1, 1)\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< (0, 0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 2, 1) >^{\perp}$
2. Determinar la forma cuadrática asociada a f.
3. Determine una base ortogonal por el método de Gauss.

Problema 48.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{U} =< \mathcal{B} >$, donde $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< (0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1) >^{\perp}$
2. Determinar la forma cuadrática asociada a f.
3. Determine una base ortogonal por el método de Gauss.

Problema 49.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{U} =< \mathcal{B} >$, donde $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0,1),(1,0,0,1,1),(1,0,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$ tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< (0,0,1,0,0),(0,1,0,0,0) >^{\perp}$
2. Determinar la forma cuadrática asociada a f.
3. Determine una base ortogonal por el método de Gauss.

Problema 50.

Sea f una forma bilineal no degenerada sobre $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathcal{B} = \{1, 1+x^2, 1+x^3, 1-x\}$ una base tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Hallar $< 1+x, 1-x^2 >^{\perp}$
2. Hallar una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $[f]_{\mathcal{B}'}$ es diagonal

Problema 51.

Sea $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. ¿ f es degenerada?,
2. ¿ f es positiva ?,

3. Determinar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal y los elementos de ella sean $0, 1, -1$

Problema 52.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, tal que la matriz en la base canónica es:

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & 36 \end{bmatrix}$$

1. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea no degenerada
2. Determinar condiciones para λ tal que f_λ no tenga vectores isótropos

Problema 53.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétricas, tal que la matriz en la base canónica es:

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

1. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea no degenerada
2. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea positiva definida

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que f_λ sea positiva definida.

Problema 54.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_\lambda : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, tal que la matriz en la base canónica es:

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 36 \end{bmatrix}$$

1. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea no degenerada
2. Determinar condiciones para λ tal que f_λ no tenga vectores isótropos

Problema 55.

Sea $V = M_2(\mathbb{R})$, y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $f(A, B) = 2tr(AB) - tr(A)tr(B)$

1. Demostrar que es una forma bilineal simétrica.
2. Determinar la signatura de f
3. Explícita el conjunto vectores isótropos sobre las triangulares superiores

Problema 56.
Determinar si es verdadero o falso la afirmación. **Justifique**

1. Si V y W son espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y m respectivamente entonces
$$Bil(V \times W, \mathbb{K}) \simeq M_{n\times m}(\mathbb{K}).$$
2. El conjunto de vectores isótropos de una forma bilineal es un subespacio vectorial
3. El conjunto de vectores anisótropos de una forma bilineal es un subespacio vectorial
4. Si $C^1[1,3] = \{f : [1,3] \to \mathbb{R} \quad | \quad f' \text{ es derivable en }]1,3[\ \}$
$$D(f,g) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$$
es una forma bilineal simétrica sobre V.
5. Si $V = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad | \quad f \text{ es continua en } [a,b]\}$
$$q(f) = \int_a^b f^2(x)dx.$$
es una forma cuadrática sobre V.
6. Si f es una forma bilineal no degenerada $\mathbb{R}^2$, entonces f no tiene vectores isótropos
7. Si f es una forma bilineal simétrica no degenerada $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces
$$\dim\left(< x >^{\perp}\right) = n - 1.$$
8. Si $Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) = \{f \in Bil(V \times V, \mathbb{K})| \quad (\forall u, v \in V)(f(u,v) = -f(v,u)\}$ entonces
$$Bil_a(V \times V, \mathbb{K}) \leq Bil(V \times V, \mathbb{K})$$
9. Sean $A \in M_2(\mathbb{R})$ y $q(A) = \det(A)$ es una forma cuadrática en $M_2(\mathbb{R})$.
10. Sean $A \in M_2(\mathbb{R})$ y $q(A) = \text{traza}(\mathrm{A}^2)$ es una forma cuadrática en $M_2(\mathbb{R})$.

3.3. Formas Sesquilineales

Sean V, W dos $\mathbb{C}$ espacios vectorial y $f : V \times W \longrightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es una forma sesquilineal si y sólo si

1. $f(v + \alpha v', w) = f(v, w) + \alpha f(v', w)$, para todo $v, v' \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{C}$.
2. $f(v, w + \alpha w') = f(v, w) + \overline{\alpha} f(v, w')$, para todo $v \in V; w, w' \in W$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 43 *Sea $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z, w) = z\overline{w}$$

es una forma sesquilineal, ya que
i)

$$\begin{aligned} f(z + \alpha u, w) &= (z + \alpha u)\overline{w} \\ &= z\overline{w} + \alpha u\overline{w} \\ &= f(z, w) + \alpha f(u, w) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f(z, u + \alpha w) &= z\overline{(u + \alpha w)} \\ &= z(\overline{u} + \overline{\alpha w}) \\ &= z(\overline{u} + \overline{\alpha w}) \\ &= z\overline{u} + \overline{\alpha} z\overline{w}) \\ &= f(z, u) + \overline{\alpha} f(z, w) \end{aligned}$$

Ejercicio 44 *Demuestre que las siguientes funciones son sesquilineales:*

1. *$f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que*
$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$
2. *Sea $V^* = L(V, \mathbb{C}) = \{f : V \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es lineal}\}$, sean $f, g \in V^*$, y*
$$\begin{array}{rccc} f \times \overline{g} : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (v, w) & \longmapsto & f(v) \cdot \overline{g(w)} \end{array}$$
3. *En general: Sean V y W dos $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, y $f \in V^*, g \in W^*$,entonces*
$$\begin{array}{rccc} f \times \overline{g} : & V \times W & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (v, w) & \longmapsto & f(v) \cdot \overline{g(w)} \end{array}$$

   es una forma sesquilineal.

Notación: Sean V y W dos $\mathbb{C}$-espacios vectoriales

$$Ses(V \times W, \mathbb{C}) = \{f : V \times W \longrightarrow \mathbb{C} \ \mid \ f \text{ es una forma sesquilineal}\}$$

Propiedad 65 *Sean V, W espacios vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces se tiene que $Ses(V \times W, \mathbb{C})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.*

Observación: En general se tiene que si $\tau : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un automorfismo de cuerpo tal que $\tau^2 = id.$ entonces las dos definiciones (bilineal y sesquilineal) se unen del siguiente modo.

Sea $f : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ una función. f es una forma $\tau-$lineal si y sólo si:

1. $f(v + \alpha v', w) = f(v, w) + \alpha f(v', w)$, para todo $v, v' \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{K}$.
2. $f(v, w + \alpha w') = f(v, w) + \tau(\alpha) f(v, w')$, para todo $v \in V; w, w' \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

Si τ es la identidad entonces f es bilineal, y si τ es la conjugación en $\mathbb{C}$ es sesquilineal.

Matriz asociada

Si los espacios son de dimensión finita, escogemos bases de los espacios correspondiente y las coordenadas de los vectores en las bases respectivos y procedemos de manera análoga a las formas bilineales, para definir la matriz asociada al par de base.

Definición 26 *Sean $f \in Ses(V \times W, \mathbb{C})$, $\mathcal{B}$ una base ordenada de V y $\mathcal{C}$ una base ordenada de W.*

*Se define la **`matriz asociada`** a la forma sesquilineal por*

$$[f]_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}} = [f(v_i, w_j)_{i,j}] \in M_{r\times s}(\mathbb{C}),$$

donde $dim(V) = r$ y $dim(W) = s$.

Propiedad 66 *Sea $f \in Ses(V \times W, \mathbb{C})$, entonces*

$$[f(v, w)] = [v]^t_{\mathcal{B}} \cdot [f]_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}} \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}}.$$

Propiedad 67 *Sea $f \in Ses(V \times W, \mathbb{C})$, B, B' bases ordenadas de V, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ bases ordenadas de W, entonces:*

$$[f]_{B'\times\mathcal{C}'} = ([Id]^B_{B'})^t \cdot [f]_{B\times\mathcal{C}} \cdot \overline{[Id]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}}.$$

Definición 27 *Sea $f \in Ses(V \times V, \mathbb{C})$; donde la $dim(V)$ es finita. Se dice que f es **`no degenerada`** si y sólo si $det([f]_B) \neq 0$ con B base de V. En caso contrario se dice que f es **`degenerada`**.*

Observación: Sea V un $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ sesquilineal y simétrica

$$f(v, w) = f(w, v) \wedge f(v, iw) = f(iw, v)$$

luego

$$f(v, w) = 0, \text{ para todo } v \in V$$

Por lo tanto es imposible en el caso complejo, que un forma sesquilineal no nula sea simétrica.

Definición 28 *Sea $f \in Ses(V \times V, \mathbb{C})$. Se dice que f es una hermitíana si y sólo si*

$$(\forall v, w \in V)\left(f(v,w) = \overline{f(w,v)}\right).$$

Notación:

$$Ses_h(V \times V, \mathbb{C}) = \{f \in Ses(V \times V, \mathbb{C}) \mid f \text{ es una forma hermitiana}\}$$

Propiedad 68 *Sea V espacios vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces se tiene que $Ses_h(V \times V, \mathbb{C})$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.*

Definición 29 *Sea $f \in Ses_h(V \times V, \mathbb{C})$ y $S \subseteq V$, se define a S ortogonal del siguiente modo*

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid (\forall u \in S)(f(u,v) = 0)\}.$$

Propiedad 69 *Sea $f \in Ses_h(V \times V, \mathbb{C})$ y $U \leq V$ tal que B es una base de U entonces*

$$U^{\perp} = B^{\perp}$$

Teorema 70 *Sea $U \leq V$, donde la $dim(V) < \infty$, $f \in Ses(V \times V, \mathbb{C})$ hermitiana y no degenerada, entonces*

$$dim(V) = dim(U) + dim(U^{\perp}).$$

Observación: Para Diagonalizar una Forma Sesquilineal, se emplean métodos muy similares a los obtenidos para el caso de formas bilineales.

Primer Método: Complemento ortogonal

Segundo Método: Operaciones Elementales

Tercer Método: Gauss.

Primer Método: Complemento ortogonal

Propiedad 71 *Sea $f \in Ses(V \times V, \mathbb{C})$ hermitiana no nula, entonces, existe un vector anisótropo.*

Demostración: Supongamos que todos los vectores son isótropos.

Sean $u, v \in V$

$$\begin{array}{rcl} f(u+v, u+v) &=& f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v) \\ 0 &=& f(u,v) + f(v,u) \\ 0 &=& f(u,v) - \overline{f(u,v)} \\ 2Im(f(u,v) &=& 0 \end{array}$$

Además

$$\begin{array}{rcl} f(u+iv,u+iv) & = & f(u,u)+if(u,v)-if(v,u)+f(v,v) \\ 0 & = & i(f(u,v)-f(v,u)) \\ 0 & = & f(u,v)+\overline{f(u,v)} \\ 2Re(f(u,v) & = & 0 \end{array}$$

Luego $f(u,v)=0$, para todo $u,v\in V$, por lo tanto f es la función nula, no puede ser luego existe un vector anisótropo. $\square$

Propiedad 72 *Sean $f\in Ses(V\times V,\mathbb{C})$ hermitiana, $w\in V$ un vector anisótropo, entonces*

$$<w>\oplus<w>^{\perp}=V.$$

Demostración: Para la primera parte, sea $v\in V$, luego tenemos que

$$f(v-\alpha w,w)=0,\quad \text{para } \alpha=\frac{f(u,v)}{f(w,w)}$$

de lo cual se tiene que $v-\alpha w\in<w>^{\perp}$ y de este modo tenemos que $v=v-\alpha w+\alpha w$, luego

$$<w>+<w>^{\perp}=V.$$

Veamos ahora la intersección, sea $z\in<w>\cap<w>^{\perp}$, luego se tiene que

$$0=f(z,z)=f(tw,tw)=t\overline{t}f(w,w)$$

pero w es anisótropo, es decir, $t\overline{t}=0$, de lo cual $t=0$.

Por lo tanto se tiene

$$V=<w>\oplus<w>^{\perp}.$$

$\square$

Ejemplo 45 *Sea $f:\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$,*

$$f(x,y)=x_1\overline{y}_1+2ix_1\overline{y}_2-2ix_2\overline{y}_1+x_2\overline{y}_2+x_3\overline{y}_3$$

Diagonalizar empleando el método del complemento ortogonal.

Solución: La matriz de f en la base canónica esta dada por

$$[f]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer Paso: Búsqueda de un vector anisótropo

$$f(e_1,e_1)=1.$$

Escogemos $w_1 = e_1$.

Segundo Paso: Determinaremos el espacio ortogonal y un vector anisótropo en este espacio.

$$\langle e_1 \rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid f(e_1, v) = 0\}$$

Sea $v \in \langle e_1 \rangle^{\perp} \subset \mathbb{C}^3$, entonces $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$, tal que

$$f(e_1, v) = 0,$$

de donde

$$0 = f(e_1, v) = \overline{v}_1 + 2i\overline{v}_2 = \overline{v_1 - 2iv_2}$$

es decir

$$\langle e_1 \rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid v_1 - 2iv_2 = 0\}$$

Por lo tanto

$$\langle e_1 \rangle^{\perp} = \langle 2ie_1 + e_2, e_3 \rangle$$

Además $f(e_{3,}e_3) = 1$, es decir, el vector e_3, es anisótropo.

Tercer Paso: Determinaremos el espacio ortogonal y un vector anisótropo en este espacio.

$$\langle e_3 \rangle^{\perp} = \{v \in \langle e_1 \rangle^{\perp} \mid f(v, e_3) = 0\},$$

luego

$$\langle e_1, e_3 \rangle^{\perp} = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid f(v, e_1) = 0 \quad \wedge \quad f(v, e_3) = 0\}$$

por tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} f(v,e_1) & = & 0 \\ f(v,e_3) & = & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} v_1 - 2iv_2 & = & 0 \\ v_3 & = & 0 \end{array}\right]$$

de donde $v_3 = 0, v_1 = 2iv_2$, luego

$$\langle e_1, e_3 \rangle^{\perp} = \langle 2ie_1 + e_2 \rangle$$

además

$$f(2ie_1 + e_2, 2ie_1 + e_2) = 4 + -4 + -4 + 1 = -3$$

Ahora $B = \{(1,0,0), (0,0,1), (2i,1,0)\}$, de donde obtenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [Id]_B^{\mathcal{C}}$$

Por último

$$P^t[f]_{\mathcal{C}}P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2i & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = [f]_B$$

Operaciones Elementales

Este método se basa en la propiedad 67, es decir, si $f \in Ses(V \times W, \mathbb{C})$, B, B' bases ordenadas de V, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ bases ordenadas de W, entonces:

$$[f]_{B'\times\mathcal{C}'} = ([Id]_{B'}^{B})^t \cdot [f]_{B\times\mathcal{C}} \cdot \overline{[Id]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}}.$$

Además notemos lo siguiente:

$$\overline{F_{ij}} = C_{ij}, \quad \overline{F_{ij}}(k) = C_{ij}(\overline{k}), \quad \overline{F_i}(k) = C_i(\overline{k})$$

Ejemplo 46 *Sea* $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + (1+2i)\, x_1\overline{y}_2 + (1-2i)\, x_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3$$

Diagonalizar empleando el método de operaciones elementales.

Solución:

La matriz asociada en la base canónica es $[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 0 \\ 1-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{F_{21}(-1+2i)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{C_{21}(-1-2i)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Luego la matriz cambio de base es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1+2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [Id]_B^{\mathcal{C}}$$

donde la base $B = \{(1,0,0), (-1+2i,1,0), (0,0,1)\}$ y además

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 0 \\ 1-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1-2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

Al igual que el caso anterior debemos tener cuidado, con las diferencia, ahora el buscamos expresiones del tipo $w\overline{w}$, para ello debemos tener presente las siguientes situaciones:

$$\begin{aligned} (a+b)(\overline{a+b}) &= a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b} \\ a\overline{b} + b\overline{a} &= \frac{1}{2}\left((a+b)(\overline{a+b}) - (a-b)(\overline{a-b})\right) \end{aligned}$$

Teorema 73 *Sean V un espacio de dimensión finita y $f : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitíana, entonces existe una base de V tal que f es diagonal.*

Demostración: Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base ordenada de V.

$$f(x,y) = \sum f(v_i, v_j) x_i \overline{y}_j,$$

donde $x = \sum x_i v_i$ e $y = \sum y_i v_i$.

Como f es hermitiana, se tiene que

$$\begin{aligned} f(v_i, v_j) &= a_{ij} = \overline{f(v_j, v_i)} = \overline{a}_{ji} \\ f(v_i, v_i) &= a_{ii} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

es decir.

$$f(x,y) = \sum f(v_i, v_j) x_i \overline{y}_j = \sum a_{ij} x_i \overline{y}_j$$

Primer Caso $a_{11} \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x,x) &= \sum a_{ij} x_i \overline{x}_j \\ &= a_{11} x_1 \overline{x}_1 + x_1 \sum_{j \neq 1} a_{1j} \overline{x}_j + \overline{x}_1 \sum_{i \neq 1} a_{i1} x_i + \sum_{j \neq 1 \neq i} a_{ij} x_i \overline{x}_j \\ &= a_{11} x_1 \overline{x}_1 + x_1 \overline{\sum_{i \neq 1} a_{i1} x_i} + \overline{x}_1 \sum_{i \neq 1} a_{i1} x_i + f_2(x,x) \\ &= a_{11} x_1 \overline{x}_1 + x_1 \overline{L}(x) + \overline{x}_1 L(x) + f_2(x,x) \\ &= a_{11} \left(x_1 + \frac{1}{a_{11}} L(x) \right) \overline{\left(x_1 + \frac{1}{a_{11}} L(x) \right)} + \frac{1}{a_{11}} \left(L(x) \right) \left(\overline{L(x)} \right) + f_2(x,x) \end{aligned}$$

donde

$$L(x) = \sum_{i \neq 1} a_{i1} x_i, \quad f_2(x,y) = \sum_{j \neq 1 \neq i} a_{ij} x_i \overline{y}_j$$

Luego realizando el cambio de base

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \frac{1}{a_{11}} L \\ x'_j &= x_j \end{aligned}$$

hemos concluido con la primera variable, ya que $\frac{1}{a_{11}} \left(L(x) \overline{L}(y) \right) + f_2(x,y)$ es un forma sesquilineal hermitiana en dimensión menor.

Segundo Caso $a_{ii} = 0$ para todo i y $a_{12} \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
&\sum a_{ij}x_i\overline{x}_j \\
= \;& a_{12}x_1\overline{x}_2 + a_{21}x_2\overline{x}_1 + x_1\sum_{j>2}a_{1j}\overline{x}_j + \overline{x}_1\sum_{i>2}a_{i1}x_i + x_2\sum_{j>2}a_{2j}\overline{x}_j + \overline{x}_2\sum_{i>2}a_{i2}x_i + q_2(x) \\
= \;& a_{12}x_1\overline{x}_2 + a_{21}x_2\overline{x}_1 + x_1\overline{\sum_{j>2}a_{j1}x_j} + \overline{x}_1\sum_{i>2}a_{i1}x_i + x_2\overline{\sum_{j>2}a_{j2}x_j} + \overline{x}_2\sum_{i>2}a_{i2}x_i + q_2(x) \\
= \;& a_{12}x_1\overline{x}_2 + a_{21}x_2\overline{x}_1 + x_1\overline{L} + \overline{x}_1L + x_2\overline{M} + \overline{x}_2M + q_2(x) \\
= \;& (a_{12}x_1 + M)\overline{\left(x_2 + \frac{1}{\bar{a}_{12}}L\right)} + \overline{(a_{12}x_1 + M)}\left(x_2 + \frac{1}{\bar{a}_{12}}L\right) - \frac{1}{\bar{a}_{12}}\overline{L}M - \frac{1}{\bar{a}_{12}}L\overline{M} + q_2(x) \\
= \;& (a_{12}x_1 + M)\overline{\left(x_2 + \frac{1}{\bar{a}_{12}}L\right)} + \overline{(a_{12}x_1 + M)}\left(x_2 + \frac{1}{\bar{a}_{12}}L\right) + f_3(x,x) \\
= \;& \frac{1}{2}\left(a_{12}x_1 + x_2 + M + \frac{1}{\bar{a}_{12}}L\right)\overline{\left(a_{12}x_1 + x_2 + M + \frac{1}{\bar{a}_{12}}L\right)} + ... \\
& ... - \frac{1}{2}\left(a_{12}x_1 - x_2 + M - \frac{1}{\bar{a}_{12}}L\right)\overline{\left(a_{12}x_1 - x_2 + M - \frac{1}{\bar{a}_{12}}L\right)} + f_3(x,x)
\end{aligned}
$$

donde

$$L(x) = \sum_{i>2}a_{i1}x_i,\;\; M(x) = \sum_{i>2}a_{i2}x_i,\;\; f_3(x,y) = \sum_{i>2,j>2}a_{ij}x_i\overline{y}_j$$

Luego realizando el cambio de base

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{12}x_1 + x_2 + M(x) + \frac{1}{\bar{a}_{12}}L(x) \\
x_2' &= a_{12}x_1 - x_2 + M(x) - \frac{1}{\bar{a}_{12}}L(x) \\
x_j' &= x_j, \quad j > 2
\end{aligned}
$$

hemos concluido el proceso con las dos la primera variable, inductivamente se concluye la demostración. □

Ejemplo 47 *Sea* $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + 2ix_1\overline{y}_2 - 2ix_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3$$

Diagonalizar empleando el método de Gauss.

Solución: aplicando el primer caso tenemos

$$
\begin{aligned}
f(x,x) &= x_1\overline{x}_1 + 2ix_1\overline{x}_2 - 2ix_2\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3 \\
&= x_1\overline{x}_1 + x_1 2i\overline{x}_2 - \overline{x}_1 2ix_2 + (x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3) \\
&= (x_1 - 2ix_2)(\overline{x}_1 + 2i\overline{x}_2) + 2i2ix_2\overline{x}_2 + (x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3) \\
&= (x_1 - 2ix_2)(\overline{x}_1 + 2i\overline{x}_2) - 4x_2\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3 \\
&= (x_1 - 2ix_2)(\overline{x}_1 + 2i\overline{x}_2) - 3x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3 \\
&= (x_1 - 2ix_2)\overline{(x_1 - 2ix_2)} - 3x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3.
\end{aligned}
$$

El cambio de variable esta dada por

$$u_1 = x_1 - 2ix_2, \quad u_2 = x_2, \quad u_3 = x_3$$

Matricialmente tenemos

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Luego la base de $\mathbb{C}^3$ es $B = \{(1,0,0),(2i,1,0),(0,0,1)\}$, y con ella se tiene que

$$[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 48 *Sea* $f : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = x_1\overline{y}_1 + (1+i)x_1\overline{y}_2 + (1-i)x_2\overline{y}_1 + 3ix_1\overline{y}_3 - 3ix_3\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_4 + 2x_4\overline{y}_2$$

Diagonalizar empleando el método de Gauss.

Solución:

$$\begin{aligned}
&f(x,x) = \\
&= x_1\overline{x}_1 + (1+i)x_1\overline{x}_2 + (1-i)x_2\overline{x}_1 + 3ix_1\overline{x}_3 - 3ix_3\overline{x}_1 + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= x_1\overline{x}_1 + x_1\left[(1+i)\overline{x}_2 + 3i\overline{x}_3\right] + \overline{x}_1\left[(1-i)x_2 - 3ix_3\right] + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= x_1\overline{x}_1 + x_1\overline{\left[(1-i)x_2 - 3ix_3\right]} + \overline{x}_1\left[(1-i)x_2 - 3ix_3\right] + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= (x_1 + (1-i)x_2 - 3ix_3)\,\overline{(x_1 + (1-i)x_2 - 3ix_3)} - ((1-i)x_2 - 3ix_3)\,\overline{((1-i)x_2 - 3ix_3)} \\
&\quad ... + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= u_1\overline{u}_1 - ((1-i)x_2 - 3ix_3)\,\overline{((1-i)x_2 - 3ix_3)} + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= u_1\overline{u}_1 - (3ix_3 - (1-i)x_2)\,\overline{(3ix_3 - (1-i)x_2)} + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= u_1\overline{u}_1 - u_2\overline{u}_2 + 2x_2\overline{x}_4 + 2x_4\overline{x}_2 \\
&= u_1\overline{u}_1 - u_2\overline{u}_2 + (x_2 + x_4)\,\overline{(x_2 + x_4)} - (x_2 - x_4)\,\overline{(x_2 - x_4)} \\
&= u_1\overline{u}_1 - u_2\overline{u}_2 + u_3\overline{u}_3 - u_4\overline{u}_4
\end{aligned}$$

es decir, el cambio de base esta dado por

$$u_1 = x_1 + (1-i)x_2 - 3ix_3, \quad u_2 = (1-i)x_2 - 3ix_3, \quad u_3 = x_2 + x_4, \quad u_4 = x_2 - x_4,$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -3 & 0 \\ 0 & -1+i & 3i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3}i & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Luego la base de $\mathbb{C}^4$ es

$$B = \{(1,0,0,0), (-i,0,-\frac{1}{3}i,0), (-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i,\frac{1}{2}), (-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i,-\frac{1}{2})\},$$

y con ella se tiene que

$$[f]_B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 49 *Sea* $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) = x_1\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_1 + (1-i)x_2\overline{y}_3 + (1+i)x_3\overline{y}_2$$

Diagonalizar empleando el método de Gauss.

Solución: aplicando el segundo caso tenemos

$$\begin{aligned} f(x,x) &= x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_1 + (1-i)x_2\overline{x}_3 + (1+i)x_3\overline{x}_2 \\ &= x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_1 + x_2(1-i)\overline{x}_3 + \overline{x}_2(1+i)x_3 \\ &= (x_1 + (1+i)x_3)(\overline{x}_2) + x_2(\overline{x}_1 + (1-i)\overline{x}_3) \\ &= (x_1 + (1+i)x_3)(\overline{x}_2) + x_2\overline{(x_1 + (1+i)x_3)} \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + (1+i)x_3)\overline{(x_1 + x_2 + (1+i)x_3)} \\ &... - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + (1+i)x_3)\overline{(x_1 - x_2 + (1+i)x_3)} \end{aligned}$$

el cambio de base esta dado por

$$u_1 = x_1 + x_2 + (1+i)x_3, \quad u_2 = x_1 - x_2 + (1+i)x_3, \quad u_3 = x_3$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+i \\ 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1-i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Luego la base de $\mathbb{C}^3$ es

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), (-1-i, 0, 1) \right\},$$

y con ella se tiene que

$$[f]_B \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición 30 *Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitíana.*
Se dice que f es positiva definida si y sólo si

$$(\forall v \in V - \{0\})(f(v, v) > 0).$$

y en este caso decimos que f es un ***`producto interno complejo.`***

3.3.1. Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $f(z, w) = z_1\bar{w}_1 - z_2\bar{w}_2$. Demostrar que f es una forma sesquilineal no degenerada.

2. Sea F una forma hermítica sobre $\mathbb{C}^3$ tal que, la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & i & 1+i \\ -i & 0 & 2 \\ 1-i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

3. Sea $f : V \times V \to \mathbb{C}$, una forma sesquilineal tal que, para todo v en V se tiene $f(v, v) \in \mathbb{R}$, entonces
   Demostrar que f es una forma sesquilineal hermitiana

4. Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la forma sesquilineal hermitiana

$$f_\lambda(z, w) = 3z_1\bar{w}_1 - 2z_2\bar{w}_1 - 2z_1\bar{w}_2 + 9z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3 + \lambda z_4\bar{w}_3 + \lambda z_3\bar{w}_4 + z_4\bar{w}_4$$

   es positiva definida.

5. Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que la forma sesquilineal hermítica f sobre $\mathbb{C}^3$, dada en la base canónica por la matriz

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \overline{\lambda} \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

   sea positiva definida

3.3.2. Ejercicios Propuestos

Problema 57.

Sea F una forma hermítica sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base $B = \{(1,i,1),(1,0,1),(0,i,1)\}$ es:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1-2i \\ 0 & 1+2i & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar matriz asociada a F en la base $B = \{(1,2,1),(1,i,2),(1,0,-1)\}$ de $\mathbb{C}^3$

Problema 58.

Sea F una forma hermítica sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base $B = \{(1,i,1),(1,0,1),(0,i,1)\}$ es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 1-2i \\ 0 & 1+2i & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar matriz asociada a F en la base $D = \{(1,2,i),(1,1,0),(i,0,-1)\}$ de $\mathbb{C}^3$

Problema 59.

Sea F una forma sesquilineal hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 5 \\ 1-i & 2 & i \\ 5 & -i & 7 \end{bmatrix}.$$

Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

Problema 60.

Sea F una forma hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

Problema 61.

Sea F una forma hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 1-2i \\ 0 & 1+2i & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

Problema 62.

Sea F una forma hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & 2+i & 0 \\ 2-i & 1 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$

Problema 63.

Sea $B : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitiana y $D = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[B]_D = \begin{bmatrix} 3 & 1-i & 1 \\ 1+i & 1 & 2+i \\ 1 & 2-i & 11 \end{bmatrix}.$$

Determinar una base de $\mathbb{C}^3$ de modo que la matriz asociada a B en la nueva base sea diagonal.

Problema 64.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 1+2i & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ y

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 \quad | \quad w = y \quad \wedge \quad x = 0\}.$$

1. Determinar una base ortogonal de U
2. Determinar una base de $U^{\perp}$

Problema 65.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 1+2i & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ y

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 \quad | \quad z+w=y \quad \wedge \quad x=z\}.$$

Determinar una base de $U^{\perp}$

Problema 66.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i & 0 \\ 1-i & 3 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 1+2i & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ y

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 \quad | \quad x+2y=3z \quad \wedge \quad 3x-2y=w\}.$$

1. Determinar una base de $U^{\perp}$
2. Encontrar la signatura de f, por el método de Gauss.

Problema 67.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^4$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i & 0 \\ 1-i & 1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 1+2i & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ y

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 \quad | \quad w=y+z \quad \wedge \quad x=0\}.$$

1. Determinar una base ortogonal de U
2. Determinar una base de $U^{\perp}$

Problema 68.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f_\lambda : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitiana, tal que la matriz en la base canónica es:

$$[f_\lambda]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 3-i & 0 \\ 3+i & 12 & \lambda \\ 0 & \lambda & 36 \end{bmatrix}$$

1. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea no degenerada
2. Determinar condiciones para λ tal que f_λ sea un producto interno

Problema 69.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que la forma bilineal hermitiana f_λ sobre $\mathbb{C}^3$, dada en la base canónica por la matriz

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \overline{\lambda} \\ 0 & \lambda & 4 \end{bmatrix}$$

sea producto interno.

Problema 70.

Dada la forma sesquilineal hermitiana $f : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z,w) = 5z_1\bar{w}_1 + 5iz_2\bar{w}_1 - 5iz_1\bar{w}_2 + 8z_2\bar{w}_2 + 2z_3\bar{w}_3 + z_4\bar{w}_3 + z_3\bar{w}_4 + 11z_4\bar{w}_4$$

Determine la signatura.

Problema 71.

Sea $f \in Ses_h(\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4, \mathbb{C})$, definida por

$$f(v,v) = x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + 2iy\bar{z} - 2iz\bar{y} - 2z\bar{z} + (1+2i)y\bar{w} + (1-2i)w\bar{y} + 6w\bar{w}$$

donde $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4$.

Encontrar la signatura de f, por el método de Gauss.

Problema 72.

Sea $f \in Ses_h(\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4, \mathbb{C})$, definida por

$$f(v,v) = x\bar{x} + (1+i)x\bar{y} + (1-i)y\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + (1+2i)y\bar{z} + (1-2i)z\bar{y} - 2z\bar{z} + y\bar{w} + w\bar{y} + 6w\bar{w}$$

donde $v = (x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4$.

Encontrar la signatura de f, por el método de Gauss.

Problema 73.

Sea $f \in Ses_h(\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4, \mathbb{C})$, definida por

$$f(v,v) = x\bar{x} + ix\bar{y} - iy\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + (1+i)y\bar{z} + (1-i)z\bar{y} - 2z\bar{z} + y\bar{w} + w\bar{y} + 6w\bar{w}$$

donde $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$.

Encontrar la signatura de f, por el método de Gauss.

Problema 74.

Sea $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$, encontrar la signatura de la forma sesquilineal hermítica

$$f(v,v) = 4x\bar{x} + 2x\bar{y} + 2y\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + (1+2i)y\bar{z} + (1-2i)z\bar{y} - 2z\bar{z} + 2iy\bar{w} - 2iw\bar{y} - w\bar{w}$$

Problema 75.

Sea $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$, encontrar la signatura de la forma sesquilineal hermítica

$$f(v,v) = x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} - x\bar{z} - z\bar{x} + 2y\bar{y} + 2iy\bar{z} - 2iz\bar{y} - 2z\bar{z} + (1+2i)y\bar{w} + (1-2i)w\bar{y} - 4w\bar{w}$$

Problema 76.

Demostrar que la forma sesquilineal hermitiana

$$f(z,w) = 5z_1\bar{w}_1 + 5iz_2\bar{w}_1 - 5iz_1\bar{w}_2 + 8z_2\bar{w}_2 + 2z_3\bar{w}_3 + z_4\bar{w}_3 + z_3\bar{w}_4 + 11z_4\bar{w}_4$$

es un producto interno sobre $\mathbb{C}^4$.

Problema 77.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que la forma sesquilineal hermitiana

$$f_\lambda(z,w) = 5z_1\bar{w}_1 + 5iz_2\bar{w}_1 - 5iz_1\bar{w}_2 + 5z_2\bar{w}_2 + 8z_3\bar{w}_3 + \lambda z_4\bar{w}_3 + \lambda z_3\bar{w}_4 + 13z_4\bar{w}_4$$

sea un producto interno sobre $\mathbb{C}^4$.

Problema 78.

Sea $B : \mathbb{C}_2[x] \times \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal hermitiana y $D = \{p_1(x) = x + x^2, p_2(x) = 1 + x, p_3(x) = 2 - x\}$ es una base de $\mathbb{C}_2[x]$ y $q(x) = up_1(x) + vp_2(x) + wp_3(x)$

$$B(q(x), q(x)) = \overline{u}v + 2i\overline{u}v + \overline{u}w + \overline{v}u - 2i\overline{v}u + 2\overline{v}w - i\overline{v}w + \overline{w}u + 2\overline{w}v + i\overline{w}v$$

por el método de "Gauss " determinar una base de ortogonal de $\mathbb{C}_2[x]$

3.4. Producto Interno

Definición 31

1. *Sea V un espacio vectorial real, un producto interno sobre V es $<\ ,\ >: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, simétrica y positiva definida, es decir, $<\ ,\ >: V \times V \to \mathbb{R}$ es una función tal que*

   a) $< v + cw, u > = < v, u > + c < w, u >$, *para todo* $u, v, w \in V,\ c \in \mathbb{R}$.

   b) $< v, w > = < w, v >$, *para todo* $v, w \in V$

   c) $< v, v > > 0$, *para todo* $v \in V - \{0\}$

2. *Sea V un espacio vectorial complejo, un producto interno sobre V, forma sesquilineal hermitiana positiva definida, es decir, $<\ ,\ >: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función tal que*

   a) $< v + cw, u > = < v, u > + c < w, u >$, *para todo* $u, v, w \in V,\ c \in \mathbb{C}$.

   b) $< v, w > = \overline{< w, v >}$, *para todo* $v, w \in V$ *(hermitiana)*

   c) $< v, v > > 0$, *para todo* $v \in V - \{0\}$

Observación: En el producto interno complejo se tiene

$$\begin{aligned} < u, v + cw > &= \overline{< v + cw, u >} \\ &= \overline{< v, u > + c < w, u >} \\ &= \overline{< v, u >} + \overline{c}\overline{< w, u >} \\ &= < u, v > + \overline{c} < u, w > \end{aligned}$$

Ejemplo 50

1. *Sean* $x, y \in \mathbb{C}^n$
$$\langle x, y \rangle = \sum x_i \overline{y_i}$$

2. *Sean* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$
$$\langle A, B \rangle = traza(AB^*)$$

3. *Sean* $g, f \in C^0[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua } \}$
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

4. *Sea* $\langle\ ,\ \rangle$ *un producto interno de* V *y* $T : W \longrightarrow V$ *inyectiva, entonces*
$$\langle w_1, w_2 \rangle_T = \langle T(w_1), T(w_2) \rangle$$
es un producto interno de W.

5. *Sea $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ base del V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n, \quad w = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n,$$

entonces se define

$$f(u, w) = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}.$$

Demostrar que f es un producto interno sobre V.

Definición 32 *Sea $v \in V$ un espacio vectorial con producto interno $< \ , \ >$, se define la norma de $v \in V$ a la raíz de $< v, v >$ y se denota por $||v||$, es decir:*

$$||v|| = \sqrt{< v, v >}$$

Propiedad 74 *Sea V un espacio con producto interno, entonces*

$$| < v, w > | \leq ||v|| \cdot ||w||, \text{ para todo } v, w \in V.$$

Demostración: Sean $v, w \in V$, luego

$$\begin{aligned}
&0 \leq < \alpha v - \beta w, \alpha v - \beta w > \\
&0 \leq \alpha\overline{\alpha} < v, v > -\alpha\overline{\beta} < v, w > -\beta\overline{\alpha} < w, v > +\beta\overline{\beta} < w, w > \\
&0 \leq |\alpha|^2||v||^2 - 2Re\ \alpha\overline{\beta} < v, w > +|\beta|^2||w||^2
\end{aligned}$$

Si $\alpha = ||w||^2$, $\beta =< v, w >$, reemplazando tenemos

$$\begin{aligned}
&0 \leq ||w||^4 \cdot ||v||^2 - 2Re\ ||w||^2| < v, w > |^2 + | < v, w > |^2||w||^2 \\
&0 \leq ||w||^2[||w||^2||v||^2 - | < v, w > |^2]
\end{aligned}$$

Luego

$$| < v, w > | \leq ||v|| \cdot ||w||$$

□

Ejercicio 51 *Sean $a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}^*$ entonces*

$$n^2 \leq \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}\right)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2).$$

Propiedad 75 *Sea V un espacio con producto interno, entonces*

1. $||v|| \geq 0$, *para todo $v \in V$.*

2. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$, *para todo $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$.*

3. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$, *para todo $v, w \in V$.*

Demostración: La propiedad tres la tenemos por

$$\begin{aligned} < v+w, v+w > &= ||v||^2 + 2Re \ < v, w > + ||w||^2 \\ &\leq ||v|| + 2||w||||v|| + ||w||^2 \end{aligned}$$

luego

$$||v+w||^2 \leq (||v|| + ||w||)^2$$

□

Definición 33 *Sean V espacio vectorial con producto interno, tal que $S \subseteq V$ y $v, w \in V$ entonces*

1. *v es ortogonal a w si y sólo si $< v, w >= 0$.*
2. *S es un conjunto ortogonal si y sólo si para todo $v, w \in S$ se tiene que $< v, w >= 0$.*
3. *S es un conjunto ortonormal si y sólo si S es ortogonal y $||v|| = 1$ para todo $v \in S$.*

Observación: Note que si $v \in V$ no nulo entonces $||\frac{1}{||v||}v|| = 1$.

Teorema 76 *Todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.*

Demostración: Sea $< \ , \ >$ un producto interno en V y $S \subseteq V$, un conjunto ortogonal tal que

$$\sum \alpha_i s_i = 0, \text{ donde } \alpha_i \in \mathbb{F}, s_i \in S \text{ distintos}$$

calculando tenemos

$$0 =< 0, s_j >=< \sum \alpha_i s_i, s_j >= \sum \alpha_i < s_i, s_j >= \alpha_j < s_j, s_j >$$

luego $\alpha_j = 0$, para todo j. □

Proceso de Ortogonalización

Sea V un espacio con producto interno, y $u, vw \in V$,

1. Sea $\{v, w\}$ linealmente independientes, luego tenemos que los espacios generados son iguales

   $$\langle v, w \rangle = \langle v, w + av \rangle,$$

   buscar un vector ortogonal a v debemos determinar el escalar a tal que

   $$0 =< w + av, v >=< w, v > + a < v, v > .$$

   Con ello tenemos que $a = -\frac{<w,v>}{<v,v>}$, así los espacios generados son iguales

   $$\langle v, w \rangle = \langle v, w - \frac{< w, v >}{< v, v >} v \rangle.$$

2. Para el caso de tres vectores tales que $\{v, w, u\}$ linealmente independientes, tenemos que usando el proceso anterior determinamos $w_1 = w - \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v$.

$$\begin{aligned}\langle v, w, u\rangle &= \langle v, w_1, u\rangle \\ \langle v, w, u\rangle &= \langle v, w_1, u + bv + cw_1\rangle\end{aligned}$$

para determinar b y c

$0 =< u + av + bw_1, v >=< z, v > +a < v, v >$

$0 =< u + av + bw_1, w_1 >=< z, w_1 > +b < w_1, w_1 >.$

Luego
$$w_2 = z - \frac{< z, w >}{< v, v >}v - \frac{< z, w_1 >}{< w_1, w_1 >}w_1.$$

es decir
$$\langle v, w, u\rangle = \langle v, w_1, w_2\rangle.$$

el calculo anterior, es la demostración inductiva del siguiente teorema.

Teorema 77 (Gram-Schmidt, Ortogonalización) *Sea V un espacio con producto interno sobre $\mathbb{K}$y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vectores linealmente independientes de V, entonces existe $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ vectores ortogonales tal que*

$$\langle v_1, \dots, v_n\rangle = \langle w_1, \dots, w_n\rangle$$

donde

$$\begin{aligned}w_1 &= v_1 \\ w_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{< v_k, w_j >}{< w_j, w_j >}w_j, \quad k > 1\end{aligned}$$

Corolario 78 (Gram-Schmidt, Ortonormalización) *Sea V un espacio con producto interno sobre $\mathbb{K}$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vectores linealmente independientes de V, entonces existe $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vectores ortonormales tal que*

$$\langle v_1, \dots, v_n\rangle = \langle u_1, \dots, u_n\rangle$$

donde
$$w_1 = v_1, \quad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{< v_k, w_j >}{< w_j, w_j >}w_j, \quad k > 1$$

y
$$u_k = \frac{1}{||w_k||}w_k$$

Ejemplo 52 *Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$, donde*

$$< (x_1, x_2, x_3)\ ,\ (y_1, y_2, y_3) >= x_1\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_1} + 4x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}.$$

Determinar una base ortogonal de $\mathbb{C}^3$.

Solución: Apliquemos el proceso a la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{C}^3$.

$$w_1 = e_1$$

$$w_2 = e_2 - \tfrac{1}{1}e_1 = e_2 - e_1$$

$$w_3 = e_3 - \tfrac{0}{1}(w_1) + \tfrac{0}{3}(w_2) = e_3$$

de donde $\{e_1, e_2 - e_1, e_3\}$ es base ortogonal.

La base ortonormal esta dada por

$$\left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e_2 - e_1\right), e_3\right\}$$

Definición 34 *Sea $v \in V$, no nulo,la función dada por*

$$\begin{array}{rccc} Proy_v : & V & \longrightarrow & V \\ & w & \longmapsto & \frac{<w,v>}{<v,v>}v \end{array}$$

es llamada ***proyección ortogonal*** *sobre v.*

Observación: Note que $w - Proy_v(w)$ es ortogonal a v.

El siguiente teorema permite definir la distancia de un vector v a $W \leq V$ en dimensión finita

Teorema 79 *Sea V un espacio con producto interno, $v \in V$ y W subespacio de dimensión finita de V, si*

$$A = \{||v - w|| \mid w \in W\},$$

entonces

1. $\min A = ||v - w_0||$, *con $w_0 \in W$ si y sólo si $v - w_0$ es ortogonal a W.*

2. *Si existe* $\min A$ *entonces w_0 es único.*

3. *Si $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base ortonormal de W, entonces* $\min A$ *existe y*

$$w_0 = \sum < v, w_i > w_i.$$

Demostración:

1. Sea $w_0 \in W$ tal que $v - w_0$ ortogonal a W, por demostrar que

$$||v - w_0|| \leq ||v - w||, \quad w \in W,$$

Para ello

$$\begin{aligned} < v - w, v - w > &=< v - w_0 + w_0 - w, v - w_0 + w_0 - w > \\ &=< v - w_0, v - w_0 > + < w_0 - w, w_0 - w > \qquad (*) \end{aligned}$$

Luego
$$||v-w||^2 \geq ||v-w_0||^2.$$

Sea $w_0 \in W$, tal que $\min(A) = ||v-w_0||$, por demostrar que $v-w_0$ es ortogonal a W. Para ello tenemos que

$$||v-w||^2 = ||v-w_0||^2 + 2\operatorname{Re} < v-w_0, w_0-w > + ||w_0-w||^2$$

además
$$||v-w||^2 \geq ||v-w_0||^2$$

Así

$$\begin{array}{rcl} ||w_0-w||^2 + 2Re\langle v-w_0, w_0-w\rangle & \geq & 0 \quad (y = w_0 - w) \\ ||y||^2 + 2Re < v-w_0, y > & \geq & 0 \end{array}$$

Desigualdad que es válida para todo $y \in W$.

Sea $a \in \mathbb{F}$ luego tenemos

$$\begin{array}{rcl} ||ay||^2 + 2Re\langle v-w_0, ay\rangle & \geq & 0 \\ a\overline{a}||y||^2 + 2\overline{a}\operatorname{Re}\langle v-w_0, y\rangle & \geq & 0 \end{array}$$

Escogiendo Supongamos que $y \neq 0$ $a = -\dfrac{< v-w_0, y >}{||y||^2}$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{< v-w_0, y >< y, v-w_0 >}{||y||^4}||y||^2 - \dfrac{1}{||y||^2}2 < y, v-w_0 >< v-w_0, y > & \geq & 0 \\ -| < v-w_0, y > | & \geq & 0 \\ < v-w_0, y > & = & 0. \end{array}$$

2. Unicidad: Sea w_0, u elementos tales que $\min A = ||v-w_0|| = ||v-u||$ usando (*), tenemos

$$\begin{array}{c} ||v-w_0||^2 = ||v-u||^2 + ||u-w_0||^2 \\ ||v-u||^2 = ||v-w_0||^2 + ||u-w_0||^2 \end{array}$$

entonces
$$||u-w_0||^2 = 0 \quad \Rightarrow u = w_0.$$

3. La demostración esta dada por Gram Schmidt.

Definición 35 *Sea V un espacio con producto interno, $v \in V$ y W subespacio de dimensión finita de V.*

Se define la distancia de v a W igual a

$$d(v, W) = \min\{||v-w|| \mid w \in W\}.$$

Ejemplo 53 *Calcular la distancia de* $(1,7,1,9,1)$ *a*

$$W=\{(x,y,z,w,t)\in\mathbb{R}^5 \mid x+-3y-6t-w=0\wedge\ x-z-3t=0\}$$

Solución: Sea $(x,y,z,w,t)\in W$, luego tenemos

$$(x,y,x-3t,t,x-3y-6t)=x(1,0,1,0,1)+y(0,1,0,0,-3)+t(0,0,-3,1,-6)$$

Claramente $\{(1,0,1,0,1),(0,1,0,0,-3),(0,0,-3,1,-6)\}$ es una base de W.
Aplicando Gram Schimdt, y amplificando obtenemos

$$\begin{aligned} w_1 &= (1,0,1,0,1)\\ w_2 &= (1,1,1,0,-2)\\ w_3 &= (12,-9,-9,7,-3)\end{aligned}$$

Luego tenemos que, $v=(1,7,1,9,1)$

$$\begin{aligned} d(v,W) &= ||v-\sum_{i=1}^{3}\frac{<v,w_i>}{<w_i,w_i>}w_i||\\ &= ||(1,7,1,9,1)-(1,0,1,0,1)-(1,1,1,0,-2)||\\ &= ||(-1,6,-1,9,2)||=\sqrt{133}\end{aligned}$$

Definición 36 *Sea* $\phi\neq S\subset V$ *con producto interior,*

$$S^{\perp}=\{u\in V\mid(\forall s\in S)\langle u,s\rangle=0\},$$

es ortogonal a S.

Propiedad 80 *Sea* $\phi\neq S\subset V$ *con producto interior, entonces*

$$S^{\perp}=<S>^{\perp}$$

Ejemplo 54 *1.* $\{0\}^{\perp}=V$

2. $V^{\perp}=\{0\}$

3. $\mathbb{C}^3$ *es un* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial, con el siguiente producto interno*

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle=x_1\overline{y_1}+x_1\overline{y_2}+x_2\overline{y_1}+4x_2\overline{y_2}+x_3\overline{y_3}$$

Sea $L=\langle(1,1,0)\rangle<\mathbb{C}^3$. *Determinar* $L^{\perp}$

Teorema 81 *Sea* W *un subespacio de dimensión finita de un espacio con producto interno* V *entonces*

$$V=W\oplus W^{\perp}.$$

Demostración: Sea $x \in W \cap W^{\perp}$, como $x \in W$ tenemos

$$\langle x, u\rangle = 0 \quad \forall u \in W^{\perp}$$

Pero $x \in W^{\perp}$, por lo tanto $\langle x, x\rangle = 0$, es decir, $x = 0$.

Sea $\{w_1, \ldots, w_k\}$ base ortonormal de W, para $v \in V$, tenemos que

$$w_0 = \sum (v, w_i) v_i \in W,$$

entonces $v - w_0 \in W^{\perp}$. De lo cual

$$v = w_0 + v - w_0 \in W + W^{\perp}$$

luego

$$V = W + W^{\perp},$$

entonces

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

□

Observación: En cada una de las descomposiciones de suma directa se pueden construir los proyectores correspondiente

1. $V = W_1 \oplus W_2$, luego
$$\begin{array}{rlcl} P_1: & V & \longrightarrow & W_1 \\ & w_1 + w_2 & \longmapsto & w_1 \end{array}$$
el proyección 1 luego
$$P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2, \quad P_1P_2 = 0, \quad v = P_1(v) + P_2(v).$$

2. $V = W \oplus W^{\perp}$, luego
$$P : V \longrightarrow W,$$
es la proyección ortogonal, donde
$$P^2 = P, \text{ pero } P^{\perp} = I - P$$

3.4.1. Ejercicios Propuestos

Problema 79.

Sea F un producto interno sobre $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Usar Gram Schmidt para diagonalizar F

Problema 80.

Sea F un producto interno sobre $\mathbb{C}^3$, tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 2 & 1-2i \\ 1 & 1+2i & 12 \end{bmatrix}$$

Usar Gram Schmidt para diagonalizar F

Problema 81.

Sea F un producto interno sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 2+i & 6 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 15 \end{bmatrix}$$

Usar Gram Schmidt para diagonalizar F

Problema 82.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^6$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^6 \quad | \quad x_1 = x_2 + x_3, \quad x_4 = x_2 + 2x_3\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 83.

Sean $p, q \in \mathbb{R}_4[x]$ Considere el producto

$$f(p,q) = \sum_{i=0}^{4} p^{(i)}(0)q^{(i)}(0)$$

y sea

$$\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \in \mathbb{R}_4[x] \quad | \quad a + b - c + d + 2e = 0, \quad 3a + 2b - 5c = 0\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 84.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^5$ y sea

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \quad | \quad x + y - z + w - t = 0, \quad x + 2y - t = 0\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 85.

Sean $p = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,\ q = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$.
Dado el producto

$$f(p, q) = aa' + bb' + cc' + 2dd' + de' + ed' + ee'$$

y

$$\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \in \mathbb{R}_4[x] \quad | \quad a + b - c + 2d + 2e = 0, \quad 3a + 2b - 3c = 0\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 86.

Sean $p = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,\ q = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$
Dado el producto

$$f(p, q) = aa' + bb' + cc' + dd' + de' + ed' + 2ee'$$

y

$$\mathcal{W} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \in \mathbb{R}_4[x] \quad / \quad a + b - c + d + 2e = 0, \quad 3a + 2b - 5c = 0\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 87.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^6$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^6 \quad | \quad x_1 = x_2 + x_3, \quad x_4 = x_2 + 2x_3\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$

2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 88.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^6$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^6 \quad / \quad x_1 = x_2, \quad x_3 = x_4\}$$

1. Determinar una base ortogonal de $\mathcal{W}$
2. Determinar una base de $\mathcal{W}^\perp$

Problema 89.

Sea $\mathcal{C}$ la base canónica $\mathbb{R}^4$ y f una forma bilineal simétrica tal que

$$[f]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Demuestre que f es un producto interno
2. Aplicar Gram Schmidt a $\{(1,1,0,1)(1,2,1,0),(1,2,1,1\}$

Problema 90.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^5$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^5 \quad / \quad x_1 = x_2 + x_3, \quad x_4 = x_2 - x_3\}$$

Calcular la distancia de $(1,1,1,-1,-1)$ a $\mathcal{W}$

Problema 91.

Considere el producto usual en $\mathbb{R}^6$ y

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^6 \quad / \quad x_1 = x_2 + x_3, \quad x_4 = x_2 + 2x_3\}$$

Calcular la distancia de $(1,1,2,3,1,2)$ a W

Problema 92.

Determinar condiciones para $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la forma bilineal simétrica f_λ sobre $\mathbb{R}^4$, dada en la base canónica por la matriz

$$[f_\lambda]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

sea un producto interno.

Problema 93.

Determinar si es verdadero o falso la afirmación justifique

1. Si f es una forma sesquilineal hermitiana no degenerada $\mathbb{C}^n$ entonces f es un producto interno.

2. Sean $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ y $f(A,B) = traza(AB^*)$ es una forma sesquilineal hermitiana

3.4.2. Operadores Adjuntos

Teorema 82 *Sean V un espacio de dimensión finita y f una forma bilineal sesquilineal no degenerada y $T \in V^* = L(V, \mathbb{K})$ Entonces existe un único vector $w \in V$ tal que $T(v) = f(v,w)$, para todo v en V.*

Demostración: Supongamos que f es simétrica (hermitiana) y como es no degenerada existe $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortogonal de vectores anisótropos de V.

$$w = \sum \frac{\overline{T(v_i)}}{f(v_i, v_i)} v_i.$$

veremos que

$$T(v) = f(v,w)$$

$$\begin{aligned}
T(v) &= T(\sum \alpha_i v_i) \\
&= \sum \alpha_i T(v_i) \\
&= \sum \alpha_i T(v_i) \frac{f(v_i, v_i)}{f(v_i, v_i)} \\
&= \sum f(\alpha_i v_i, \overline{\frac{T(v_i)}{f(v_i, v_i)}} v_i) \\
&= \sum f(\alpha_i v_i, w) \\
&= f(\sum \alpha_i v_i, w) \\
&= f(v,w)
\end{aligned}$$

En general el vector w se obtiene al considerar el siguiente sistema

$$[v]_B^t \, [f]_B \, [w]_B = [Tv]_B$$

donde $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, y con ellos el siguiente sistema

$$A\,[\alpha_i] = [b_i]$$

con $[w]_B = [\alpha_i]\,, A = [f]_B\,, b_i = T(v_i)$, luego

$$[\alpha_i] = A^{-1}\,[b_i]$$

Para la unicidad tenemos:

$$T(v) = f(v, w) = f(v, u)(\forall v \in V),$$

luego

$$f(v, w - u) = 0 \quad \forall v \in V,$$

de lo cual $w - u = 0$, así $w = u$. $\square$

Ejemplo 55 *Sea $\mathbb{C}^3$ con la forma sesquilineal canónica.*

$$\begin{array}{cccc} L: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C} \\ & (z_1, z_2, z_3) & \to & 3z_1 - z_2 + iz_3 \end{array}$$

Determinar w del teorema anterior

Solución: Sabemos que $w = z_1e_1 + z_2e_2 + e_3z_3$ y cumple con

$$L(v) = f(v, w)$$

Evaluando en los elementos de la base, tenemos las siguiente igualdades

$$\begin{array}{c} L(e_1) = f(e_1, w) = \overline{z_1} \\ L(e_2) = f(e_2, w) = \overline{z_2} \\ L(e_3) = f(e_3, w) = \overline{z_3} \end{array}$$

calculando obtenemos que

$$3 = f(e_1, w), \qquad -1 = f(e_2, w), \qquad i = f(e_3, w)$$

es decir,

$$w = 3e_1 - 1e_2 - ie_3$$

Ejemplo 56 *Sean $L \in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$, tal que $L(z_1, z_2, z_3) = 3z_1 - z_2 + iz_3$ y la forma sesquilineal tal que en la base canónica matriz asociada es*

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar w del teorema anterior

Solución: Sea $w = xe_1 + ye_2 + ze_3$, como se cumple

$$L(v) = f(v, w)$$

Evaluando en los elementos de la base, tenemos las siguiente igualdades

$$L(e_1) = f(e_1, w), \quad L(e_2) = f(e_2, w), \quad L(e_3) = f(e_3, w)$$

calculando obtenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 1\overline{x} + (1+i)\overline{y} & = & 3 \\ (1-i)\overline{x} + 3\overline{y} & = & -1 \\ \overline{z} & = & i \end{array}\right|$$

es decir, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 10-i \\ y & = & -4-3i \\ z & = & -i \end{array}\right|$$

con lo cual obtenemos:

$$w = (10-i)e_1 - (4+3i)e_2 - ie_3$$

Teorema 83 *Sean V un espacio de dimensión finita, f una forma bilineal (sesquilineal) no degenerada, entonces existe un isomorfismo dado por*

$$\begin{array}{rcccccc} \phi: & V & \to & L(V,\mathbb{K}) & & & \\ & x & \rightsquigarrow & x^* = f_x: & V & \to & \mathbb{K} \\ & & & & v & \rightsquigarrow & f(v,x) \end{array}$$

Teorema 84 *Sean V un espacio de dimensión finita, f una forma bilineal (sesquilineal) no degenerada y $T: V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces existe un único operador lineal T^* sobre V tal que*

$$f(Tv, w) = f(v, T^*w).$$

Demostración: Sea $T: V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $w \in V$

$$\begin{array}{rccl} L: & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & v & \longmapsto & L(v) = f(Tv, w) \end{array}$$

es una transformación lineal.

Para ello, sean $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} L(u+\alpha v) &= f(T(u+\alpha v), w) \\ &= f(Tu + \alpha Tv, w) \\ &= f(Tu, w) + \alpha f(Tv, w) \\ &= L(u) + \alpha L(v) \end{aligned}$$

Entonces existe un único w_0 tal que $f(Tv,w) = f(v,w_0)$, definimos a

$$w_0 = T^*(w)$$

luego para cada $v,w \in V$ se cumple que

$$f(Tv,w) = f(v,T^*w).$$

Usando este propiedad obtenemos la linealidad

$$\begin{aligned} f(v,T^*(w+aw')) &= f(Tv,w+aw') \\ &= f(Tv,w) + \overline{a}f(Tv,w') \\ &= f(v,T^*w) + \overline{a}f(v,T^*w') \\ &= f(v,T^*w) + f(v,aT^*w') \\ &= f(v,T^*w + aT^*w') \end{aligned}$$

por unicidad tenemos que

$$T^*(w+aw') = T^*(w) + aT^*(w')$$

□

Definición 37 *Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal o sesquilineal no degenerada y T un endomorfismo de V.*

Se dice que T tiene un **`operador adjunto`** *sobre V si existe un operador lineal T^* sobre V tal que*

$$f(Tv,w) = f(v,T^*w), \quad (\forall v,w \in V).$$

Observación: El operador adjunto depende de T y de la forma bilineal o sesquilineal.

Ejemplo 57 *Sea $\mathbb{C}^3$ con la forma sesquilineal usual.*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (z_1,z_2,z_3) & \to & (z_1-z_2, z_3-iz_1, z_2) \end{array}$$

Determinar T^*.

Solución: Sabemos que se cumple

$$f(Tv,w) = f(v,T^*w)$$

En la base canónica, se tiene

$$f(Te_i,e_j) = f(e_i,T^*e_j)$$

Evaluando en $e_j = e_1$ tenemos las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} f(Te_1,e_1) &= f(e_1,T^*e_1) \\ f(Te_2,e_1) &= f(e_2,T^*e_1) \\ f(Te_3,e_1) &= f(e_3,T^*e_1) \end{aligned}$$

calculando obtenemos que

$$1 = f(e_1, T^*e_1), \quad -1 = f(e_2, T^*e_1), \quad 0 = f(e_3, T^*e_1).$$

es decir,

$$T^*e_1 = e_1 - e_2$$

Ahora evaluando en e_2 tenemos las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} f(Te_1, e_2) &= f(e_1, T^*e_2) \\ f(Te_2, e_2) &= f(e_2, T^*e_2) \\ f(Te_3, e_2) &= f(e_3, T^*e_2) \end{aligned}$$

calculando obtenemos que

$$-i = f(e_1, T^*e_2), \quad 0 = f(e_2, T^*e_2), \quad 1 = f(e_3, T^*e_2).$$

Así

$$T^*e_2 = ie_1 + e_3$$

Finalmente evaluando en e_3 y tenemos las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} f(Te_1, e_3) &= f(e_1, T^*e_3) \\ f(Te_2, e_3) &= f(e_2, T^*e_3) \\ f(Te_3, e_3) &= f(e_3, T^*e_3) \end{aligned}$$

calculando obtenemos que

$$0 = f(e_1, T^*e_3), \quad 1 = f(e_2, T^*e_3), \quad 0 = f(e_3, T^*e_3)$$

es decir,

$$T^*e_3 = e_2$$

Con lo cual la transformación esta definida por

$$\begin{array}{cccc} T^*: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (z_1, z_2, z_3) & \to & (z_1 + iz_2, z_3 - z_1, z_2) \end{array}.$$

Observación: En el ejercicio anterior, también lo podemos desarrollar matricialmente.

Para ello sabemos que

$$f(v, w) = [v]^t \cdot Id \cdot \overline{[w]}$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned} f(Tv, w) &= [Tv]_{\mathcal{C}}^t \cdot Id \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}} = [v]_{\mathcal{C}}^t [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot Id \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}} \\ f(v, T^*w) &= [v]_{\mathcal{C}}^t \cdot Id \cdot \overline{[T^*w]_{\mathcal{C}}} = [v]_{\mathcal{C}}^t \cdot Id \cdot \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}[w]_{\mathcal{C}}} \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos que

$$[T]_{\mathcal{C}}^t = \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}} \qquad [T^*]_{\mathcal{C}} = \overline{[T]_{\mathcal{C}}^t}$$

En el ejercicio tenemos que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$[T^*]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir

$$\begin{array}{rccc} T^*: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (z_1, z_2, z_3) & \to & (z_1 + iz_2, z_3 - z_1, z_2) \end{array}.$$

En general tenemos el siguiente resultado.

Propiedad 85 *Sea V un espacio de dimensión finita, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal o sesquilineal no degenerada y T un endomorfismo de V, entonces para toda $\mathcal{C}$ base de V,*

$$[T^*]_{\mathcal{C}} = \overline{[f]_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}}}$$

Demostración: Sea $\mathcal{C}$ una base de V luego

$$\begin{aligned} f(Tv, w) &= [Tv]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}} = [v]_{\mathcal{C}}^t [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[w]_{\mathcal{C}}} \\ f(v, T^*w) &= [v]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[T^*w]_{\mathcal{C}}} = [v]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}[w]_{\mathcal{C}}} \end{aligned}$$

Al evaluar en $v_i, v_j \in \mathcal{C}$, obtenemos la siguiente igualdad matricial

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} &= [f]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}} \\ [f]_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}} &= \overline{[T^*]_{\mathcal{C}}} \\ [T^*]_{\mathcal{C}} &= \overline{[f]_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{C}}^t \cdot [f]_{\mathcal{C}}} \end{aligned}$$

Ejemplo 58 *Sea $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$.*

Determinar T^* respecto al producto interno canónico

Determinar T^* respecto al producto interno $f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Solución: En el primer caso tenemos en la base canónica que

$$[T^*] = Id\,[T]^t\,Id = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$T^*(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2).$$

Para el otro producto interno tenemos

$$\begin{aligned} [T^*] = [f]^{-1}\,[T]^t\,[f] &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$T^*(x_1, x_2) = T(x_1, x_2)$$

Propiedad 86 *Sea V un espacio de dimensión finita, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal o sesquilineal no degenerada y T, L endomorfismo de V entonces*

1. $(cT)^* = \bar{c}T^*$

2. $(T + L)^* = T^* + L^*$

3. $(T \circ L)^* = L^* \circ T^*$

Demostración: Para las demostración tenemos que tener presente la unicidad del operador adjunto, notemos que

$$\begin{aligned} f(Tv, w) &= f(v, T^*w) \quad \forall v, w \in V \\ f(Lv, (cT)^*(w) &= f(v, L^*w) \quad \forall v, w \in V \end{aligned}$$

1. Dado $v, w \in V$

$$\begin{aligned} f(cTv, w) &= cf(Tv, w) = cf(v, T^*w) = f(v, \bar{c}T^*w) \\ f(v, (cT)^*(w)) &= f(v, \bar{c}T^*w) \end{aligned}$$

luego

$$(cT)^* = \bar{c}T^*$$

2. Sumando las igualdades tenemos

$$\begin{aligned} f(Tv, w) + f(Lv, w) &= f(v, L^*w) + f(v, T^*w) \\ f(Tv + Lv, w) &= f(v, L^*w + T^*w) \\ f((T + L)\, v, w) &= f(v, (L^* + T^*)\, w) \end{aligned}$$

por definición de operador adjunto tenemos

$$f(v, (T + L)^*\, w) = f(v, (L^* + T^*)\, w)$$

luego

$$(T + L)^* = (L^* + T^*)$$

3.

$$\begin{aligned} f((T \circ L)\, v, w) &= f(T\,(Lv)\,, w) \\ &= f(Lv, T^*w) \\ &= f(v, L^*\,(T^*w)) \\ &= f(v, (L^* \circ T^*)\, w) \end{aligned}$$

por definición de operador adjunto tenemos

$$f(v, (T \circ L)^* w) = f(v, (L^* \circ T^*) w)$$

es decir

$$(T \circ L)^* = L^* \circ T^*$$

□

Propiedad 87 *Sea V un espacio de dimensión finita, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal simétrica (sesquilineal hermitiana) no degenerada y T un endomorfismo de V*

$$(T^*)^* = T$$

Demostración: Dadas las condiciones del teorema

$$f(T^* v, w) = f(v, (T^*)^* w)$$

además

$$f(v, Tw) = \overline{f(Tw, v)} = \overline{f(w, T^* v)} = f(T^* v, w)$$

luego

$$f(v, Tw) = f(T^* v, w) = f(v, (T^*)^* w)$$

por lo tanto

$$(T^*)^* = T$$

Propiedad 88 *Sea V un espacio de dimensión finita, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ un forma bilineal o sesquilineal no degenerada y T un endomorfismo de V entonces*

1. *T es epiyectiva implica que T^* es inyectiva*
2. *T es inyectiva implica que T^* es epiyectiva*

Demostración: Supongamos que T es epiyectiva, y $u \in \ker T^*$

$$f(Tv, u) = f(v, T^* u) = 0 \quad \forall v \in V$$

Pero T es epiyectiva luego

$$f(w, u) = 0 \quad \forall w \in V$$

es decir, u es ortogonal a todo el espacio, por lo tanto $u = 0$.

2. Supongamos que T es inyectiva, y $u \in (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$

$$f(Tu, w) = f(u, T^* w) = 0 \quad \forall w \in V$$

es decir, Tu es ortogonal a todo el espacio, por lo tanto $Tu = 0$, pero T es inyectiva luego $u = 0$, Por lo tanto

$$(\operatorname{Im} T^*)^{\perp} = \{0\}$$

de lo cual obtenemos

$$\operatorname{Im} T^* = V.$$

□

Definición 38 *Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica (sesquilineal hermitiana) no degenerada y $T : V \to V$ un transformación lineal entonces*

Se dice que T es una ***Operador Normal*** *si y sólo si $T \circ T^* = T^* \circ T$.*

Se dice que T es una ***Operador Unitaria*** *si y sólo si $T^* = T^{-1}$*

Se dice que T es una ***Operador Simétrico*** *(Hermítico) si y sólo si $T^* = T$.*

Propiedad 89 *Si T es una operador unitaria entonces T es una operador normal*

Demostración: Si T es unitario luego $T^* = T^{-1}$

Por lo tanto
$$T \circ T^* = T \circ T^{-1} = Id = T^{-1} \circ T = T^* \circ T$$
es decir, T es una operador normal □

Propiedad 90 *Si T es una operador simétrico (hermítica) entonces T es una operador normal*

Demostración: Si T es simétrico luego $T^* = T$

Por lo tanto
$$T \circ T^* = T \circ T = T^* \circ T$$
es decir, T es una operador normal □

Propiedad 91 *Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica (sesquilineal hermitiana) no degenerada y $T : V \to V$ un transformación lineal normal entonces*

1. *Si α es un valor propio de T entonces $T^*(V_\alpha) \subseteq V_\alpha$*
2. *Si α es un valor propio de T^* entonces $T(V_\alpha) \subseteq V_\alpha$*

Demostración: Sea v un vector propio de T asociado al valor propio α luego $T(v) = \alpha v$
$$T(T^*v) = T^*(Tv) = T^*(\alpha v) = \alpha T^*(v)$$
luego $T^*(v)$ es un vector propio asociado al valor propio α, por lo tanto $T^*(v) \in V_\alpha$.

Sea v un vector propio de T^* asociado al valor propio α luego $T^*(v) = \alpha v$
$$T^*(Tv) = T(T^*v) = T(\alpha v) = \alpha T(v)$$
luego $T(v)$ es un vector propio asociado al valor propio α, por lo tanto $T(v) \in V_\alpha$.

□

Propiedad 92 *Sea f un producto interno sobre V de dimensión finita, T una transformación normal, entonces*

1. $\ker T = \ker T^*$

2. *Si α es un valor propio de T, con vector propio v entonces $\overline{\alpha}$ es un valor propio de T^*, con vector propio v.*

3. $\ker T \perp \operatorname{Im} T$.

4. $\ker T^i = \ker T$ *para todo* $i \in \mathbb{N}, i > 1$

Demostración:

1. Notemos que
$$f(Tu, Tu) = 0 \Leftrightarrow f(u, T^*Tu) = 0 \Leftrightarrow f(u, TT^*u) = 0 \Leftrightarrow f(T^*u, T^*u) = 0$$
Luego $u \in \ker T$ si y sólo si $u \in \ker T^*$.

2. Si $T(v) = \alpha v$, luego
$$\begin{aligned} & f(T^*v - \overline{\alpha}v, T^*v - \overline{\alpha}v) = \\ & = f(T^*v, T^*v) + f(\overline{\alpha}v, \overline{\alpha}v) - f(T^*v, \overline{\alpha}v) - f(\overline{\alpha}v, T^*v) \\ & = f(v, T^*Tv) + \alpha\overline{\alpha}f(v, v) - \alpha f(v, Tv) - \overline{\alpha}f(Tv, v) \\ & = f(Tv, \alpha v) + \alpha\overline{\alpha}f(v, v) - \alpha f(v, \alpha v) - \overline{\alpha}f(\alpha v, v) \\ & = f(\alpha v, \alpha v) + \alpha\overline{\alpha}f(v, v) - \alpha\overline{\alpha}f(v, v) - \alpha\overline{\alpha}f(v, v) = 0 \end{aligned}$$
De este modo $T^*v - \overline{\alpha}v = 0$.

3. Sea $u \in \ker T, v \in \operatorname{Im} T$, por (2) tenemos que $T^*u = 0$, además
$$f(u, v) = f(u, Tw) = f(T^*u, w) = 0.$$
Por lo tanto, $(\ker T)^\perp = \operatorname{Im} T$

4. $\ker T^2 = \ker T$, claramente $\ker T \subseteq \ker T^2$
Sea $u \in \ker T^2$, como $T(Tu) = 0$ luego $Tu \in \ker T = \ker^*$
$$f(Tu, Tu) = f(u, T^*(Tu)) = f(u, 0) = 0$$
Es decir $Tu = 0$, de lo cual $u \in \ker T$

□

Teorema 93 *Sea T un operador normal sobre un espacio con producto interno complejo de dimensión finita entonces T es diagonalizable*

Demostración: Sea T un operador normal, y $P_T(x)$ el polinomio característico, y α un valor propio.

Ya que T es normal y como $(T - \alpha Id)^* = T^* - \bar{\alpha}Id$ entonces
$$(T^* - \bar{\alpha}Id) \circ (T - \alpha Id) = (T - \alpha Id) \circ (T^* - \bar{\alpha}Id)$$
luego $T - \alpha Id$ es normal.

Por la propiedad anterior se tiene que $\ker(T - \alpha Id) = \ker(T + \alpha Id)^j$, luego todo los valores propios tiene multiplicidad uno en el polinomio minimal.

De este modo se tiene que T es diagonalizable. □

Corolario 94 *Una transformación lineal simétrica sobre un espacio de dimensión finita entonces T es diagonalizable.*

Demostración: Sea T un operador simétrico, luego tenemos

$$\alpha v = Tv = T^* v = \bar{\alpha} v$$

Como v es no nulo, todo los valores propios son reales y además T es normal luego es diagonalizable □

Definición 39 *Sean V un espacio con producto interno, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal.*

*Se dice que T **preserva** el producto interno si y sólo si*

$$\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle \text{ con } v, w \in V.$$

Propiedad 95 *Sean V un espacio con producto interno, con $\mathcal{C}$ una base de V $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal.*

T preserva los producto interno si y sólo si

$$\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle \text{ con } v_i, v_j \in \mathcal{C}.$$

Demostración: Supongamos que preserva en la base, si $v, w \in V$ entonces

$$v = \sum_i a_i v_i, \qquad w = \sum_j b_j v_j$$

al evaluar tenemos

$$\begin{aligned}
\langle Tv, Tw \rangle &= \langle T(\sum_i a_i v_i), T(\sum_j b_j v_j) \rangle \\
&= \sum_i a_i \sum_j \overline{b_j} \langle T(v_i), T(v_j) \rangle \\
&= \sum_i a_i \sum_j \overline{b_j} \langle v_i, v_j \rangle \\
&= \langle \sum_i a_i v_i, \sum_j b_j v_j \rangle \\
&= \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

luego T preserva el producto interno, en el otro sentido es inmediata. □

Ejemplo 59 *Hallar $T \in End(\mathbb{R}^2)$, tal que preserva el producto interno canónico.*

Solución: Sea $T \in End(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Luego se tiene que

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando obtenemos que

$$\begin{bmatrix} x^2+z^2 & xy+zw \\ xy+zw & y^2+w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego tenemos que

$$x^2+z^2=1, \quad xy+zw=0, \quad y^2+w^2=1.$$

Ya que x e z no pueden ser ambos nulo, se despeja en la segunda ecuación y reemplazamos en la tercer para obtener:

$$[T]_{\mathcal{C}} \in \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a^2+b^2=1 \right\}$$

Propiedad 96 *Sean V un espacio de dimension finita con producto interno,*

$$G = \{T \in End(V) \quad | \quad (\forall x, y \in V)\,(< Tx, Ty >=< x, y >)\}$$

es un grupo con la composición.

Solución: Ya que V un espacio de dimension finita con producto interno, luego existe una base ortonormal $\mathcal{C}$ de V.

Sea $T \in G$, luego se tiene que

$$\begin{aligned} [T]^t_{\mathcal{C}} \cdot [< >]_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[T]_{\mathcal{C}}} &= [< >]_{\mathcal{C}} \\ [T]^t_{\mathcal{C}} \cdot Id \cdot \overline{[T]_{\mathcal{C}}} &= Id \\ [T]^t_{\mathcal{C}} \cdot \overline{[T]_{\mathcal{C}}} &= Id \end{aligned}$$

es decir, $T \in Aut(G)$.

Dados $T, L \in G$, $u, v \in V$, se tiene que

$$< L(Tu), L(Tv) >=< Tu, Tv >=< u, v >$$

Por lo tanto $L \circ T \in G$.

Finalmente $T \in G$, existe $T^{-1} \in Aut(V)$, dado $u, v \in V$, se tiene que

$$< T^{-1}(u), T^{-1}(v) >=< T(T^{-1}(u)), T(T^{-1}(v)) >=< u, v >$$

De lo cual tenemos que $G \leq Aut(V)$, es un grupo. □

Grupo Ortogonal

Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$, una forma bilineal simétrica no degenerada.

El conjunto de los automorfismo que preservan la forma f es un grupo y se llama `grupo ortogonal`

$$O(f) = \{T \in Aut(V) \quad | \quad (\forall x, y \in V)\,(f(Tx, Ty) = f(x, y))\}$$

Grupo Unitario

Sea $f : V \times V \to \mathbb{C}$, una forma sesquilineal hermitiana no degenerada.

El conjunto de los automorfismo que preservan la forma f es un grupo y se llama grupo unitario.

$$U(f) = \{T \in Aut(V) \quad | \quad (\forall x, y \in V)\,(f(Tx, Ty) = f(x, y))\}$$

Ejemplo 60 *Demostrar que el grupo que preserva el producto interno canónico de $\mathbb{C}^2$ es*

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & -\bar{b}u \\ b & \bar{a}u \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;\; | \;\; a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \wedge u\bar{u} = 1 \right\}$$

3.4.3. Ejercicios

1. Sea f un producto interno sobre V , y $T : W \to V$ una transformación lineal inyectiva. Demostrar que $f_T(x, y) = f(T(x), T(y))$ es un producto interno en W.

2. Sea f un producto interno sobre V y $S \subset V$, demostrar que

   a) $\{0\}^\perp = V$

   b) $S^\perp \leq V$

   c) $V = S^\perp \oplus \left(S^\perp\right)^\perp$

3. Demostrar la desigualdad

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall a_i \in \mathbb{R}) \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}\right),$$

4. Sea $V = \mathbb{R}^3$, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y f el producto interno canónico

$$O_f(V) = \{T \in Aut(V) \quad | \quad f(Tx, Ty) = f(x, y)\}$$

   Determinar $A = \{g \in O_f(V) \quad | \quad g(e_2) = e_2\}$.

5. Sea $V = \mathbb{C}^3$, un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, y f el producto interno canónico

$$U_f(V) = \{T \in Aut(V) \quad | \quad f(Tx, Ty) = f(x, y)\}$$

   Determinar $A = \{g \in U_f(V) \quad | \quad g(e_2) = e_2\}$.

6. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_3, x_2 + ix_3).$$

   Hallar $T^*(x)$, respecto a la forma sesquilineal hermitiana no degenerada canónica (o usual) de $\mathbb{C}^3$.

7. Sea $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tal que $f(z, w) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3$. una forma sesquilineal no degenerada y $h_a : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $h_a(z) = az$. Hallar h_a^*

8. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $T(z) = (iz_1 + (2 + 3i)z_2, 3z_1 + (3 - i)z_3, (2 - 5i)z_3)$.

   Hallar T^* respecto a la forma sesquilineal no degenerada hermitiana usual.

9. Sea f un producto interno en V y $T \in End(V)$ un operador normal tal que $T^2 = 0$.

   Demostrar que $T = 0$.

10. Sea f un producto interno en V y $T \in End(V)$ un operador normal en V
    Demostrar que,
    $$(\forall r \in \mathbb{N}^*)(\ker(T^r) = \ker(T^{r+1}))$$

11. Sea f un producto interno en V y $T \in End(V)$ un operador normal tal que $T^3 = 0$
    Demostrar que $T = 0$.

12. Demostrar que dada una forma sesquilineal hermitiana no degenerada, siempre existe un vector no isótropo.

13. Sea V un espacio con f un producto interno complejo de dimensión finita y T un operador lineal sobre V.

    Demostrar que T es simétrico o autoadjunto si y sólo si $f(Tx, x)$ es real para todo $x \in V$

14. Sea F un forma hermítica tal que F no tiene vectores isótropos no trivial entonces, F es positiva definida o bien negativa definida.

15. Sea $F(A, B) = ntr(A\bar{B}) - tr(A)tr(\bar{B})$, donde $A, B \in M(n, \mathbb{C})$. Demostrar que F es una forma hermítica.

    ¿Tiene vectores isótropos no nulo?

16. Sea F una forma sesquilineal no degenerada y simétrica sobre V y $T : V \to V$ una transformación lineal. Demostrar que $T + T^*$ es autoadjunto.

17. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica $(A = A^t)$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

    a) α es una raíz de $P_A(x)$ entonces α es real .
    b) A es simétrica (nilpotente) entonces A^2 es simétrica (nilpotente).
    c) A simétrica y nilpotente entonces $A = 0$.
    Sean $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_r$ todas sus raíces $P_A(x)$ en $\mathbb{R}$. Consideremos
    $q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \quad (x - \alpha_r)$.
    d) Si A es simétrica entonces $q(A)$ es simétrica y nilpotente.
    e) Si A es simétrica entonces A es diagonalizable.

3.4.4. Ejercicios Propuestos

Problema 94.

Sea $\mathcal{B} = \{1+x, 2-x, x+x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y f un producto interno tal que la matriz asociada en esta base es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Si

$$T(a+bx+cx^2) = a+b+(a+b+c)x+(2a-b+c)x^2$$

Determinar T^*, adjunto de T, respecto a f.

Problema 95.

Sea $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ y f una forma bilineal no degenerada tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = (a+b-c)+(a-b+c)\,x+(a-c+d)\,x^2+(a+c-d)\,x^3.$$

1. Hallar $T^*(a+bx+cx^2+dx^3)$, respecto a f
2. Determinar si T^* es biyectiva

Problema 96.

Sea $\mathcal{B} = \{1, 1+x^2, 1+x^3, 1+x\}$ una base de $\mathbb{R}_3[x]$ y f una forma bilineal no degenerada tal que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = (2a+b)+(b+c)\,x+(a-c)\,x^2+(a-d)\,x^3.$$

una transformación lineal, entonces

1. Hallar $T^*(a+bx+cx^2+dx^3)$, respecto a f
2. Determinar si T^* es biyectiva

Problema 97.

Sea F una forma hermitiana sobre $\mathbb{C}^3$ tal que la matriz asociada a F en la base canónica es

$$\begin{bmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 1 \end{bmatrix}$$

Si

$$T(x,y,z) = (3x + iz, y + (1+i)z, (1-i)x + (3+2i)y)$$

una transformación lineal, entonces

Determine T^* (operador adjunto), respecto a F.

Problema 98.

Sea $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$ y f un producto interno real tal que la matriz asociada en esta base es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(a + bx + cx^2) = a + b + (a+b+c)x + (2a - b + c)x^2$$

Determinar T^* adjunto de T, respecto a f.

Problema 99.

Sean $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4, a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$

Considere el producto

$$f(p,q) = aa' + bb' + cc' + 2dd' + de' + ed' + ee'$$

y

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = a + b + (c+2d)x + (a+e)x^2 + (b-2b)x^4$$

una transformación lineal, entonces

Determinar T^* adjunto de T, respecto a f

Problema 100.

Sea $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tal que $f(z,w) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_3$ producto interno complejo usual

1. Sea $h_a : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $h_a(z) = az$. Hallar h_a^*
2. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $T(u,v,w) = (iu + (2+3i)v, 3u + (3-i)v, (1-2i)v + (1-5i)w)$. Hallar T^* .

Problema 101.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & 1-i \\ 0 & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a, b, c) = (a + ib, ib + c, ia - c).$$

una transformación lineal, entonces

1. Determine una base ortogonal para f
2. Hallar $T^*(a, b, c)$, respecto a f
3. Determinar si T es normal

Problema 102.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 1 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a, b, c) = (ia + 2b, b + (1 - i)\, c, a - c).$$

Determinar T^* adjunto de T respecto a f

Problema 103.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 2+i & 6 & 3-2i \\ 0 & 3+2i & 15 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a, b, c) = (2a + ib, b + (1 + i)\, c, a - c).$$

a) Hallar $T^*(a, b, c)$, respecto a f

b) Determinar si T^* es biyectiva

Problema 104.

Sea $\mathcal{B} = \{e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y f un producto interno tal que la matriz asociada en esta base es $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(a, b, c) = (c - a, a - b + c, 2a - b + c)$$

Determinar $[T^*]_{\mathcal{B}}$ y $T^*(e_3)$

Problema 105.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & 1 - i \\ 0 & 1 + i & 3 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a, b, c) = (a + ib, ib + c, ia - c).$$

1. Determine una base ortogonal para f
2. Hallar $T^*(a, b, c)$, respecto a f
3. Determinar si T es normal

Problema 106.

Sea f una forma sesquilineal no degenerada sobre $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 2i & 0 \\ 1 + 2i & 0 & 3 - 2i \\ 0 & 3 + 2i & 1 \end{bmatrix}$$

y $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, tal que

$$T(a, b, c) = (ia + 2b, b + (1 - i)\, c, a - c).$$

Determinar T^* adjunto de T respecto a f

Problema 107.

Sea f una producto interno real usual sobre $\mathbb{R}^n$ y $T_u \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$T_u(x) = x - 2f(u, x)u.$$

Para todo $u \in \mathbb{R}^n$

1. Determine el adjunto de T_u
2. T_u es un operador normal, simétrico.
3. Demuestre que si $f(u,u) = 1$ entonces T_u preserva el producto interno f.

Problema 108.

Sea f un producto interno sobre un espacio complejo de dimensión finita V y $T \in L(V,V)$ tal que $(\forall v \in V)\,(f(T(v),v) = 0)$, entonces

$$T = 0.$$

Problema 109.

Sea f un producto interno sobre V un espacio real de dimensión finita y T un transformación lineal que preserva f. Demostrar que $\det([T]_{\mathcal{C}}) = \pm 1$.

Problema 110.

Sea $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual y $T \in End(\mathbb{C}^2)$ tal que $T(a,b) = (ia - ib, -ia + ib)$
Determinar si T es normal, hermitiana, o unitaria.

Problema 111.

Sea f un producto interno sobre un espacio real de dimensión finita V y $T \in L(V,V)$ tal que $T = T^*$.
Demostrar que si α, β son dos valores propios distintos de T entonces $V_\alpha \subseteq (V_\beta)^\perp$.

Problema 112.

Sea f un producto interno sobre un espacio complejo de dimensión finita V y $T \in L(V,V)$ operador unitario
Si $W \leq V$ invariante por T, es decir $T(W) \subset W$, entonces $W^\perp$ invariante por T.

Problema 113.

Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de V y $T \in L(V,V)$ un operador unitario entonces
Demostrar que $\{Tv_1, Tv_2, ..., Tv_n\}$ una base ortonormal de V

Problema 114.

Sea $W \leq V$, f un producto interno sobre un espacio de dimensión finita V y $T \in End(V)$ normal entonces
Demostrar que W es T- invariante si y sólo si $W^\perp$ es T^*- invariante
es decir

$$T(W) \subset W \Longleftrightarrow T^*(W^\perp) \subset W^\perp$$

Capítulo 4

Producto Tensorial

4.1. Introducción

Construyamos un modelo al cual pronto llamaremos producto tensorial, para ello sean U, V dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $L(U, V)$, el espacio de las transformaciones lineales de U en V,

Dada un producto interno en U, se tiene que

$$\begin{array}{rccccc} \phi: & U & \to & L(U,\mathbb{K}) & & \\ & u & \rightsquigarrow & u^*: & U & \to & \mathbb{K} \\ & & & & v & \rightsquigarrow & < v, u > \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Además tenemos la siguiente función natural

$$\begin{array}{rccccc} \pi: & U \times V & \to & L(U,V) & & \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & \pi(x,y): & U & \to & V \\ & & & & u & \rightsquigarrow & x^*(u)y \end{array}$$

es una forma bilineal, tal que $Im(\pi)$ genera $L(U, V)$.

Para comprobar esto, sean $f \in L(U, V)$, y $\{u_1, u_2, ..., u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_n\}$ una base ortonormal tal que

$$\ker(f) =< u_1, u_2, ..., u_r >; \quad \operatorname{Im}(f) =< f(u_{r+1}), f(u_{r+2}), ..., f(u_n) >$$

con lo cual tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i f(u_i) \\ &= \sum_{i=r+1}^{n} < \alpha_i u_i, u_i > f(u_i) \\ &= \sum_{i=r+1}^{n} < x, u_i > f(u_i) \\ &= \sum_{i=r+1}^{n} u_i^*(x) f(u_i) \end{aligned}$$

es decir,

$$f(x) = \sum_{i=r+1}^{n} \pi\left(u_i, f(u_i)\right)(x).$$

Además satisface la siguiente propiedad universal dada por:

Sean $B : U \times V \to W$ un operador bilineal y π la función definida anteriormente entonces existe un única $\psi : L(U,V) \to W$ un operador lineal tal que $\psi \circ \pi = B$, es decir, el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "B"'] & L(U,V) \arrow[d, dotted, "\exists!\ \psi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Para definir la transformación lineal, basta definir en la base $\psi(E_{i,j}) = \psi(u_i^*, v_j) = B(u_i, v_j)$, y la unicidad se obtiene ya que esta definida en la base.

Un espacio que cumpla estas propiedades es llamado producto tensorial y denotado por $U \otimes V$.

De esta manera se tiene que:

Si $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ y $\dim_{\mathbb{K}} V = m$ entonces

$$U \otimes V \simeq L(U,V) \simeq M_{n\times m}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{nm}$$

Ejemplo 61 *De lo anterior tenemos que*

1. $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
2. $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} = End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$
3. $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} = End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^4$.

4.2. Producto Tensorial

Teorema 97 *Sean U, V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ entonces existe un único (salvo isomorfismo) T espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y un operador bilineal $\pi : U \times V \to T$ tal que*

T1 $\mathrm{Im}(\pi)$ *genera* $U \otimes V$ *o* $<\mathrm{Im}(\pi)>= T$

T2 Si para todo $B : U \times V \to W$ un operador bilineal, entonces existe un única transformación lineal $f : T \to W$ tal que

$$f \circ \pi = B$$

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "B"'] & T \arrow[d, dotted, "\exists! f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

En este caso (T, π) es llamado el producto tensorial de los espacios U y V

Demostración: Sean U, V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$
Unicidad: Supongamos que existen espacios que cumple con las dos propiedades anteriores, luego sea $(T', \widetilde{\pi})$ otro espacio con las mismas propiedades, de ello tenemos

$$\begin{tikzcd}
 & T' \arrow[d, dotted, "\exists! g_1"] \\
U \times V \arrow[ru, "\widetilde{\pi}"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[rd, "\widetilde{\pi}"'] & T \arrow[d, dotted, "\exists! g_2"] \\
 & T'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[d, dotted, "\exists! g_2"] \\
U \times V \arrow[ru, "\pi"] \arrow[r, "\widetilde{\pi}"] \arrow[rd, "\pi"'] & T' \arrow[d, dotted, "\exists! g_1"] \\
 & T
\end{tikzcd}$$

Como las compuestas son únicas, luego $g_1 \circ g_2 = Id$. Análogamente la otra igualdad $g_2 \circ g_1 = Id$. Por lo tanto los espacios son isomorfos.
Existencia: Sea $C(U \times V)$, el espacio vectorial libre generado por el conjunto $U \times V$, es decir,

$$C(U \times V) = \{f : U \times V \to \mathbb{K} \quad | \quad f \text{ es función con soporte finito}\}$$

Una función tiene soporte finito si y sólo si el conjunto $f^{-1}(\mathbb{K}^*)$ es finito, queda como ejercicio demostrar que este conjunto es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Una base de $C(U \times V)$ del espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, es $\{\delta_{(x,y)} \mid (x, y) \in U \times V\}$, donde $\delta_{(x,y)}$ son funciones que en (x, y) es 1 y el resto es cero, llamada delta de Kronecker.

Sea $N(U \times V)$ el subespacio de $C(U \times V)$ generado por los vectores

$$\begin{aligned}
f(\alpha u + \beta u', v) &= \delta_{(\alpha u + \beta u', v)} - \alpha \delta_{(u,v)} - \beta \delta_{(u',v)} \\
g(u, \alpha v + \beta v') &= \delta_{(u, \alpha v + \beta v')} - \alpha \delta_{(u,v)} - \beta \delta_{(u,v')}
\end{aligned}$$

es decir,

$$N(U \times V) = \langle \{f(\alpha u + \beta u', v) \ , \ g(u, \alpha v + \beta v') \quad | \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, u, u' \in U, v, v' \in V\} \rangle$$

Sea el espacio cociente,

$$T = C(U \times V) \diagup N(U \times V).$$

donde dos elementos son iguales cuando

$$\overline{f} = \overline{g} \Leftrightarrow f - g \in N(U \times V)$$

y las operaciones usuales

$$\begin{aligned}
\overline{f} + \overline{g} &= \overline{f + g} \\
\alpha \overline{f} &= \overline{\alpha f}
\end{aligned}$$

además la función compuesta dada por

$$\begin{array}{rcccc}
\pi : & U \times V & \to & C(U \times V) & \to & C(U \times V) \diagup N(U \times V) \\
 & (x, y) & \rightsquigarrow & \delta_{(u,v)} & \rightsquigarrow & \overline{\delta_{(u,v)}}
\end{array}$$

es decir,

$$\pi(u,v) = \overline{\delta_{(u,v)}}$$

y es claramente bilineal.

Ahora veremos que $< \operatorname{Im} \pi >= T$, para ello sea $\overline{f} \in T$, luego existe $f \in C(U \times V)$, de modo que si $J = f^{-1}(\mathbb{K} - \{0\})$ es un conjunto finito, además se tiene que

$$f = \sum_{(u,v)\in J} f(u,v)\delta_{(u,v)}$$

$$\overline{f} = \sum_{(u,v)\in J} f(u,v)\overline{\delta_{(u,v)}}$$

y por lo tanto

$$\overline{f} = \sum_{(u,v)\in J} f(u,v)\overline{\delta_{(u,v)}} \in < \overline{\delta_{(u,v)}} \mid (u,v) \in U \times V >=< \pi(u,v) \mid (u,v) \in U \times V >$$

Así tenemos que T esta generado por $\operatorname{Im} \pi$.

Y ahora veremos la Propiedad Universal.

Sea $B : U \times V \to W$ un operador bilineal, por demostrar que existe $f : T \to W$ lineal.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "B"'] & T \arrow[d, dotted, "\exists! f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
 & W
\end{tikzcd}$$

Para ello sea $g : C(U \times V) \to W$, definido por

$$\begin{aligned} g\left(\delta_{(u,v)}\right) &= B(u,v) \\ g\left(\sum_{(u,v)\in J} \lambda_{u,v}\delta_{(u,v)}\right) &= \sum_{(u,v)\in J} \lambda_{u,v} B(u,v). \end{aligned}$$

Ya que g esta definida en la base y extendida linealmente, luego g es una transformación lineal.

Además tenemos que B es bilineal, luego $N(U \times V) \subset \ker g$.

Por lo tanto, existe una única transformación lineal de $f : T \to W$, que permite que el diagrama conmute □

Notación: Con ello este espacio vectorial T salvo isomorfismo lo denotamos por $U \otimes V$ y los elementos $\pi(u,v) = u \otimes v$.

Definición 40 *El producto tensorial es un par $(U \otimes V, \pi)$, donde $U \otimes V$ es un espacio vectorial $\pi : U \times V \to U \otimes V$ es un operador bilineal y cumple con:*

T1 $\operatorname{Im}(\pi)$ *genera* $U \otimes V$ *o* $< \operatorname{Im}(\pi) >= U \otimes V$

T2 Si para todo $B : U \times V \to W$ un operador bilineal, entonces existe un única transformación lineal $f : U \otimes V \to W$ tal que

$$f \circ \pi = B$$

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "B"'] & U \otimes V \arrow[d, dotted, "\exists! f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Propiedad 98 *Sean $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U y $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ base de V entonces*

$$\{u_i \otimes v_j \mid i, j\} \text{ es un conjunto generador de } U \otimes V$$

Ejemplo 62 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, considere la siguiente operador bilineal*

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m & \to & M_{nm}(\mathbb{K}) \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & [(x_i y_j)_{i,j}] \end{array}$$

Demostrar que $(M_{nm}(\mathbb{K}), \Gamma)$, es producto tensorial de $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K}^m$

4.2.1. Propiedades del Producto Tensorial.

Propiedad 99 *Sean $u, u_1, u_2 \in U, v, v_1, v_2 \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ luego*

1. $(\alpha u_1 + \beta u_2) \otimes v = \alpha (u_1 \otimes v) + \beta (u_2 \otimes v)$
2. $u \otimes (\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha (u \otimes v_1) + \beta (u \otimes v_2)$
3. $\alpha (u \otimes v) = (\alpha u) \otimes v = u \otimes (\alpha v)$

Demostración: es inmediata ya que π es bilineal. □

Ejemplo 63 *Con las notaciones anteriores del diagrama*

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & U \otimes V \arrow[d, dotted, "\exists! f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Demostrar que:
f es epiyectiva si y sólo si ψ es epiyectiva

Propiedad 100 *Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base de U, entonces todo vector de $z \in U \otimes V$ se puede escribir de la forma*

$$z = \sum_{i \in J} e_i \otimes w_i$$

con $J \subset I$ finito.

Demostración: Ya que $\operatorname{Im}\pi$ genera el espacio $U \otimes V$, luego $z = \sum_{l,j} \lambda_{l,j} (u_l \otimes v_j)$ una suma finita.

Por hipótesis tenemos que $\{e_i\}_{i \in I}$ es una base de U, luego para cada $u_l = \sum_i \alpha_{l,i} e_i$, donde $\alpha_{l,i} \in \mathbb{K}$, reemplazando obtenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_{l,j}(u_l \otimes v_j) &= \lambda_{l,j}\left(\left(\sum_i \alpha_{l,i} e_i\right) \otimes v_j\right) \\ &= \sum_i \alpha_{l,i}(e_i \otimes \lambda_{l,j} v_j)\end{aligned}$$

y finalmente

$$z = \sum_{l,j} \lambda_{l,j}(u_l \otimes v_j) = \sum_{l,j} \sum_i \alpha_{l,i}(e_i \otimes \lambda_{l,j} v_j) = \sum_i \sum_{l,j} \alpha_{l,i}(e_i \otimes \lambda_{l,j} v_j)$$

reescribiendo

$$z = \sum_i \sum_l \alpha_{l,i}\left(e_i \otimes \sum_j \lambda_{l,j} v_j\right) = \sum_i \left(e_i \otimes \sum_l \alpha_{l,i} \sum_j \lambda_{l,j} v_j\right) = \sum_i (e_i \otimes w_i)$$

donde

$$w_i = \sum_l \sum_j \alpha_{l,i} \lambda_{l,j} v_j$$

un suma finita. $\square$

Propiedad 101 *Para todo vector no nulo $z \in U \otimes V$, existe un único $r \in \mathbb{N}$ tal que*

$$z = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i$$

tal que $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ es linealmente independiente en U y $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ es linealmente independiente en V.

Demostración: Por la propiedad anterior tenemos que todo vector se puede escribir de la forma $z = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i$, donde $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ es linealmente independiente.

Supongamos que

$$r = \text{mín}\left\{ n \in \mathbb{N} \quad | \quad (\exists x_i \in U)\,(\exists y_i \in V)\,(z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \wedge \{x_i\} \text{ l.i.}) \right\}$$

Si $r = 1$, $z = x \otimes y \neq 0$, luego $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Sea $r > 1$

$z = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i$ tal que $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ es linealmente independiente, $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ es linealmente dependiente, luego reordenando podemos admitir que

$$y_1 = \sum_{i=2}^{r} \alpha_i y_i$$

reemplazando tenemos

$$
\begin{aligned}
z &= x_1 \otimes y_1 + \sum_{i=2}^{r} x_i \otimes y_i \\
&= x_1 \otimes \left(\sum_{i=2}^{r} \alpha_i y_i \right) + \sum_{i=2}^{r} (x_i \otimes y_i) \\
&= \sum_{i=2}^{r} \alpha_i (x_1 \otimes y_i) + \sum_{i=2}^{r} (x_i \otimes y_i) \\
&= \sum_{i=2}^{r} (\alpha_i x_1 \otimes y_i) + \sum_{i=2}^{r} (x_i \otimes y_i) \\
&= \sum_{i=2}^{r} ((\alpha_i x_1 + x_i) \otimes y_i)
\end{aligned}
$$

por lo tanto, es una contradicción con el la forma de escoger el r. Luego $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$, $\{y_1, y_2, ..., y_r\}$ son linealmente independiente. □

Definición 41 *Sea $z \in U \otimes V$, no nulo*

$$
r = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \quad | \quad (\exists x_i \in U)\,(\exists y_i \in V)\,(z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \wedge \{x_i\}, \{y_i\} \ l.i.) \right\}
$$

se llama la ***longitud*** *de z*

Ejemplo 64 *En $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ tenemos la siguiente igualdad*

$$
z = (1,2) \otimes (1,0) + (2,1) \otimes (0,1) = (3,3) \otimes (2,-1) + (5,4) \otimes (-1,1)
$$

Note que $\{(1,2)(2,1)\}, \{(1,0)(0,1)\}, \{(3,3)(5,4)\}, \{(2,-1)(-1,1)\}$ son conjunto linealmente independiente y el vector z tiene longitud 2, es decir, los vectores linealmente independiente no son único.

Solución: Debemos igual para poder comprobar

$$
\begin{aligned}
z &= (3,3) \otimes (2,-1) + (5,4) \otimes (-1,1) \\
&= (3,3) \otimes (2e_1 - e_2) + (5,4) \otimes (-e_1 + e_2) \\
&= (3,3) \otimes 2e_1 + (3,3) \otimes (-e_2) + (5,4) \otimes (-e_1) + (5,4) \otimes e_2 \\
&= (6,6) \otimes e_1 + (-5,-4) \otimes e_1 + (-3,-3) \otimes e_2 + (5,4) \otimes e_2 \\
&= ((6,6) + (-5,-4)) \otimes e_1 + ((-3,-3) + (5,4)) \otimes e_2 \\
&= (1,2) \otimes e_1 + (2,1) \otimes e_2
\end{aligned}
$$

Propiedad 102 *Sean $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ es linealmente independiente en U, y $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ subconjunto de V tal que*

$$
\sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i = 0
$$

entonces para todo i tenemos que $v_i = 0$

Demostración: Como $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ es linealmente independiente, luego existen

$$u_1^*, u_2^*, ..., u_r^* \in L(U, \mathbb{K}),$$

y $g_i \in L(V, \mathbb{K})$ definimos

$$h = h_{\{g_i\}} : U \times V \to \mathbb{K}, \quad h(u, v) = \sum_i u_i^*(u) g_i(v)$$

por propiedad universal, existe una transformación lineal

$$l : U \otimes V \to \mathbb{K}, \ l(u \otimes v) = \sum_i u_i^*(u) g_i(v)$$

Como tenemos que

$$0 = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i$$

aplicando la lineal tenemos:

$$0 = l(0) = l(\sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i) = \sum_{i=1}^r l(u_i \otimes v_i) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r u_j^*(u_i) g_j(v_i) = \sum_{j=1}^r g_j(v_j)$$

Así tenemos que

$$\sum_{j=1}^r g_j(v_j) = 0, \qquad \forall g_j \in V^* = L(V, \mathbb{K})$$

luego $v_j = 0$. □

Corolario 103 *Sean $x \in U$, $y \in V$, tal que $x \neq 0 \neq y$ entonces $x \otimes y \neq 0$.*

Corolario 104 *Sean $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ es linealmente independiente en U, y $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ $\{v_1', v_2', ..., v_r'\}$ dos subconjunto de V tales que*

$$\sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i'$$

entonces para todo i tenemos que $v_i = v_i'$.

Demostración: Como se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i &= \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i' \\
\sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i - \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i' &= 0 \\
\sum_{i=1}^r (u_i \otimes v_i - u_i \otimes v_i') &= 0 \\
\sum_{i=1}^r u_i \otimes (v_i - v_i') &= 0
\end{aligned}$$

Luego se tiene que $v_i - v_i' = 0$, es decir $v_i = v_i'$, para todo i. □

Ejemplo 65 *Sean U y V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$*
Si $u \in U, v \in V$ tal que $u \otimes v \neq 0$, entonces

$$u \otimes v = u' \otimes v' \text{ si y sólo si } (\exists t \in \mathbb{K}^*) \left(u' = tu \wedge v' = t^{-1}v\right)$$

Propiedad 105 *Sean U, V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ entonces*

$$L(U \otimes V, W) = Bil(U \times V, W)$$

Demostración: Basta tener presente la propiedad universal del producto tensorial, es decir,

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & T \arrow[d, dotted, "\exists! l"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Luego definimos

$$\begin{array}{rccc} \psi: & L(U \otimes V, W) & \to & Bil(U \times V, W), \\ & l & \rightsquigarrow & \psi(l) = l \circ \pi \end{array}$$

□

Corolario 106 *Sean U, V dos espacios vectoriales de dimension n y m sobre $\mathbb{K}$ entonces*

$$\dim(U \otimes V) = nm$$

Demostración:

$$\dim(U \otimes V) = \dim L(U \otimes V, \mathbb{K}) = \dim Bil(U \times V, \mathbb{K}) = nm$$

□

Corolario 107 *Sean $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U y $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ base de V entonces $\{u_i \otimes v_j \mid i, j\}$ es una base de $U \otimes V$*

Ejemplo 66 *En $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$, determine si el siguiente conjunto es linealmente independiente o dependiente*

$$\{(1,2) \otimes (1,0), (2,1) \otimes (0,1), (3,3) \otimes (2,-1)\}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 0 &= a(1,2) \otimes (1,0) + b(2,1) \otimes (0,1) + c(3,3) \otimes (2,-1) \\ &= a(1,2) \otimes e_1 + b(2,1) \otimes e_2 + c(3,3) \otimes (2e_1 - e_2) \\ &= a(1,2) \otimes e_1 + b(2,1) \otimes e_2 + c(3,3) \otimes 2e_1 - c(3,3) \otimes e_2 \\ &= a(1,2) \otimes e_1 + c(3,3) \otimes 2e_1 + b(2,1) \otimes e_2 - c(3,3) \otimes e_2 \\ &= ((a, 2a) + (6c, 6c)) \otimes e_1 + ((2b, b) + (-3c, -3c)) \otimes e_2 \\ &= (a + 6c, 2a + 6c) \otimes e_1 + (2b - 3c, b - 3c) \otimes e_2 \end{aligned}$$

De lo cual tenemos que $(a + 6c, 2a + 6c) = (0, 0) = (2b - 3c, b - 3c)$ es decir

$$\left.\begin{array}{rcl} a + 6c & = & 0 \\ 2a + 6c & = & 0 \\ 2b - 3c & = & 0 \\ b - 3c & = & 0 \end{array}\right|$$

Por lo tanto tenemos $a = b = c = 0$, es la solución del sistema y el conjunto es linealmente independiente.

Ejemplo 67 *Dado la formar bilineal*

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 \end{array}$$

Determine la única función lineal $f : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *de la propiedad* 105

Solución: Por la conmutación del diagrama tenemos

$$f(e_i \otimes e_j) = B(e_i, e_j)$$

por lo tanto, extendiendo linealmente la función obtenemos

$$f(\sum_{i,j} a_{i,j}e_i \otimes e_j) = a_{1,1} + 2a_{1,2} + 2a_{2,1}$$

Ejemplo 68 *Dado el operador bilineal*

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1, x_2y_2, x_1y_1 + 3x_2y_1) \end{array}$$

Determine la única función lineal $f : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *de la propiedad* 105

Solución: Por la conmutación del diagrama tenemos

$$f(e_i \otimes e_j) = B(e_i, e_j)$$

por lo tanto, extendiendo linealmente la función obtenemos

$$\begin{array}{rcl} f(\sum_{i,j} a_{i,j}e_i \otimes e_j) & = & a_{1,1}B(e_1, e_1) + a_{1,2}B(e_1, e_2) + a_{2,1}B(e_2, e_1) + a_{2,2}B(e_2, e_2) \\ & = & a_{1,1}(1, 0, 1) + a_{1,2}(2, 0, 0) + a_{2,1}(2, 0, 3) + a_{2,2}(0, 1, 0) \\ & = & (a_{1,1} + 2a_{1,2} + 2a_{2,1}, a_{2,2}, a_{1,1} + 3a_{2,1}) \end{array}$$

Subespacios Vectoriales de un Producto Tensorial

Sean U, V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y el operador bilineal

$$\begin{array}{rccc} \pi: & U \times V & \to & U \otimes V \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & x \otimes y \end{array}$$

Si $U_1 \leq U,\ V_1 \leq V$, entonces

$$\begin{array}{rccc} \pi|_{U_1 \times V_1}: & U_1 \times V_1 & \to & U \otimes V \\ & (x,y) & \rightsquigarrow & x \otimes y \end{array}$$

es un operador bilineal.

Propiedad 108 *Sean U, V dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $U_1 \leq U, V_1 \leq V$ entonces $(<\pi(U_1 \times V_1)>, \pi|_{U_1 \times V_1})$ cumple las dos propiedades que define el producto tensorial, es decir,*

$$<\pi(U_1 \times V_1)> = U_1 \otimes V_1 \leq U \otimes V.$$

Demostración: Sean $U_1 \leq U,\ V_1 \leq V$, luego

$$\pi(U_1 \times V_1) = \{u \otimes v \mid u \in U_1, v \in V_1\} \subseteq U \otimes V$$

Denotemos

$$T = <\pi(U_1 \otimes V_1)>$$

De este modo tenemos que $(T, \pi|_{U_1 \times V_1})$ cumple la primera propiedad.

Para la segunda propiedad, sean $b: U_1 \times V_1 \to W$, un operador bilineal y $U_2 \leq U,\ V_2 \leq V$ tales que

$$U = U_1 \oplus U_2 \qquad V = V_1 \oplus V_2$$

es decir, dado $u \in U$ tenemos $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$, análogamente para $v \in V$.

$$b': U \times V \to W, \quad b'(u,v) = b(u_1, v_1)$$

es un operador bilineal, luego existe

$$l': U \otimes V \to W, \quad l'(u \otimes v) = b(u,v)$$

sea $l = l'|_T$, y calculemos

$$l \circ \pi(u_1, v_1) = l(u_1 \otimes v_1) = l'(u_1 \otimes v_1) = b'(u_1, v_1) = b(u_1, v_1).$$

de este modo tenemos la existencia, la unicidad se obtiene debido a que estos vectores generan. $\square$

Ejercicio 69 *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, V_1, V_2 subespacio de V entonces demostrar que*

$$V_1 \otimes W \cap V_2 \otimes W = (V_1 \cap V_2) \otimes W$$

Ejercicio 70 *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, W_1, W_2 subespacio de W entonces demostrar que*

$$V \otimes W_1 \cap V \otimes W_2 = V \otimes (W_1 \cap W_2)$$

Ejercicio 71 *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, V_1 subespacio de V y W_1 subespacio de W entonces demostrar que*

$$(V \otimes W_1) \cap (V_1 \otimes W) = V_1 \otimes W_1$$

Ejercicio 72 *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, V_1, V_2 subespacio de V y W_1, W_2 subespacio de W entonces demostrar que*

$$(V_1 \otimes W_1) \cap (V_2 \otimes W_2) = (V_1 \cap V_2) \otimes (W_1 \cap W_2)$$

Teorema 109 *Sean U, V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $U_1 \leq U, V_1 \leq V$ entonces*

$$(U \diagup U_1) \otimes (V \diagup V_1) \simeq ((U \otimes V) \diagup (U_1 \otimes V + U \otimes V_1))$$

Demostración: Por la propiedad anterior tenemos que $U_1 \otimes V + U \otimes V_1 \leq U \otimes V$, luego tenemos la siguiente función

$$\begin{array}{cccc} \psi: & U \times V & \to & ((U \otimes V) \diagup (U_1 \otimes V + U \otimes V_1)) \\ & (u,v) & \rightsquigarrow & \psi(u,v) = \overline{u \otimes v} \end{array}$$

que es bilineal.

Además notemos lo siguiente, si $(\bar{u}, \bar{v}), (\bar{u'}, \bar{v'})$ en $U \diagup U_1 \times V \diagup V_1$ son iguales entonces $\bar{u} = \bar{u'}, \bar{v} = \bar{v'}$ es decir $u = u' + u_1$, $v = v' + v_1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \psi(u,v) &= \psi(u' + u_1, v' + v_1) \\ &= \psi(u', v') + \psi(u', v_1) + \psi(u_1, v) + \psi(u_1, v_1) \\ &= \psi(u', v') + \overline{u \otimes v_1} + \overline{u_1 \otimes v} + \overline{u_1 \otimes v_1} \\ &= \psi(u', v'). \end{aligned}$$

El valor es único independiente del representante, por ello se define la siguiente función en el cociente

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & U \diagup U_1 \times V \diagup V_1 & \to & ((U \otimes V) \diagup (U_1 \otimes V + U \otimes V_1)) \\ & (\bar{u}, \bar{v}) & \rightsquigarrow & \psi(u,v) = \overline{u \otimes v} \end{array}$$

la cual es bilineal.

Veamos ahora la primera propiedad, sea $\overline{z} \in ((U \otimes V) \diagup (U_1 \otimes V + U \otimes V_1))$ por lo cual tenemos que

$$\overline{z} = \overline{\sum u_i \otimes v_i} = \sum \overline{u_i \otimes v_i} = \sum \Psi(\overline{u_i}, \overline{v_i}) \in < \operatorname{Im} \Psi >$$

Para la segunda parte sea

$$B : (U \diagup U_1) \times (V \diagup V_1) \to W$$

una operador bilineal, luego definimos

$$B_1 : U \times V \to W, \quad B_1(u,v) = B(\bar{u},\bar{v})$$

es un operador bilineal, por lo tanto existe una lineal

$$f : U \otimes V \to W$$

Además cumple con $U_1 \otimes V + U \otimes V_1 \subset \ker f$.
Por lo tanto

$$f : ((U \otimes V) \diagup (U_1 \otimes V + U \otimes V_1)) \to W$$

Y la unicidad se obtiene que genera la imagen,es decir, cumple la propiedad universal, por ello

$$(U \diagup U_1) \otimes (V \diagup V_1) \simeq ((U \otimes V) \diagup (U_1 \otimes V + U \otimes V_1))$$

$\square$

Ejemplo 73 *Dado los espacios vectoriales*

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + w\} \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y = z\}$$

Determinar la dimensión del subespacio vectorial $U \otimes \mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^4 \otimes V$ de $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^3$

Propiedad 110 *Sean U, V dos subespacios vectoriales de W entonces*

$$(W \diagup U) \otimes (W \diagup V) \simeq ((U \otimes V) \diagup ((U \cap V) \otimes V + U \otimes (U \cap V)))$$

Propiedad 111 *Sean $\{U_i\}_{i\in I}$, $\{V_j\}_{j\in J}$ dos familia de espacios vectoriales entonces*

$$\left(\bigoplus_{i\in I} U_i\right) \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} V_j\right) \simeq \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} U_i \otimes V_j$$

Propiedad 112 *Sea $\mathbb{F}$ un subcuerpo de $\mathbb{K}$ y U un $\mathbb{F}$-espacio vectorial entonces sabemos que $\mathbb{K} \otimes U$ es $\mathbb{F}$- espacio vectorial.*

Se define

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{K} \times (\mathbb{K} \otimes U) & \longrightarrow & (\mathbb{K} \otimes U) \\ (\alpha, (\sum \beta_i \otimes u_i)) & \to & \sum (\alpha\beta_i) \otimes u_i. \end{array}$$

Demostrar que $(\mathbb{K} \otimes U)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Demostración: Ya que $\mathbb{K}$ y U son $\mathbb{F}$-espacio vectorial, luego $\mathbb{K}\otimes U$ es un $\mathbb{F}$ espacio vectorial, luego $(\mathbb{K} \otimes U, +)$ es un grupo abeliano.

Para demostrar que el producto esta bien definido, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, u \in U$.

$$\begin{array}{rrcl} T_\alpha : & C(\mathbb{K} \times U) & \longrightarrow & \mathbb{K} \otimes U \\ & \delta_{(\beta,u)} & \to & (\alpha\beta) \otimes u. \end{array}$$

es una función lineal tal que $N(\mathbb{K} \times U) \subset \ker T_\alpha$.

$$\begin{array}{rrcl} \widetilde{T}_\alpha : & \mathbb{K} \otimes U & \longrightarrow & \mathbb{K} \otimes U \\ & \beta \otimes u & \to & (\alpha\beta) \otimes u. \end{array}$$

luego el producto esta bien definido

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & \mathbb{K}\times(\mathbb{K}\otimes U) & \longrightarrow & \mathbb{K}\otimes U \\ & (\alpha,\beta\otimes u) & \to & \widetilde{T}_\alpha(\beta\otimes u)=(\alpha\beta)\otimes u \end{array}$$

para las otras propiedades, sean $\alpha,\beta_i,\gamma_i\in\mathbb{K}, u_i,v_i\in U$. 1. Distributividad

$$\begin{aligned} \alpha(\sum_i(\beta_i\otimes u_i)+\sum_j(\gamma_j\otimes v_j)) &= (\sum_i(\alpha\beta_i\otimes u_i)+\sum_j(\alpha\gamma_j\otimes v_j)) \\ &= (\alpha\sum_i(\beta_i\otimes u_i)+\alpha\sum_j(\gamma_j\otimes v_j)) \end{aligned}$$

2. Distributividad

$$\begin{aligned} (\alpha+\gamma)\sum_i(\beta_i\otimes u_i) &= \sum_i((\alpha+\gamma)\beta_i\otimes u_i) \\ &= \sum_i((\alpha\beta_i+\gamma\beta_i)\otimes u_i) \\ &= \sum_i(\alpha\beta_i\otimes u_i+\gamma\beta_i\otimes u_i) \\ &= \sum_i(\alpha\beta_i\otimes u_i)+\sum_i(\gamma\beta_i\otimes u_i) \\ &= \alpha\sum_i(\beta_i\otimes u_i)+\gamma\sum_i(\beta_i\otimes u_i) \end{aligned}$$

3. Asociatividad

$$\begin{aligned} (\alpha\cdot\gamma)\cdot\sum_i(\beta_i\otimes u_i) &= \sum_i((\alpha\cdot\gamma)\cdot\beta_i\otimes u_i) \\ &= \sum_i(\alpha\cdot(\gamma\cdot\beta_i)\otimes u_i) \\ &= \alpha\cdot(\sum_i(\gamma\cdot\beta_i\otimes u_i)) \\ &= \alpha\cdot(\gamma\cdot(\sum_i(\beta_i\otimes u_i))) \end{aligned}$$

4. Neutro

$$\begin{aligned} 1\cdot\sum_i(\beta_i\otimes u_i) &= \sum_i((1\cdot\beta_i\otimes u_i) \\ &= \sum_i(\beta_i\otimes u_i) \end{aligned}$$

Luego $(\mathbb{K}\otimes U,+,\cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Ejemplo 74 *$\mathbb{R}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial de $\mathbb{R}$, Determinar la dimensión del $\mathbb{C}$ espacio vectorial $\mathbb{C}\otimes\mathbb{R}^2$.*

Solución: Notemos que

$$\alpha \otimes (a,b) = \alpha a(1 \otimes e_1) + \alpha b(1 \otimes e_2)$$

Ya que

$$< \{\alpha \otimes (a,b) \mid \alpha \in \mathbb{C},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} >= \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^2$$

luego

$$< \{1 \otimes e_1, 1 \otimes e_2\} >= \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^2$$

Es linealmente independiente

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & \alpha(1 \otimes e_1) + \beta(1 \otimes e_2) \\
0 & = & (\alpha \otimes e_1) + (\beta \otimes e_2) \\
0 & = & (a + bi \otimes e_1) + (c + di \otimes e_2) \\
0 & = & (1 \otimes ae_1) + (i \otimes be_1) + (1 \otimes ce_2) + (i \otimes de_2) \\
0 & = & (1 \otimes (a,c) + i \otimes (b,d)
\end{array}$$

Ya que $\{1, i\}$ es linealmente independiente como $\mathbb{R}$ espacio vectorial se tiene que

$$(a,c) = (0,0) \quad (b,d) = (0,0)$$

De este modo $\alpha = 0 = \beta$, es decir son linealmente independiente

Por $\{1 \otimes e_1, 1 \otimes e_2\}$ es una base de $\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^2$

Propiedad 113 *Sea U un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión n entonces $\mathbb{C} \otimes U$ es un $\mathbb{C}$ espacio vectorial de dimensión n.*

Propiedad 114 *Si $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ es el $\mathbb{R}$ espacio vectorial de las matrices $n \times m$ entonces $\mathbb{C} \otimes M_{n\times m}(\mathbb{R})$ es isomorfo a $M_{n\times m}(\mathbb{C})$ como $\mathbb{C}$ espacio vectorial.*

Ejercicio 75 *Sean U, V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$*

1. *Demostrar que la correspondencia es isomorfismo*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} \otimes W & \simeq & W \\
(a \otimes w) & \longleftrightarrow & aw
\end{array}$$

2. *Demostrar que la correspondencia es isomorfismo*

$$\begin{array}{ccc}
W \otimes V & \simeq & V \otimes W \\
(w \otimes v) & \longleftrightarrow & v \otimes w
\end{array}$$

3. *Demostrar que la correspondencia es isomorfismo*

$$\begin{array}{ccc}
(U \otimes V) \otimes W & \simeq & U \otimes (V \otimes W) \\
(u \otimes v) \otimes w & \longleftrightarrow & u \otimes (v \otimes w)
\end{array}$$

4. Demostrar que la correspondencia es isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} V \otimes (\bigoplus\limits_i U_i) & \simeq & \bigoplus\limits_i (V \otimes U_i) \\ v \otimes (\sum u_i) & \longleftrightarrow & \sum v \otimes u_i \end{array}$$

Ejercicio 76 *Sean U, V dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, con producto interno F_1, F_2 respectivamente*

Demostrar que

$$\begin{array}{rcl} F: \ U \otimes V \times U \otimes V & \to & \mathbb{R} \\ (u \otimes v, u' \otimes v') & \mapsto & F_1(u, u')F_2(v, v') \end{array}$$

definido en los elementos basales es un producto interno real.

4.2.2. Producto Tensorial de Funciones Lineales

En el capítulo de formas bilineales, demostramos que si $f \in L(V, \mathbb{K})$ y $g \in L(U, \mathbb{K})$ entonces

$$\begin{array}{rcl} f \times g: \ U \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u, v) & \mapsto & f(u)g(v) \end{array}$$

es una forma bilineal, ahora más en general tenemos que

Propiedad 115 *Sean $f : U_1 \to U_2$, $g : V_1 \to V_2$ transformaciones lineales entonces*

$$\begin{array}{rcl} f \times g: \ U_1 \times V_1 & \longrightarrow & U_2 \otimes V_2 \\ (u, v) & \mapsto & f(u) \otimes g(v) \end{array}$$

Es un operador bilineal.

Demostración: Sean $f \in L(U_1, U_2)$, $g \in L(V_1, V_2)$. Claramente es una función, ya que dado $u \in U_1$, $v \in V_1$, entonces $f(u) \in U_2$ y $g(v) \in V_2$, por ende tenemos $f(u) \otimes g(v) \in U_2 \otimes V_2$.

Dados $u, u' \in U_1$, $v, v' \in V_1$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl} (f \times g)(u + \alpha u', v) & = & (f(u + \alpha u') \otimes g(v) \\ & = & (f(u) + \alpha f(u')) \otimes g(v) \\ & = & f(u) \otimes g(v) + \alpha(f(u') \otimes g(v)) \\ & = & (f \times g)(u, v) + \alpha(f \times g)(u', v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (f \times g)(u, v + \alpha v') & = & (f(u) \otimes g(v + \alpha v') \\ & = & f(u)) \otimes (g(v) + \alpha g(v')) \\ & = & f(u) \otimes g(v) + \alpha(f(u) \otimes g(v')) \\ & = & (f \times g)(u, v) + \alpha(f \times g)(u, v') \end{array}$$

luego tenemos que $f \times g$ es un operador bilineal $\square$

Observación: La anterior bilineal, al considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_1 \times V_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f\times g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", shift left=3ex] & U_1 \otimes V_1 \arrow[d, dotted, "\exists! f\otimes g"] \\
& U_2 \otimes V_2
\end{tikzcd}$$

permite definir una única lineal, tal que en los elementos basales cumple con

$$\begin{array}{rccc} f\otimes g: & U_1\otimes V_1 & \longrightarrow & U_2\otimes V_2 \\ & u\otimes v & \mapsto & f(u)\otimes g(v) \end{array}$$

Ejemplo 77 *Sean* $Id_1 : U \to U$, $Id_2 : V \to V$ *función identidad entonces*

$$\begin{array}{rccc} Id_1\otimes Id_2: & U\otimes V & \longrightarrow & U\otimes V \\ & u\otimes v & \mapsto & Id_1(u)\otimes Id_2(v) = u\otimes v \end{array}$$

Luego

$$Id_1 \otimes Id_2 = Id$$

Propiedad 116 *Sean* U_1, U_2, V_1, V_2 *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$ *entonces*

$$\begin{array}{rccc} F: & L(U_1,U_2)\otimes L(V_1,V_2) & \longrightarrow & L(U_1\otimes U_2, V_1\otimes V_2) \\ & f\otimes g & \mapsto & f\otimes g \end{array}$$

es un monomorfismo

Demostración: Sea $z \in \ker(F)$ no nulo, luego existe vectores linealmente tales que

$$z = \sum_{i=1}^{r} \phi_i \otimes \rho_i$$

tal que $F(z) = 0 = \sum_{i=1}^{r} \phi_i \times \rho_i$, ya que ϕ_1, es no nula existe $x \in U_1$ tal que $\phi_1(x) \neq 0$. En $\{\phi_i(x) \mid i\}$ escogemos un conjunto maximal, linealmente independiente. Reordenemos de modo que los primero s elementos son linealmente independiente

$$z = \sum_{i=1}^{r} \phi_i \otimes \rho_i = z = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i \otimes \varrho_i$$

por lo anterior tenemos que

$$\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_{j,i}\varphi_i(x)$$

reemplazando tenemos que, para todo $y \in V_1$

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x) \otimes \varrho_i(y) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) \otimes \varrho_i(y) + \sum_{j=s+1}^{r} \varphi_j(x) \otimes \varrho_j(y) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) \otimes \varrho_i(y) + \sum_{j=s+1}^{r} \sum_{i=1}^{s} \lambda_{j,i}\varphi_i(x) \otimes \varrho_j(y) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) \otimes \varrho_i(y) + \sum_{j=s+1}^{r} \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) \otimes \lambda_{j,i}\varrho_j(y) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) \otimes \varrho_i(y) + \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) \otimes (\sum_{j=s+1}^{r} \lambda_{j,i}\varrho_j(y)) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) \otimes (\varrho_i(y) + (\sum_{j=s+1}^{r} \lambda_{j,i}\varrho_j(y)))
\end{aligned}$$

Ya que los vectores son linealmente independiente, se tiene que para todo i

$$(\varrho_i + \sum_{j=s+1}^{r} \lambda_{j,i}\varrho_j)(y) = 0, \qquad \forall y \in V_1$$

Luego se tiene que

$$\varrho_i = -\sum_{j=s+1}^{r} \lambda_{j,i}\varrho_j, \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., s\}$$

lo cual es una contradicción, por ello $z = 0$. $\square$

Ejercicio 78 *Sean U, V dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, entonces demostrar que*

$$\begin{array}{rccc} F: & End(U) \otimes End(V) & \longrightarrow & End(U \otimes V) \\ & f \otimes g & \mapsto & f \otimes g \end{array}$$

es un isomorfismo.

Propiedad 117 *Sean $f, f' \in L(U_1, U_2)$, $g, g' \in L(V_1, V_2)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces*

1. $(f + \alpha f') \otimes g = (f \otimes g) + \alpha(f' \otimes g)$
2. $f \otimes (g + \alpha g') = (f \otimes g) + \alpha(f \otimes g')$

Demostración: Basta verificar en los elementos basales, ya que los otros se obtiene por linealidad, luego sean $u \in U_1$ y $v \in V_1$

$$\begin{aligned}
((f + \alpha f') \otimes g)(u \otimes v) &= ((f + \alpha f')(u)) \otimes g(v) \\
&= (f(u) + \alpha f'(u)) \otimes g(v) \\
&= f(u) \otimes g(v) + \alpha f'(u) \otimes g(v) \\
&= (f \otimes g)(u \otimes v) + \alpha(f' \otimes g)(u \otimes v) \\
&= ((f \otimes g) + \alpha(f' \otimes g))(u \otimes v)
\end{aligned}$$

Ya que los elementos fueron arbitrario y basales se obtiene

$$(f+\alpha f')\otimes g = (f\otimes g)+\alpha(f'\otimes g)$$

Para la otra igual se tiene

$$\begin{array}{rcl}(f\otimes(g+\alpha g'))(u\otimes v) &=& f(u))\otimes(g+\alpha g')(v)\\ &=& f(u)\otimes(g(v)+\alpha g'(v))\\ &=& f(u)\otimes g(v)+\alpha f(u)\otimes g'(v)\\ &=& (f\otimes g)(u\otimes v)+\alpha(f\otimes g')(u\otimes v)\\ &=& ((f\otimes g)+\alpha(f\otimes g'))(u\otimes v)\end{array}$$

Ya que los elementos fueron arbitrario y basales se obtiene

$$f\otimes(g+\alpha g') = (f\otimes g)+\alpha(f\otimes g')$$

□

Propiedad 118 *Sean $f'\in L(U_1,U_2)$,$f\in L(U_2,U_3)$ $g'\in L(V_1,V_2)$ y $g\in L(V_3,V_3)$ entonces*

$$(f\otimes g)\circ(f'\otimes g') = (f\circ f')\otimes(g\circ g')$$

donde los dominios están dados por

$$\begin{array}{ccccc}U_1\otimes V_1 & \xrightarrow{f'\otimes g'} & U_2\otimes V_2 & \xrightarrow{f\otimes g} & U_3\otimes V_3\\ z & \mapsto & (f'\otimes g')(z) & \mapsto & (f\otimes g)((f'\otimes g')(z))\end{array}$$

Demostración: Basta verificar en los elementos basales, ya que los otros se obtiene por linealidad, luego sean $u\in U_1$ y $v\in V_1$

$$\begin{array}{rcl}((f\otimes g)\circ(f'\otimes g'))u\otimes v) &=& (f\otimes g)((f'\otimes g')(u\otimes v))\\ &=& (f\otimes g)(f'(u)\otimes g'(v))\\ &=& f(f'(u))\otimes g(g'(v)))\\ &=& (f\circ f')(u)\otimes(g\circ g')(v)\\ &=& (f\circ f')\otimes(g\circ g')(u\otimes v)\end{array}$$

Ya que los elementos fueron arbitrario y basales se obtiene

$$(f\otimes g)\circ(f'\otimes g') = (f\circ f')\otimes(g\circ g')$$

□

Corolario 119 *Si $f\in L(U,U)$ y $g\in L(V,V)$ son isomorfismo entonces $f\otimes g$ es un isomorfismo y se cumple*

$$(f\otimes g)^{-1} = f^{-1}\otimes g^{-1}$$

Propiedad 120 *Sean $f\in L(U_1,U_2)$ $g\in L(V_1,V_2)$ entonces*

1. $\ker(f \otimes g) = \ker(f) \otimes V_1 + U_1 \otimes \ker(g)$.

2. $\mathrm{Im}(f \otimes g) = \mathrm{Im}(f) \otimes \mathrm{Im}(g)$.

Ejercicio 79 *Sean* $f \in L(U_1, U_2)$ $g \in L(V_1, V_2)$ *entonces*

1. $f \otimes g$ *es inyectiva si y sólo si* f, g *son inyectivas*

2. f, g *epiyectivas si y sólo si* $f \otimes g$ *es epiyectiva.*

Matriz Asociada a una Transformación Lineal

Sean U, V, U', V' espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \cdots, u'_k\}$, $\mathcal{D} = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$, $\mathcal{D}' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_t\}$ bases ordenadas de U y V respectivamente, $f \in L(U, V)$ y $g \in L(U', V')$, luego tenemos que

$$f(u_i) = \sum_j \alpha_{j,i} v_j \quad g(u'_i) = \sum_j \beta_{j,i} v'_j$$

luego tenemos

$$[f(u_i)]_{\mathcal{D}} = [(\alpha_{r,i})_{r,1}] \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$$

denotamos la matriz asociada a la transformación lineal

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [(\alpha_{r,s})_{r,s}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Análogamente tenemos la matriz asociada a la transformación lineal

$$[g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{D}'} = [(\beta_{r,s})_{r,s}] \in M_{t\times k}(\mathbb{K})$$

Consideremos las bases ordenadas con el orden lexicográfico

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}' = \{u_1 \otimes u'_1, u_1 \otimes u'_2, \cdots, u_1 \otimes u'_k, u_2 \otimes u'_1, \cdots, u_n \otimes u'_{k-1}, u_n \otimes u'_k\}$$

$$\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}' = \{v_1 \otimes v'_1, v_1 \otimes v'_2, \cdots, v_1 \otimes v'_t, v_2 \otimes v'_1, \cdots, v_m \otimes v'_{t-1}, v_m \otimes v'_t\}$$

Observación: antes de proceder con el calculo, necesitamos hacer una correspondencia entre el orden lexicográfico y $1, 2, \cdots, nk$

Al observar los indices tenemos

$\mathbb{J}_n \times \mathbb{J}_k$	1	2	$\cdots$	k
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$\cdots$	$(1,k)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$\cdots$	$(2,k)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$\cdots$	$(3,k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$(n,1)$	$(n,2)$	$\cdots$	(n,k)

	1	2	$\cdots$	k
1	$0k+1$	$0k+2$	$\cdots$	$1k$
2	$k+1$	$k+2$	$\cdots$	$2k$
3	$2k+1$	$2k+2$	$\cdots$	$3k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$(n-1)k+1$	$(n-1)k+2$	$\cdots$	nk

Naturalmente obtenemos la correspondencia biunívoca

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{J}_n \times \mathbb{J}_k & \leftrightarrow & \mathbb{J}_{nk} \\ (i,j) & \leftrightarrow & (i-1)k+j \end{array}$$

establecido el orden tenemos

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)(u_i \otimes u'_j) &= f(u_i)g(u'_j) \\
&= (\sum_h \alpha_{h,i} v_h) \otimes (\sum_l \beta_{l,j} v'_l) \\
&= (\sum_h \sum_l \alpha_{h,i}\beta_{l,j}(v_h \otimes v'_l)
\end{aligned}$$

luego tenemos

$$[(f \otimes g)(u_i \otimes u'_j)]_{\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}'} = [(\alpha_{h,i}\beta_{l,j})_{(h-1)k+l,1}] \in M_{mt\times 1}(\mathbb{K})$$

y de este modo la matriz asociada a la transformación lineal

$$\begin{aligned}
[f \otimes g]_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}'}^{\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}'} &= [(\alpha_{h,i}\beta_{l,j})_{(h-1)k+l,(i-1)t+j}] \in M_{mk\times nt}(\mathbb{K}) \\
&= [(\alpha_{h,i}[g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{D}'})_{h,i}] \in M_{mk\times nt}(\mathbb{K}) \\
&= [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} \otimes [g]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{D}'} \in M_{mk\times nt}(\mathbb{K})
\end{aligned}$$

Observación: Al reescribir las propiedades anteriores, con la matriz asociada obtenemos que

Propiedad 121 *Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C, D \in M_{k\times t}(\mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces*

1. $(A + \alpha B) \otimes C = (A \otimes C) + \alpha(B \otimes C)$
2. $A \otimes (C + \alpha D) = (A \otimes C) + \alpha(B \otimes D)$

Propiedad 122 *Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in M_{n\times k}(\mathbb{K})$, $C \in M_{r\times s}(\mathbb{K})$ y $D \in M_{s\times t}(\mathbb{K})$ entonces*

$$(A \otimes C) \cdot (B \otimes D) = (A \cdot B) \otimes (C \cdot D)$$

Corolario 123 *Sean $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_n(\mathbb{K})$ invertibles entonces*

$$(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1}) \otimes (B^{-1})$$

Propiedad 124 *Sean $A \in M_n(\mathbb{K}), B \in M_m(\mathbb{K})$, diagonalizables entonces $(A \otimes B)$ es diagonalizable*

Propiedad 125 *Sean $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_n(\mathbb{K})$ entonces*

$$tr(A \otimes B) = tr(A) \cdot tr(B)$$

Demostración: Sean $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_n(\mathbb{K})$, luego tenemos

$$A \otimes B = [(a_{h,i}b_{l,j})_{(h-1)n+l,(i-1)n+j}] \in M_{mn\times mn}(\mathbb{K})$$

Note que por algoritmo de la división se tiene $(h-1)n+l = (i-1)n+j$ si y solo si $h = i,\ l = j$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A \otimes B) &= \sum (a_{h,i} b_{l,j})_{t,t} = \sum_t a_{h,h} b_{j,j} = \sum_{h,j} a_{h,h} b_{j,j} \\
&= \sum_h \sum_j a_{h,h} b_{j,j} = \sum_h a_{h,h} \sum_j b_{j,j} = (\sum_h a_{h,h})(\sum_j b_{j,j}) \\
&= \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B)
\end{aligned}$$

□

Propiedad 126 *Sean* $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_n(\mathbb{K})$ *y*

$$C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

una matriz por bloque entonces

$$\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Demostración: Recordemos que $\det(C) = \sum_i (-1)^{i+1} c_{i,1} \det(C_{i,1})$

Por inducción en n el orden de A.

Para $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \sum_i (-1)^{i+1} c_{i,1} \det(C_{i,1}) \\
&= c_{1,1} \det(C_{1,1}) \\
&= a \det(B) = \det(A) \det(B)
\end{aligned}$$

Supongamos que es valido para n, por demostrar para $n + 1$

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \sum_i^{n+m+1} (-1)^{i+1} c_{i,1} \det(C_{i,1}) \\
&= \sum_i^{n+1} (-1)^{i+1} c_{i,1} \det(C_{i,1}) \\
&= \sum_i^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(C_{i,1})
\end{aligned}$$

Notemos que

$$C_{i,1} = \begin{bmatrix} A_{i,1} & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

luego por hipótesis de inducción $\det(C_{i,1}) = \det(A_{i,1})\det(B)$.

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \sum_{i}^{n+m+1} (-1)^{i+1} c_{i,1} \det(C_{i,1}) \\
&= \sum_{i}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(C_{i,1}) \\
&= \sum_{i}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) \det(B) \\
&= \left(\sum_{i}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) \right) \det(B) \\
&= \det(A) \det(B)
\end{aligned}$$

Por teorema de inducción tenemos el resultado esperado. □

Propiedad 127 *Sean* $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_n(\mathbb{K})$ *entonces*

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^n \cdot \det(B)^m$$

Demostración: Notemos que

$$A \otimes B = A \otimes Id_n \cdot Id_m \otimes B,$$

por lo tanto

$$\det(A \otimes B) = \det(A \otimes Id_n) \cdot \det(Id_m \otimes B).$$

Luego basta demostrar que $\det(Id_m \otimes B) = \det(B)^m$.

Para ello notemos que $1 \otimes B = B$, luego $\det(1 \otimes B) = \det B = \det(B)^1$

Supongamos que

$$\forall B \in M_n(\mathbb{K}))(\det([id]_m \otimes B) = \det(B)^m$$

Sea $B \in M_n(\mathbb{K})$

$$[id]_{m+1} \otimes B \quad = \quad [(\delta_{h,i} b_{l,j})_{(h-1)n+l,(i-1)n+j}] \in M_{(m+1)n \times (m+1)n}(\mathbb{K})$$

Los coeficientes que pueden ser no nulo son:

$$(b_{l,j})_{(h-1)n+l,(h-1)n+j}$$

luego es una matriz por bloque dada por

$$[id]_{m+1} \otimes B = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & [Id]_m \otimes B \end{bmatrix},$$

Por lo tanto tenemos

$$\det([id]_{m+1} \otimes B) = \det(B) \cdot \det([id]_m \otimes B) = \det(B) \cdot \det(B)^m = \det(B)^{m+1}$$

por teorema de inducción se obtiene el resultado

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^n \cdot \det(B)^m$$

□

Ejemplo 80 *Sean A, B y C matrices complejas de tamaños $n \times n$, $m \times m$y $n \times m$ respectivamente. tal que que para cada valor propio α de A y cada valor propio β de B se cumple que $\alpha + \beta \neq 0$. Demostrar entonces que la ecuación matricial $AX + XB = C$ tiene solución única.*

Solución: Sea $M_{n\times m}(\mathbb{C})$ el $\mathbb{C}$-espacio de matrices rectangulares, construimos la función lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & M_{n\times m}(\mathbb{C}) & \to & M_{n\times m}(\mathbb{C}) \\ & X & \to & AX + XB \end{array}$$

Notemos que resolver el problema es equivalente a demostrar que T es biyectiva, es decir la matriz asociada debe ser invertible.

La base canónica de $M_{n\times m}(\mathbb{C})$ es

$$B = \{E_{1,1}, ..., E_{1,m}, ..., E_{n,1}, ..., E_{n,m}\}$$

Calculemos en cada elemento la imagen,

$$T(E_{r,s}) = AE_{r,s} + E_{r,s}B = \sum_{i=1}^{n} a_{i,r}E_{i,s} + \sum_{j=1}^{m} b_{s,j}E_{r,j}$$

Reescribiendo tenemos que

$$[T]_B = [(a_{i,r}\delta_{j,s})_{(i-1)m+j,(r-1)m+s}] + [(b_{s,j}\delta_{r,i})_{(i-1)m+j,(r-1)m+s}]$$

De este modo se tiene que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} a_{11}Id_m & \cdots & a_{1n}Id_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}Id_m & \cdots & a_{nn}Id_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B^t \end{bmatrix}$$

donde Id_m es la matriz idéntica de orden m y B^t es la transpuesta de B. Pero,

$$\begin{bmatrix} a_{11}Id_m & \cdots & a_{1n}Id_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}Id_m & \cdots & a_{nn}Id_m \end{bmatrix} = A \otimes Id_m$$

$$\begin{bmatrix} B^t & \cdots & a_{1n}Id_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B^t \end{bmatrix} = Id_n \otimes B^t$$

De esta forma

$$[T]_B = A \otimes Id_m + Id_n \otimes B^t$$

Puesto que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado existen matrices invertibles F y G de tamaños $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente, tales que $F^{-1}AF = S_1$ y $G^{-1}B^tG = S_2$ son matrices triangulares superiores. Notemos que en la diagonal de S_1 y S_2 están localizados los valores propios α de A y β de B^t , respectivamente (notemos que los valores propios de B^t son los mismos de B). Ahora notemos que

Tenemos entonces que $[T]_B = A \otimes Id_m + Id_n \otimes B^t$, de donde se tiene que

$$(F \otimes G)^{-1}[T]_B(F \otimes G) = (S_1 \otimes Id_m) + (Id_n \otimes S_2)$$

Notemos que la matriz $(S_1 \otimes Id_m) + (Id_n \otimes S_2)$ es triangular superior y en su diagonal están las sumas de la forma $\alpha + \beta$, las cuales por hipótesis son no nulas, es decir, esta matriz es invertible, o sea que, $[T]_B$ es también invertible.

Ejercicio 81 *Sean $A \in M_n(\mathbb{K}), B \in M_m(\mathbb{K})$, α un valor propio de A con vector columna propio u y β un valor propio de B con vector columna propio v. Entonces, $u \otimes v$ es un vector propio de $A \otimes B$ con valor propio $\alpha\beta$.*

Ejercicio 82 *Sean $A \in M_n(\mathbb{K}), B \in M_m(\mathbb{K})$ matrices diagonalizables, entonces $A \otimes B$ es diagonalizable.*

4.2.3. Producto Tensorial de n-Espacios Vectoriales

Sean U_i espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $F : \times_{i=1}^{n} U_i \to W$ una función se dice que es n-lineal si y sólo si

$$F(u_1, \cdots , u_i + \alpha u_i', \cdots , u_n) = F(u_1, \cdots , u_i, \cdots , u_n) + \alpha F(u_1, \cdots , u_i', \cdots , u_n)$$

para todo i, $u_i \in U_i$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 83 *La función* $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ x & \rightsquigarrow & \prod_i x_i \end{array}$ *es n- lineal*

Propiedad 128 *Sean U_i espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.*

El conjunto de las funciones n lineales de $U_1 \times \cdots \times U_n$ en W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Teorema 129 *Sean U_i espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ entonces existe un único $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y un operador n-lineal $\pi : U_1 \times \cdots \times U_n \to U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$, tal que cumple con*

T1 $\mathrm{Im}(\pi)$ *genera* $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ *o* $< \mathrm{Im}(\pi) >= U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$

T2 Si $B : U_1 \times \cdots \times U_n \to W$ un operador n-lineal, entonces existe un única transformación lineal de $f : U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \to W$ tal que

$$f \circ \pi = B$$

En este caso $(\bigotimes_{i=1}^{n} U_i, \pi)$ es llamado el producto tensorial de los espacios U_i

Demostración: I Parte: Sabemos que

$$\begin{array}{rccc} \pi_2: & U_1 \times U_2 & \rightarrow & U_1 \otimes U_2 \\ & (u,v) & \rightsquigarrow & u \otimes v \end{array}$$

es bilineal

$$\begin{array}{rccccc} \pi_3': & (U_1 \times U_2) \times U_3 & \xrightarrow{\pi_2 \times Id} & (U_1 \otimes U_2) \times U_3 & \xrightarrow{\pi_2'} & (U_1 \otimes U_2) \otimes U_3 \\ & ((u_1,u_2),u_3) & \rightsquigarrow & ((u_1 \otimes u_2),u_3) & \rightsquigarrow & (u_1 \otimes u_2) \otimes u_3 \end{array}$$

Considerando el isomorfismo natural $U_1 \times U_2 \times U_3 \simeq (U_1 \times U_2) \times U_3$ se tiene

$$\begin{array}{rccc} \pi_3: & U_1 \times U_2 \times U_3 & \longrightarrow & (U_1 \otimes U_2) \otimes U_3 \\ & (u_1,u_2,u_3) & \rightsquigarrow & (u_1 \otimes u_2) \otimes u_3 \end{array}$$

la cual es 3-lineal.

En general en forma recursiva tenemos que, dada la función

$$\pi_n : \times_{i=1}^n U_i \to \otimes_{i=1}^n U_i$$

n-lineal, se define la función

$$\pi_{n+1} : (\times_{i=1}^n U_i) \times U_{n+1} \xrightarrow{\pi_n \times Id} (\otimes_{i=1}^n U_i) \times U_{n+1} \xrightarrow{\pi_2} (\otimes_{i=1}^n U_i) \otimes U_{n+1}$$

donde $\pi_{n+1}((u_1,\cdots,u_n),u_{n+1}) = \pi_2((u_1 \otimes \cdots \otimes u_n),u_{n+1}) = (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \otimes u_{n+1}$ la cual es $n+1$-lineal.

II Parte: Sabemos que

$$< Im\pi_2 >= U_1 \otimes U_2$$

$$< Im\pi_3 >= U_1 \otimes U_2 \otimes U_3$$

para ellos sea $z \in U_1 \otimes U_2 \otimes U_3$, luego $z = \sum_{i\in I} \pi_2'(z_i, u_{i_3})$ con $z_i \in U_1 \otimes U_2$ luego

$$z_i = \sum_{i \in J_i} \pi_2(u_{i_1}, u_{i_2})$$

Reemplazando y usando la bilineal obtenemos

$$z = \sum_{i\in I}\sum_{i\in J_i} \pi_2'(\pi_2(u_{i_1},u_{i_2}),u_{i_3}) = \sum_{i\in I}\sum_{i\in J_i} \pi_3(u_{i_1},u_{i_2},u_{i_3})$$

con ello la imagen genera.

En general tenemos, si

$$< Im\pi_n >= \otimes_{i=1}^n U_i$$

entonces

$$< Im\pi_{n+1} >= (\otimes_{i=1}^n U_i) \otimes U_{n+1}.$$

para ello, sea $z \in (\otimes_{i=1}^n U_i) \otimes U_{n+1}$, luego $z = \sum_{i\in I} \pi_n'(z_i, u_{i_{n+1}})$ con $z_i \in \otimes_{i=1}^n U_i$ luego

$$z_i = \sum_{i \in J_i} \pi_n(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_n})$$

Reemplazando y usando la bilineal obtenemos

$$z = \sum_{i \in I} \sum_{i \in J_i} \pi'_n(\pi_n(u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}), u_{i_{n+1}}) = \sum_{i \in I} \sum_{i \in J_i} \pi_{n+1}(u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}, u_{i_{n+1}})$$

con ello la imagen genera.
III Parte: Sólo haremos el caso general

$$\begin{tikzcd}
\times_{i=1}^n U_i \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[dr, "B"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\circlearrowright"] & (\otimes_{i=1}^n U_i) \arrow[d, dotted, "\exists ! b"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

Sea

$$B : \times_{i=1}^n U_i \times U_{n+1} \longrightarrow W$$

una función $(n+1)$-lineal, sea $x \in U_{n+1}$ luego definimos

$$B_x : \times_{i=1}^n U_i \longrightarrow W; \quad B_x(u) = B(u, x)$$

una función n-lineal, luego por hipótesis existe

$$\lambda_x : \otimes_{i=1}^n U_i \longrightarrow W$$

Así tenemos

$$\lambda : \otimes_{i=1}^n U_i \times U_{n+1} \longrightarrow W; \quad \lambda(u, x) = \lambda_x(u)$$

que es bilineal.

$$\begin{tikzcd}
\times_{i=1}^n U_i \times U_{n+1} \arrow[r, "\pi_n \times Id"] \arrow[dr, "B"'] & (\otimes_{i=1}^n U_i) \times U_{n+1} \arrow[r, "\pi'_n"] \arrow[d, dotted, "\lambda"] & (\otimes_{i=1}^n U_i) \otimes U_{n+1} \arrow[dl, dotted, "\exists ! b"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

luego existe b que es lineal. $\square$

Corolario 130 *Sean U_i espacios vectoriales de dimension n_i sobre $\mathbb{K}$ entonces*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\otimes_i U_i) = \prod_i n_i$$

Ejemplo 84 *Dado el operador trilineal*

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \rightsquigarrow & (x_1y_1z_1 + 2x_1y_2z_1 + 2x_2y_1z_2, x_2y_2z_2, x_1y_1z_2 + 3x_2y_1z_1) \end{array}$$

Determine la única función lineal $f : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Solución: Por la conmutación del diagrama tenemos

$$f(e_i \otimes e_j \otimes e_k) = B(e_i, e_j, e_k)$$

por lo tanto, extendiendo linealmente la función obtenemos

$$\begin{aligned}
& f(\sum_{i,j,k} a_{i,j,k} e_i \otimes e_j \otimes e_k) = \\
= \;& a_{1,1,1}B(e_1,e_1,e_1) + a_{1,1,2}B(e_1,e_1,e_2) + a_{1,2,1}B(e_1,e_2,e_1) + a_{1,2,2}B(e_1,e_2,e_2) + ... \\
& ... + a_{2,1,1}B(e_2,e_1,e_1) + a_{2,1,2}B(e_2,e_1,e_2) + a_{2,2,1}B(e_2,e_2,e_1) + a_{2,2,2}B(e_2,e_2,e_2) \\
= \;& a_{1,1,1}(1,0,0) + a_{1,1,2}(0,0,1) + a_{1,2,1}(2,0,0) + a_{1,2,2}(0,0,0) + a_{2,1,1}(0,0,3) + ... \\
& ... + a_{2,1,2}(2,0,0) + a_{2,2,1}(0,0,0) + a_{2,2,2}(0,1,0) \\
= \;& (a_{1,1,1} + 2a_{1,2,1} + 2a_{2,1,2}, a_{2,2,2}, a_{1,1,2} + 3a_{2,1,1})
\end{aligned}$$

Ejercicio 85 *Sean $x_i \in U_i$,*

Demostrar

$$\textit{Si } x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r = 0, \textit{ entonces existe } i \textit{ tal que } x_i = 0$$

Ejercicio 86 *Sean $x_i, y_i \in U_i$,*

Demostrar

Si $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r = y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_r$, entonces para todo i, existe λ_i tales que $x_i = \lambda_i y_i$ y $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r = 1$

4.3. Producto Exterior

Teorema 131 *Sea U un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ entonces existe un único $U \wedge U$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y operador bilineal antisimétrico $\pi : U \times U \to U \wedge U$, tal que cumple con*

1. $\mathrm{Im}(\pi)$ *genera $U \wedge U$ o $< \mathrm{Im}(\pi) >= U \wedge U$*
2. *Si $B : U \times U \to W$ un operador bilineal antisimétrico, entonces existe un única transformación lineal $f : U \wedge U \to W$ tal que*

$$f \circ \pi = B$$

$$\begin{tikzcd}
U \times U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "B"'] & U \wedge U \arrow[d, dotted, "\exists ! b"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

En este caso $(U \wedge U, \pi)$ es llamado el producto exterior del espacio U

Demostración: Sea U un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$
Unicidad

Supongamos que existen espacios que cumple con las dos propiedades anteriores, luego $\left(U\widetilde{\wedge}(U),\widetilde{\pi}\right)$ con las mismas propiedades, luego

$$\begin{tikzcd} & U\widetilde{\wedge}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! g_1"] \\ U\times U \arrow[ur, "\widetilde{\pi}"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\widetilde{\pi}"'] & U\wedge U \arrow[d, dotted, "\exists! g_2"] \\ & U\widetilde{\wedge}(U) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & U\wedge U \arrow[d, dotted, "\exists! g_2"] \\ U\times U \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "\widetilde{\pi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & U\widetilde{\wedge}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! g_1"] \\ & U\wedge U \end{tikzcd}$$

Como las compuestas son únicas, luego $g_1 \circ g_2 = Id$. Análogamente la otra igualdad $g_2 \circ g_1 = Id$. Por lo tanto son isomorfos.

Existencia.

Consideremos el espacio vectorial $U \otimes U$ y el subespacio.

$$T(U) = \langle\{u\otimes v + v\otimes u \quad | \quad u, v \in U\ \}\rangle$$

Y el espacio cociente

$$U\wedge U = (U\otimes U)\diagup T(U).$$

donde dos elementos son iguales si

$$\overline{f} = \overline{g} \Leftrightarrow f - g \in T(U)$$

además

$$\begin{array}{rcccc} \pi: & U\times U & \to & U\otimes U & \to & (U\otimes U)\diagup T(U) \\ & (u,v) & \rightsquigarrow & u\otimes u & \rightsquigarrow & \overline{u\otimes v} = u\wedge v \end{array}$$

la función compuesta la denotamos por π y es bilineal antisimétrica, además tenemos que $<\operatorname{Im}\pi>= U\wedge U$,

Propiedad Universal.

Sea $\psi : U\times U \to W$ un operador bilineal antisimétrico, por demostrar que existe $f : U\wedge U \to W$ lineal.

$$\begin{tikzcd} U\times U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & U\wedge U \arrow[d, dotted, "\exists! f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Para ello sea $g_1 : U\otimes U \to W$, lineal tal que

$$\begin{tikzcd} U\times U \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dr, "\psi"'] & U\otimes U \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d, dotted, "g_1"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] & U\wedge U \arrow[dl, dotted, "\exists! f"] \arrow[dll, phantom, "\circlearrowright"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Como ψ es antisimétrica, luego $T(U) \subset \ker g_1$

Por lo tanto, existe una única transformación lineal de $f : U \wedge U \to W$. $\square$

Propiedad 132 *Sean $u, v, w \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ luego*

1. $(\alpha u + \beta v) \wedge w = \alpha (u \wedge w) + \beta (v \wedge w)$
2. $u \wedge (\alpha v + \beta w) = \alpha (u \wedge v) + \beta (u \wedge w)$
3. $\alpha (u \wedge v) = (\alpha u) \wedge v = u \wedge (\alpha v)$
4. $u \wedge v = -v \wedge u$
5. $u \wedge u = 0$

Propiedad 133 *Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de U, entonces todo vector de $z \in U \wedge U$ se puede escribir de la forma*

$$z = \sum_{i\in J} e_i \wedge w_i$$

con $J \subseteq I$ finito

Propiedad 134 *Sea U un espacio de dimensión n sobre $\mathbb{K}$.*

$$U \wedge U \simeq A_n(\mathbb{K}), \text{ y } \dim(U \wedge U) = \frac{n(n-1)}{2}$$

donde

$$A_n(\mathbb{K}) = \left\{ A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A = -A^t \right\}$$

Demostración: Un modelo del producto tensorial $L(U, U)$, una base esta formada por los elementos $E_{i,j}$ y del producto simétrico, una base es $\{E_{ij} - E_{ji} \mid i < j \}$ $\square$

Corolario 135 *Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U entonces $\{u_i \wedge u_j \mid i < j\}$ es una base de $U \wedge U$.*

Ejemplo 87 *Dado el operador bilineal simétrico*

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_3y_2 - 2x_2y_3, 3x_2y_1 - 3x_1y_2 + x_1y_3 - x_3y_1) \end{array}$$

Determine la única función lineal $f : \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Solución: Por la conmutación del diagrama tenemos

$$f(e_i \wedge e_j) = B(e_i, e_j)$$

por lo tanto, extendiendo linealmente la función obtenemos

$$\begin{aligned} f(\sum_{i<j} a_{i,j} e_i \wedge e_j) &= a_{1,2}B(e_1, e_2) + a_{1,3}B(e_1, e_3) + a_{2,3}B(e_2, e_3) \\ &= a_{1,2}(1, -3) + a_{1,3}(0, 1) + a_{2,3}(-2, 0) \\ &= (a_{1,2} - 2a_{2,3}, -3a_{1,2} + a_{1,3}) \end{aligned}$$

Propiedad 136 *Sean U y V espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ entonces*

$$L(U \wedge U, W) = Bil_a(U \times U, W)$$

Propiedad 137 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $U \leq V$ entonces $< \pi(U \times U) >$ cumple las dos propiedades, luego $< \pi(U \times U) >= U \wedge U \leq V \wedge V$.*

4.3.1. Producto Antisimétrico de Funciones Lineales

Propiedad 138 *Sea $f : U \to V$ una transformaciones lineales entonces*

$$\begin{array}{rccc} f \times f: & U \times U & \longrightarrow & V \wedge V \\ & (u, v) & \mapsto & f(u) \wedge f(v) \end{array}$$

Es un operador bilineal antisimétrico.

Demostración: Anteriormente demostramos que

$$\begin{array}{rccc} f \times f: & U \times U & \longrightarrow & V \otimes V \\ & (u, v) & \mapsto & f(u) \otimes f(v) \end{array}$$

es un operador bilineal, pasando al cuociente tenemos

$$\begin{array}{rccc} f \times f: & U \times U & \longrightarrow & V \wedge V \\ & (u, v) & \mapsto & f(u) \wedge f(v) \end{array}$$

es un operador bilineal, y es antisimétrico ya que

$$\begin{aligned} (f \times f)(u, v) &= f(u) \wedge f(v) \\ &= -f(v) \wedge f(u) \\ &= -(f \times f)(v, u) \end{aligned}$$

$\square$

Observación: Al considerar la anterior bilineal antisimétrica y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f\times f"'] & U \wedge U \arrow[d, dotted, "\exists! f\wedge f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & V \wedge V \end{tikzcd}$$

permite definir una única lineal, tal que en los elementos basales cumple con

$$\begin{array}{rccc} f \wedge f: & U \wedge U & \longrightarrow & V \wedge V \\ & u \wedge v & \mapsto & f(u) \wedge f(v) \end{array}$$

Ejemplo 88 *Sea $Id : U \to U$ la función identidad entonces*

$$\begin{array}{rccc} Id \wedge Id: & U \wedge U & \longrightarrow & U \wedge U \\ & u \wedge v & \mapsto & Id(u) \wedge Id(v) = u \wedge v \end{array}$$

Luego

$$Id \wedge Id = Id$$

En general tenemos lo siguiente

Propiedad 139 *Sea $f, g : U \to V$ una transformaciones lineales entonces*

$$\begin{array}{rccc} f\times g - g\times f: & U\times U & \longrightarrow & V\wedge V \\ & (u,v) & \mapsto & f(u)\wedge g(v) - g(u)\wedge f(v) \end{array}$$

Es un operador bilineal antisimétrico.

Demostración: Anteriormente demostramos que

$$\begin{array}{rccc} f\times g - g\times f: & U\times U & \longrightarrow & V\otimes V \\ & (u,v) & \mapsto & f(u)\otimes g(v) - g(u)\otimes f(v) \end{array}$$

es un operador bilineal, pasando al cuociente tenemos

$$\begin{array}{rccc} f\times g - g\times f: & U\times U & \longrightarrow & V\wedge V \\ & (u,v) & \mapsto & f(u)\wedge g(v) - g(u)\wedge f(v) \end{array}$$

es un operador bilineal y la antisimétrica se obtiene de

$$\begin{aligned} (f\times g - g\times f)(u,v) &= f(u)\wedge g(v) - g(u)\wedge f(v) \\ &= -g(v)\wedge f(u) + f(v)\wedge g(u) \\ &= f(v)\wedge g(u) - g(v)\wedge f(u) \\ &= (f\times g - g\times f)(v,u) \end{aligned}$$

□

Observación: Al considerar la anterior bilineal antisimétrica y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U\times U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f\times g - g\times f"'] & U\wedge U \arrow[d, dotted, "\exists! f\wedge g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & V\wedge V \end{tikzcd}$$

permite definir una única lineal, tal que en los elementos basales cumple con

$$\begin{array}{rccc} f\,\mathfrak{s}\,g: & U\wedge U & \longrightarrow & V\wedge V \\ & u\wedge v & \mapsto & f(u)\wedge g(v) - g(v)\wedge f(u) \end{array}$$

4.3.2. Producto Antisimétrico de n-Espacios Vectoriales

Sea U espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $F : \times_{i=1}^{n} U \to W$ una función se dice que es n-lineal antisimétrica si y sólo si es n-lineal y

$$F(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots, u_n) = -F(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots, u_n)$$

para todo i, j y $u_i \in U$.

Ejemplo 89 *La función* $\begin{array}{rccc} F: & M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & A & \rightsquigarrow & \det(A) \end{array}$ *es n- lineal antisimétrica, con la identificación* $M_n(\mathbb{K}) = (M_{n\times 1}(\mathbb{K}))^n$.

Notación: Denotamos $\wedge^2(U) = U \wedge U$

Propiedad 140 *Sea* U *espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

El conjunto de las funciones n *lineales antisimétricas* $U \times \cdots \times U$ *en* W *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

Teorema 141 *Sea* U *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *entonces existe un único* $\wedge^n(U)$ *espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y un operador n-lineal antisimétrica* $\pi : \times_{i=1}^n U \to \wedge^n(U)$, *tal que cumple con*

1. $\mathrm{Im}(\pi)$ *genera* $\wedge^n(U)$ *o* $< \mathrm{Im}(\pi) >= \wedge^n(U)$
2. *Si* $B : \times_{i=1}^n U \to W$ *un operador n-lineal simétrico, entonces existe un única transformación lineal de* $f : \wedge^n(U) \to W$ *tal que*

$$f \circ \pi = B$$

En este caso $(\wedge^n U, \pi)$ *es llamado la potencia exterior n-esima del espacio* U

Propiedad 142 *Sea* U *un espacios vectoriales de dimension* n *sobre* $\mathbb{K}$ *y* $r \leq n$ *entonces*

$$\dim(\wedge^r(U)) = \binom{n}{r}.$$

En caso contrario, se tiene que $r > n$

$$\dim(\wedge^r(U)) = 0$$

Demostración: Sea $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ una base del espacios vectoriales U.

Claramente se tiene que

$$\dim(\wedge^2(U)) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

supongamos que es válido para $r-1$ y definimos $U' =< u_1, u_2, \cdots, u_{n-1} >$, luego tenemos

$$U = U' \oplus < u_n >$$

luego tenemos que

$$\wedge^r(U) \simeq \wedge^r(U') \oplus \wedge^{r-1}(U')$$

donde

$$\begin{array}{rccc} F: & \wedge^{r-1}(U') & \to & \wedge^r(U) \\ & z & \rightsquigarrow & z \wedge u_n \end{array}$$

además tenemos que

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

4.4. Producto Simétrico

Teorema 143 *Sea U un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ entonces existe un único $\mathcal{S}(U)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y un operador bilineal simétrico $\pi : U \times U \to \mathcal{S}(U)$ tal que cumple con*

1. $\mathrm{Im}(\pi)$ *genera* $\mathcal{S}(U)$ *o* $< \mathrm{Im}(\pi) >= \mathcal{S}(U)$
2. *Si $B : U \times U \to W$ un operador bilineal simétrico, entonces existe un única transformación lineal $f : \mathcal{S}(U) \to W$ tal que*

$$f \circ \pi = B$$

$$\begin{tikzcd} U \times U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "B"'] & \mathcal{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! b"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & W \end{tikzcd}$$

En este caso $(\mathcal{S}(U), \pi)$ es llamado el producto simétrico del espacio U

Demostración: Sea U un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$
Unicidad

Supongamos que existen espacios que cumple con las dos propiedades anteriores, luego $\left(\widetilde{S}(U), \widetilde{\pi}\right)$ con las mismas propiedades, luego

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! g_1"] \\ U \times U \arrow[ur, "\widetilde{\pi}"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\widetilde{\pi}"'] & \mathcal{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! g_2"] \\ & \widetilde{S}(U) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! g_2"] \\ U \times U \arrow[ur, "\pi"] \arrow[r, "\widetilde{\pi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \widetilde{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! g_1"] \\ & \mathcal{S}(U) \end{tikzcd}$$

Como las compuestas son únicas, luego $g_1 \circ g_2 = Id$. Análogamente la otra igualdad $g_2 \circ g_1 = Id$. Por lo tanto son isomorfos.
Existencia.

Consideremos el espacio vectorial $U \otimes U$ y el subespacio.

$$K(U) = \langle \{ u \otimes v - v \otimes u \quad | \quad u, v \in U \ \} \rangle$$

Y el espacio cociente

$$\mathcal{S}(U) = (U \otimes U) \diagup K(U).$$

donde dos elementos son iguales si

$$\overline{f} = \overline{g} \Leftrightarrow f - g \in K(U)$$

además

$$\begin{array}{rcccccc} \pi: & U\times U & \to & U\otimes U & \to & (U\otimes U)\big/K(U) \\ & (u,v) & \rightsquigarrow & u\otimes u & \rightsquigarrow & \overline{u\otimes v} \end{array}$$

la función compuesta la denotamos por π donde $\pi(u,v)=\overline{u\otimes v}=u\,\mathfrak{s}\,v$ y es bilineal simétrica, además se tiene que

$$<\operatorname{Im}\pi>=\mathcal{S}(U).$$

Propiedad Universal.

Sea $\psi: U\times U\to W$ un operador bilineal simétrico, por demostrar que existe una única $f:\mathcal{S}(U)\to W$ lineal.

$$\begin{tikzcd} U\times U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3ex] & \mathcal{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Para ello sea $g_1: U\otimes U\to W$, lineal tal que

$$\begin{tikzcd} U\times U \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dr, "\psi"'] & U\otimes U \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d, dotted, "g_1"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", near start] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start] & \mathcal{S}(U) \arrow[dl, dotted, "\exists! f"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Como ψ es simétrica, luego $K(U)\subset\ker g_1$

Por lo tanto, existe una única transformación lineal de $f:\mathcal{S}(U)\to W$ tal que el diagrama conmuta. $\square$

Propiedad 144 *Sean $u,v,w\in U,\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ luego*

1. $(\alpha u+\beta v)\,\mathfrak{s}\,w=\alpha\,(u\,\mathfrak{s}\,w)+\beta\,(v\,\mathfrak{s}\,w)$
2. $u\,\mathfrak{s}\,(\alpha v+\beta w)=\alpha\,(u\,\mathfrak{s}\,v)+\beta\,(u\,\mathfrak{s}\,w)$
3. $\alpha\,(u\,\mathfrak{s}\,v)=(\alpha u)\,\mathfrak{s}\,v=u\,\mathfrak{s}\,(\alpha v)$
4. $u\,\mathfrak{s}\,v=v\,\mathfrak{s}\,u$

Propiedad 145 *Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base de U, entonces todo vector de $z\in\mathcal{S}(U)$ se puede escribir de la forma*

$$z=\sum_{i\in J}e_i\,\mathfrak{s}\,w_i$$

donde $J\subseteq I$ finito.

Propiedad 146 *Sean U y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ entonces*

$$L(\mathcal{S}(U),W)\simeq Bil_s(U\times U,W)$$

Demostración: Basta tener presente la propiedad universal del producto tensorial, es decir,

$$\begin{tikzcd} U \times U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowright"] & \mathcal{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! l"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Luego definimos

$$\begin{array}{rccc} \psi: & L(\mathcal{S}(U), W) & \rightarrow & Bil_s(U \times U, W), \\ & l & \rightsquigarrow & \psi(l) = l \circ \pi \end{array}$$

$\square$

Corolario 147 *Sean U un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ entonces*

$$\dim(\mathcal{S}(U) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración:

$$\dim(\mathcal{S}(U)) = \dim L(\mathcal{S}(U), \mathbb{K}) = \dim Bil_s(U \times U, \mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\square$

Corolario 148 *Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U entonces $\{u_i \,\mathfrak{s}\, u_j \mid i \leq j\}$ es una base de $\mathcal{S}(U)$.*

Demostración: Recordemos que una base de $U \otimes U$ es $\{u_i \otimes u_j \mid i, j\}$, luego dado $z \in \mathcal{S}(U)$ tenemos que,

$$z \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_i \,\mathfrak{s}\, u_j$$

Pero $u_i \,\mathfrak{s}\, u_j = u_j \,\mathfrak{s}\, u_i$, reordenando tenemos

$$z \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} u_i \,\mathfrak{s}\, u_i + \sum_{i<j}^{n} (a_{i,j} + a_{j,i}) u_i \,\mathfrak{s}\, u_j$$

Es decir, es un conjunto generador minimal, luego es una base. $\square$

Ejemplo 90 *Dado el operador bilineal simétrico*

$$\begin{array}{rccc} B: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \rightsquigarrow & (x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1, x_2y_2, x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2) \end{array}$$

Determine la única función lineal $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Solución: Por la conmutación del diagrama tenemos

$$f(e_i \,\mathfrak{s}\, e_j) = B(e_i, e_j)$$

por lo tanto, extendiendo linealmente la función obtenemos

$$\begin{aligned} f(\sum_{i\leq j} a_{i,j} e_i \,\mathfrak{s}\, e_j) &= a_{1,1}B(e_1,e_1) + a_{1,2}B(e_1,e_2) + a_{2,2}B(e_2,e_2) \\ &= a_{1,1}(1,0,1) + a_{1,2}(2,0,3) + a_{2,2}(0,1,0) \\ &= (a_{1,1} + 2a_{1,2}, a_{2,2}, a_{1,1} + 3a_{1,2}) \end{aligned}$$

Propiedad 149 *Sea U un espacio de dimensión n sobre $\mathbb{K}$.*

$$\mathcal{S}(U) \simeq \mathrm{S}_n(\mathbb{K}), \ \ y \ \dim \mathcal{S}(U) = \frac{n(n+1)}{2}$$

donde

$$\mathrm{S}_n(\mathbb{K}) = \left\{ \ A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A = A^t \right\}$$

Demostración:

$$\dim(\mathcal{S}(U) = \dim L(\mathcal{S}(U), \mathbb{K}) = \dim Bil_s(U \times U, \mathbb{K}) = \dim \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$$

Una base de $B(U \times U, \mathbb{K})$, esta formada por los elementos $E_{i,j}$ y de $B_s(U \times U, \mathbb{K})$ una base es $\{E_{ij} + E_{ji} \mid i \leq j \ \}$. □

Propiedad 150 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $U \leq V$ entonces $< \pi\,(U \times U) >$ cumple las dos propiedades, luego $< \pi\,(U \times U) >= \mathcal{S}(U) \leq \mathcal{S}(V)$.*

Demostración: en forma similar a la propiedad 108 y considerar los diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times U \arrow[r, "\pi|_{U\times U}"] \arrow[dr, "B"'] & \mathcal{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! g_2"] \\ & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{S}(V) \arrow[d, dotted, "\exists! g_1"] \\ & W \end{tikzcd}$$

□

4.4.1. Producto Simétrico de Funciones Lineales

En el capítulo de formas bilineales, se demostró que, dada $f \in L(U, \mathbb{K})$ entonces

$$\begin{array}{rccc} f \times f: & U \times U & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (u,v) & \mapsto & f(u)f(v) \end{array}$$

es una forma bilineal simétrica, más en general tenemos que

Propiedad 151 *Sea $f : U \to V$ una transformaciones lineales entonces*

$$\begin{array}{rccc} f \times f : & U \times U & \longrightarrow & \mathcal{S}(V) \\ & (u, v) & \mapsto & f(u) \mathfrak{s} f(v) \end{array}$$

Es un operador bilineal simétrico.

Demostración: Anteriormente demostramos que

$$\begin{array}{rccc} f \times f : & U \times U & \longrightarrow & V \otimes V \\ & (u, v) & \mapsto & f(u) \otimes f(v) \end{array}$$

es un operador bilineal, pasando al cuociente tenemos

$$\begin{array}{rccc} f \times f : & U \times U & \longrightarrow & \mathcal{S}(V) \\ & (u, v) & \mapsto & f(u) \mathfrak{s} f(v) \end{array}$$

es un operador bilineal, y es simétrico ya que

$$\begin{aligned} (f \times f)(u, v) &= f(u) \mathfrak{s} f(v) \\ &= f(v) \mathfrak{s} f(u) \\ &= (f \times f)(v, u) \end{aligned}$$

$\square$

Observación: Al considerar la anterior bilineal simétrica y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f \times f"'] & \mathcal{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! f \mathfrak{s} f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \mathcal{S}(V) \end{tikzcd}$$

permite definir una única lineal, tal que en los elementos basales cumple con

$$\begin{array}{rccc} f \mathfrak{s} f : & \mathcal{S}(U) & \longrightarrow & \mathcal{S}(V) \\ & u \mathfrak{s} v & \mapsto & f(u) \mathfrak{s} f(v) \end{array}$$

Ejemplo 91 *Sea $Id : U \to U$ función identidad entonces*

$$\begin{array}{rccc} Id \mathfrak{s} Id : & \mathcal{S}(U) & \longrightarrow & \mathcal{S}(V) \\ & u \mathfrak{s} v & \mapsto & Id(u) \mathfrak{s} Id(v) = u \mathfrak{s} v \end{array}$$

Luego

$$Id \mathfrak{s} Id = Id$$

En general tenemos lo siguiente

Propiedad 152 *Sea $f, g : U \to V$ una transformaciones lineales entonces*

$$\begin{array}{rccc} f \times g + g \times f : & U \times U & \longrightarrow & \mathcal{S}(V) \\ & (u, v) & \mapsto & f(u) \mathfrak{s} g(v) + g(u) \mathfrak{s} f(v) \end{array}$$

Es un operador bilineal simétrico.

Demostración: Anteriormente demostramos que

$$\begin{array}{rccc} f\times g+g\times f: & U\times U & \longrightarrow & V\otimes V \\ & (u,v) & \mapsto & f(u)\otimes g(v)+g(u)\otimes f(v) \end{array}$$

es un operador bilineal, pasando al cuociente tenemos

$$\begin{array}{rccc} f\times g+g\times f: & U\times U & \longrightarrow & \mathcal{S}(V) \\ & (u,v) & \mapsto & f(u)\,\mathfrak{s}\,g(v)+g(u)\,\mathfrak{s}\,f(v) \end{array}$$

es un operador bilineal y la simétrica se obtiene de

$$\begin{aligned} (f\times g+g\times f)(u,v) &= f(u)\,\mathfrak{s}\,g(v)+g(u)\,\mathfrak{s}\,f(v) \\ &= g(v)\,\mathfrak{s}\,f(u)+f(v)\,\mathfrak{s}\,g(u) \\ &= f(v)\,\mathfrak{s}\,g(u)+g(v)\,\mathfrak{s}\,f(u) \\ &= (f\times g+g\times f)(v,u) \end{aligned}$$

$\square$

Observación: Al considerar la anterior bilineal simétrica y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U\times U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f\times g+g\times f"'] & \mathcal{S}(U) \arrow[d, dotted, "\exists! f\,\mathfrak{s}\,g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \mathcal{S}(V) \end{tikzcd}$$

permite definir una única lineal, tal que en los elementos basales cumple con

$$\begin{array}{rccc} f\,\mathfrak{s}\,g: & \mathcal{S}(U) & \longrightarrow & \mathcal{S}(V) \\ & u\,\mathfrak{s}\,v & \mapsto & f(u)\,\mathfrak{s}\,g(v)+g(v)\,\mathfrak{s}\,f(u) \end{array}$$

4.4.2. Producto Simétrico de n-Espacios Vectoriales

Sea U espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $F:\times_{i=1}^n U\to W$ una función, se dice que es n-lineal simétrica si y sólo si es n-lineal y

$$F(u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_j,\cdots,u_n)=F(u_1,\cdots,u_j,\cdots,u_i\cdots u_n)$$

para todo i,j y $u_i\in U$.

Ejemplo 92 *La función* $\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ & x & \rightsquigarrow & \prod_i x_i \end{array}$ *es n- lineal simétrica*

Propiedad 153 *Sea U espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

El conjunto de las funciones n lineales simétricas de $\times_{i=1}^n U$ en W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Notación: Denotemos por $\mathcal{S}^2(U)=\mathcal{S}(U)$.

Teorema 154 *Sea U un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ entonces existe un único $\mathcal{S}^n(U)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y un operador n-lineal simétrica $\pi : \times_{i=1}^n U \to \mathcal{S}^n(U)$, tal que cumple con*

1. $\mathrm{Im}(\pi)$ *genera* $\mathcal{S}^n(U)$ *o* $< \mathrm{Im}(\pi) >= \mathcal{S}^n(U)$

2. *Si $B : \times_{i=1}^n U \to W$ un operador n-lineal simétrico, entonces existe un única transformación lineal de $f : \mathcal{S}^n(U) \to W$ tal que*
$$f \circ \pi = B$$

En este caso $(\mathcal{S}^n(U), \pi)$ es llamado la potencia simétrica n-esima del espacio U

Propiedad 155 *Sea U un espacios vectoriales de dimension n sobre $\mathbb{K}$ entonces*
$$\dim(\mathcal{S}^r(U)) = \binom{n+r-1}{r}$$

Demostración: Sea $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ una base del espacios vectoriales U.

Claramente se tiene que
$$\dim(\mathcal{S}^2(U)) = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$
supongamos que es válido para $r-1$ y definimos $U' =< u_1, u_2, \cdots, u_{n-1} >$, luego tenemos
$$U = U' \oplus < u_n >$$
luego tenemos que
$$\mathcal{S}^r(U) \simeq \mathcal{S}^r(U') \oplus \mathcal{S}^{r-1}(U')$$
donde
$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{S}^{r-1}(U') & \to & \mathcal{S}^r(U) \\ & z & \rightsquigarrow & z \,\mathfrak{s}\, u_n \end{array}$$
además tenemos que
$$\binom{n-1+r-1-1}{r-1} + \binom{n-1+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{r}$$
lo cual concluye la demostración. □

4.5. Problemas Propuestos

Problema 115.

Dado los vectores $z, w \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$
$$\begin{array}{rcl} z & = & (1,2) \otimes (2,3) + (1,-1) \otimes (3,-2) + (3,1) \otimes (1,1) \\ w & = & (1,1) \otimes (-4,14) + (2,1) \otimes (6,-5) \end{array}$$

Determinar si los vectores z, w son iguales

Problema 116.

Sea $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (3x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2, 2x_2y_1)$. Explícita transformación lineal b asociada B definida por la propiedad universal, es decir, $b : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Problema 117.

Sea F el producto interno canónico sobre $\mathbb{R}^n$, luego existe una única lineal

$$l \in L(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

tal que $l \circ \pi = F$ el diagrama conmuta

1. Para $n = 2$, determinar
$$l\left((a, b) \otimes (c, d)\right)$$

2. En general, Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$, entonces determinar
$$l\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i\right).$$

Problema 118.

Sean U, V dos $\mathbb{K}$- espacios vectoriales de dimensión finita entonces demostrar que

$$\mathrm{End(U)} \otimes \mathrm{End(V)} \simeq \mathrm{End(U \otimes V)}$$

Problema 119.

Sea $F : U \times V \to W$ un operador bilineal, $f \in L(U \otimes V, W)$ la única lineal

$$\ker_1(F) = \{x \in U \mid \forall y \in V)(F(x, y) = 0)\},\ \ker_2(F) = \{y \in V \mid \forall x \in U)(F(x, y) = 0)\}$$

entonces, demostrar que

$$\ker(f) = \ker_1(F) \otimes V + U \otimes \ker_2(F)$$

Índice alfabético