Capítulo 3

Funciones

En este capítulo trabajaremos con el concepto de funciones reales en una variables, ejemplo de ello son algunas formulas en las que introducimos datos y nos entregan un valor, como por ejemplo, en Física al conocer la velocidad media y el tiempo transcurrido obtenemos lo que el móvil se desplazo. En geometría el conocer la longitud de un lado de un triángulo equilátero sabemos lo que mide el área del triángulo.

3.1 Introducción

La noción de función está presente en la vida diaria, cuando nos referimos o hacemos una correspondencia estamos hablando de funciones. Por ejemplo cuando decimos:

a A cada rectángulo le corresponde su área.

b A cada persona la corresponde su peso.

c A cada persona le corresponde su cédula de identidad.

En éstos ejemplos se pueden distinguir dos conjuntos A y B.

En el primer ejemplo A denota el conjunto de rectángulos y B el conjunto de los números reales positivos. Es decir, a cada rectángulo x en A le corresponde un real positivo y en B que es su área. Los ejemplos anteriores tienen la particularidad de que dado x que pertenece a A le corresponde un único y que pertenece a B.

Al repasar el primer ejemplo, también es válido decir que el área del rectángulo depende de sus lados, aquí podemos distinguir el concepto de dependencia, donde una de las variables, el área del rectángulo, depende de las otras, sus lados.

3.1.1 Relaciones

Una relación asocia elementos de un conjunto de partida A, a algún o algunos elementos del conjunto de llegada B, es decir, que dados dos conjuntos, una relación $\mathcal{R}$ entre A y B o bien que va desde A hasta B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Los elementos pertenecientes a la relación se denota $(x, y) \in \mathcal{R}$ o bien $x\mathcal{R}y$.

Definición 3.1.1 Una relación de números reales es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ $\Diamond$

Ejemplo 3.1.2 Los siguiente conjuntos son relaciones reales

a $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$

b $\mathcal{P}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x + 1\}$

c $\mathcal{P}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 2y + 3\}$

d $\mathcal{E}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}$

e $\mathcal{E}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 = 1\}$

f $\mathcal{H}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

g $\mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1\}$

h $\mathcal{H}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$

$\square$

Definición 3.1.3 Sea $\mathcal{R}$ una relación entre A y B, se define el **Dominio** de la relación $\mathcal{R}$ igual al conjunto de todas las preimágenes de B o bien, el conjunto de las primeras coordenadas de los elementos de $\mathcal{R}$ y se denota como $Dom\mathcal{R}$, es decir,

$$Dom\mathcal{R} = \{x \in A \mid (\exists y \in B)(x\mathcal{R}y)\}$$

Un subconjunto de B formado por las imágenes de los elementos del $Dom\mathcal{R} \subseteq A$, o bien, el conjunto de las segundas coordenadas de los elementos de $\mathcal{R}$ se llama **Recorrido** se denota $Rec\mathcal{R}$ y esta definido del siguiente modo:

$$Rec\mathcal{R} = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(x\mathcal{R}y)\}$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.1.4 Sean $A = \{0, 2, 4\}$ y $B = \{a, b\}$ los conjuntos que siguen son relaciones entre A y B.

a $\mathcal{R}_1 = \{(0, a), (2, a), (4, a)\}$, el dominio y recorrido esta dado por

$$Dom\mathcal{R}_1 = \{0, 2, 4\}, \quad Rec\mathcal{R}_1 = \{a\}.$$

b $\mathcal{R}_2 = \{(0, a), (0, b), (2, a)\}$, el dominio y recorrido esta dado por

$$Dom\mathcal{R}_2 = \{0, 2\}, \quad Rec\mathcal{R}_2 = \{a, b\}.$$

c $\mathcal{R}_3 = A \times B$, su dominio es $Dom\mathcal{R}_3 = A$ y el recorrido es $Rec\mathcal{R}_3 = B$.

$\square$

Ejemplo 3.1.5 La circunferencia de radio 4 y de centro $(0, 0)$, es una relación en el plano cartesiano, es decir,

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 16\},$$

y en este caso tenemos que

$$Dom\mathcal{R} = [-4, 4], \quad Rec\mathcal{R} = [-4, 4].$$

□

Definición 3.1.6 Sea $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ una relación, diremos que $\mathcal{R}^{-1}$ es la relación **inversa** de $\mathcal{R}$ que va desde B a A y se denota como:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

◊

De la definición se deduce que:

$$(u, v) \in \mathcal{R}^{-1} \Longleftrightarrow (v, u) \in \mathcal{R}.$$

Ejemplo 3.1.7 Sea $\mathcal{R} = \{(1, 1), (3, 2), (4, 4), (1, 2)\}$, luego la relación inversa de $\mathcal{R}$ es:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(1, 1), (2, 3), (4, 4), (2, 1)\}.$$

□

Ejemplo 3.1.8 Sea $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$, luego la relación inversa de $\mathcal{L}$ es:

$$\mathcal{L}^{-1} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 2b + 3a = 1\}.$$

□

3.2 Función

Una función f es una relación de A en B tal que a cada elemento del dominio de la relación, le corresponde un único elemento del recorrido de la relación.

Definición 3.2.1 Se dice que f es una función de números reales si y sólo si

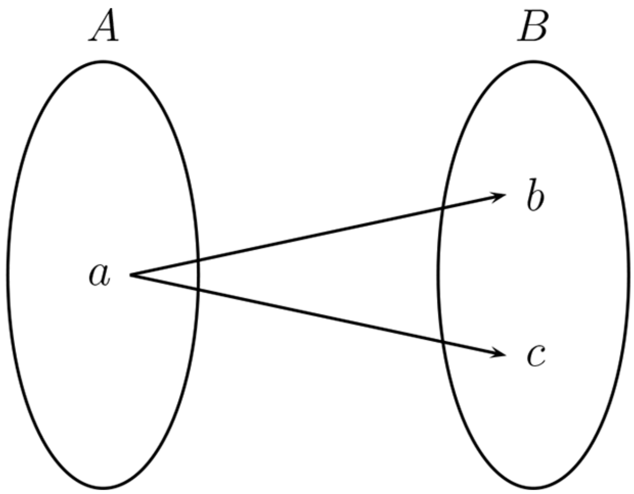
i f una relación en los números reales y

ii $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x, y), (x, z) \in f \Rightarrow y = z)$

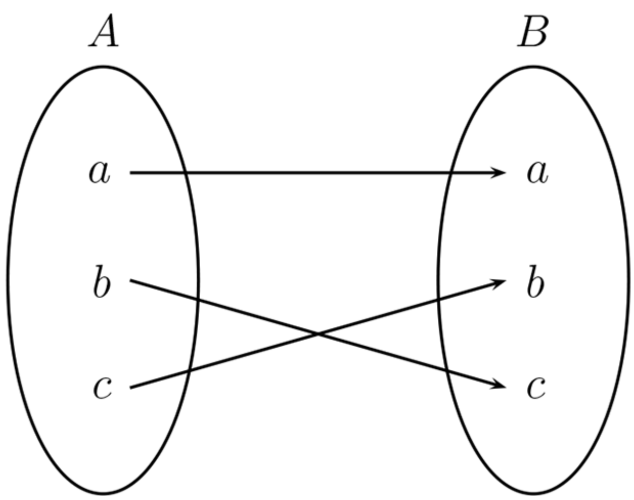
◊

Observación: En general, se dice que f es una función de A en B si y sólo si f es una relación entre A y B y $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(x f y)$.

Es decir, no es función cuando un el elemento tiene más de una imagen en el conjunto de llegada. Podemos graficar esta situación, donde f **no es función**, con el siguiente diagrama



En cambio el siguiente diagrama, representa una función.



Ejemplo 3.2.2 Determinar si la siguiente relación es una función

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

□

Solución 1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{L}$
Luego tenemos que

$$2a + 3b = 1 \quad \wedge \quad 2a + 3c = 1$$

Reemplazando tenemos

$$\begin{array}{rcl} 2a + 3b & = & 2a + 3c \\ 3b & = & 3c \\ b & = & c \end{array}$$

Luego $\mathcal{L}$ es función.

Ejemplo 3.2.3 Determinar si la siguiente relación es una función

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x + 1\}$$

$\square$

Solución 2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{P}$. Luego tenemos que

$$b^2 = 4a + 1 \quad \wedge \quad c^2 = 4a + 1$$

Reemplazando tenemos

$$b^2 = c^2$$

$$b = c \quad \vee \quad b = -c$$

podemos considerar los pares ordenados $(1, 5)$ y $(1, -5)$ ambos puntos pertenece a $\mathcal{P}$ pero $5 \neq -5$, luego $\mathcal{P}$ no es una función.

Ejemplo 3.2.4 Determinar si la siguiente relación es una función

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

$\square$

Solución 3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(a, b), (a, c) \in \mathcal{H}$. Luego tenemos que $a \in \mathbb{R}_0^+, b, c \in \mathbb{R}^-$ además

$$b^2 - 3a^2 = 1 \quad \wedge \quad c^2 - 3a^2 = 1$$

Reemplazando tenemos

$$b^2 - 3a^2 = c^2 - 3a^2$$

$$b^2 = c^2$$

$$b = c \quad \vee \quad b = -c$$

pero $b < 0$ y $c < 0$, luego es imposible que $b = -c$ por lo tanto tenemos que

$$b = c.$$

Así $\mathcal{H}$ es una función.

[inlineexercise] 3.2.5 Determine si los siguientes conjunto son funciones

a $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 2 \ \}$

b $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4 \ \}$

c $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \wedge y \geq 3 \ \}$

d $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dfrac{(x + 1)^2}{4} + \dfrac{(y - 1)^2}{9} = 1 \ \}$

e $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \dfrac{(x + 1)^2}{4} + \dfrac{(y - 1)^2}{9} = 1 \wedge y \leq 1 \ \}$

Observación: Tenga presente que una función es un conjunto, luego la igual de funciones es una igual de conjuntos.

3.2.1 Dominio y Recorrido

Definición 3.2.6 Dominio y Recorrido de una Función. Sea f una función real. Se define el **Dominio** de f igual a

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists y \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}.$$

Se define el **Recorrido** de f igual a

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R})((x, y) \in f)\}$$

$\Diamond$

A continuación revisaremos los ejemplos anteriores.

Ejemplo 3.2.7 Determinar dominio y recorrido de

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

$\square$

Solución 1. Sea $x \in Dom(\mathcal{L})$, luego existe $y \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y) \in \mathcal{L}$, es decir,

$$2x + 3y = 1.$$

Despejando obtenemos que

$$y = \frac{1 - 2x}{3}.$$

De lo anterior tenemos que:

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe $y = \frac{1-2x}{3} \in \mathbb{R}$ tal que

$$2(x) + 3\frac{1 - 2x}{3} = 1,$$

de lo cual, $(x, \frac{1-2x}{3}) \in \mathcal{L}$.

Luego

$$Dom(\mathcal{L}) = \mathbb{R}$$

Para el recorrido tenemos que un desarrollo similar, dado por $y \in \mathbb{R}$, luego $x = \frac{1-3y}{2}$ el cual es un número real, por lo tanto tenemos que el recorrido es:

$$Rec(\mathcal{L}) = \mathbb{R}$$

Ejemplo 3.2.8 Determinar dominio y recorrido de la siguiente función

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

$\square$

Solución 2. Sea $x \in Dom(f) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, luego existe $y \in \mathbb{R}^-$ tales que $(x, y) \in f$, es decir,

$$y^2 - 3x^2 = 1.$$

Despejando obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} y^2 &=& 1+3x^2. \\ y^2 &=& 1+3x^2. \\ |y| &=& \sqrt{1+3x^2} \\ y &=& -\sqrt{1+3x^2}, \quad y<0 \end{array}$$

De lo anterior tenemos que:
Dado $x \in \mathbb{R}_0^+$ existe $y = -\sqrt{1+3x^2} \in \mathbb{R}^-$ tal que

$$(-\sqrt{1+3x^2})^2 - 3(x)^2 = 1,$$

es decir, $(x, -\sqrt{1+3x^2}) \in f$.
Luego

$$Dom(f) = \mathbb{R}_0^+$$

Para el recorrido tenemos que un desarrollo similar, dado por $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} y^2 - 3x^2 &=& 1 \\ 3x^2 &=& y^2 - 1 \quad (*) \\ |x| &=& \sqrt{\frac{y^2-1}{3}} \\ x &=& \sqrt{\frac{y^2-1}{3}}, \quad x \geq 0 \end{array}$$

luego la restricción $(*)$ esta dada por $y^2 - 1 \geq 0$, por lo tanto $|y| \geq 1$ con lo cual $y \leq -1$. De este modo $x = \sqrt{\frac{y^2-1}{3}}$ es un número real y por lo tanto tenemos que el recorrido es:

$$Rec(f) =]\infty, -1]$$

Ejemplo 3.2.9 Dada la relación $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y(x-4) = 2x+5\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Determine el dominio y el recorrido de la función. □

Solución 3. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $(x,y) \in f$, por lo tanto tenemos

$$y(x-4) = 2x+5$$

Cuando $x \neq 4$ tenemos que existe un único valor de $y = \frac{2x+5}{x-4}$

Para $x = 4$, reemplazando y tenemos que $0 = 13$, lo que es una contradicción, luego el dominio de f es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

Sea $y \in Rec(f)$, luego existe $x \in \mathbb{R} - \{4\}$ tal que $(x,y) \in f$,

$$\begin{array}{rl} y(x-4) = & 2x+5 \\ yx - 4y = & 2x+5 \\ yx - 2x = & 5+4y \\ x(y-2) = & 5+4y \end{array}$$

Para $y = 2$, reemplazamos obtenemos que $0 = 13$, lo es falso.

Por lo cual tenemos que $y \neq 2$, y por ende podemos despejar el valor de:

$$x = \frac{5+4y}{y-2}.$$

Recordemos que $x \in Dom(f)$, para ello notemos lo siguiente

$$\frac{5+4y}{y-2} = 4 \Leftrightarrow 5+4y = 4y-8 \Leftrightarrow 5 = -8$$

es decir,

$$\frac{5+4y}{y-2} \neq 4 \Leftrightarrow 5 \neq -8$$

Luego el recorrido de la función es $Rec(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Ejemplo 3.2.10 Dada la función $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Determine el dominio y el recorrido. □

Solución 4. Ya que $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\}$,
Como la expresión $y = \sqrt{x}$ está bien definida solamente cuando $x \in \mathbb{R}_0^+$.
Luego

$$Dom(f) = \mathbb{R}_0^+.$$

Sea $y \in Rec(f)$, luego existe $x \in Dom(f) = \mathbb{R}_0^+$, tal que $(x,y) \in f$.

$$\begin{array}{rcl} y & = & \sqrt{x} \\ y^2 & = & x \text{ con } x \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}$$

sabemos que $y^2 \geq 0$ es siempre verdadero.

Por lo tanto el recorrido de f es $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$

Ejemplo 3.2.11 Dada la relación $f = \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} \mid y(x-1) = x^2 - 1\}$

a Para $A = \mathbb{R}$, determine si f es una función.

b Determine $A \subseteq \mathbb{R}$ maximal, tal que f es función, además su $Dom(f)$ y $Rec(f)$

□

Solución 5. Veremos si es función.
Si $x \neq 1$, tenemos que $y = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, luego el valor de y es único.
Si $x = 1$, se tiene que $0 = 0$, luego todo los valores de y satisfacen, de otro modo $(1,y) \in f$, para todo $y \in \mathbb{R}$, por ende no es función.

El conjunto maximal tal que f es función esta dado por $A = \mathbb{R} - \{1\}$, y en este caso el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Para determinar el recorrido, sea $y \in Rec(f)$, con $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, tal que $(x,y) \in f$, luego tenemos que

$$\begin{array}{rl} y = & \frac{x^2-1}{x-1} \\ y = & (x+1) \\ y-1 = & x \end{array}$$

Falta analizar que $y - 1 = x \neq 1$, es decir,

$$y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = 2$$

de otro modo

$$y - 1 \neq 1 \Leftrightarrow y \neq 2$$

Por lo tanto el recorrido de la función es: $\mathbb{R} - \{2\}$.

3.2.2 Notación Funcional

Sea f una función de números real, luego existe el Dominio de f y el Recorrido de f, además a cada $x \in Dom(f)$ existe un único elemento y en el recorrido, el cual denotamos por $y = f(x)$. Luego la función, la podemos codificar del siguiente modo:

$$\begin{array}{rccl} f: & Dom f & \longrightarrow & B \\ & \text{variable} & \longmapsto & \text{único valor asociada} \end{array}$$

Donde B es llamado "Conjunto de llegada" y es un subconjunto de los Número Reales que contiene al recorrido, de otro modo $Rec(f) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, la variable habitualmente empleada es x, por último note que el valor asociado debe pertenecer a B.

En los ejemplos usaremos los ejercicios anteriores.

En el primer ejemplo tenemos que

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}.$$

podemos escribirlo usando la notación:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1-2x}{3} \end{array}$$

En el siguiente ejemplo tenemos que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 3x^2 = 1 \wedge y < 0 \wedge x \geq 0\}$$

podemos escribirlo usando la notación:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow &]-\infty, 0[\\ & x & \longmapsto & -\sqrt{1+3x^2} \end{array}$$

El el tercer ejemplo se tiene que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y(x - 4) = 2x + 5\}.$$

en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{2x+5}{x-4} \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ & x & \longmapsto & \frac{2x+5}{x-4} \end{array}$$

En el cuarto ejemplo se tiene que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \wedge x \geq 0\},$$

en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

En el último ejemplo se tiene que

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(x-1) = x^2 - 1, x \neq 1\},$$

en forma abreviada tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ & x & \longmapsto & \frac{x^2-1}{x-1} \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

Observación: La igualdad de funciones corresponde solamente a una igualdad de conjuntos, pero ahora es importante, revisar esta noción de igualdad de funciones con esta nueva notación.

Definición 3.2.12 Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ se dice que $f = g$ si y sólo si se cumple que:

a $A = C$

b $(\forall x \in A)(f(x) = g(x))$

o bien, dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, y para cada elemento del dominio tiene idénticas imágenes. $\Diamond$

Ejemplo 3.2.13 Sean $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ y $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x^2+x}{x} \end{array}$

En este caso tenemos que $f \neq g$ ya que $Dom(f) \neq Dom(g)$. $\square$

3.2.3 Ejercicios Resueltos

Ejemplo 3.2.14 Sea $\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & [1,9[\\ & x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{|x|-2} - 1 \end{array}$

Determine el dominio de la función. $\square$

Solución 1. Para determinar el dominio de la función, primero debemos restringirla, es decir, determinar para qué valores de x la imagen son números reales.

$$\begin{array}{rcl} |x| - 2 & \geq & 0/+2 \\ |x| & \geq & 2 \\ x \geq 2 & \vee & x \leq -2 \end{array}$$

entonces

$$x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

Como la función tiene como conjunto de llegada el intervalo $[1, 9[$, debemos encontrar los valores de x para los cuales la imagen está en este conjunto.

$$\begin{array}{rcl} y \in [1,9[& \Leftrightarrow & 1 \leq y < 9 \\ \sqrt{|x|-2} - 1 \in [1,9[& \Leftrightarrow & 1 \leq \sqrt{|x|-2} - 1 < 9/+1 \\ & \Leftrightarrow & 2 \leq \sqrt{|x|-2} < 10/()^2 \\ & \Leftrightarrow & 4 \leq |x| - 2 < 100/+2 \\ & \Leftrightarrow & 6 \leq |x| < 102 \end{array}$$

Luego tenemos

$$\begin{array}{rcl} 6 \leq |x| & \Leftrightarrow & x \leq -6 \vee 6 \leq x \\ |x| < 102 & \Leftrightarrow & -102 < x \wedge x < 102 \end{array}$$

De lo cual tenemos

$$x \in]-102, -6] \cup [6, 102[.$$

Entonces el dominio de f

$$Dom(f) = (]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[) \cap (]-102, -6] \cup [6, 102[)$$

Por lo tanto

$$Dom(f) =]-102, -6] \cup [6, 102[.$$

Ejemplo 3.2.15 Sea $\begin{array}{rccc} f: &]-\infty, -2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1. \end{array}$

Determine el recorrido de f. □

Solución 2. Sean $x \in]-\infty, -2[$ $y \in Rec(f)$, luego

$$\begin{array}{rll} y = & f(x) & \\ y = & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1 & / - 1 \\ y - 1 = & \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} & /()^2,\ y - 1 \geq 0 \\ (y-1)^2 = & \frac{1}{|x|-1} & \\ |x| - 1 = & \frac{1}{(y-1)^2} & / + 1,\ y \neq 1 \\ |x| = & \frac{1}{(y-1)^2} + 1 & \end{array}$$

Como $x \in]-\infty, -2[$, tenemos que $|x| = -x$ y nos queda

$$\begin{array}{rll} -x = & \frac{1}{(y-1)^2} + 1 & / \cdot (-1) \\ x = & -1 - \frac{1}{(y-1)^2} & \end{array}$$

por otro lado tenemos que $x \leq -2$, entonces

$$\begin{array}{rll} -1 - \frac{-1}{(y-1)^2} \leq -2 & \Leftrightarrow \frac{-1}{(y-1)^2} \leq -1 & / \cdot (-1) \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{(y-1)^2} \geq 1 & \\ & \Leftrightarrow 1 \geq (y-1)^2 & /\sqrt{} \\ & \Leftrightarrow 1 \geq |y-1| & \\ & \Leftrightarrow -1 \leq y - 1 \leq 1 & \\ & \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2 & \end{array}$$

antes de concluir debemos considerar las anteriores restricciones, luego el recorrido de la función nos queda:

$$Rec(f) = [0, 2] \cap]1, +\infty[=]1, 2].$$

Ejemplo 3.2.16 Sea $f(x) = 1 - x - x^2$ una función real.
Determine el dominio máximo y su recorrido de f. □

Solución 3. Como la expresión $f(x) = 1 - x - x^2$, siempre esta bien definida o siempre podemos evaluar, luego $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Ahora, para encontrar el recorrido de f. Sea $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\begin{array}{rcl} y &=& f(x) \\ y &=& 1 - x - x^2 \\ x^2 + x + (y-1) &=& 0 \end{array}$$

La cual es una ecuación de segundo grado, para determinar si existe x debemos calcular su discriminante es $1 - 4(y-1) \geq 0$, luego aplicando la formula de segundo grado tenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5-4y}}{2}$$

Entonces, la única restricción es el discriminante

$$\begin{array}{rl} 5 - 4y & \geq 0 \\ \frac{5}{4} & \geq y \end{array}$$

Luego

$$Rec(f) =]-\infty, \frac{5}{4}]$$

Ejemplo 3.2.17 Sea $\begin{array}{rccl} f: & A \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2+x & si & x \leq 1 \\ x^2+1 & si & x > 1 \end{array} \right. \end{array}$

Determinar A igual al dominio máximo y el recorrido de la función. □

Solución 4. El dominio máximo de ésta función es $\mathbb{R}$.

Como f es una función definida en tramos, para determinar el recorrido consideraremos primero el tramo en que la función está definida para todos los $x \leq 1$ y la llamaremos f_1, es decir

$$\begin{array}{rccc} f_1 &]-\infty, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2 + x \end{array}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que existe $x \leq 1$, tal que

$$y = 2 + x \Leftrightarrow y - 2 = x$$

como $x \leq 1$, luego

$$y - 2 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 3$$

Por lo tanto

$$Rec(f_1) =]-\infty, 3]$$

Ahora veremos que pasa con el recorrido cuando $x > 1$. Llamaremos f_2 al segundo tramo de la función, es decir,

$$\begin{array}{rccc} f_2 &]1, \infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que existe $x > 1$, tal que

$$y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = x^2,$$

de lo cual $y-1 \geq 0$ y $\sqrt{y-1} = |x|$, pero $x > 1$

$$\sqrt{y-1} > 1 \Leftrightarrow y-1 > 1$$

De este modo tenemos

$$Rec(f_2) =]-\infty, 2[$$

Finalmente el recorrido de la función f es

$$Rec(f) = Rec(f_1) \cup Rec(f_2) =]-\infty, 3]$$

3.2.4 Representación Gráfica

La gráfica de una función $f : A \longrightarrow B$, se define como el conjunto de pares ordenados siguiente:

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B \mid y = f(x), x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

Note que hemos vuelto a la notación de relación de números reales.

La representación gráfica de f, se llama curva y se consigue **marcando** los puntos del conjunto en el producto cartesiano $A \times B$ y en el caso real en el plano cartesiano.

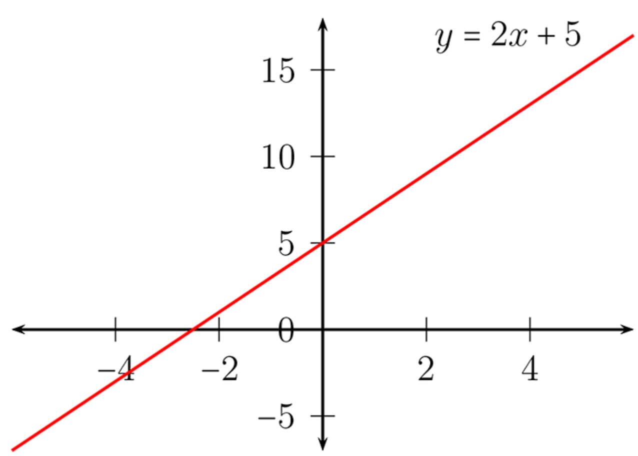
De lo anterior, tenemos en el eje x los elementos del dominio y en el eje y los elementos del conjunto de llegada.

Observación: Se dice que x es un cero de f, si y sólo si $f(x) = 0$. Geométricamente los ceros de una función son los puntos en que la gráfica intersecan o corta al eje x.

Ejemplo 3.2.18 En la función real $f(x) = 2x + 2$, se tiene que -1 es un cero de f y por lo tanto el punto $(-1, 0)$ pertenece a la intersección del gráfico de f con el eje x. □

Ejemplo 3.2.19 Graficar la función $f(x) = 2x + 5$. □

Solución 1. Para graficar la función podemos hacer una tabla, que contengan las variables independiente y dependiente, asignándole posibles valores a la variable independiente obtenemos los valores de la variable dependiente al reemplazar los valores dados y así podemos representar algunos puntos en el plano. Además conociendo que la curva, en este caso, se trata de una recta, luego nos bastan dos puntos, ellos pueden ser $(0, 5), (1, 7) \in f$.



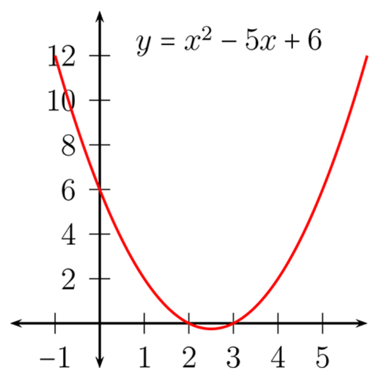
Observación: La gráfica de una función, nos ayuda a poder determinar el dominio y el recorrido de ella

Ejemplo 3.2.20 Graficar la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$. □

Solución 2. Para graficar, usamos el hecho que $y = x^2 - 5x + 6$ es una parábola, para determinar los elementos distinguidos completemos cuadrado y obtenemos

$$(x - \frac{5}{2})^2 = 4\frac{1}{4}(y + \frac{1}{4}),$$

cuyo vértice es $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, para tener una mejor gráfica, construyamos una tabla con algunos valores, para ello



x	y
0	6
1	2
2	0
3	0
4	2

Usando la gráfica podemos constatar que el dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $[-\frac{1}{4}, \infty[$.

Revisemos el recorrido para ello consideremos la ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 - y = & \; 0 \\ x = & \; \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6-y)}}{2} \\ x = & \; \frac{5 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \end{aligned}$$

Luego la única restricción es que el discriminante debe ser no negativo, es decir

$$1 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto el recorrido de f es $[-\frac{1}{4}, \infty[$.

3.3 Modelación

Modelar matemáticamente una situación de la vida cotidiana se refiere a identificar en un problema una expresión matemática concreta que represente algunos aspecto del problema, de modo que esta expresión nos permita obtener información actual o futura.

Esta expresión matemática puede expresarse mediante un enunciado o mediante una ecuación. En el siguiente ejemplo encontramos una situación la cual se puede modelar mediante una función.

Ejemplo 3.3.1 Cuando hablamos del impuesto a la venta de ciertos artículos, nos referimos a una situación de la vida diaria, la cual podemos modelar de la siguiente forma; si x representa el valor del artículo en pesos sin impuesto y T es el impuesto a la venta del articulo, el cual es de un 19

$$T(x) = \frac{19}{100} \cdot x$$

con $x > 0$
Es decir, si tenemos un artículo cuyo valor es de 200 sin IVA, el impuesto a la venta se puede calcular usando la expresión matemática encontrada:

$$T(200) = \frac{19}{100} \cdot 200 = 38$$

□

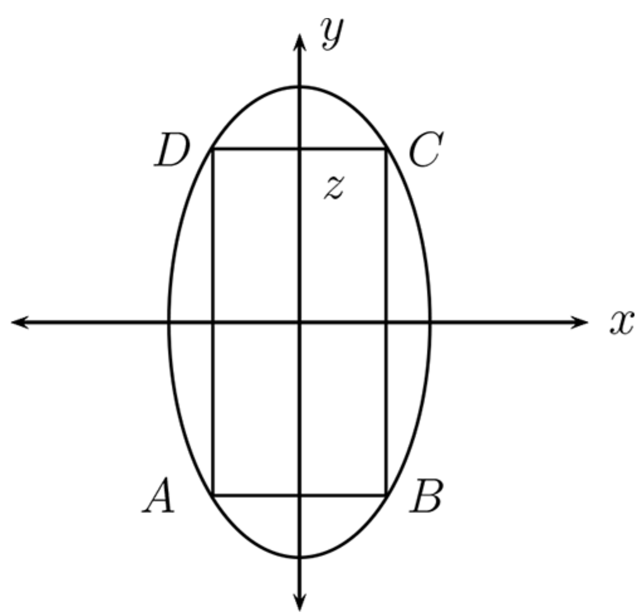
Observación: En el caso que el impuesto ya este incluido en el valor, tenemos que la función no es la misma, ya que

$$P = x + 0,19x = 1,19x$$

Luego si pagamos \$200, el costo del producto sin impuesto es $1,19x = 200$, o bien $x = \frac{200}{1.19} \approx 168.1$ y el impuesto es

$$0,19\frac{200}{1.19} \approx 31,9.$$

Cuando las personas pagan y le extiende una factura tenemos el primer caso, y el segundo posibilidad es cuando se extiende una boleta, donde no figura los impuestos, sólo el valor final.
Ejemplo 3.3.2 Considere un rectángulo ABCD con sus lados paralelos a los ejes, inscrito en la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$. Sea z la distancia entre un lado vertical del rectángulo y el eje y.



Determine el área del rectángulo en función de z, expresando claramente el dominio. □

Solución 1. El área del rectángulo, es el producto de las longitudes de los lados, para ello sean

$$|\overline{AB}| = 2z \wedge |\overline{BC}| = 2y$$

Luego el área del rectángulo en función de z y de y es la siguiente:

$$A = 2z \cdot 2y = 4zy$$

Como el punto C pertenece a la elipse entonces satisface la ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$, despejamos y

$$\begin{array}{rll} 9z^2 + 4y^2 = & 36 & \\ 4y^2 = & 36 - 9z^2 & /(\frac{1}{4}) \\ y^2 = & \frac{36}{4} - \frac{9}{4}z^2 / \sqrt{} & \frac{36}{4} - \frac{9}{4}z^2 > 0 \\ |y| = & \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{9}{4}z^2} & \\ |y| = & \frac{1}{2}\sqrt{36 - 9z^2} & \\ |y| = & \frac{1}{2}\sqrt{9(4 - z^2)} & \end{array}$$

Como y representa una distancia, entonces el valor es positivo

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2}$$

donde $4 - z^2 > 0$.

Por lo tanto, el área en función de z queda determinada como sigue

$$A(z) = 4z \cdot \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2} = 6z\sqrt{4 - z^2}$$

Ahora veremos cual es el dominio.

$$\begin{array}{rll} 4 - z^2 & \geq 0 & \\ 4 & \geq z^2 & / \sqrt{} \\ 2 & \geq |z| & \end{array}$$

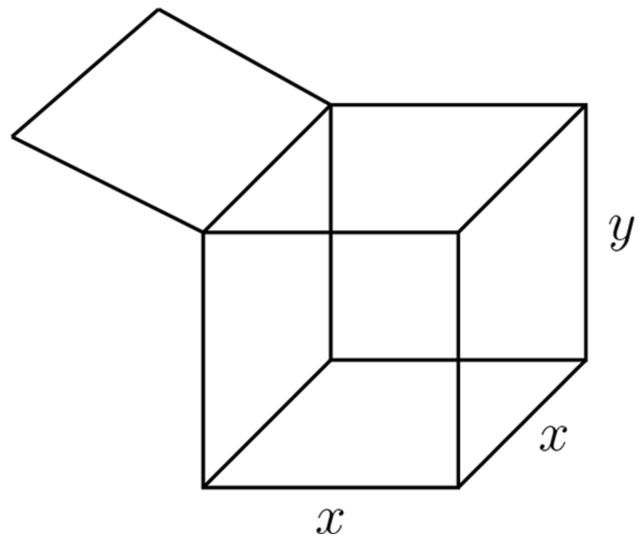
$$-2 \leq z \leq 2$$

Como z es una distancia entonces

$$Dom(A) =]0, 2[.$$

Los extremos no se incluye, ya que las linea, no forma un rectángulo

Ejemplo 3.3.3 Se desea construir una caja con tapa de base cuadrada con área no mayor de 100 cm^2 como en la figura, de volumen 252 cm^3. Si el costo de la tapa es \$2 por cm^2, la base \$ 5 por cm^2 y el costo de los lados es de \$3 por cm^2, exprese el costo C como función de x y el dominio de C



□

Solución 2. Dado que el volumen es $V = 252cm^3$, luego $x^2y = 252$, ahora veremos el costo por lado

El costo de la tapa es de \$ 2 por cm^2. La tapa tiene x^2cm^2, por lo tanto el costo de la tapa es $\$2x^2$.

El costo de la base es de \$5 por cm^2. La base tiene x^2cm^2, por lo tanto el costo de la base es $5x^2$.

El costo de los lados es de \$3 por cm^2. Cada lado tiene $xycm^2$, por lo tanto el costo de los lados es de \$ $12xy$.

El costo total de la caja es:

$$C = 2x^2 + 5x^2 + 12xy$$

pero $y = \frac{252}{x^2}$

Entonces la función queda determinada como

$$C(x) = 7x^2 + 12x \cdot \frac{252}{x^2}$$

$$C(x) = 7x^2 + \frac{3024}{x}$$

donde el dominio de C es $]0, 10]$

3.3.1 Ejercicios Propuestos

1 Si el radio basal r de un cono circular recto aumenta en un $x\%$, mientras que su altura h disminuye en un 20% formule una función en términos de x que permita obtener en qué porcentaje varían:

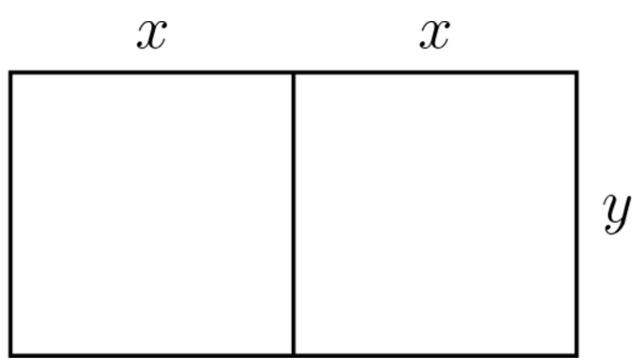
i El área basal del cono.

ii Si el radio aumenta en 15% ¿en qué porcentaje varían el área basal y el volumen del cono?

2 Una caja rectangular con la parte superior abierta tiene un volumen de $10m^3$. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material de la base tiene un costo de 10 dólares por m^2, el material de las caras laterales tiene un costo de 6 dólares por m^2.

Expresar el costo de los materiales en función del ancho de la base.

3 En una parcela, se desea encerrar dos porciones de terreno de igual área (como en la figura) con una malla de longitud L. Expresar el área de la parcela en función de x.



4 El área de una piscina rectangular con bordes es de $18cm^2$. Si el borde superior e inferior miden $\frac{1}{3}m$ y los bordes laterales miden $\frac{1}{4}m$. Expresar el área comprendida entre los bordes en función de uno de los lados de la piscina.

5 La asistencia media en un cine en el que la entrada vale \$1200 es de 100 personas. El empresario cree que cada vez que se reduce el precio en \$80, el número de espectadores aumenta en 20.

i Determine la recaudación R en función del precio p.

ii ¿Qué precio y número de espectadores producirán la mayor asistencia?

iii ¿Cuál es la recaudación máxima por sesión?

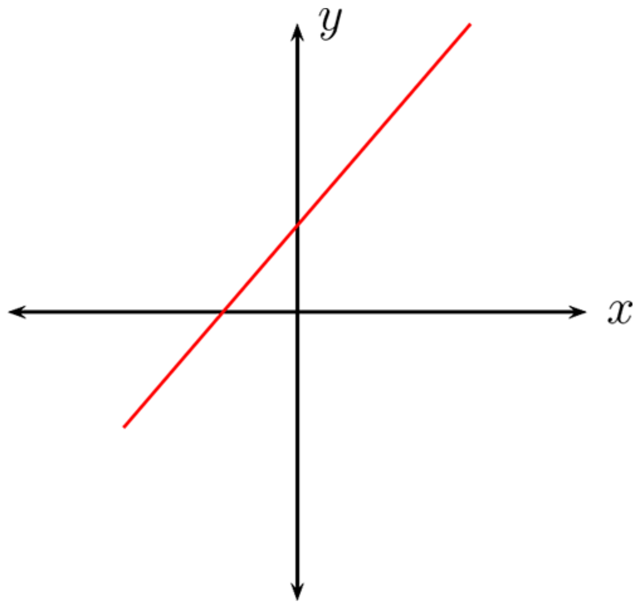
3.4 Tipos de Funciones

Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow B$ una función real.

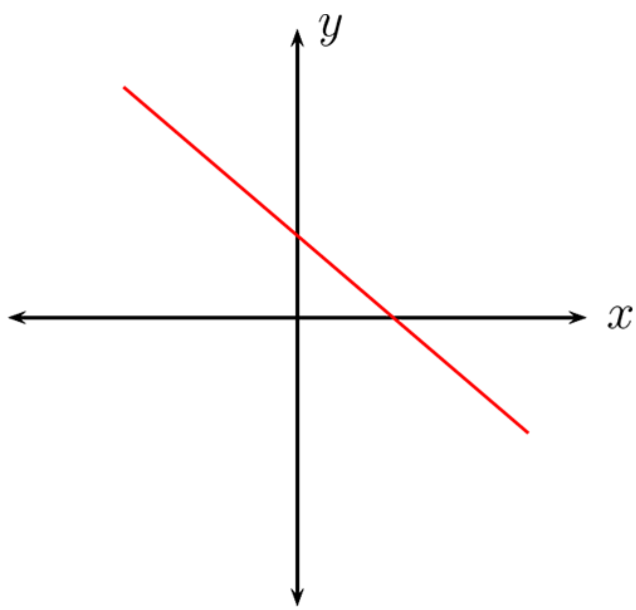
Una clasificación de las funciones reales es la siguiente:**Funciones Lineales**Son funciones de la forma $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & mx+b \end{array}$ con $m, b \in \mathbb{R}$.

La gráfica de las funciones lineales, corresponde a una recta de pendiente m.

Si $m > 0$ y $b \neq 0$ su gráfica tiene la siguiente forma:



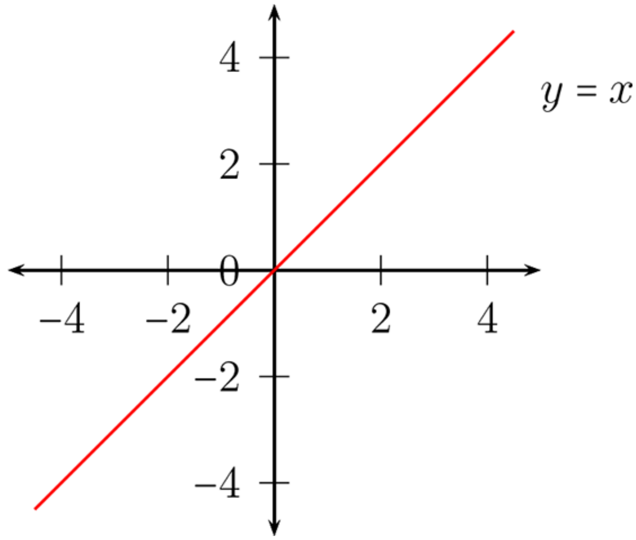
Si $m < 0$ y $b \neq 0$, se gráfica es del siguiente tipo:



Si $m = 1$ y $b = 0$, entonces llamaremos a esta función Identidad y se define como:

$$\begin{array}{rccc} Id: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & Id(x) = x \end{array}$$

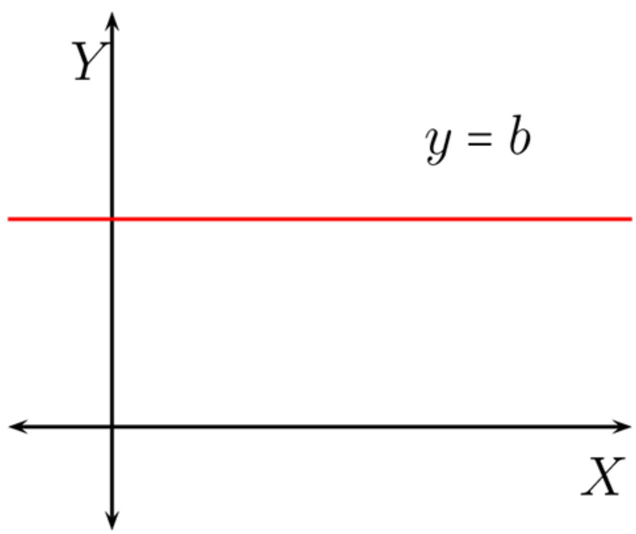
Su gráfica :



Si $m = 0$ y $b \neq 0$,entonces la función se llama función constante b y se denota por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & b \end{array}$$

Gráficamente de pendiente cero:



Funciones Cuadráticas: Son funciones del tipo $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

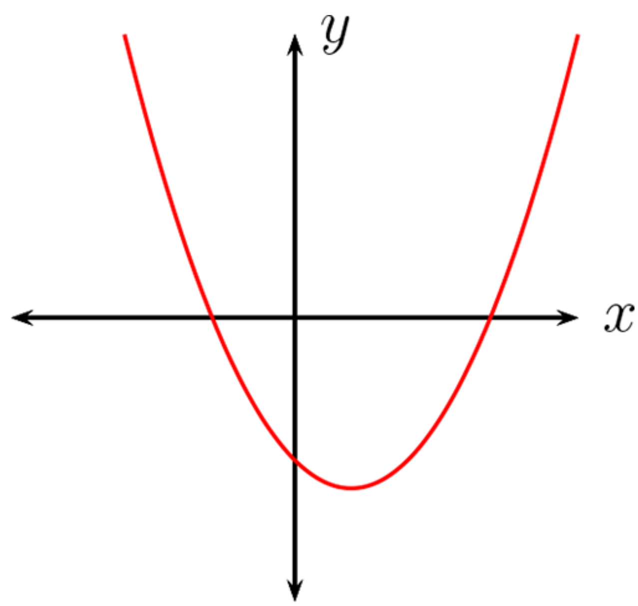
La gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, corresponde a una parábola.

Para conocer la gráfica de una parábola es útil calcular su vértice

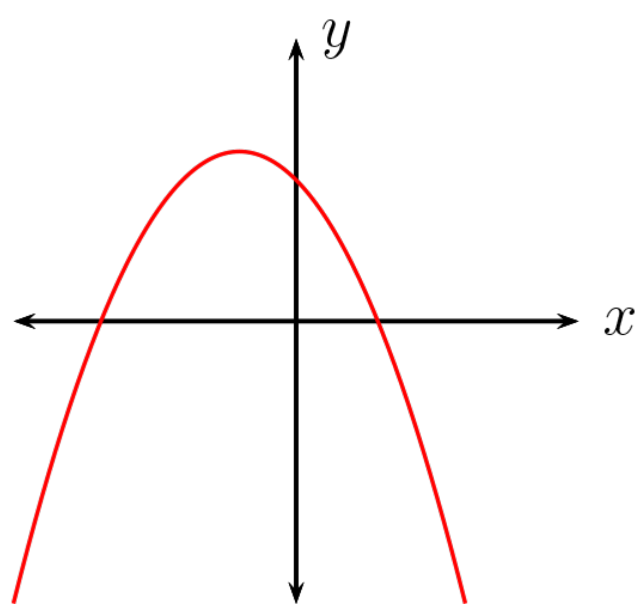
$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a} \right)$$

donde $\triangle = b^2 - 4ac$, es el discriminante de la ecuación, de segundo grado o polinomio de segundo grado y las intersecciones con el eje X, cuya existencia depende del valor del discriminante si es negativo o no es. El nombre de Δ se debe a que discrimina si la función cuadrática tiene intercepto en eje X o no hay, de otro modo, si la ecuación tiene o no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Cuando $a > 0$ su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia arriba.



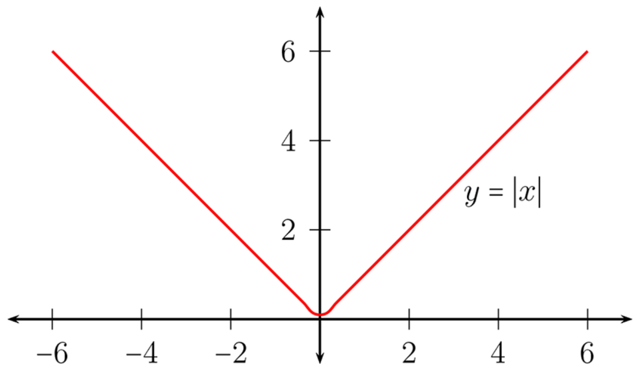
Cuando $a < 0$ su gráfica corresponde a una parábola que se abre hacia abajo.



Función Valor Absoluto: Esta esta dada por:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| = \left\{ \begin{array}{rcl} x & si & x \geq 0 \\ -x & si & x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

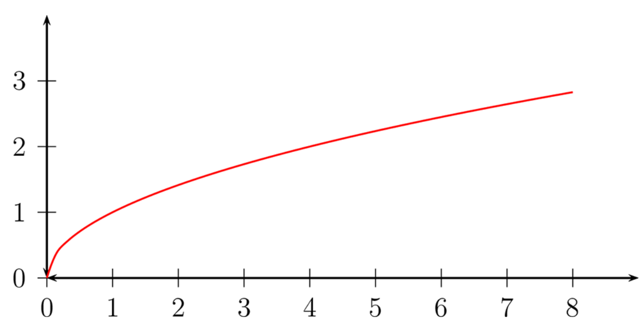
La gráfica de la función es la siguiente:



Función Raíz Cuadrada: Esta función esta dada por:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

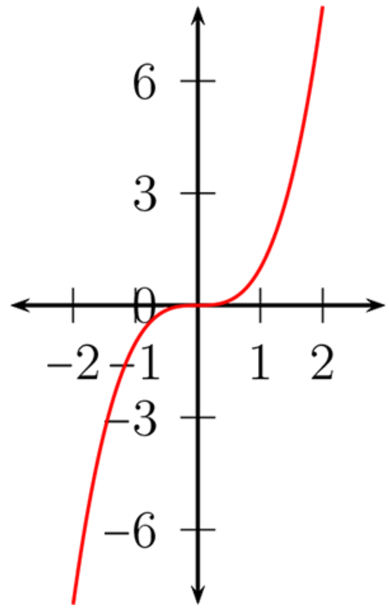
La gráfica de la función es la siguiente:



Función Cúbica: Esta función esta dada por:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

Gráficamente:



Función Parte Entera: Dado un número real x, se puede descomponer en una suma separando su parte entera

$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \ | \ m \leq x\}$$

luego la parte decimal se define

$$d(x) = x - [x]$$

o bien

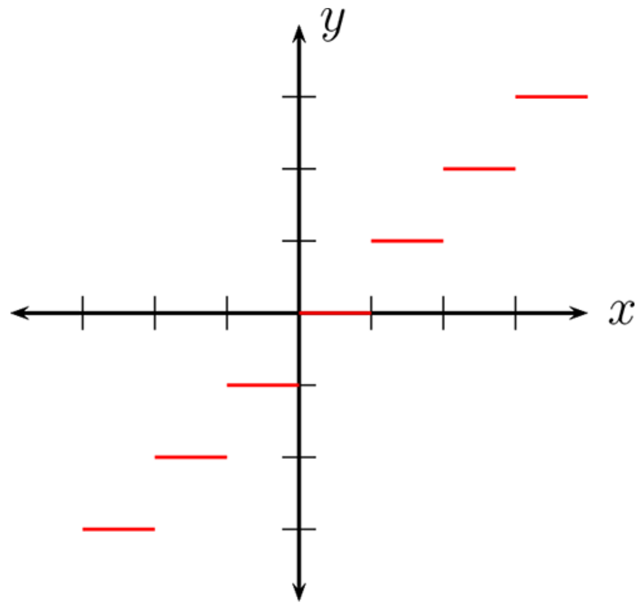
$$x = [x] + d(x)$$

donde $[x]$ es un número entero y $d(x)$ un número decimal, $0 \leq d(x) < 1$.

Luego la función parte entera se define como:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Su gráfica:



Ejercicios Propuestos Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Determine el conjunto A igual al dominio máximo de f y el recorrido para ese dominio.

a $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

b $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

c $f(x) = x^2 + x - 1$

d $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$

e $f(x) = \sqrt{\frac{x}{|x|-1}}$

f $f(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{1+x^2}$

3.5 Álgebra de Funciones

Una forma de construir nuevas funciones es a través del algebra de funciones, aunque las definiciones que daremos en este apunte son mas bien operativa que estricta, por ello en algunos textos se encontraran definiciones diferentes y posiblemente en algunos casos incompatibles

3.5.1 Álgebra de Funciones

Definición 3.5.1 Sean f y g funciones tales que $D = Dom(f) \cap Dom(g) \neq \phi$ entonces se pueden definir nuevas funciones.

1 La suma de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f+g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

2 La diferencia de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f-g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-g(x) \end{array}$$

3 El producto de f y g se define por

$$\begin{array}{rccc} f\cdot g: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array}$$

4 El producto por una escalar se define como:

$$\begin{array}{rccc} \alpha f: & Dom(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\alpha f)(x)=\alpha f(x) \end{array}$$

5 Si $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \neq \phi$ entonces, cociente de f con g se define por

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & D' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

6 Sean A, B, C, D subconjuntos de números reales y $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ dos funciones tales que

$$E = \{x \in A \mid f(x) \in C\} \neq \phi.$$

Entonces, se define la compuesta de f y g dada por:

$$\begin{array}{rccc} (g\circ f): & E & \longrightarrow & D \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Claramente tenemos que $E = Dom(g \circ f)$

$\Diamond$

Observación: Un caso particular, donde la definición de compuesta se cumple, es cuando tenemos que $B \subseteq C$ o $Rec(f) \subseteq C$, entonces $Dom(g \circ f) = Dom(f) = E$.

Ejemplo 3.5.2 Sean

$$\begin{array}{rccc} f: & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x+1 \end{array}$$

Encontrar la suma, la resta, el producto y el cociente de f con g. $\square$

Solución 1. El dominio de f es $Dom(f) = [-2, 2]$ y el de g es $Dom(g) = \mathbb{R}$. Luego

$$Dom(f) \cap Dom(g) = [-2, 2] \neq \phi$$

La suma de f y g

$$\begin{array}{rrcl} (f+g): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} + (3x+1) \end{array}$$

La diferencia

$$\begin{array}{rrcl} (f-g): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} - (3x+1) \end{array}$$

El producto

$$\begin{array}{rrcl} (fg): & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{4-x^2} \cdot (3x+1) \end{array}$$

El cociente

$$\begin{array}{rrcl} \left(\dfrac{f}{g}\right): & [-2,2] - \{-\frac{1}{3}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1} \end{array}$$

Ejemplo 3.5.3 Sea

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Encontrar $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ □

Solución 2. Sabemos que $Recf \subseteq Domf$, luego $Dom(f \circ f) = Domf$, calculemos ahora la imagen.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

luego tenemos

$$\begin{array}{rccc} f \circ f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

La otra compuesta la obtenemos

$$(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f(x) = \frac{1}{x}$$

así tenemos

$$\begin{array}{rccc} f \circ f \circ f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{0\} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Ejemplo 3.5.4 Sean f y g funciones dadas por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x-2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x + \sqrt{x} \end{array}$$

Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$. □

Solución 3. Primero veremos el dominio de la función

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) & = & \{x\in Domf \;\mid\; f(x)\in Domg\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in \mathbb{R} \;\mid\; x-2\in \mathbb{R}^+\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in \mathbb{R} \;\mid\; x-2>0\} \\ Dom(g\circ f) & = &]2,+\infty[. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (g\circ f)(x) & = & g(f(x)) \\ & = & g(x-2) \\ & = & 5(x-2)+\sqrt{x-2} \\ & = & 5x-10+\sqrt{x-2}. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl} g\circ f: &]2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x-10+\sqrt{x-2} \end{array}$$

Ahora veremos el dominio de la otra función

$$\begin{array}{rcl} Dom(f\circ g) & = & \{x\in Domg \;\mid\; g(x)\in Domf\} \\ Dom(f\circ g) & = & \{x\in \mathbb{R}^+ \;\mid\; 5x+\sqrt{x}\in \mathbb{R}\} \\ Dom(f\circ g) & = & \mathbb{R}^+. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl} (f\circ g)(x) & = & f(g(x)) \\ & = & f(5x+\sqrt{x}) \\ & = & 5x+\sqrt{x}-2. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rccl} f\circ g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & 5x+\sqrt{x}-2 \end{array}$$

Ejemplo 3.5.5 Sean f y g funciones dadas por

$$\begin{array}{rccl} f: & [1,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 5-\sqrt{x-1} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}+2 \end{array}$$

Determinar $g\circ f$ y $f\circ g$. $\square$

Solución 4. Primero veremos el dominio de la función

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) & = & \{x\in Domf \;\mid\; f(x)\in Domg\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in [1,\infty[\;\mid\; 5-\sqrt{x-1}\in \mathbb{R}_0^+\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in [1,\infty[\;\mid\; 5-\sqrt{x-1}\geq 0\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in [1,\infty[\;\mid\; 5\geq \sqrt{x-1}\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in [1,\infty[\;\mid\; 26\geq x\} \\ Dom(g\circ f) & = & [1,26]. \end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl}(g\circ f)(x) &=& g(f(x))\\ &=& g(5-\sqrt{x-1})\\ &=& \sqrt{5-\sqrt{x-1}}+2\end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rrcl} g\circ f: & [1,26] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+\\ & x & \longmapsto & \sqrt{5-\sqrt{x-1}}+2\end{array}$$

Ahora veremos el dominio de la otra función

$$\begin{array}{rcl} Dom(f\circ g) &=& \{x\in Domg \ \mid \ g(x)\in Domf\}\\ Dom(f\circ g) &=& \{x\in \mathbb{R}_0^+ \ \mid \ \sqrt{x}+2\in [1,\infty[\}\\ Dom(f\circ g) &=& \{x\in \mathbb{R}_0^+ \ \mid \ \sqrt{x}+2\geq 1\}\\ Dom(f\circ g) &=& \{x\in \mathbb{R}_0^+ \ \mid \ \sqrt{x}\geq -1\}\\ Dom(f\circ g) &=& \mathbb{R}_0^+.\end{array}$$

Veamos ahora la imagen de x

$$\begin{array}{rcl}(f\circ g)(x) &=& f(g(x))\\ &=& f(\sqrt{x}+2)\\ &=& 5-\sqrt{\sqrt{x}+2-1}.\end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rrcl} f\circ g: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & 5-\sqrt{\sqrt{x}+1}\end{array}$$

Ejemplo 3.5.6 Sean f y g dos funciones definidas por

$$\begin{array}{rrcl} f: & [0,4] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 3x+4 & si & x\in[0,2[\\ x+1 & si & x\in[2,4]\end{array}\right.\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g: & [2,12] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+\\ & x & \longmapsto & g(x)=\left\{\begin{array}{ccc} x^2 & si & x\in[2,5[\\ 4 & si & x\in[5,12]\end{array}\right.\end{array}$$

Determine $(g\circ f)$ □

Solución 5. Primero veremos su dominio

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) &=& \{x\in Domf \ \mid \ f(x)\in Domg\}\\ Dom(g\circ f) &=& \{x\in [0,4] \ \mid \ f(x)\in [2,12]\}\end{array}$$

Para el primer caso $x\in[0,2[$ tenemos

$$\begin{array}{c} 2\leq f(x)\leq 12\\ 2\leq 3x+4\leq 12\\ -2\leq 3x\leq 8\\ -\frac{2}{3}\leq x\leq \frac{8}{3}\end{array}$$

lo cual ocurre siempre.

Para el segundo caso $x \in [2,4]$ tenemos

$$\begin{aligned} 2 \leq f(x) &\leq 12 \\ 2 \leq x+1 &\leq 12 \\ 1 \leq x &\leq 11 \end{aligned}$$

lo cual ocurre siempre. Luego

$$Dom(g \circ f) = [0,4].$$

ahora calcularemos la imagen por la compuesta

Primer caso: Sea $x \in [0,2[$

$$(g \circ f)(x) = g(3x+4)$$

Caso 1A) $3x+4 < 5 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

$$g(3x+4) = (3x+4)^2$$

lo cual esta definida en el intervalo $[0, \frac{1}{3}[$.

Caso 1B) $3x+4 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$

$$g(3x+4) = 4$$

esta definida en el intervalo de $[\frac{1}{3}, 2[$

Segundo caso: Sea $x \in [2,4]$

$$(g \circ f)(x) = g(x+1)$$

Caso 2A) $x+1 < 5 \Leftrightarrow x < 4$

$$g(x+1) = (x+1)^2$$

en el intervalo $[2,4[$

Caso 2B) $x+1 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 4$, luego $x = 4$

$$g(f(4)) = g(5) = 4$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (3x+4)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 4 & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x < 2 \text{ o } x = 4 \\ (x+1)^2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

Ejemplo 3.5.7 Sean f y g dos funciones,

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & si \quad x > 1 \\ x^3 & si \quad x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x > 0 \\ 2x+1 & si \quad x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

Determine $(g \circ f)$ □

Solución 6. Primero veremos su dominio

$$\begin{array}{rcl} Dom(g\circ f) & = & \{x\in Domf \ \mid \ f(x)\in Domg\} \\ Dom(g\circ f) & = & \{x\in \mathbb{R} \ \mid \ f(x)\in \mathbb{R}\} \\ Dom(g\circ f) & = & \mathbb{R} \end{array}$$

Veremos a continuación la imagen.

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

Para el primer caso $x > 1$ tenemos

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x-1})$$

pero tenemos que $\sqrt{x-1} > 0$, luego se tiene que:

$$g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 = x-1$$

En el segundo caso tenemos que $x < 1$ luego

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3)$$

Debemos analizar

Caso A) $x^3 > 0 \Longleftrightarrow x \in]0,1]$, luego tenemos que

$$g(x^3) = (x^3)^2 = x^6$$

Caso B) $x^3 \leq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, 0]$, luego tenemos que

$$g(x^3) = 2x^3 + 1$$

Así tenemos

$$(g\circ f)(x) \ = \ \left\{ \begin{array}{ccc} x-1 & si & x>1 \\ x^6 & si & x\in]0,1] \\ 2x^3+1 & si & x\leq 0 \end{array} \right.$$

3.5.2 Ejercicios Propuestos

a Dadas las siguientes funciones

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{|x|}{x^2} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rrcl} g: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1-x^2 \end{array}$$

Determine:

a $Dom(g\circ f)$

b $(g\circ f)(x)$

b Dadas las siguientes funciones

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{|x|}{x^2} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & si \quad |x| \leq 1 \\ x^2+1 & si \quad |x| > 1 \end{cases} \end{array}$$

Determine $(g \circ f)$

c Exprese la función $f(x) = \sqrt[5]{(x+x^4)^2}$ como la composición de tres funciones básicas.

d Encuentre una función $h(x)$ de manera que $(g \circ h)(x) = x$ siendo $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

e Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$ encontrar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

f Sean f y g funciones tales que $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ y $g(x) = \frac{x}{x+1}$

Sea

$$A(h) = \frac{f(x+h) - (f \circ g)(x+h)}{(f \cdot g)(x+h) - \frac{f(x+h)}{g(x+h)}}$$

a Calcule $A(h)$ en función de h y x.

b Calcule $A(1)$ y $A(-1)$.

c Graficar la función

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto |x-1| + |2x+3| \end{array}$$

g Graficar $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$

h Sean f y g funciones definidas en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; \quad x \geq 1 \\ x^2-1 & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x+3 & ; \quad x < 2 \\ 2x^2+x-3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Encontrar $(g \circ f)(x)$

3.6 Clasificaciones de las Funciones

3.6.1 Funciones Biyectivas

Definición 3.6.1 Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **inyectiva** si y sólo si

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Es decir, f es inyectiva si y sólo si todo $y \in Rec(f)$ tiene una y sólo una preimagen en el $Dom(f)$. $\diamondsuit$

Ejemplo 3.6.2 Sean a y b en $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y f definida por:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva. □

Solución 1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x)=f(y) & \Longrightarrow & ax+b & = & ay+b \\ & \Longrightarrow & ax & = & ay \\ & \Longrightarrow & x & = & y \end{array}$$

Luego f es inyectiva.

Ejemplo 3.6.3 Sea f una función definida por:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{3x+2}{x-2} \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva. □

Solución 2. Sean $x, y \in \mathbb{R}-\{2\}$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x)=f(y) & \Longrightarrow & \dfrac{3x+2}{x-2} & = & \dfrac{3y+2}{y-2} \\ & \Longrightarrow & (3x+2)(y-2) & = & (3y+2)(x-2) \\ & \Longrightarrow & 3xy+2y-6x-4 & = & 3xy+2x-6y-4 \\ & \Longrightarrow & 2y-6x & = & 2x-6y \\ & \Longrightarrow & 8y & = & 8x \\ & \Longrightarrow & y & = & x \end{array}$$

Luego f es inyectiva.

Ejemplo 3.6.4 Sea f una función definida por:

$$\begin{array}{rrcl} f: & [1,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+2x-2 \end{array}$$

Demostrar que f es inyectiva. □

Solución 3. Sean $x, y \in [1,\infty[$ tales que

$$\begin{array}{rcrcl} f(x)=f(y) & \Longrightarrow & x^2+2x-2 & = & y^2+2y-2 \\ & \Longrightarrow & x^2-y^2+2x-2y & = & 0 \\ & \Longrightarrow & (x+y)(x-y)+2(x-y) & = & 0 \\ & \Longrightarrow & (x-y)(x+y+2) & = & 0 \\ & \Longrightarrow & x-y=0 & \vee & x+y+2=0 \\ & \Longrightarrow & x=y & \vee & x+y=-2 \end{array}$$

Como $x, y \geq 1$, luego $x+y \geq 2$, por lo tanto, $x+y=-2$ es falso, así tenemos que $x=y$, con lo cual f es inyectiva.

Ejemplo 3.6.5 Sea la función

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x > 2 \\ x+2 & si & x \leq 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine si f es inyectiva. $\square$

Solución 4. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$.
Primer caso: $x, y \in]2, \infty[$

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & y^2 \\ |x| & = & |y| \\ x & = & y \end{array}$$

Segundo caso: $x, y \in]-\infty, 2]$

$$\begin{array}{rcl} x+2 & = & y+2 \\ x & = & y \end{array}$$

Tercero Caso: $x \in]2, \infty[, y \in]-\infty, 2]$, para este caso, veremos si es posible que $f(x) = f(y)$, para ello calculemos el recorrido.
Si $x > 2$ y $u = f(x)$

$$u = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{u} = x$$

donde $u \geq 0 \wedge \sqrt{u} > 2$, por lo tanto $u > 4$. Así tenemos que $f(x) > 4$,
Si $x \leq 2$ y $v = f(y)$

$$v = y + 2 \Leftrightarrow v - 2 = y$$

donde $v - 2 \leq 2$, por lo tanto $v \leq 4$, con lo cual $f(y) \leq 4$.

Es decir, $4 < f(x) = f(y) \leq 4$. que es imposible, recuerde que $(F \Rightarrow F) \equiv V$, luego en los tres caso la proposición es verdadera.

Con lo cual f es inyectiva.

Ejemplo 3.6.6 Sea la función

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{x-1} & si & x > 1 \\ x^3 & si & x \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine si f es inyectiva. $\square$

Solución 5. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$.
Primer caso: $x, y \in]1, \infty[$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x-1} & = & \sqrt{y-1} \\ x-1 & = & y-1 \\ x & = & y \end{array}$$

Segundo caso: $x, y \in]-\infty, 1]$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 \\ x & = & y \end{array}$$

Tercero caso: $x \in]1,\infty[, y \in]-\infty,1]$, para este caso, veremos si es posible que $f(x)=f(y)$, para ello calculemos el recorrido.

Si $x>1$ y $u=f(x)$

$$u=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow u^2+1=x$$

donde $u \geq 0 \wedge u^2+1>1$, por lo tanto $u>0$.

Así tenemos que $Rec(f_1)=]0,\infty[$.

Si $x \leq 1$ y $v=f(y)$

$$v=y^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{v}=y$$

donde $\sqrt[3]{v} \leq 1$, por lo tanto $v \leq 1$, con lo cual $Rec(f_2)=]-\infty,1]$.

Es decir, hay elementos en común en los recorridos, por ejemplo $u=v=\frac{1}{2}$. Así tenemos que $x=\frac{5}{4}, y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, tiene igual imagen. Con lo cual f no es inyectiva.

Ejemplo 3.6.7 Dada la función g definida por

$$\begin{array}{rl} g: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x)=\frac{x}{x^2+5} \end{array}$$

Determinar si g es inyectiva y en caso de que no lo sea redefinir la función para que sea inyectiva. $\square$

Solución 6. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $g(a)=g(b)$ entonces tenemos que

$$\begin{array}{rcl} g(a) & = & g(b) \\ \frac{a}{a^2+5} & = & \frac{b}{b^2+5} \\ a(b^2+5) & = & b(a^2+5) \\ ab^2+5a & = & ba^2+5b \\ ab^2-ba^2 & = & 5b-5a \\ ab(b-a) & = & 5(b-a) \\ ab(b-a)-5(b-a) & = & 0 \\ (b-a)(ab-5) & = & 0 \\ a=b & \vee & ab-5=0 \end{array}$$

Si $a=1, b=5$, tenemos que $f(1)=f(5)=\frac{1}{6}$.

Por lo tanto g no es inyectiva.

Luego para redefinir el dominio de g de modo que sea inyectiva, se debe verificar que se cumpla que:

$$a=b \wedge ab \neq 5$$

$$\begin{array}{rcl} a=b & \wedge & (ab>5 \vee ab<5) \\ (a=b \wedge ab>5) & \vee & (a=b \wedge ab<5) \\ a^2>5 & \vee & a^2<5 \\ |a|>\sqrt{5} & \vee & |a|<\sqrt{5} \\ (a>\sqrt{5} \vee a<-\sqrt{5}) & \vee & (-\sqrt{5}<a \wedge a<\sqrt{5}) \\ a \in]-\infty,-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5},\infty[& \vee & a \in]-\sqrt{5},\sqrt{5}[\end{array}$$

Pero $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$ pertenecen al dominio de inyectividad.

Así algunas posibles redefinición de la función

$$\begin{array}{rrcl} g_1: & [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{x^2+5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g_2: &]-\infty, -\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{x^2+5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} g_3: & [\sqrt{5}, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{x^2+5} \end{array}$$

Definición 3.6.8 Una función $f : A \longrightarrow B$, se dice **epiyectiva** o **sobreyectiva** si y sólo si $Rec(f) = B$. $\Diamond$

Definición 3.6.9 Una función $f : A \longrightarrow B$, se dice **biyectiva** si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva. $\Diamond$

Proposición 3.6.10 *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones, entonces*

i f y g son inyectivas implica que $g \circ f$ es inyectiva.

ii f y g son sobreyectivas implica que $g \circ f$ es sobreyectiva.

Demostración. i. Sean f y g dos funciones inyectivas y $x_1, x_2 \in Dom(g \circ f) = A$ tales que

$$\begin{array}{rl} (g \circ f)(x_1) & = (g \circ f)(x_2) \\ g(f(x_1)) & = (g(f(x_2))) \\ f(x_1) & = f(x_2) \\ x_1 & = x_2 \end{array}$$

ya que f y g son inyectivas.

ii. Sean f y g dos funciones epiyectivas luego el $Recf = B$ y $Recg = C$

Sea $x \in C$, como g es sobreyectiva $\exists y \in B$ tal que $g(y) = x$, además f es sobreyectiva, luego $\exists z \in A$ tal que $f(z) = y$. Entonces

$$\begin{array}{rl} (g \circ f)(z) & = g(f(z)) \\ (g \circ f)(z) & = g(y) \\ (g \circ f)(z) & = x \end{array}$$

Por lo tanto $Rec(g \circ f) = C$, es decir, $g \circ f$ es sobreyectiva. ■

Ejemplo 3.6.11 Sea $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x} \end{array}$

a) Determinar si f es inyectiva.

b) Determinar si f es sobreyectiva. □

Solución 7. Verificaremos que f sea inyectiva

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Sean $a, b \in Dom f$ tal que

$$\begin{array}{rcll} f(a) & = & f(b) & \\ \frac{a-1}{a} & = & \frac{b-1}{b} & \\ ba-b & = & ab-a & /-ab \\ -b & = & -a & /\cdot(-1) \\ b & = & a & \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Verificar si f sobreyectiva. Esto sucede si y sólo si

$$Rec(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Sea $y \in Rec f$, luego existe $x \in Dom f$ tal que

$$\begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ y & = & \frac{x-1}{x} \\ xy-x & = & -1 \\ x(y-1) & = & -1 \\ x & = & \frac{-1}{y-1} \end{array}$$

Así tenemos que

$$Rec(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Por lo tanto f es sobreyectiva.

Ejemplo 3.6.12 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -x & si & x > 0 \\ x^2 & si & x \leq 0 \end{array} \right.$$

Determinar si f es biyectiva. □

Solución 8.

a Verificar si f es inyectiva.

Si $x, y > 0$ se tiene que

$$\begin{array}{rl} f(x) = & f(y) \\ -x = & -y \\ x = & y \end{array}$$

Si $x, y \leq 0$

$$\begin{array}{rl} f(x) = & f(y) \\ x^2 = & y^2 \\ x = & y \end{array}$$

Si $x > 0, y \leq 0$ y $f(x) = f(y)$, se tiene que $-x = y^2$ lo cual es una contradicción, pues $-x < 0, y^2 \geq 0$ luego no puede ser que $f(x) = f(y)$, es decir, que si $(F \Rightarrow F) \equiv V$.

Por lo tanto, f es inyectiva.

b Verificar si f es sobreyectiva.

Lo veremos en dos etapas:

a) Si $x > 0$, se tiene que $f(x) = y = -x$, luego $x = -y \in \mathbb{R}$ y como $x > 0$ entonces $-y > 0$, luego $y < 0$, $Recf_1 =]\infty, 0[$.

b) Si $x \leq 0$, se tiene que $f(x) = y = x^2 \in \mathbb{R}$ y $|x| = \sqrt{y} \in \mathbb{R} \ \ \forall y \geq 0$ y como $x \leq 0$ entonces $x = -\sqrt{y} \leq 0$, así la única condición para y es que $y \geq 0$, $Recf_2 = [0, \infty[$.

Luego

$$Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\} \cup \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} = \mathbb{R}$$

Por lo tanto f es sobreyectiva.

En consecuencia, f es biyectiva.

3.6.2 Función Inversa

Definición 3.6.13 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, diremos que f es **invertible** si y sólo si existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$(\forall b \in B)((f \circ g)(b) = b), \ \wedge \ (\forall a \in A)((g \circ f)(a) = a).$$

La función g se llama función **inversa** de f y se denota por f^{-1}. $\Diamond$

Proposición 3.6.14 *Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones invertibles entonces*
i) $g \circ f$ es una función invertible y además se tiene

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

ii) f^{-1} es una función invertible y además se tiene

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Demostración. Verifiquemos la primera compuesta

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g(f(x))) \\
&= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) \\
&= f^{-1}(Id(f(x)) \\
&= f^{-1}(f(x)) \\
&= Id(x) \\
&= x
\end{aligned}$$

La otra compuesta

$$\begin{aligned}
(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= (g \circ f) \circ (f^{-1}(g^{-1}(x))) \\
&= g(f(f^{-1}(g^{-1}(x)))) \\
&= g(Id(g^{-1}(x))) \\
&= g(g^{-1}(x)) \\
&= Id(x) \\
&= x
\end{aligned}$$

Luego $(g \circ f)^{-1} = Id \quad f^{-1} \circ g^{-1} = Id$

Como $f \circ (f^{-1}) = Id$ y $(f^{-1}) \circ f = Id$, entonces f^{-1} es invertible y además

$$\begin{aligned} f \circ (f^{-1}) &= Id \\ f \circ (f^{-1}) &= Id / \circ (f^{-1})^{-1} \\ f &= (f^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Luego

$$h = f = (f^{-1})^{-1}$$ ■

Proposición 3.6.15 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función entonces*

$$f \text{ es invertible si y sólo si } f \text{ es biyectiva.}$$

Si f es biyectiva la inversa está definida por

$$\begin{array}{rrl} f^{-1}: & B \longrightarrow & A, \\ & y \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

donde $f^{-1}(y) = x$ es el único elemento en A, tal que $y = f(x)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que f^{-1} existe, entonces se cumple que $Dom(f^{-1}) = B$ y para todo elemento en su dominio se tiene que, si $x = y$, entonces $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$.

Ahora el $Dom(f^{-1}) = B$ si y sólo si el recorrido de f es igual a B, es decir, f es sobreyectiva.

Demostraremos que f es inyectiva y para esto se debe cumplir que

$$(\forall a, b \in A)(f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b)$$

Sean $a, b \in A$ tal que $f(a) = f(b)$ por la primera hipótesis f^{-1} es función. Luego

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(a)) &= f^{-1}(f(b)) \\ a &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Dado $x \in A$, luego $f(x) \in B$ y por lo tanto $x = f^{-1}(f(x))$, con ello f^{-1} es biyectiva.

$\Leftarrow$ Supongamos que f es biyectiva y $f^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in f\}$ la relación inversa, por ser f epiyectiva tenemos que $Dom(f^{-1}) = B$, entonces debemos demostrar que si $(x, w) \in f^{-1}$ y $(x, t) \in f^{-1}$ entonces $w = t$.

Como $(x, w) \in f^{-1}$ y $(x, t) \in f^{-1}$ entonces $(w, x) \in f$ y $(t, x) \in f$. Es decir,

$$f(w) = x = f(t)$$

pero f es inyectiva se tiene que

$$w = t$$ ■

Observación: Sea $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ una función invertible y $f^{-1} : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ su función inversa, entonces las gráficas $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ son curvas simétricas con respecto a la diagonal $y = x$.

Ejemplo 3.6.16 Sea

$$\begin{array}{rrcl} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x^3-1} \end{array}.$$

Determine el dominio máximo de f y el recorrido de modo que sea biyectiva y luego determine f^{-1}. $\square$

Solución 1. La función tiene como dominio el intervalo $[1,\infty[$ pues

$$\begin{array}{rcll} x^3-1 & \geq & 0 & \\ x^3 & \geq & 1 & /\sqrt[3]{} \\ x & \geq & 1 & \end{array}$$

Su recorrido queda determinado por

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x^3-1} & = & y & /()^2, y \geq 0 \\ x^3-1 & = & y^2 & \\ x^3 & = & y^2+1 & /\sqrt[3]{} \\ x & = & \sqrt[3]{y^2+1} & \end{array}$$

Entonces el recorrido de f es el intervalo $[0,\infty[$.

Ahora debemos verificar si f es inyectiva, para esto se debe cumplir que

$$(\forall a,b \in A)(f(a)=f(b) \Longrightarrow a=b)$$

Sean $a,b \in Domf$ tal que $f(a)=f(b)$ luego

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{a^3-1} & = & \sqrt{b^3-1} & /()^2 \\ a^3-1 & = & b^3-1 & /+1 \\ a^3 & = & b^3 & /\sqrt[3]{} \\ a & = & b & \end{array}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

Si $B=[0,\infty[$, entonces f es sobreyectiva.

De este modo tenemos que

$$\begin{array}{rrcl} f: & [1,\infty[& \longrightarrow & [0,\infty[\\ & x & \longmapsto & \sqrt{x^3-1} \end{array}.$$

es biyectiva y la inversa de f y queda determinada por

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & [0,\infty[& \longrightarrow & [1,\infty[\\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2+1} \end{array}$$

Ejemplo 3.6.17 Sea

$$\begin{array}{rcl} f:A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x}} \end{array}$$

Determine A, B maximales tales exista f^{-1} y en cuyo caso determine $\square$

Solución 2. El dominio de f es el intervalo $]-\infty, 1[$ pues

$$\begin{array}{rcl} 1-x & > & 0 \\ 1 & > & x \end{array}$$

El recorrido de f es

$$\begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad /()^2, y > 0 \\ y^2 & = & \frac{1}{1-x} \\ y^2 - y^2 x & = & 1 \\ 1 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2-1}{y^2} & = & x, \qquad y \neq 0 \end{array}$$

$$Rec(f) =]0, +\infty[$$

Veremos si f es inyectiva.

$$\begin{array}{rcll} f(a) & = & f(b) & \\ \frac{1}{\sqrt{1-a}} & = & \frac{1}{\sqrt{1-b}} & \\ \sqrt{1-b} & = & \sqrt{1-a} & /()^2 \\ 1-b & = & 1-a & /-1 \\ b & = & a & \end{array}$$

El recorrido ya está calculado y es $Recf =]0, +\infty[$, luego f es sobreyectiva.

En consecuencia

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 1[& \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x}} \end{array}$$

es biyectiva. Entonces existe la inversa de f y esta dada por:

$$\begin{array}{rl} f^{-1} :]0, +\infty[& \longrightarrow]-\infty, 1[\\ x & \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \end{array}$$

Ejemplo 3.6.18 Sea la función

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x > 2 \\ x+2 & si & x \leq 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Determine la inversa de f. □

Solución 3. Por ejemplo Ejemplo 3.6.5 tenemos demostrado que f es biyectiva.

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \sqrt{x} & si & x > 4 \\ x-2 & si & x \leq 4 \end{array} \right. \end{array}$$

3.6.3 Características de las Funciones

Existe ciertas características que cumple algunas funciones, las cuales las evidenciaremos en esta sección, todas ellas nos permiten graficar y deducir información de ellas.

Definición 3.6.19 [Crecientes y Decrecientes]. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función real. Se dice que:

a f es **creciente** en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b))$$

b f es **decreciente** en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b))$$

c f es **estrictamente creciente** en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b))$$

d f es **estrictamente decreciente** en A si sólo si

$$(\forall a, b \in A)(a < b \Longrightarrow f(a) > f(b))$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 3.6.20 La función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, pues

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)(x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y})$$

$\square$

Ejemplo 3.6.21 La función $f(x) = mx + b$ es estrictamente decreciente si $m < 0$. Sean $u, v \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que:

$$\begin{array}{rrl} u < v \Longrightarrow & mu & > mv \\ & mu + b & > mv + b \\ & f(u) & > f(v) \end{array}$$

Análogamente si $m > 0$ entonces f es creciente. $\square$

Proposición 3.6.22 *Si f es una función estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente, entonces f es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que f es una función estrictamente creciente, es decir:

$$(\forall a, b \in Dom(f))(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b))$$

y supongamos que f no es inyectiva, por lo tanto existirán $a, b \in Dom(f)$ tales que

$$f(a) = f(b) \wedge a \neq b$$

donde

$$a > b \vee a < b (\Rightarrow\Leftarrow)$$

La demostración es análoga si f es estrictamente decreciente. $\blacksquare$

[inlineexercise] 3.6.23 La función $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ y la función $-x^2$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$

Proposición 3.6.24 *Si f y g son funciones estrictamente crecientes tales que $Rec(f) \subset Dom(g)$ entonces $g \circ f$ es una función estrictamente creciente definida en $Dom(f)$.*

Demostración. Por definición anterior sabemos que si $Rec(f) \subseteq Dom(g)$ entonces $Dom(g \circ f) = Dom(f)$.

Luego, sean $x, y \in Dom(g \circ f)$ tales que $x < y$ entonces como f es estrictamente creciente se tiene que

$$f(x) < f(y)$$

y como g también es estrictamente creciente se tiene

$$g(f(x)) < g(f(y))$$

luego

$$x < y \Rightarrow (g \circ f)(x) < (g \circ f)(y)$$ ■

Definición 3.6.25 [Función Periódica de Período p]. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $p > 0$ diremos que f es una **función periódica** de período p, si y sólo si p es el menor número positivo que cumple

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

♢

Observación: Con ésta propiedad tenemos que:

$$f(0 + p) = f(0) = f(p)$$

$$f(2p) = f(p + p) = f(p)$$

$$f(0) = f(-p + p) = f(-p)$$

luego, la funciones periódicas no son biyectiva

Definición 3.6.26 Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **monótona** si sólo si es creciente o decreciente en el dominio de f ♢

Definición 3.6.27 [Funciones Pares e impares]. Sean A, B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $(\forall x \in A)(-x \in A)$ y $f : A \longrightarrow B$ una función. Se dice que

a f es **par** si y sólo si $(\forall x \in A)(f(-x) = f(x))$

b f es **impar** si y sólo si $(\forall x \in A)(f(-x) = -f(x))$

♢

Ejemplo 3.6.28 Dada la función real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 8$. Demostrar que f es una función par. □

Solución 1. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(-x) = 4(-x)^4 - 3(-x)^2 + 8 = 4x^4 - 3x^2 + 8 = f(x)$$

Luego f es una función par.

Ejemplo 3.6.29 Dada la función real $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3x^5-4x^3+2x$. Demostrar que f es una función impar. $\square$

Solución 2. Sea $x\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(-x)=3(-x)^5-4(-x)^3+2(-x)=-3x^5+4x^3-2x=-f(x)$$

Luego f es una función impar.

3.6.4 Ejercicios Propuestos

1 Para cada una de las siguientes funciones.

a. Determine el dominio y el recorrido

b. Determine si son inyectivas y sobreyectivas. Si no lo son, redefinirlas, de modo que sean funciones biyectivas.

i $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

ii $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1+|x|}}$

iii $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

iv $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

v $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}+1}$

2 Demuestre que

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ & x\longmapsto x^3 \end{array}$$

es una función inyectiva

3 Sea

$$\begin{array}{rcl} f:]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

Determine si f es biyectiva.

4 Sea

$$f(x)=\begin{cases} 3x & si \quad -1\le x\le 0 \\ x^3 & si \quad 0<x\le 2 \end{cases}$$

a ¿Es f inyectiva?. Justifique.

b Encuentre $f^{-1}(x)$.

c Grafique $y=f^{-1}(x)$

5 Sea $f(x)=\frac{5x+3}{x-4}$

a Determine si f es una función biyectiva. Justifique.

b Si es biyectiva, calcule $f^{-1}(x)$.

6 Sea $f(x) = x^2 + x + 3$. Determine el dominio y recorrido de manera que f sea una función biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.

7 Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 2+\sqrt{x} & si \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Determine un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que f sea biyectiva.

8 Sean

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3x \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+1 \end{array}$$

a Demuestre que g es biyectiva.

b Encuentre una función h indicando su dominio tal que $g \circ h = f$.

c ¿Es f biyectiva? Si no lo es restringir f de modo que sea biyectiva y encontrar f^{-1}.

3.7 Funciones Exponenciales

Teorema 3.7.1 *Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$, entonces para cada a existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = a^x$$

y cumple con las siguientes propiedades.
Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $x, y, \in \mathbb{R}$. Entonces

a $a^0 = 1$

b $a^{(x+y)} = a^x a^y$

c $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

d $a^{yx} = (a^x)^y = (a^y)^x$

e $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

f $(ab)^x = a^x b^x$

g $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

h Si $0 < a < 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función decreciente.

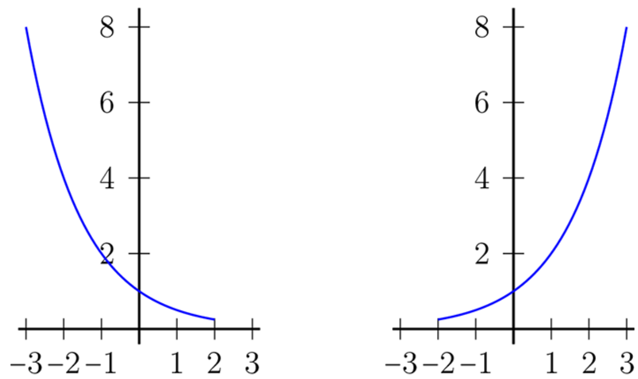
i Si $a > 1$ entonces $f(x) = a^x$ es una función creciente

Definición 3.7.2 Para cada $a \in \mathbb{R}^+$, la función

$$\begin{array}{rcl} \exp_a : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

se llama función **exponencial** en base a. $\Diamond$

Su gráfica es la siguiente:



$0 < a < 1$ $\qquad$ $a > 1$

Ejemplo 3.7.3 Algunos ejemplos numéricos

a $(3^3)(3^4) = 3^{3+4} = 3^7$

b $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

c $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

d $(3^x)^4 = 3^{4x}$

e $(\frac{1}{3})^{-x} = (3^{-1})^{-x} = 3^x$

$\square$

3.7.1 Funciones Logarítmicas

Teorema 3.7.4 *Sea $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ entonces la función exponencial en base a es biyectiva, por lo tanto existe la función inversa.*

Definición 3.7.5 La función inversa de la exponencial en base a se llama función **logaritmo** en base a y la denotaremos como $\log_a$, es decir:

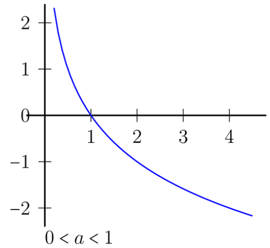
$$\log_a x = y \Longleftrightarrow \exp_a(y) = x$$

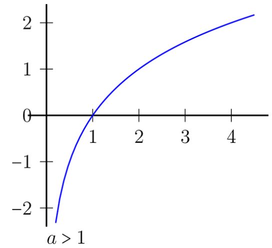
Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ podemos definir la función como:

$$\begin{array}{rl} \log_a : & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \log_a(x) = y \end{array}$$

$\Diamond$

Las Gráfica correspondiente son:





Ejemplo 3.7.6 De algunos cálculos numéricos

a $\log_{10} 10^3 = 3$, pues $10^3 = 1000$

b $\log_2 1 = 0$, pues $2^0 = 1$

$\square$

Proposición 3.7.7 *Sean* $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x, y \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$ *entonces*

1 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2 $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3 $\log_a(x^r) = r \log_a x$

4 $\log_a(1) = 0$

5 $\log_a(a^r) = r$

6 $\log_a(x) = \log_a(y) \iff x = y$

7 Si $0 < a < 1$ *entonces* $\log_a$ *es una función decreciente.*

8 Si $a > 1$ *entonces* $\log_a$ *es una función creciente.*

Demostración. Sea $u = \log_a x$ y $v = \log_a y$ entonces $a^u = x$ y $a^v = y$
Para (1) tenemos que

$$\log_a(xy) = \log_a(a^u a^v) = \log_a a^{u+v} = u + v$$

Luego

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

En (2)

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(a^u a^{-v}) = \log_a a^{u-v} = u - v$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

En (3)

$$\log_a x^r = \log_a(a^u)^r = \log_a a^{ru} = ru$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

Las propiedades siguientes quedan como tarea para el lector. ■

Ejemplo 3.7.8

a $\log_{10} x^2 y = 2\log_{10} x + \log_{10} y$

b $\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$

□

Teorema 3.7.9 [Cambio de Base]. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demostración. Sea $u = \log_a x, v = \log_b x$, entonces $a^u = x$ y $b^v = x$ así tenemos que

$$\begin{array}{rcl} a^u &=& b^v \\ \log_a a^u &=& \log_a b^v \\ u &=& v\log_a b \\ \log_a x &=& \log_b x \log_a b \\ \log_b x &=& \frac{\log_a x}{\log_a b} \end{array}$$

■

Ejemplo 3.7.10 Resolver la siguientes ecuaciones

a $y = \log_2 8$.Luego $2^y = 8$, por lo tanto $y = 3$.

b $\log_a \frac{1}{16} = 4$.
Lo cual significa que $a^4 = \frac{1}{16}$, de este modo se tiene $a = \frac{1}{2}$

c $\log_a x = -2$.
Traduciendo tenemos $3^{-2} = y$, luego $\frac{1}{9} = y$.

□

3.7.2 Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Una ecuación que contiene una o más funciones logarítmicas con una o más incógnitas se llama ecuación logarítmica. Análogamente para las ecuaciones exponenciales.
Ejemplo 3.7.11 Resolver la ecuación

$$\log(x-2) + \log(x+1) + 1 = \log 40$$

□

Solución 1. Primeros veremos la restricción, esta son,

$$x - 2 > 0 \wedge x + 1 > 0$$

Entonces $\mathcal{R} = [2, +\infty[$

Ahora despejemos la variable, teniendo presente las propiedades de logaritmo

$$\begin{array}{rcl} \log(x-2)+\log(x+1)+1 &=& \log 40 \\ \log(x-2)+\log(x+1)+\log 10 &=& \log 40 \\ \log(x-2)(x+1)10 &=& \log 40 \\ (x-2)(x+1)10 &=& 40 \\ (x-2)(x+1) &=& 4 \\ x^2-x-6 &=& 0 \\ (x+2)(x-3) &=& 0 \\ x=-2 &\vee& x=3 \end{array}$$

pero $x = -2$, por restricción no es admisible. Por lo tanto el conjunto solución es $\{3\}$.

Ejemplo 3.7.12 Resolver la ecuación

$$\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$$

$\square$

Solución 2. Veamos el conjunto restricción

$$4^{x-2} + 9 > 0 \wedge 2^{x-2} + 1 > 0$$

Entonces $\mathcal{R} = \mathbb{R}$.

Luego resolviendo la ecuación nos queda

$$\begin{array}{rcl} \log 2+\log(4^{x-2}+9) &=& 1+\log(2^{x-2}+1) \\ \log 2(4^{x-2}+9) &=& \log 10(2^{x-2}+1) \\ 2(4^{x-2}+9) &=& 10(2^{x-2}+1) \\ 2^{2x}-20\cdot 2^x+64 &=& 0 \end{array}$$

Consideremos la variable auxiliar $u = 2^x$, reemplazando obtenemos la ecuación cuadrática.

$$\begin{array}{rcl} u^2-20u+64 &=& 0 \\ (u-16)(u-4) &=& 0 \\ u=16 &\vee& u=4 \\ 2^x=16 &\vee& 2^x=4 \\ x=4 &\vee& x=2 \end{array}$$

Luego el conjunto solución de la ecuación es $\{2, 4\}$

3.7.3 Inecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Debemos tener presente que para resolver inecuaciones con logaritmo o exponenciales es importante recordar que cuando la base es menor que 1, exponencial y logaritmo son decreciente y en el caso que la base sea mayor que 1, se tiene que es creciente.

Ejemplo 3.7.13 Resolver la inecuación

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \le 2$$

$\square$

Solución 1. Primero veremos la Restricciones

$$x^2 - 1 > 0$$

$$(x+1)(x-1) > 0$$

Por lo tanto

$$x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[= \mathcal{R}$$

Veremos los elementos que la satisface

$$\begin{array}{rl} \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) & \leq 2 \;/\exp_{\frac{1}{2}} \downarrow \\ x^2 - 1 & \geq \frac{1}{4} \\ x^2 - \frac{5}{4} & \geq 0 \\ (x - \frac{\sqrt{5}}{2})(x + \frac{\sqrt{5}}{2}) & \geq 0 \end{array}$$

$$x \in \left]-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[= S_1$$

Luego la solución de la inecuación es:

$$S = \mathcal{R} \cap S_1$$

$$x \in \left]-\infty, \frac{-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

Ejemplo 3.7.14 Resuelva la siguiente inecuación

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2-4) > -2$$

$\square$

Solución 2. El conjunto restricción para la inecuación cumple con:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 4 > 0 & \wedge & \log_5(x^2-4) > 0 \\ x^2 > 4 & \wedge & x^2 - 4 > 1 \\ |x| > 2 & \wedge & |x| > \sqrt{5} \end{array}$$

Luego $x \in]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[= \mathcal{R}$.

Ahora resolvamos la inecuación,

$$\begin{array}{rcl} \log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2-4) & > & -2 \;/\exp_{\frac{1}{3}} \downarrow \\ \log_5(x^2-4) & < & (\frac{1}{3})^{-2} \;/\exp_5 \uparrow \\ x^2 - 4 & < & 5^9 \\ |x| & < & \sqrt{5^9+4} \\ -\sqrt{5^9+4} & < x < & \sqrt{5^9+4} \end{array}$$

Luego el conjunto solución es:

$$S =]-\sqrt{5^9+4}, \sqrt{5^9+4}[\cap\mathcal{R} =]-\sqrt{5^9+4}, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, \sqrt{5^9+4}[.$$

Ejemplo 3.7.15 Resolver la inecuación

$$\log_{3x}(9x) + \log_3(x^3) \leq 2$$

$\square$

Solución 3. El conjunto restricción de la inecuación es $\mathbb{R}^+ - \{\frac{1}{3}\}$

$$\begin{array}{rcl} \log_{3x}(9x) + \log_3(x^3) & \leq & 2 \\ \frac{\log_3(9x)}{\log_3(3x)} + \log_3(x^3) & \leq & 2 \\ \frac{\log_3 9+\log_3 x}{\log_3 3+\log_3 x} + 3\log_3(x) & \leq & 2 \end{array}$$

Sea $u = \log_3 x$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \frac{2+u}{1+u} + 3u & \leq & 2 \\ \frac{2u+3u^2}{1+u} & \leq & 0 \\ \frac{u(2+3u)}{1+u} & \leq & 0 \end{array}$$

Resumamos en una tabla

		-1		$-2/3$		0	
$1+u$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
u	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2+3u$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

Luego tenemos $u \leq -1 \ \vee -\frac{2}{3} \leq u \leq 0$, reemplazando

$$\begin{array}{c} \log_3 x \leq -1 \quad \vee \quad -\frac{2}{3} \leq \log_3 x \leq 0 \ / \exp_3 \uparrow \\ x \leq 3^{-1} \quad \vee \quad 3^{-\frac{2}{3}} \leq x \leq 1 \end{array}$$

Pero, por restricción tenemos que $x > 0$ y $x \neq \frac{1}{3}$ entonces

$$0 < x < \frac{1}{3} \quad \vee \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \leq x \leq 1$$

El conjunto solución es

$$S = \left]0, \frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}, 1\right]$$

3.7.4 Ejercicios Propuestos

1 Exprese como un solo logaritmo.

a $\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\log\frac{1}{2} - \log 15$

b $1 + \log_3 a + \frac{1}{2}\log_3 a^3 - 4\log_3 a^6$

c $2\log y - \frac{1}{4}\log(c-x) + \frac{1}{2}\log(x-2y+c)$

2 Resolver las siguientes ecuaciones.

a $7^{2x} - 7^{x+1} - 8 = 0$

b $2^{2x+1} + 2^{x+3} = 10$

c $5^{2x+2} + 1 = (10 + 5^x)5^x$

d $\dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \frac{1}{3}$

e $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \left(\dfrac{27}{8}\right)^{(x-1)} = \dfrac{\log 4}{\log 8}$

f $\log x^5 + \log^2 x + 6 = 0$

g $(\log_2 x)(\log_2 x + 1) = 2$

h $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$

i $3\log_5 x - \log_5 32 = 2\log_{25}(\frac{x}{2})$

j $\log_5(5^x - 7) - \log_{25} 324 = 2 - x$

k $\log\sqrt{7-x}) = \log\sqrt{\log(100) + 10} - \log\sqrt{x+1}$

l $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4(|x| - 1) = 2$

m $\log_{1/3}(x) + \log_9(x) = 1$

n $\log_x(5x^2)(\log_5 x)^2 = 1$

3 Resolver las siguientes ecuaciones.

a $a^{x^2}a^x = a^{3x+1}$ con $a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$

b $a^{x^2+2x} = a^{6x-3}$ con $a \in]1, \infty[$

c $b^{5x-6} = b^{x^2}$ con $b \in]0, 1[$

d $\dfrac{\log_2 x}{(\log_2 a)^2} - \dfrac{2\log_a x}{\log_{1/2} a} = (\log_{\sqrt[3]{a}} x)(\log_a x)$ con $a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+$

e $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + (\log_{2x} 2)(\log_{1/2} 2x) = 0$

4 Resolver las siguientes inecuaciones.

a $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \leq 2$

b $\log_3(x^2 - 3x - 4) < 1$

c $\log_{\frac{x}{3}}(x(4 - x)) \leq 1$

d $\log_4 x + \log_4(x + 1) < \log_4(2x + 6)$

e $\log_{1/2} x + \log_{1/2}(2x) > 1$

f $\dfrac{\log_2(x - \frac{1}{2})}{\log_2 x} < 2$

g $\log_9(\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1))<0$

h $7^{2x}-7^{x+1}-8\leq 0$

i $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(x+1))>1$

j $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4(|x|-1)<2$

k $\log_x(3x-5)<2$

l $\log_x(3x+5)\leq 2$

m $\log_{x+3}(x^2-x)<2$

5 Hallar la función inversa de

$$y=\log_b x-\log_b(1+x),\quad b>0$$

6 Demostrar que

$$\log_b(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})=-\log_b(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})$$

7 Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl}\log_{12}x\left(\dfrac{1}{\log_x 2}+\log_2 y\right) & = & \log_2 x\\ \log_2 x\log_3(x+y) & = & 3\log_3 x\end{array}\right|$$