Matemáticas General

Daniel Jiménez Briones
Universidad de Valparaíso

2019 versión 3.0

La primera versión del presente apunte, corresponde a una recopilación de la docencia realizada en la Universidad de Valparaíso, que fue adaptada a la necesidades de la carrera de matemáticas a partir del año 2001, Y la primera edición fue compartida en el año 2008.

Índice

Capítulo 1

Lógica y Conjunto

La lógica aparece como una necesidad de poder comunicarnos sin las ambigüedades cotidianas de la sociedad, ejemplo de ello lo encontramos en frases de uso común "nos vemos mañana" o tal vez "Que bueno que usted va dictar la asignatura", de otro modo "Me encanta trabajar en este lugar" es decir, no es fácil decidir si dichas afirmaciones son o no validas o ciertas, o simplemente un formalismos de cortesía.

Otro tipo de ambigüedad, aparecen cuando no tenemos claro el tiempo en el cual fue realizada la afirmación para decidir la veracidad, ejemplo de estas afirmaciones las son

i Hay un alumno en esta sala que vive en Quillota.

ii Algunos alumnos de esta sala viven en Quillota.

Donde la respuesta varía a través del tiempo.

Hay otras afirmaciones que con nuestras capacidades no podemos decidir si son verdaderas o falsas hoy, como por ejemplo:

i Voy a terminar esta carrera.

ii La teoría de la evolución es válida

Una ambigüedad más es la referida al universo donde fue realizada la afirmación, por ello es relevante tener claro el universo antes de responder si la afirmaciones es verdadera o falsa

Consideremos el universo de trabajo, el conjunto de los números enteros

a Todo número al cuadrado es un número no negativo

b Hay un número par.

c La división de dos número es un nuevo número.

Las mismas frases, ahora en el conjunto de los números reales:

En el caso de la afirmación (a), no hay dificultad de responder.

Para (b) la noción de número par no tiene sentido en los reales, ya que

i $4 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1$, y ii $3 = 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 2 \cdot 1 + 1$.

En $\mathbb{Q}$ no existen las nociones de números pares ni primos. Pero en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$, existen el concepto de número primo, que son aquellos que son divisibles sólo por si mismo, y el de número par, que son los múltiplos de dos, por ello aceptamos que el cero es un número par.

1.1 Lógica

Ahora iniciaremos las nociones básicas de lógica, enfatizando en las proposiciones, los conectivos, conjunto universo o relativo y los cuantificadores, de modo de eliminar las ambigüedades dichas anteriormente.

Definición 1.1.1 Una **Proposición** es una afirmación que en un contexto explícito, se puede decidir, si ella es verdaderas o falsas. $\diamondsuit$

Notación Las proposiciones se denotan por: p, q, r, s

Ejemplo 1.1.2

1. p : Hay un alumno que vive en Quillota en la asignatura de matemática que dicto hoy.
2. q : 0 es un número Real.
3. $r : 3 \in \mathbb{R}$

$\square$

El valor de verdad de una proposición es Verdadero o Falso y usamos las siguientes notaciones:

$p \equiv V$, para decir, que el valor de verdad de la proposición p es Verdadero.

$p \equiv F$, para decir, que el valor de verdad de la proposición p es Falso

1.1.1 Conectivos

Un conectivo es un símbolo que se utilizan para formar a partir de dos proposiciones una nueva proposición, llamada proposición compuesta y el valor de verdad de ella depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman y el conectivo usado.

Los siguiente símbolos son algunos conectivos habituales:

$$\vee, \quad \wedge, \quad \Rightarrow, \quad \Leftrightarrow, \quad \underline{\vee}.$$

1. La **disyunción**, cuyo símbolo es: $\vee$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción de dos proposiciones es verdadera solamente cuando al menos una de las proposiciones que la forman es verdadera. La proposición $p \vee q$ se lee "p o q"

2. La **conjunción**, cuyo símbolo es: $\wedge$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción de dos proposiciones es verdadera solamente cuando ambas proposiciones que la forman son verdadera. La proposición $p \wedge q$ se lee "p y q"

3. La **implicación**, cuyo símbolo es: $\Rightarrow$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición $p \Rightarrow q$ se lee "p implica q" o "si p entonces q" y es falsa solamente cuando la primera proposición (antecedente) es verdadera y la segunda proposición (consecuente) es falsa.

4. La **equivalencia**, cuyo símbolo es: $\Leftrightarrow$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La proposición $p \Leftrightarrow q$ se lee "p es equivalente a q" o "p si y sólo si q" y es verdadera solamente cuando ambas proposiciones que la forman tienen el mismo valor de verdad.

5. La **disyunción exclusiva**, cuyo símbolo es $\underline{\vee}$

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La proposición $p \underline{\vee} q$ se lee "p o exclusivo q" y es falsa cuando ambas proposiciones que la forman tiene el mismo valor de verdad.

Observación: Una tabla de verdad, es un arreglo donde se colocan todos la posibles combinaciones de valores de verdad. En general cuando hay n proposiciones distintas, la tabla contiene 2^n combinaciones posibles de valores de verdad.

Ejemplo 1.1.3 Hacer una tabla de verdad para la proposición

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$$

$\square$

Solución 1.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Ejemplo 1.1.4 Hacer una tabla de valores para la proposición

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

$\square$

Solución 2.

p	q	$p \Rightarrow q$	r	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Observación: La proposición "$p \Rightarrow q$", en la literatura científica o matemáticas es frecuente encontrar otras manera en que se leen estos símbolos.

q si p
q siempre que p
p es condición suficiente de q
q es condición necesaria de p

En una frase concreta, como por ejemplo "si arrojo una piedra al agua entonces hay círculos concéntricos en el agua" se puede transcribir de la siguiente manera "hay círculos concéntricos en el agua si arrojo una piedra al agua" o "hay círculos concéntricos en el agua siempre que arrojo una piedra al agua".

Negación:[$\sim$;].

Sea p es una proposición, la negación de p se denota por: $\sim p$ o bien $\overline{p}$ y se lee "no p", y su valor de verdad es el contrario de la proposición original:

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

Es importante destacar que $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$.

Ejemplo 1.1.5 Determinar el valor de verdad de la proposición $(1 = 2) \Rightarrow (3 + 1 = 2)$. □

Solución 3. La proposición $(1 = 2)$ es falsa y la proposición $(3 + 1 = 2)$ también es falsa luego la proposición compuesta es verdadera. El anterior razonamiento lo podemos resumir usando algunos símbolos del siguiente modo.

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{1=2} & \Rightarrow & \underbrace{3+1=2} & & \\ \equiv & & \equiv & & \\ (F & \Rightarrow & F) & \equiv V \end{array}$$

Ejemplo 1.1.6 Realizar la tabla de verdad para la siguiente proposición :

$$((p \vee q) \wedge \bar{p}) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

□

Solución 4.

p	q	$p \vee q$	$\bar{p}$	$(p \vee q) \wedge \bar{p}$	$q \Rightarrow p$	$((p \vee q) \wedge \bar{p}) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V

Recuerde: Si son p, q, r tres proposiciones entonces

a) pq no es una proposición

b) $p \cdot q$ no es una proposición

c) $p \wedge \vee q$ no es una proposición

d) $p \wedge qr$ no es una proposición

Una **proposición compuesta** se construye usando una proposición un conectivo y otra proposición.

Observación: La siguiente expresión algebraica $2 + 3 \cdot 5 = 17$ no es ambigua, ya que el producto se realiza primero y después la adición y si deseamos el otro valor lo denotamos por $(2 + 3) \cdot 5 = 25$, los paréntesis siempre entregan un orden a desarrollar. Así también para la proposición $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, para determinar el valor de verdad de ella, primero determinamos el valor de verdad de $(p \Rightarrow q)$ y luego consideramos el conectivo $\Rightarrow$ con la proposición r.

Ejemplo 1.1.7 Considere las proposiciones p, q, r, analizaremos que sucede con la proposición compuesta: $(p \wedge q) \Rightarrow r$ y la proposición; $p \wedge (q \Rightarrow r)$. □

Solución 5. Veamos primero:

p	q	$p \wedge q$	r	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V
F	F	F	F	V

Ahora:

p	q	r	$q \Rightarrow$	$p \wedge (q \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	V	F	F	F
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

Como podemos observar las tablas de verdad de las proposiciones $(p \wedge q) \Rightarrow r$ y $p \wedge (q \Rightarrow r)$ no son iguales, es decir, no son equivalentes las proposiciones

Es importante notar entonces que los paréntesis y no los podemos omitir.

Definición 1.1.8 Sea p una proposición compuesta:

a) Se dice que p es una **Tautología** si y sólo si es verdadera siempre (independiente de los valores de verdad de las proposiciones que la forman).

b) Se dice que p es una **Contradicción** si y sólo si p es siempre falsa.

c) Se dice que p es una **Contingencia** si y sólo si p no es tautología ni tampoco es contradicción.

$\Diamond$

Ejemplo 1.1.9 Consideremos la siguiente proposición compuesta:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow p$$

Determine su tabla de verdad. $\square$

Solución 6. Esta esta dada por:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

con lo cual la proposición $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow p$ es una tautología.

Ejercicios

Calcular la tabla de verdad para las proposiciones:$(p \vee q) \vee r$ y $p \vee (q \vee r)$.

1.1.2 Tautologías Básicas

1 **Asociatividad:** Se cumple que:

i $p \vee q \vee r \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$.

ii $p \wedge q \wedge r \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$.

2 **Conmutatividad:** Se tiene lo siguiente:

i $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$.

ii $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$.

3 **Negación:**

i $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$

ii $(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$.

iii $(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$.

4 **Transformaciones o Traducciones:**

i $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$,además:

ii $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

5 **Absorción:**

i $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$.

ii $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$.

6 **Leyes de idempotencia:**

i $(p \vee p) \Rightarrow p$.

ii $(p \wedge p) \Rightarrow p$.

7 **Leyes complementarias:**

i $(p \vee V) \Leftrightarrow V$

ii $(p \wedge V) \Leftrightarrow p$

iii $(p \vee F) \Leftrightarrow p$

iv $(p \wedge F) \Leftrightarrow F$

v $(p \vee \overline{p}) \Leftrightarrow V$

vi $(p \wedge \overline{p}) \Leftrightarrow F$

8 **Distributividad:**

i $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

ii $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

Observación Usando las tautología anteriores podemos escribir de modo distinto la negación y la proposición, para ello consideremos lo siguiente proposición con $x \in \mathbb{Z}$ fijo:

i s : Si x^2 es par entonces x es par, luego s es una proposición compuesta y esta formada por:

$p : x^2$es par y $q : x$ es par, así, es decir,

$$s \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

ii Veamos ahora como se puede reescribir la negación de la proposición $s : (p \Rightarrow q)$, para ello tenemos las siguientes equivalencia

$$(\overline{p \Rightarrow q}) \Leftrightarrow (\overline{\overline{p} \vee q}) \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}),$$

Luego tenemos que $\overline{s}$, se lee

a) x^2 es par $\wedge$ x no es par.

b) x^2 es par $\wedge$ x impar.

Cuando se desea demostrar la proposición s, y se demuestra que la negación es falsa, este proceso es llamado demostración por el **absurdo.**

iii Ahora veremos otras formas como leer la proposición s, para ello notemos las siguientes proposiciones equivalente:

$$s \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

a Si x^2 es par entonces x es par.

b x^2 es par implica que x es par.

c Si x no es par entonces x^2 no es par.

d Si x es impar entonces x^2 es impar.

Ejercicios

Simplifique las siguientes expresiones:

a $[p \wedge (\overline{p} \vee (q \Rightarrow r))] \vee (r \vee p)$

b $[p \Rightarrow (\overline{q} \vee r)] \wedge \sim [q \vee (p \Rightarrow \overline{r})]$

Observación: El conectivo $\underline{\vee}$ se puede escribir empleando los tres "conectivos" primarios $\vee, \wedge$ y $\sim$.

Ejercicios

Sean p, q proposiciones. Se define la proposición compuesta:

$$(p \downarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

Comprobar

a $\overline{p} \equiv p \downarrow p$.

b $p \wedge q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

c $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))$.

Ejercicios

Simplificar las siguientes proposiciones

i. $[\overline{p} \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$

ii. $[(\overline{p \wedge q}) \wedge r] \vee [p \wedge (\overline{q \wedge r})]$

Ejercicios

Encuentre el valor de verdad de p, q y r en:

$$(p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \overline{r})$$

si esta es falsa.

Ejercicios

Encuentre el valor de verdad de la siguiente proposición y encuentre una proposición más simple equivalente a esta:

$$[p \wedge (\overline{p} \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge q] \Rightarrow r.$$

1.1.3 Cuantificadores

Sea U una agrupación de objetos llamado universo. Una **Función Proposicional** en U es una expresión o frase que contiene una o más variables que al ser reemplazadas por elementos de U se transforma en una proposición.
Ejemplo 1.1.10 Sea $U = \{$ los alumnos de este curso $\}$ y la función proposicional$p(x)$: x vive en Valparaíso.Al reemplazamos algunos nombres de sus compañeros, obtenemos proposiciones, como por ejemplo

i p(María José): María José vive en Valparaíso.

ii p(Eliana): Eliana vive en Valparaíso.

Que para algunas personas es verdadera y para otras es falsa la proposición □

Ejemplo 1.1.11 Sea $U = \mathbb{Z}$, $q(x) : x$ es un número primo.
Reemplazado algunos números enteros, obtenemos las siguientes proposiciones cuyo valor de verdad lo podemos determinar, para ello veamos algunos casos.

i $q(3)$: 3 es un número primo; $q(3) \equiv V$.

ii $q(4)$: 4 es un número primo; $q(4) \equiv F$.

□

Los cuantificadores son símbolo, ($\forall, \exists, \exists!$), que convierten o traducen una función proposicional en una proposición del siguiente modo.

Definición 1.1.12 Sea $p(x)$ una función proposicional en la variable x en U.

1 **Cuantificador Universal**

$(\forall x \in U)(p(x))$, se lee : "para todo x en U, $p(x)$ " es una proposición y es verdadera cuando reemplazamos **todos** los elementos de U en $p(x)$ y siempre es verdadera la proposición obtenida, en caso contrario es falsa.

2 **Cuantificador Existencial**

$(\exists x \in U)(p(x))$, se lee : "existe x en U, $p(x)$ ", es una proposición y es verdadera cuando encontramos **un elemento** en U tal que al reemplazarlo obtenemos que la proposición es verdadera y es falsa cuando reemplazamos todos los elementos de U y siempre la proposición es falsa.

3 **Cuantificador Existencial con Unicidad**

$(\exists! x \in U)(p(x))$, se lee : " existe un único x en U, $p(x)$ ", es una proposición y es verdadera cuando encontramos **sólo un** elemento que al reemplazarlo es verdadera y en todos los otros elementos la proposición es falso.

◊

Observación: Debemos tener presente que en algunos caso es posible reemplazar todos los elementos del universo, pero en general no, por lo cual debemos hacer uso de propiedades que nos permitan argumentar a favor o en contra de la afirmación.

También es importante enfatizar en la lectura de las proposiciones, para ello veamos los siguientes ejemplos

i La proposición $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > 0)$, se lee "para todo x en los números reales, se tiene que x^2 es positivo", proposición falsa, ya que para $x = 0$ no se cumple

ii La proposición $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 > 1)$, se lee "existe x un números reales, tal que x^2 es mayor que 1", proposición verdadera, ya que para $x = 0$ se cumple

Ejemplo 1.1.13 Consideremos al conjunto universo como $U = \{$alumnos de esta clase$\}$, y la función proposicional es $q(x) : x$ vive en Valparaíso (María José, Eduardo vive en Valparaíso y Eliana vive en Quillota). Luego

i $(\forall x \in U)(q(x)) \equiv F$, pues basta tomar a $x =$ Eliana.

ii $(\exists x \in U)(q(x)) \equiv V$, pues basta tomar a $x =$ Eduardo.

iii $(\exists! x \in U)(q(x)) \equiv F$, pues aparte de María José, existe Eduardo.

$\square$

Observación: En conjunto universo $U = \{$los alumnos de esta clase$\}$, podemos construir las siguientes funciones proposiciones:

$$q(x) : (\forall y \in U)(x \text{ pololea con } y),$$

$$p(x) : (\exists! y \in U)(x \text{ pololea con } y).$$

Lo anterior es debido a que, por ejemplo:

$$q(Eliana) : (\forall y \in U)(\text{ Eliana pololea con } y)$$

es una proposición, ya que definimos

$$r(y) = \text{ Eliana pololea con } y,$$

es una función proposicional, y con ello,

$$(\forall y \in U)(r(y)),$$

es una proposición.

Luego: $q(Eliana) : ((\forall y \in U)(\text{Eliana pololea con } y)) \equiv F$, pues $y =$ María José

Además: $p(Eliana) : ((\exists! y \in U)(\text{Eliana pololea con } y)) \equiv F$, pues no existe el pololo de Eliana en la clases. (declaración personal).

En General tenemos que a partir de una función proposicional de dos variables $p(x, y)$, podemos fabricar funciones proposicionales de una variable, de la siguiente manera.

$$\begin{array}{ll} l(x) : (\forall y \in U)(p(x, y)) & \text{(en una variable, en x)} \\ r(x) : (\exists y \in U)(p(x, y)) & \text{(en una variable, en x)} \\ s(y) : (\forall x \in U)(p(x, y)) & \text{(en una variable, en y)} \\ t(y) : (\exists x \in U)(p(x, y)) & \text{(en una variable, en y)} \end{array}$$

Con ellas podemos fabricamos las siguientes proposiciones:

i $(\forall x \in U)((\forall y \in U)(p(x, y)),$

ii $(\exists x \in U)((\forall y \in U)(p(x, y)),$

iii $(\exists y \in U)((\exists x \in U)(p(x, y)),$

iv $(\forall y \in U)((\forall y \in U)(p(x, y)).$

Observación: El valor de verdad depende del orden de los cuantificadores.

i $(\exists x \in U)(\forall y \in U)(x \text{ es hijo de } y),$

ii $(\forall y \in U)(\exists x \in U)(x \text{ es hijo de } y).$

La proposiciones anteriores no tienen el mismo sentido. En (1) afirma que, existe una persona que es hijo de todas las personas, y en (2) afirma que, todas las personas tiene un hijo.

Veamos el valor de verdad de las siguientes proposiciones

i $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

ii $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x + y = 0)$.

La proposiciones anteriores no tienen el mismo valor de verdad. La proposición (i) es falso, ya dado $x = a, y = 1 - a$, luego $a + 1 - a = 1 \neq 0$. La proposición (ii) es verdadera, ya que $y = a, x = -a$ tenemos $-a + a = 0$.

Ejemplo 1.1.14 Sean $A = \{-1, 0, 1\}$ y $B = \{1/2, 1/3\}$. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1 $[\forall x \in A][(\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$

2 $[\forall x \in A][(\exists y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$

3 $[\exists x \in A][(\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$

4 $[\forall y \in B)][(\exists x \in A)(x^2 + y^2 > 1)]$

$\square$

Solución. (1) La proposición $[\forall x \in A][(\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$, se puede transformar en

$$(\forall x \in A)(q(x))$$

donde

$$q(x) : (\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)$$

$x = -1$, entonces

$$\begin{aligned} q(-1) : (\forall y \in B)(1 + y^2 > 1) \\ q(-1) : (\forall y \in B)(y^2 > 0) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{array}{rr} & (\forall y \in B)(y^2 > 0) \\ y = \frac{1}{2} & \frac{1}{4} > 0 \equiv \quad V \\ y = \frac{1}{3} & \frac{1}{9} > 0 \equiv \quad V \end{array}$$

por lo tanto $q(-1) \equiv \quad V$

Si $x = 0$, entonces

$$\begin{aligned} q(0) : (\forall y \in B)(0 + y^2 > 1) \\ q(0) : (\forall y \in B)(y^2 > 1) \end{aligned}$$

luego

$$y = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} > 1 \equiv \quad F$$

Luego es falsa la proposición $q(0)$, por lo tanto

$$[\forall x \in A][(\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)] \text{ es falsa.}$$

(2) La proposición

$$[\forall x \in A][(\exists y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$$

se puede transformar en

$$(\forall x \in A)(r(x)),$$

con

$$r(x) : (\exists y \in B)(x^2 + y^2 > 1)$$

$x = -1$, entonces $r(-1) : (\exists y \in B)(1 + y^2 > 1)$, es decir,

$$r(-1) : (\exists y \in B)(y^2 > 0)$$

Evaluando

$$y = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} > 0 \equiv V$$

luego $r(-1)$ es V

Ahora en $x = 0$, entonces

$$\begin{array}{ll} r(0) : & (\exists y \in B)(0 + y^2 > 1) \\ & (\exists y \in B)(y^2 > 1) \\ y = \frac{1}{2} & \quad \frac{1}{4} > 1 \equiv F \\ y = \frac{1}{3} & \quad \frac{1}{9} > 1 \equiv F \end{array}$$

luego $r(0)$ es falsa, por tanto

$$[\forall x \in A][(\exists y \in B)(x^2 + y^2 > 1)] \text{ es falsa.}$$

(3) La proposición $[\exists x \in A][(\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$ la transformamos en

$$(\exists x \in A)(s(x)),$$

donde $s(x) : (\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)]$.

Si analizamos para $x = -1$, tenemos que:

$$\begin{array}{ll} s(-1) : & (\forall y \in B)(1 + y^2 > 1) \\ & \quad (\forall y \in B)(y^2 > 0) \\ y = \frac{1}{2} & \quad \frac{1}{4} > 0 \equiv \quad V \\ y = \frac{1}{3} & \quad \frac{1}{9} > 0 \equiv \quad V. \end{array}$$

Luego $s(-1)$ es verdadera, y así

$$[\exists x \in A][(\forall y \in B)(x^2 + y^2 > 1)] \text{ es verdadera.}$$

(4) La proposición $[\forall y \in B)][(\exists x \in A)(x^2 + y^2 > 1)]$ la transformamos en

$$(\forall y \in B)(s(y)),$$

donde $s(y)) : (\exists x \in A)(x^2 + y^2 > 1)$

$y = 1/2$, entonces

$$\begin{array}{ll} s(\frac{1}{2}) : & (\exists x \in A)(x^2 + \frac{1}{4} > 1) \\ & (\exists x \in A)(x^2 > \frac{3}{4}) \\ x = -1 \quad , & 1 > \frac{3}{4} \equiv V. \end{array}$$

Luego $s(1/2)$ es verdadera, pues se encontró x

$y = 1/3$, entonces

$$\begin{array}{ll} s(\frac{1}{3}) & (\exists x \in A)(x^2 + \frac{1}{9} > 1) \\ & (\exists x \in A)(x^2 > \frac{8}{9}) \\ x = 1 & 1 > \frac{8}{9} \equiv V. \end{array}$$

Luego $s(1/3)$ es verdadera, pues se encontró x.

Por lo tanto

$$[\forall y \in B)][(\exists x \in A)(x^2 + y^2 > 1)] \text{ es verdadera.}$$

1.1.4 Negación

La negación de proposiciones que contienen cuantificadores podemos señalar lo siguiente:

1. $\overline{(\forall x \in A)(p(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\overline{p(x)})$.
2. $\overline{(\exists x \in A)(p(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\overline{p(x)})$.
3. $\overline{(\forall x \in A)(\forall y \in B)(p(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in B)(\overline{p(x)})$.
4. $\overline{(\forall x \in A)(\exists y \in B)(p(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\forall y \in B)(\overline{p(x)})$.

Ejemplo 1.1.15 Traducir las siguientes proposiciones

1. $\overline{(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 + x > 0)}$, luego

$$\begin{aligned} \overline{(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 + x > 0)} & \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})\overline{(x^2 + x > 0)} \\ & \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})(x^2 + x \leq 0). \end{aligned}$$

2. $\overline{(\forall x \in A)(x^2 + 3x \neq 0)}$, donde

$$\overline{(\forall x \in A)(x^2 + 3x \neq 0)} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(x^2 + 3x = 0).$$

3. $\overline{(\forall x \in A)(x^2 > 1 \Rightarrow x = 2)}$, luego

$$\overline{(\forall x \in A)(x^2 > 1 \Rightarrow x = 2)} \Leftrightarrow (\exists x \in A)(x^2 > 1 \wedge x \neq 2).$$

$\square$

1.2 Conjunto

Sea U una agrupación de objetos y $p(x)$ una función proposicional en U, se define:

$$A = \{x \in U \mid p(x)\}.$$

A es un conjunto y esta formado por todos los elementos de U que al ser reemplazados en la función proposicional $p(x)$ el valor de verdad de la proposición es verdadero.

De otro modo se tiene que

$$a \in A \Leftrightarrow p(a) \equiv V$$

Ejemplo 1.2.1 Determinar por extensión los siguientes conjuntos

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)(x-2) = 0\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x+1)(x-3) = 0\}$

$\square$

Solución. 1) Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)(x-2) = 0\}$, luego

$$(x+1)(x-2) = 0,$$

de este producto y haciendo uso de las propiedades de $\mathbb{Z}$ tenemos:

$$\begin{array}{l} x+1 = 0 \quad \vee \quad x-2 = 0 \\ x = -1 \quad \vee \quad x = 2. \end{array}$$

Resumiendo

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)(x-2) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid (x=-1) \vee (x=2)\} \\ &= \{-1, 2\}, \end{aligned}$$

donde la solución es $A = \{-1, 2\}$.

2) Sea $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x+1)(x-3) = 0\}$, pero

$$\begin{array}{l} (2x+1)(x-3) = 0 \\ 2x+1 = 0 \quad \vee \quad x-3 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 3. \end{array}$$

notemos que hemos resuelto la ecuación en $\mathbb{R}$, pero como el universo es $\mathbb{Z}$, entonces la solución es $B = \{3\}$.

1.2.1 Nociones Básica de Conjunto

En adelante consideremos lo siguiente conjuntos

$$\begin{array}{l} A = \{x \in U \mid p(x)\} \\ B = \{x \in U \mid q(x)\}. \end{array}$$

Igualdad

$$A = B \text{ si y sólo si } (\forall x \in U)(p(x) \Leftrightarrow q(x)).$$

Subconjunto

$$A \subseteq B \text{ si y sólo si } (\forall x \in U)(p(x) \Longrightarrow q(x)).$$

Unión

$$A \cup B = \{x \in U \mid p(x) \vee q(x)\}.$$

Donde la unión de dos conjuntos esta formada por los elementos que están en A o en B

Intersección

$$A \cap B = \{x \in U \mid p(x) \wedge q(x)\}.$$

Donde la intersección de dos conjuntos esta formada por los elementos que están tanto en A como en B.

Diferencia

$$A - B = \{x \in U \mid p(x) \wedge \overline{q(x)}\}.$$

Es decir la diferencia de A con B son los elementos que están en A pero que no están en B.

Diferencia Simétrica

$$A \triangle B = \{x \in U \mid p(x) \veebar q(x)\}.$$

La que podemos traducir como: Los elementos que están en A pero no en B, y además no están en A pero están en B.

Conjunto Potencia

El conjunto potencia de A esta dado por

$$\mathcal{P}(A) = \{B \subseteq U \mid B \subseteq A\},$$

el conjunto potencia de A esta formado por todos los subconjuntos de A.

Ejemplo 1.2.2 Sea $A = \{1, 2\}$, luego el conjunto $\mathcal{P}(A)$ es:

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

□

Complemento

El complemento de A es el conjunto

$$\overline{A} = \{x \in U \mid \overline{p(x)}\}$$

Notación A complemento se denota como:

$$\overline{A} = A^c = A'.$$

Ejemplo 1.2.3 Sea $A = \{1, 2, 3\}$, luego A^c esta dado por:

$$A^c = U - A.$$

□

Cardinal de un conjunto

Sea A un conjunto, el cardinal de A es el número de objetos que contiene. Si la cantidad objetos es un número natural decimos que el conjunto es finito, en caso contrario decimos que el conjunto es infinito.

En general se usan los siguientes símbolos para denotar el cardinal de un conjunto para referirnos al cardinal del conjunto A

$$\#(A), \quad |A|.$$

Ejemplo 1.2.4 Algunos ejemplo de cardinalidad

1 $\#(\phi) = 0$.

2 $\#(\{\{\phi\}\}) = 1$.

3 $\#(\{\{3\}\}) = 1$.

4 $\#(\{\{1,2\}\}) = 1$.

5 $\#(\{\{1\},\{2\}\}) = 2$

$\square$

Ejemplo 1.2.5 Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{Z})(x + 2y = 0)\}$, Determinar A^c $\square$

Solución. Sea x pertenece a $\mathbb{N}$ entonces x puede ser un número par o impar, analicemos los dos casos:

1^{er} caso: x es impar, luego

$$x = 2n + 1,$$

donde

$$p(2n+1) : (\exists y \in \mathbb{Z})(2n + 1 + 2y = 0),$$

y dado que $y \in \mathbb{Z}$, obtenemos que

$$2n + 2y = -1 \quad \equiv \quad F.$$

2^{do} caso: x es par, luego $x = 2n$, donde

$$p(2n) : (\exists y \in \mathbb{Z})(2n + 2y = 0),$$

de donde obtenemos que $y = -n$ y esto equivale a ser verdadero.

Luego $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}\}$, y por lo tanto

$$A^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es impar }\}.$$

Producto Cartesiano

Sean A, B conjuntos, se define el producto cartesiano

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Los elementos de este conjunto se llama pares ordenados, si (x, y) es un par ordenado x es la primera coordenada o abscisa e y es la segunda coordenada u ordenada.

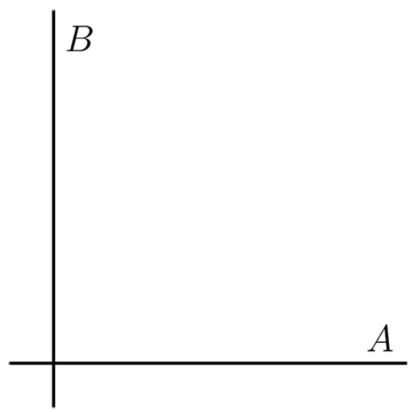
Igualdad

Dos elementos $(a, b), (c, d) \in A \times B$ son iguales si su abscisa y ordenada son iguales, es decir,

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \quad \wedge \quad b = d$$

Representación Gráfica.

En el eje horizontal se marca los elementos del conjunto A y en el eje vertical los elementos del conjunto B



La acción de graficar un subconjunto de $A \times B$ es: marcar los elementos que están en el subconjunto.

Observación: En el cálculo aritmético y/o en el álgebra los paréntesis en general, después de hacer el desarrollo se van omitiendo, en teoría de conjunto tenemos algunos paréntesis que no podemos omitir o cambiar por otros, por ejemplo tenga presente que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ igualdad de conjunto, pero $(1, 2) \neq (2, 1)$, como pares ordenados.

1.2.2 Propiedades de Conjuntos

1. Asociatividad

$$a)\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad b)\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

2. Conmutatividad

$$a)\quad A \cup B = B \cup A \qquad b)\quad A \cap B = B \cap A.$$

3. Distributividad

$$a)\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad b)\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. Leyes de Absorción

$$a) \quad A \cup (A \cap B) = A \qquad b) \quad A \cap (A \cup B) = A$$

5. Leyes de Morgan

$$a) \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad b) \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

6. Identidad

$$\begin{array}{llll} a) & A \cup \phi = A & b) & A \cap U = A \\ c) & A \cup U = U & d) & A \cap \phi = \phi. \end{array}$$

7. Complemento

$$\begin{array}{llll} a) & A \cup A^c = U & b) & A \cap A^c = \phi. \\ c) & (A^c)^c = A & d) & U^c = \phi, \quad \phi^c = U. \end{array}$$

8. Idempotencia

$$a) \quad A \cup A = A \qquad b) \quad A \cap A = A.$$

9. Cardinalidad

   Sean A y B dos conjuntos finitos, en donde $\#(A) = n$ y $\#(B) = m$, entonces:

   1. $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.
   2. $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.
   3. $\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$.

10. Producto Cartesiano

    1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
    2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Ejemplo 1.2.6 Simplifique las siguientes expresiones

1. $A \cup (A - B)$.
2. $((B \cup A^c)^c \cup A) \cap C$.

$\square$

Solución. 1.

$$\begin{aligned} A \cup (A - B) &= A \cup (A \cap B^c) \quad \text{(por leyes de absorción)} \\ &= A. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} ((B \cup A^c)^c \cup A) \cap C &= ((B^c \cap A) \cup A) \cap C \quad \text{(esto por las leyes de morgan)} \\ &= A \cap C \quad \text{(por leyes de absorción).} \end{aligned}$$

1.3 Guía Ejercicios

Lógica

1. Construir una tabla de verdad para las siguientes proposiciones.

   i. $[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)] \Rightarrow [p \Leftrightarrow q]$
   ii. $\overline{(p \Rightarrow (p \vee q))} \Rightarrow (p \wedge \bar{q})$
   iii. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \bar{r})] \vee (p \Rightarrow r)$

2. Determinar para que valores de verdad de p, q la proposición $[(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$ es falsa

3. Sabiendo que el valor de verdad de q es falso, determinar el valor de verdad de p (en cada caso) para que cada una de las siguientes proposiciones sea falsa.

   i. $p \Rightarrow (q \wedge p)$
   ii. $(p \vee \bar{q}) \Rightarrow (p \wedge q)$
   iii. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \bar{q})$
   iv. $p \Rightarrow (q \wedge \bar{p})$
   v. $[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q$

4. Sean p, q proposiciones tales que el valor de verdad de la proposición $(p \Rightarrow q)$ es Falso.

   Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

   i. $[(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$
   ii. $[p \wedge \bar{q}] \vee [p \Rightarrow (q \wedge p)]$
   iii. $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge p)]$
   iv. $[(\bar{p} \vee q) \wedge p] \Rightarrow [\bar{p} \wedge \overline{(q \vee p)}]$

5. Sean p, q, r proposiciones tales que el valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow r$ es Falsa.

   Determinar el valor de verdad de

   $$[(p \vee r) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow [r \wedge (p \vee q)]$$

6. Sean p, q, r proposiciones tales que el valor de verdad de la proposición $p \Rightarrow (q \vee r)$ es Falsa.

   Determinar el valor de verdad de

   $$[(q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \Rightarrow q)] \vee \bar{s}]$$

7. Sean p, q, r proposiciones tales que el valor de verdad de la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow p) \wedge (r \vee \bar{q})$ es Verdadera.

   Determinar el valor de verdad de

   $$(r \Leftrightarrow q)$$

8. Sabiendo que la proposición $(p \wedge s) \Rightarrow (q \wedge \bar{s})$ es Falso, entonces el valor de verdad de las siguientes proposiciones es:

   i. $((p \wedge q) \Rightarrow s)$
   ii. $(q \wedge r) \vee s$
   iii. $(\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow \bar{s}$
   iv. $\bar{p} \Rightarrow (q \Rightarrow \bar{s})$

9. Sabiendo que la proposición $(q \wedge r) \Rightarrow (p \vee s)$ es Falsa, entonces el valor de verdad de las siguientes proposiciones es

   i. $(((p \vee q) \wedge s) \Rightarrow \overline{r})$
   ii. $((p \vee q) \wedge (s \Rightarrow \overline{r}))$
   iii. $(p \vee (q \wedge (s \Rightarrow \overline{r})))$

10. Sabiendo que la proposición $(p \vee r) \wedge (q \wedge r)$ es Verdadera, entonces el valor de verdad de las siguientes proposiciones es:

    i. $((p \vee q) \Rightarrow r)$
    ii. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$
    iii. $q \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

11. Sean p, q, r proposiciones. Simplificar las siguientes proposiciones

    i. $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge (q \vee r))$
    ii. $[(p \vee q) \wedge r] \vee [p \wedge (q \Rightarrow p)]$
    iii. $[p \vee (p \wedge q)] \wedge [(p \vee r) \wedge (q \vee p)]$
    iv. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow [\bar{p} \Rightarrow \bar{q})]$
    v. $[\overline{(p \vee \bar{q})} \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})] \Rightarrow [\bar{p} \wedge \bar{q}]$
    vi. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow (p \vee q))] \Rightarrow p$
    vii. $(\overline{(p \vee \bar{q})} \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})) \Rightarrow \overline{(p \wedge q)}$
    viii. $(\overline{(p \vee \bar{r})} \wedge \bar{r}) \vee ((p \wedge q) \vee \bar{q})$

12. Dadas las proposiciones p, q, r. Simplificar las siguientes proposiciones

    i. $[(p \vee q) \Longrightarrow r] \Longrightarrow (\overline{q} \wedge r)$
    ii. $((p \Longrightarrow q) \vee r) \Longrightarrow (q \vee \overline{p})$
    iii. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)]$
    iv. $[(q \Rightarrow p) \wedge p] \Rightarrow \left[q \vee \overline{(\overline{p} \Rightarrow q)}\right]$
    v. $[(q \Rightarrow p) \wedge \overline{p}] \Rightarrow \left[q \vee \overline{(\overline{p} \Rightarrow q)}\right]$

vi. $r \Rightarrow [(r \vee \overline{p}) \wedge (\overline{p} \Rightarrow (q \wedge \overline{r}))]$

vii. $(q \vee \overline{r}) \wedge [(p \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge q) \vee (q \wedge \overline{r} \wedge p)] \wedge (q \vee r)$

viii. $(q \vee \overline{r}) \wedge [(p \wedge r) \vee (p \wedge \overline{r} \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge q)] \wedge (q \vee r)$

13. Se define el conectivo $*$ por $p * q \equiv ((q \vee p) \Rightarrow (q \wedge p))$ entonces la proposición $p * q$ es Falsa, en cual(es) caso(s)

    i. $p \equiv V, q \equiv V$

    ii. $p \equiv V, q \equiv F$

    iii. $p \equiv F, q \equiv V$

    iv. $p \equiv F, q \equiv F$

14. La proposición $[(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)]$ es equivalente a cual de las siguientes proposición

    i. $\overline{p}$

    ii. $\overline{q}$

    iii. V

    iv. F

    v. Ninguna de las anteriores

15. Completar la siguiente afirmación con una de las alternativas

    La proposición $[(p \vee q) \Rightarrow q] \Rightarrow [\overline{p} \vee q]$ es:

    i. equivalente a $\overline{p} \vee q$

    ii. una tautología

    iii. una contradicción

    iv. equivalente a q

    v. Ninguna de las anteriores

16. Se define el conectivo $\bigtriangledown$ por $(p \bigtriangledown q) \Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (\overline{p} \vee q)]$

    Determinar en que caso la proposición $(p \bigtriangledown q)$ es falsa

17. Se define la proposición $(p \circledcirc q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow \overline{q})$. Simplificar

$$\overline{q} \circledcirc (\overline{p} \circledcirc q)$$

18. Dada la proposición $(p \circledcirc q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow \overline{q})$. Simplificar

$$(\overline{p} \circledcirc q) \circledcirc \overline{q}$$

19. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow q)$. Simplifique cada una de las siguientes proposiciones

i. $(p \downarrow (p \Rightarrow q))$

ii. $\left(p \Rightarrow \overline{(p \downarrow q)}\right)$

20. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $((r \Rightarrow s) \downarrow r)$

ii. $(s \vee (r \downarrow \overline{s}))$

21. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \overline{q})$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $(r \downarrow (s \Rightarrow r))$

ii. $(s \vee (r \downarrow \overline{s}))$

iii. $((p \Rightarrow q) \downarrow p)$

iv. $(p \vee (q \downarrow \overline{p}))$

22. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $\left(p \downarrow \overline{(p \Rightarrow q)}\right)$

ii. $\left(p \Rightarrow \overline{(p \downarrow q)}\right)$

23. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$. Simplifique cada una de las siguientes proposiciones

i. $\left(q \downarrow \overline{(q \Rightarrow p)}\right)$

ii. $\left(p \Rightarrow \overline{(q \downarrow p)}\right)$

24. Dada la proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p \vee q})$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $(p \downarrow (q \vee \overline{p}))$

ii. $((p \downarrow q) \Rightarrow p)$

25. Dada la nueva proposición compuesta $(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \wedge p)$. Simplifique las siguientes proposiciones.

i. $((\overline{r} \vee s) \downarrow r)$

ii. $(r \vee \overline{s}) \downarrow r$

iii. $s \vee (\overline{s} \downarrow (\overline{s} \wedge r))$

iv. $\overline{s} \vee [\overline{s} \downarrow (s \wedge r)]$

26. Dada la proposición $p * q \equiv [p \Rightarrow (p \wedge q)]$

Simplificar

i. $(p * q) \Rightarrow (p * p)$

ii. $(p * \bar{q}) \wedge (q * q)$

iii. $(p \Rightarrow (p * q)) \Rightarrow (\bar{p} * \bar{q})$

iv. $(p * p) \Rightarrow [p * (q \Rightarrow p)]$

27. Sabiendo que la proposición $p \Rightarrow (q \vee r)$ es Falsa, entonces. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

    i. $((p \wedge q) \Rightarrow r)$

    ii. $(p \vee r) \wedge q$

    iii. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

    iv. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

28. Si q es una proposición falsa. Determine en cada caso el valor de verdad de la proposición p para que cada proposición sea verdadera.

    i. $(p \vee q) \wedge \overline{q}$

    ii. $(q \vee p) \Rightarrow (\overline{q} \wedge p)$

29. Marcar la(s) alternativa(s) correcta(s). Si la proposición $p * q \equiv [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)]$ entonces la proposición $p * q$ es Falsa cuando

    i. $p \equiv V, q \equiv V$

    ii. $p \equiv V, q \equiv F$

    iii. $p \equiv F, q \equiv V$

    iv. $p \equiv F, q \equiv F$

30. Marcar la(s) alternativa(s) correcta(s). La proposición $[(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$ es equivalente a la proposición

    i. p

    ii. $p \Rightarrow q$

    iii. $q \Rightarrow p$

    iv. q

    v. Ninguna de las anteriores

31. Marcar la(s) alternativa(s) correcta(s). La proposición $[(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{[\overline{p} \wedge (\overline{q} \Rightarrow p)]}$ es:

    i. equivalente a $\overline{p} \vee q$

    ii. una tautología

    iii. una contradicción

    iv. una proposición que depende del valor de p

32. Marcar la(s) alternativa(s) correcta(s). Dada la proposición

$$(p \bigtriangledown q) \Leftrightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \wedge \overline{q})]$$

entonces la proposición $(q \bigtriangledown p)$es verdadera cuando

   i. $p \equiv V\ q \equiv V$
   ii. $p \equiv V\ q \equiv F$
   iii. $p \equiv F\ q \equiv V$
   iv. $p \equiv F\ q \equiv F$

33. Se define los conectivos $\Box$ y $\triangle$ de la forma

$$\begin{aligned} (p \Box q) &\iff (p \Longrightarrow \bar{q}) \\ (r \triangle s) &\iff (\bar{r} \vee s) \end{aligned}$$

Determine, sin usar tabla de verdad, si la siguiente proposición es o no una tautología

$$\left(p \wedge \overline{(\bar{p} \triangle r)}\right) \vee \left[\overline{(\bar{p} \triangle q)} \wedge \overline{(\bar{s} \Box p)}\right]$$

34. Sean p, q proposiciones. Se define una nueva proposición: $p \ddagger q$ de acuerdo a la siguiente tabla

p	q	$p \ddagger q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

   i. Verifique que $(p \ddagger q) \Leftrightarrow (\overline{p \Rightarrow q})$ es tautología.
   ii. Simplificar al máximo $(p \ddagger q) \ddagger p$

Cuantificadores

1. Sea $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

   Determinar el valor de verdad de

   1. $(\forall x \in M)(x^2 + 1 \geq 1)$
   2. $(\exists x \in M)(x^2 - 9x + 20 \geq 0)$

2. Sean $A = \{1, -1, 0\}$ y $B = \{2, \frac{-1}{2}, 1\}$.

   Determinar el valor de verdad de

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(x + xy = y \vee xy + y = 1)$$

3. Sea $A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $(\exists x \in A)(x \text{ es par} \Rightarrow x^2 = 2)$
ii. $(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x + y^2 = 1)$

4. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justifique.

   i. $(\forall x \in A)(x + 2 > 0)$;
   ii. $(\exists x \in A)(x^2 - 2x < 0)$;
   iii. $(\exists x \in A)(2x - 2 < 0 \Rightarrow x = 2)$;
   iv. $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(x^2 - y^2 > 0)$;
   v. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(xy \geq 1 \Rightarrow x = 4y)$;

5. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

   i. $(\forall x \in A)(3 - x^2 > 0)$;
   ii. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;
   iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(xy \geq 0 \Rightarrow x^2 y = 1)$;
   iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(xy \geq 0 \Rightarrow x^2 y = 1)$;

6. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

   i. $(\forall x \in A)(x^2 - 3x + 2 \leq 4)$;
   ii. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;
   iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;
   iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;

7. Sean $A = \{-2, -1, 1\}$, $B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justifique.

   i. $(\forall x \in A)(x(x - 3) \leq 2)$;
   ii. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;
   iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x^{-1} + y \geq 0 \Rightarrow x + y^{-1} \geq 0)$;
   iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x^{-1} + y \geq 0 \Rightarrow x + y^{-1} \geq 0)$;

8. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{\frac{1}{2}, -1, -2\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

   i. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x - y \geq 0 \Rightarrow x + y > 0)$;
   ii. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x - y \geq 0 \Rightarrow x + y > 0)$;

9. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

   Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

   i. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;
   ii. $(\forall x \in A)(x^2 - 3x + 2 \leq 4)$;
   iii. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;
   iv. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;

10. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

    i. $(\forall x \in A)(x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$;
    ii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x \cdot y < 0 \vee x > y)$;
    iii. $(\forall y \in A)(\exists x \in B)(x \cdot y < 0 \vee x > y)$;
    iv. $(\exists x \in A)(x^2 < 4) \Rightarrow (\forall x \in A)(x = 2)$;

11. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{-2 - 1, 0\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

    i. $(\forall x \in A)(x^2 = -1 \Rightarrow x = 1)$;
    ii. $(\exists x \in B)(3x = 0 \vee x^2 = -3)$;
    iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(xy = -2 \vee xy - 5y = 0)$;
    iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(xy = -2 \vee xy - 5y = 0)$;

12. Sean $A = \{-2, -1, 1\}$, $B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique

    i. $(\forall x \in A)(x(x - 3) \leq 2)$;
    ii. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x^{-1} + y \geq 0 \Rightarrow x + y^{-1} \geq 0)$;
    iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x^{-1} + y \geq 0 \Rightarrow x + y^{-1} \geq 0)$;

13. Sean $A = \{0, 1, 2\}, B = \{-1, \frac{1}{3}\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas justifique adecuadamente

    i. $(\forall x \in A)(x^2 - 2x + 1 > 0)$;
    ii. $(\exists x \in A)(x^2 - 2x < 0)$;
    iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x + y \geq 0 \Rightarrow x > 9y)$;
    iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x + y \geq 0 \Rightarrow x > 9y)$;

14. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{-2 - 1, 0\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

i. $(\forall x \in A)(x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$;
ii. $(\exists x \in B)(3x = 0 \vee x^2 = -1)$;
iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(xy = -2 \vee xy - 5y = 0)$;
iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(xy = -2 \vee xy - 5y = 0)$;

15. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, -3\}, B = \{-1, 1\}$.

    Determinar el valor de verdad de

    i. $(\forall x \in A)\,(\exists y \in B)\left(\left(\dfrac{x}{y} \leq 1\right) \wedge \left(\dfrac{y^2}{x} < 1\right)\right)$
    ii. $(\exists y \in B)\,(\forall x \in A)\left(\left(\dfrac{x}{y} \leq 1\right) \wedge \left(\dfrac{y^2}{x} < 1\right)\right)$

16. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}, B = \{-1, 1\}$.

    Determinar el valor de verdad de

    i. $(\forall x \in A)\,(\exists y \in B)\left(\left(\dfrac{x}{y} \leq 1\right) \vee \left(\dfrac{y^2}{x} < 1\right)\right)$
    ii. $(\exists y \in B)\,(\forall x \in A)\left(\left(\dfrac{x}{y} \leq 1\right) \vee \left(\dfrac{y^2}{x} < 1\right)\right)$

17. Sean $A = \{-1, 1, -2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, -2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

    i. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)\left(\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{x}{y} \geq 1\right)$
    ii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)\left(\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{x}{y} \geq 1\right)$.

18. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

    i. $(\forall x \in A)(x^2 - 3x + 2 \leq 4)$;
    ii. $(\exists x \in A)(x^2 = 1 \Rightarrow x = 2)$;
    iii. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;
    iv. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x + y \geq 0 \Rightarrow x - y > 0)$;

19. Sean $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{\frac{1}{2}, -1, -2\}$.

    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

    i. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x - y \geq 0 \Rightarrow x + y > 0)$;
    ii. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x - y \geq 0 \Rightarrow x + y > 0)$;

20. Sean $A = \{-1, 1, -2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\}$.
    Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas
    a. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)\,(xy \geq 0 \Rightarrow y^2x \geq 1)$.
    b. $(\forall y \in B)(\exists x \in A)\,(xy \geq 0 \Rightarrow y^2x \geq 1)$

Conjunto

1. Sean $A = \{a, b, \phi\}, B = \{\phi, \{a\}\}, C = \{b, c, d\}$
   Determinar por extensión
   $$D = (B - \mathbb{P}(A)) - \mathbb{P}(A - C))$$
2. Sean $A = \{0, \phi\}, B = \{1, \{\phi\}\}, C = \{0, 1, \{\phi\}\}$
   Determinar por extensión
   $$D = (\mathbb{P}(A) - (B - C)) \cap \mathbb{P}(C)$$
3. Sean $A = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}, B = \{a, b\}, C = \{a, c\}$
   Determinar por extensión
   $$D = [(A \cap (B \times C)) \cup \mathbb{P}(B)] - \mathbb{P}(C)$$
4. Sean A y B conjuntos tales que $(A \cup B \subseteq B)$. Dibuje un diagrama de Venn que muestre la situación
5. Sean A, B, C subconjunto de U (universo relativo). Simplifique, usando propiedades de conjuntos
   a $(A \cap B) \cup [(A \cup B^c \cup C) \cap (A \cup C)] \cup (C \cap B^c)$
   b $[(A \cup B^c \cup C) \cap (A \cup B)] \cup (C \cap B)$
   c $(C \cap A^c)^c \cap (B^c \cap A) \cap (B \cap C)^c$
   d $[(A \cup (B \cap A)] \cap [(B \cup A) \cap (A \cup C)]$
   e $[(A - B) \cup (C - A)]^c \cap [A - (C - B)]$
   f $[(A^c - B) - (A - B^c)] \cup B$
   g $[[(A^c - B) - (A - B^c)] \cup B] \cap [A - (C - B)]$
   h $[(B - A) \cup (B - A^c)] \cup (B \cap A)$
   i $[(B - A) \cup (B^c - A)] \cup (B \cap A)$
6. Sean Ay B conjuntos. Se define
   $$A * B = [A^c \cup B) - (A \cap B^c)]^c$$
   Calcular $A * A$

7. Sean $A * B = B - (A \triangle B)$ entonces $A - (A * B)$ es igual a
   - a A
   - b $A \cap B^c$
   - c $A^c \cap B$
   - d B
   - e Ninguna de las anteriores
8. Sean $A * B = (A \cap B) - A^c$ entonces $(A * C) \cup C$ es igual a
   - a A
   - b $A \cap C$
   - c $A \cup C$
   - d C
   - e Ninguna de las anteriores
9. Sean $A * B = B \triangle (A - B)$ entonces $A * (A * B)^c$ es igual a
   - a A
   - b $A \cap B^c$
   - c $A^c \cap B$
   - d B
   - e Ninguna de las anteriores
10. Sean A y B conjuntos. Se define
$$A * B = [A^c \cup B) - (A \cap B^c)]^c$$
    Calcular $A * A$
11. Sean $A = \{\phi, \{1\}\}, B = \{1, 2\}, C = \{\phi, 2\}$.
    Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas
    - a $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;
    - b $((A \cup C) - B) = \{\phi\}$;
    - c $(A \cup B) - (A \cap B) = \{\phi, 2\}$;
    - d $((A \cup C) \cap \mathbb{P}(B)) = A$;
12. Sean $A = \{\phi, 1\}, B = \{1, 2\}, C = \{\phi, 2\}$
    Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas
    - i. $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \{\phi, \{\phi, 2\}\}$;
    - ii. $\mathbb{P}(A \cup B) \cap \mathbb{P}(C) = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, 2\}\}$;

iii. $(A \cup B) - (A \cap B) = \{\phi, 2\}$;

iv. $\#((A \cup C) \cap \mathbb{P}(B)) = 2$;

v. $\#((A \cup C) - B) = 0$;

13. Sean $A = \{\phi, \{2\}\}, B = \{1, 2\}, C = \{\phi, 1\}$.

    Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

    a $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;

    b $((A \cup C) - B) = \{\phi\}$;

    c $(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, \{2\}\}$;

    d $((A \cup C) \cap \mathbb{P}(B)) = A$;

14. Sean $A = \{\phi, \{1\}\}, B = \{1, 2\}, C = \{\{\phi\}, 1\}$.

    Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

    a $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$;

    b $((A \cup B) - C) = \{\{1\}, 2\}$;

    c $(A \cup B) - (A \cap B) = \{\phi, 2\}$;

    d $((A \cup C) \cap \mathbb{P}(A)) = \{1\}$;

15. Sean $A = \{\phi, 1\}, B = \{1, \{2\}\}, C = \{\phi, 2\}$. Determinar por extensión los siguientes conjuntos

    a $\mathbb{P}(C) - B$

    b $((A \cup B) - C)$

    c $(A \cup C) - (A \cap B)$

    d $((A \cup C) \cap \mathbb{P}(A))$

16. Sean $A = \{a, b, \phi\}, B = \{\phi, \{a\}\}, C = \{b, c, d\}$

    Determinar por extensión el siguiente conjunto

$$D = (B - \mathbb{P}(A)) - \mathbb{P}(A - C))$$

17. Sean $A = \{0, \phi\}, B = \{1, \{\phi\}\}, C = \{0, 1, \{\phi\}\}$

    Determinar por extensión

$$D = (\mathbb{P}(A) - (B - C)) \cap \mathbb{P}(C)$$

18. Sean $A = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}, B = \{a, b\}, C = \{a, c\}$

    Determinar por extensión

$$D = [(A \cap (B \times C)) \cup \mathbb{P}(B)] - \mathbb{P}(C)$$

19. Dados los conjuntos

$$\begin{array}{ll} A & = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad (3x+1=2) \Longrightarrow (x-2 \neq 0)\} \\ B & = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad (x+2 \neq 0) \Longrightarrow (x=1)\} \\ C & = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad x \geq 0\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad x \leq 3\}. \end{array}$$

Determinar por extensión

a $(A \cup B) - C =$

b $(A \cap C) - D =$

c $(C \triangle D) - B =$

d $(A \triangle B) \triangle (C \triangle D) =$

20. Dado $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3}\}$.

Determinar por extensión los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{ll} C & = \{x \in A \quad : \quad (\exists y \in B)\,(x+y>1)\} \\ D & = \{x \in A \quad : \quad (\forall y \in B)\,(x+y>1)\} \end{array}$$

21. Dados los conjuntos $A = \{-1, 1, 2\}, B = \{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\}$.

Determinar por extensión los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{ll} C & = \{x \in A \quad : \quad (\exists y \in B)\,(xy>1)\} \\ D & = \{x \in A \quad : \quad (\forall y \in B)\,(xy>1)\} \end{array}$$

22. Dados los conjuntos $A = \{-1, \frac{1}{2}, 2\}, B = \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

Graficar el conjunto

$$E = \left\{ (x,y) \in A \times B \quad : \quad y = \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 - x} \right\}$$

23. Dados los conjuntos $A = \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$, $B = \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

Graficar el conjunto.

$$E = \left\{ (x,y) \in A \times B \quad : \quad y = \frac{1 - x}{1 - \frac{1}{x}} \right\}$$

24. Dado el conjunto $A = \{-2, \frac{1}{2}, 2\}$. Graficar el siguiente conjunto

$$E = \left\{ (x,y) \in A \times \mathbb{R} \quad : \quad y = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} \right\}$$

25. Sea $A = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Graficar el conjunto

$$E = \left\{ (x, y) \in A \times \mathbb{R} \quad : \quad y = \frac{1-x}{1-\frac{1}{x}} \right\}$$

26. Sean A y B conjuntos tales que $(A \cup B \subseteq B)$. Dibuje un diagrama de Venn que muestre la situación

27. Sean A, B, C subconjunto de U (universo relativo)

    Demostrar

    a $A \cup B = A$ si y sólo si $B \subseteq A$

    b $A \cap B = A$ si y sólo si $A \subseteq B$

    c $A \triangle B = A$ si y sólo si $B = \phi$

    d $A - B = A$ si y sólo si $A \cap B = \phi$

28. Sean A, B, C Conjuntos finitos. Demostrar

    $\sharp(A \cup B \cup C) = \sharp(A) + \sharp(B) + \sharp(C) - \sharp(A \cap C) - \sharp(A \cap B) - \sharp(B \cap C) + \sharp(A \cap B \cap C)$

29. Demostrar usando álgebra de conjunto que

$$[(A - (B^c - A^c)) \cup B^c] \cap A = A$$

30. En un encuesta escolar realizada a 60 consumidores de Coca Cola, Fanta y Sprite. Se obtuvo la siguiente información 35 beben Coca Cola, 23 beben Fanta, 21 beben Sprite y tres estudiantes beben de las tres marcas.

    ¿Cuántos estudiantes consumen sólo una marca?

31. Al encuestar a 100 consumidores de bebidas se obtuvo la siguiente información, 33 Beben Coca Cola 29 Beben Fanta. 22 Beben Quatro 13 Beben Coca Cola y Fanta. 6 Beben Fanta y Quatro 14 Coca Cola y Quatro. 6 Beben de las tres bebidas.

    ¿Cuántas personas no beben ninguna bebida?

32. En un certamen científico escolar 34 alumnos recibieron premios por sus proyectos científicos. Se dieron 14 premios a proyectos en Biología, 13 premios en proyectos de Química y 21 en proyectos de Física. Si tres estudiantes recibieron premios en las tres áreas.

    ¿Cuántos recibieron premio en una sola área?

33. En una encuesta a 37 personas, 18 toman Coca Cola y 15 toman Fanta, 10 no beben Fanta ni Coca.

    ¿Cuántos personas beben solamente una bebida?

34. En una encuestas a 30 personas, 18 toman Cafe y 12 toman Te, 5 no toman Cafe ni Te.

    ¿Cuántos personas beben solamente una bebida?

Capítulo 2

Números Naturales

2.1 Construcción de los Naturales

Existe variadas construcciones de los números naturales, la que en este texto se describirá, tiene como punto de partida la existencia de los números reales, y a continuación se definirán los conjuntos inductivos, que pueden ser definido a partir de cualquier número real, con el afán de mantener lo más operativa la definición, iniciamos desde cero, aunque estoy consiente de la controversia que existe, si el cero es un numero natural, pero con el fin de que muchas formulas sean mas fáciles de escribir lo incluimos.

Definición 2.1.1 Sea A un subconjunto de los números $\mathbb{R}$, se dice que A es inductivo si y sólo si sucede dos cosas:

i) $0 \in A$.

ii) $(\forall x \in A)(x + 1 \in A)$.

$\Diamond$

Ejemplo 2.1.2 Demostrar que $A = [-1, \infty[$ es inductivo. $\square$

Solución 1. i) Dado que $0 \geq -1$, tenemos que $0 \in [-1, \infty[= A$.
ii) Sea $x \in A$, luego

$$\begin{array}{lcl} x \geq -1 & & \\ x + 1 \geq 0 & \wedge & 0 \geq -1 \\ x + 1 \geq -1 & . & \end{array}$$

Entonces $x + 1 \in [-1, \infty[= A$.

Así se cumple que $(\forall x \in A)(x + 1 \in A)$.

Luego hemos demostrado que A es un conjunto inductivo.

Ejemplo 2.1.3 Los siguientes conjuntos no son inductivos.

i $A = \{-3\}$, ya que $0 \notin A$.

ii $A =]-\infty, -2]$, ya que $0 \notin A$.

iii $A = [-1, 4]$, se tiene que $0 \in A$, pero $(4 \in A \Rightarrow 5 \in A)$ es falsa.

$\square$

Ejercicios

Sea el conjunto $A = [-1/2, \infty[-\{\sqrt{2}\}$.

Determine si A es un conjunto inductivo.

Definición 2.1.4 Sea I el conjunto formado por todos los subconjuntos **inductivos** de los números Reales.
Se define, el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$, como la intersección de todos los conjuntos inductivos, es decir,

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \in I} M.$$

$\diamondsuit$

Proposición 2.1.5 *El conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$*, es un conjunto inductivo, es decir,*

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. $(\forall x \in \mathbb{N})(x + 1 \in \mathbb{N})$.

La definición anterior, lleva implícito que el conjunto de los números Naturales es el más pequeño de los conjuntos inductivos

Teorema 2.1.6 [de inducción]. *Sea* $p(n)$ *una función proposicional en el conjunto de los números naturales. Si*

i) $p(0)$ *y*

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$

entonces

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n))$$

Demostración. Sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n)\}$$

Demostraremos que A es inductivo, en primer lugar tenemos $0 \in A$, ya que $p(0)$ es verdadero.

Para la segunda condición, supongamos que $k \in A$ luego $p(k)$ es verdadero y como se cumple que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$$

es verdadero, por lo tanto $p(k+1)$ es verdadero, de los cual obtenemos que $k + 1 \in A$.

Así A es inductivo, de ello obtenemos que

$$\mathbb{N} \subseteq A,$$

pero además por definición de A se tiene que $A \subseteq \mathbb{N}$. Luego tenemos que

$$A = \mathbb{N}$$

por lo tanto

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n)). \qquad \blacksquare$$

Veamos una aplicación del anterior resultado, consideremos el siguiente arreglo

$$\left.\underbrace{\begin{array}{cccccc} * & + & + & + & \cdots & + \\ * & * & + & + & & + \\ * & * & * & + & \cdots & + \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & \cdots & + \end{array}}_{n+1 \text{ columnas}}\right\} n \text{ filas}$$

El contar cuántos casilleros hay con los símbolos $+$ o $*$ hay en cada caso, lo podemos relacionar con la siguiente sucesión de números naturales

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0+1 \\ a_2 &= 0+1+2 \\ a_n &= a_{n-1}+n \end{aligned}$$

lo que es igual a calcular la siguiente suma $1+2+3+...+n$.

La cantidad total de casilleros es $n(n+1)$ y en ellos existe la misma cantidad de signos $+$ y $*$.

$$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para asegúranos que nuestra deducción es correcta, definamos la siguiente función proposicional

$$p(n) : 0+1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

luego

i) $p(0) : 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0,$

ii) $p(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$

iii) $p(2) : 1+2 = \frac{2\cdot 3}{2},$

iv) $p(3) : 1+2+3 = \frac{3\cdot 4}{2}.$

Lo cual no es suficiente, para saber que la proposición es válida en todos los números Naturales.

Ejemplo 2.1.7 Demostrar mediante inducción que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2})$$

□

Solución 2. Definiremos $p(n)$ a la siguiente función proposicional

$$p(n) : 0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

i) $p(0) : 0 = \frac{0(0+1)}{2}$, es verdadero.
ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$.
Supongamos que $p(n)$ es verdadero y queremos demostrar que $p(n+1)$ también es verdadero.
Sea
$$p(n) : 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
luego debemos demostrar que
$$p(n+1) : 0 + 1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
de donde
$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + \ldots + (n+1) &= \underbrace{0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$
es decir $p(n+1)$ es verdadero, por ello
$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$$
es verdadero y por teorema de inducción se obtiene,
$$(\forall n \in \mathbb{N})(0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}).$$

Ejercicios

Demostrar por inducción.

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1)$.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})(n + (n+1) + \ldots + (2n) = \frac{3}{2}n(n+1))$.
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2})$.

Teorema 2.1.8 [Inducción a partir de k]. *Sea $p(n)$ una función proposicional en los números Naturales, y existe $k \in \mathbb{N}$ fijo, es tal que cumple con*

i) $p(k)$ es verdadero,

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})[(n \geq k \wedge p(n) \Rightarrow (p(n+1))]$ *es verdadero,*

entonces se cumple

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq k \Rightarrow p(n))$$

Observación: Recordemos la noción de múltiplos.

i) 6 es múltiplo de 2, ya que

$$6 = 2 \cdot 3.$$

ii) x es múltiplo de 3, si y sólo si

$$x = 3 \cdot y, \quad (y \in \mathbb{Z}).$$

iii) x es múltiplo de y, es equivalente a escribir

$$(\exists k \in \mathbb{Z})(x = yk).$$

Finalmente denotamos $x = \dot{y}$, que es equivalente a decir, x es múltiplo de y.

Ejemplo 2.1.9 Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N})(4^n - 1 = \dot{3})$. □

Solución 3. Definamos como $p(n) : 4^n - 1 = \dot{3}$, entonces

i) veamos que sucede con $p(0)$:

$$p(0) : 4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \cdot 0.$$

ii) Supongamos que $p(n)$ es verdadero, es decir:

$$p(n) : 4^n - 1 = \dot{3},$$

por demostrar que $p(n+1)$ es verdadero, donde

$$p(n+1) : 4^{n+1} - 1 = \dot{3}.$$

Luego

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4(4^n - 1 + 1) - 1 \\ &= 4(3k + 1) - 1 \\ &= 3(4k) + 4 - 1 \\ &= 3(4k) + 3 \\ &= 3(4k + 1) \\ &= \dot{3}. \end{aligned}$$

Así $p(n+1)$ es verdadero. Luego

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$$

se cumple y por teorema de inducción tenemos que, $(\forall n \in \mathbb{N})(4^n - 1 = \dot{3})$

Ejercicios

Demostrar por inducción.

i) $(\forall n \in \mathbb{N})((13)^n - 7^n = \dot{6})$.

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})((11)^{n+1} + 2^n = \dot{3})$.

iii) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)((14)^n + 8^n + (-4)^n = \dot{6})$.

Teorema 2.1.10 [Inducción Generalizada]. *Sea $p(n)$ una función proposicional en los números Naturales, tal que cumple con*

i) $p(0)$ *es verdadero,*

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})[(p(0) \wedge p(1) \wedge \cdots \wedge p(n)) \Rightarrow (p(n+1))]$ *es verdadero,*

entonces se cumple

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n))$$

2.2 Sucesiones

En esta sección, se definirá el concepto de sucesión y se hará un estudio de las principales sucesiones en los números naturales, cada una de ellas con distintas aplicaciones

Definición 2.2.1 Se llama **sucesión** de números Reales a toda correspondencia o función de un subconjunto infinito de los Naturales en los Reales. $\Diamond$

Ejemplo 2.2.2 Las siguientes funciones son sucesiones.

$$\begin{array}{llllll} i. & f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \{n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ & & n & \longmapsto & n & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} ii. & f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \{2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ & & n & \longmapsto & 2^n & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} iii. & f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \\ & & n & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} iv. & f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \{0+1+2+\ldots+n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ & & n & \longmapsto & 0+1+2+\ldots+n & \end{array}$$

Cada una de estas sucesiones está definida en forma explícita, debido a que cualquier imagen de un valor se calcula a través de la formula, explícitamente. $\square$

Definición 2.2.3 La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que esta definida por **recurrencia** si y sólo si el término a_n se obtiene a partir de los términos anteriores por alguna regla de formación. $\Diamond$

Ejemplo 2.2.4 Consideremos la siguiente sucesión definida por recurrencia

$$a_0 = 1, \qquad a_n = n \cdot a_{n-1},\ n \geq 1.$$

Luego tenemos que

$$\begin{array}{lcl} a_0 &=& 1 \\ a_1 &=& 1 \cdot a_0 = 1 \cdot 1 = 1 \\ a_2 &=& 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \\ a_3 &=& 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6 \\ a_4 &=& 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24 \\ a_n &=& n! \end{array}$$

La anterior sucesión a_n, es una sucesión importante por ello se denota en forma especial por $n!$ y se lee "n factorial". □

Algunos ejemplos notables de sucesiones definidas por recurrencia:
Sean $a, d, r \in \mathbb{R}$, con $r \neq 0$.
i. Una sucesión definimos por recurrencia, es la siguiente

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d, \ n \geq 0$$

Algunos valores de esta sucesión:

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_1 &= a_0 + d = a + d \\ a_2 &= a_1 + d = a + 2d \\ a_3 &= a_2 + d = a + 3d \\ a_{n+1} &= a_{n-1} + d = a + nd. \end{aligned}$$

La anterior sucesión es llamada progresión aritmética

$$a_n = a + nd$$

ii. Una sucesión definimos por recurrencia, es la siguiente

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot r, \ n \geq 0$$

Algunos valores de esta sucesión:

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_1 &= a_0 \cdot r = a \cdot r \\ a_2 &= a_1 \cdot r = a \cdot r^2 \\ a_3 &= a_2 \cdot r = a \cdot r^3 \\ a_{n+1} &= a_{n-1} \cdot r = a \cdot r^n. \end{aligned}$$

La anterior sucesión es llamada progresión geométrica

$$a_n = a \cdot r^n$$

Para las otras, sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$.
iii. Una sucesión definimos por recurrencia, es la siguiente

$$b_0 = a_k, \quad b_{n+1} = b_n + a_{n+k+1}, \ n \geq 0$$

Algunos valores de esta sucesión:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_k \\ b_1 &= b_0 + a_{0+k+1} = a_k + a_{k+1} \\ b_2 &= b_1 + a_{1+k+1} = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \\ b_3 &= b_2 + a_{k+3} = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} \\ b_n &= b_{n-1} + a_{n+k} = a_k + ... + a_{n+k}. \end{aligned}$$

La anterior sucesión es llamada sumatoria y se denota por

$$\sum_{i=k}^{n+k} a_i = a_k + ... + a_{n+k}$$

iv. Otra sucesión definida por recurrencia, es la siguiente

$$c_0 = a_k, \quad c_{n+1} = c_n \cdot a_{n+k+1}, \; n \geq 0$$

Algunos ejemplos

$$\begin{array}{rcl} c_0 & = & a_k \\ c_1 & = & c_0 \cdot a_{0+k+1} = a_r \cdot a_{k+1} \\ c_2 & = & c_1 \cdot a_{1+k+1} = a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \\ c_3 & = & c_2 \cdot a_{k+3} = a_r \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot a_{k+3} \\ c_n & = & c_{n-1} \cdot a_{n+k} = a_k \cdot ... \cdot a_{n+k}. \end{array}$$

La anterior sucesión es llamada productoria y se denota por

$$\prod_{i=k}^{n+k} a_i = a_k \cdot ... \cdot a_{n+k}.$$

En general tenemos la siguiente definición

2.3 Sumatoria y Productoria

Definición 2.3.1 Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, r \leq s$ una sucesión y $r, s \in \mathbb{N}$, entonces definimos a:
i) **Sumatoria**

$$\sum_{i=r}^{s} a_i = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_s.$$

ii) **Productoria**

$$\prod_{i=r}^{s} a_i = a_r \cdot a_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdots a_s.$$

$\Diamond$

Ejemplo 2.3.2 Calcular

1) $\sum_{i=3}^{5} i = 3+4+5 = 12.$

2) $\sum_{i=2}^{4} 2^i = 2^2+2^3+2^4 = 4+8+16 = 28.$

3) $\sum_{n=3}^{6} (n \cdot i) = i\sum_{n=3}^{6} n = i(3+4+5+6) = i(18) = 18i.$

4) $\sum_{i=2}^{4}\left(\sum_{j=2}^{3} j^i\right)$, donde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{4}\left(\sum_{j=2}^{3} j^i\right) &= \sum_{i=2}^{4}(2^i+3^i) \\
&= \sum_{i=2}^{4}2^i + \sum_{i=2}^{4}3^i \\
&= (2^2+2^3+2^4)+(3^2+3^3+3^4) \\
&= 145
\end{aligned}$$

□

Algunas Sumatorias Básicas:

1 $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$

2 $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

3 $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

4 $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, r \neq 0; r \neq 1.$

Proposición 2.3.3 *Dada las siguientes sucesiones* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *de números Reales y* $c \in \mathbb{R}$ *entonces*

1 $\sum_{i=r}^{n} c \cdot a_i = c\sum_{i=r}^{n} a_i.$

2 $\sum_{i=r}^{s}(a_i+b_i) = \sum_{i=r}^{s} a_i + \sum_{i=r}^{s} b_i.$

3 $\sum_{i=r}^{s} a_i = \sum_{i=r}^{t} a_i + \sum_{i=t+1}^{s} a_i$ *, donde* $r \leq < ts.$

4 $\sum_{i=r}^{s}(a_i - a_{i+1}) = a_r - a_{s+1},$ *propiedad telescópica.*

5) $\sum_{i=r}^{s} c = (s-r+1)c.$

6 $\sum\limits_{i=r}^{s} a_i = \sum\limits_{i=r-p}^{s-p} a_{i+p}$, *donde* $r - p \geq 0$.

Ejemplo 2.3.4 Calcular

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1).$$

□

Solución 1. Usando propiedades tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}(2i+1) &= \sum_{i=0}^{n}2i + \sum_{i=0}^{n}1 \\
&= 2\sum_{i=0}^{n}i + \sum_{i=0}^{n}1 \\
&= 2\left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right) + (n+1) \\
&= n^2 + n + n + 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.5 Calcular

$$\sum_{i=r}^{n} i$$

□

Solución 2. Usando propiedades tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=r}^{n} i &= \sum_{i=r-r}^{n-r}(i+r) \\
&= \sum_{i=0}^{n-r}(i+r) \\
&= \sum_{i=0}^{n-r} i + \sum_{i=0}^{n-r} r \\
&= \tfrac{(n-r)(n-r+1)}{2} + (n-r+1)r \\
&= \tfrac{(n-r+1)(n-r+2r)}{2} \\
&= \tfrac{(n-r+1)(n+r)}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicios

Calcular las siguientes sumatorias:

1. $\sum\limits_{i=0}^{100}(i+7)^2$

2. $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} k3^k$Ayuda:
$$(k+1)3^{k+1} - k3^k = 2k3^k + 3^{k+1}.$$

Ejemplo 2.3.6 Sea $r \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ Calcular $\sum\limits_{k=0}^{n} kr^k$ □

Solución 3. Veamos primero que, por propiedad telescópica se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\, r^{k+1} - kr^k\right] = (n+1)\, r^{n+1}$$

Reescribiendo las sumatoria tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\, r^{k+1} - kr^k\right] &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \left[(r-1)\, kr^k + r^{k+1}\right] \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (r-1)\, kr^k + \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \\ &= (r-1) \textstyle\sum_{k=0}^{n} kr^k + r\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \end{aligned}$$

Igualando los resultados tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\, r^{k+1} - kr^k\right] &= \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\, r^{k+1} - kr^k\right] \\ (r-1) \textstyle\sum_{k=0}^{n} kr^k + r\frac{r^{n+1}-1}{r-1} &= (n+1)\, r^{n+1} \\ \textstyle\sum_{k=0}^{n} kr^k &= \frac{(n+1)}{r-1} r^{n+1} - r\frac{r^{n+1}-1}{(r-1)^2} \end{aligned}$$

De lo cual se obtiene que

$$\sum_{k=0}^{n} kr^k = \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + 1}{(r-1)^2}$$

Proposición 2.3.7 *Dada las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de Números Reales y $c \in \mathbb{R}$*

1. $\prod\limits_{k=r}^{s} (a_k \cdot b_k) = \prod\limits_{k=r}^{s} a_k \cdot \prod\limits_{k=r}^{s} b_k.$

2. $\prod\limits_{k=r}^{s} c \cdot a_k = c^{s-r+1} \cdot \prod\limits_{k=r}^{s} a_k.$

3. $\prod\limits_{k=r}^{s} c = c^{s-r+1}.$

4. $\prod\limits_{k=r}^{s} a_k = \prod\limits_{k=r}^{t} a_k \cdot \prod\limits_{k=t+1}^{s} a_k$, *donde $r \leq t < s$.*

5. *Propiedad Telescópica.*

   Si $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \neq 0)$, *entonces*
$$\prod_{k=r}^{s} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{s+1}}{a_r}.$$

6. $\prod\limits_{k=r}^{s} a_k = \prod\limits_{k=r-p}^{s-p} a_{k+p}.$

7. $\prod\limits_{k=r}^{s} c^{a_k} = c^{\sum\limits_{k=r}^{s} a_k}$, *con* $c > 0$

Demostración. Por inducción demostraremos la propiedad telescópica. Se define
$$p(n) : \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}.$$

Verifiquemos $p(0)$
$$\begin{aligned} p(0) : \prod_{k=0}^{0} \tfrac{a_{k+1}}{a_k} &= \tfrac{a_1}{a_0} \\ \tfrac{a_{0+1}}{a_0} &= \tfrac{a_1}{a_0} \\ \tfrac{a_1}{a_0} &= \tfrac{a_1}{a_0}. \end{aligned}$$

Luego $p(0)$ es verdadero. Ahora veamos
$$(\forall n \in \mathbb{N})[p(n) \Rightarrow p(n+1)]$$

es decir, hipótesis
$$p(n) : \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0},$$

Tesis:
$$p(n+1) : \prod_{k=0}^{n+1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+2}}{a_0},$$

entonces
$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n+1} \tfrac{a_{k+1}}{a_k} &= \prod_{k=0}^{n} \tfrac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \left(\tfrac{a_{n+1+1}}{a_{n+1}}\right) \\ &= \left(\tfrac{a_{n+1}}{a_0}\right) \cdot \left(\tfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right) \\ &= \tfrac{a_{n+1}}{a_0} \cdot \tfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \\ &= \tfrac{a_{n+2}}{a_0}. \end{aligned}$$

Así tenemos la segunda parte y por teorema de inducción concluimos
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0} \right)$$

con $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. ■

Ejercicios

Demostrar por inducción la propiedad telescópica,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 \right).$$

Ejemplo 2.3.8 Calcular

$$\prod_{k=3}^{s} 3^{(k^2)}$$

□

Solución 4. Por la propiedad 5 se tiene que

$$\begin{aligned}
\prod_{k=3}^{7} 3^{(k^2)} &= 3^{3^2} \cdot 3^{4^2} \cdots 3^{7^2} \\
&= 3^{(3^2+4^2+\cdots+7^2)} \\
&= 3^{\sum_{k=3}^{7} k^2} = 3^{140-5} = 3^{135}.
\end{aligned}$$

2.4 Progresiones

Dos de las principales progresiones en los números Naturales, son las llamadas progresiones Aritméticas y progresiones Geométricas, y las principales aplicaciones de estas sucesiones son el interés simple o compuesto.

2.4.1 Progresiones Aritméticas (P. A.)

Sean $a, d \in \mathbb{R}$, se llama progresión aritmética a la sucesión $\{a_n\}$, definida por

$$a_n = a + nd,$$

de primer término a y diferencia d, es decir,

$$\begin{array}{lcll}
a_0 & = & a & 1^{er} \text{ término} \\
a_1 & = & a + 1d & 2^{do} \text{ término} \\
a_2 & = & a + 2d & 3^{ro} \text{ término} \\
 & \vdots & & \\
a_{n-1} & = & a + (n-1)d & n - simo \text{ término} \\
a_n & = & a + nd & (n+1) - simo \text{ término} .
\end{array}$$

Consideremos la siguiente igualdad, con ello la razón del nombre

$$a_{k+1} - a_k = [a + (k+1)d] - [a + kd] = d,$$

Calculemos la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

$$\sum_{k=0}^{n} a_k,$$

reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n}(a+kd)\\ &= \sum_{k=0}^{n} a + d\sum_{k=0}^{n} k\\ &= a(n+1) + d\tfrac{n(n+1)}{2}\\ &= \tfrac{(n+1)}{2}\cdot(2a+dn)\\ &= \tfrac{(n+1)}{2}\cdot(a+(a+nd))\\ &= \tfrac{(n+1)}{2}\cdot(a_0+a_n).\end{aligned}$$

Es decir,

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = \frac{(n+1)}{2}\cdot(a_0+a_n) = (n+1)\left(a+\frac{n}{2}d\right).$$

En general

$$\sum_{k=r}^{n}(a+kd) = \frac{(n-r+1)}{2}\cdot(a_r+a_n) = (n-r+1)\left(a+\frac{(n+r)}{2}d\right).$$

Intercalar términos: Supongamos que tenemos dos números $x, y \in \mathbb{R}$ y deseamos intercalar n-términos de modo que se obtenga una Progresión Aritmética.

Para ello debemos tener los siguiente términos $a_0 = x, ..., a_{n-1} = y$

De este modo se tiene que

$$\begin{aligned} a &= x\\ a+(n-1)d &= y\end{aligned}$$

Despejando, se obtiene

$$\begin{aligned} x &= a\\ d &= \tfrac{y-x}{n-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto la progresión aritmética esta dada por

$$a_k = x + k\frac{y-x}{n-1}$$

Cuando intercalamos un sólo término, nos referimos a este término como el medio aritmético.

Ejemplo 2.4.1 En una progresión aritmética el primer término es 2 y el n -ésimo término es 29, la suma de los primeros n término es 155.
Hallar cuántos términos se sumaron y la diferencia. □

Solución. Se sabe que

$$\begin{aligned} &a_0 = 2\\ &a_{n-1} = 29\\ &\sum_{k=0}^{n-1} a_k = 155,\end{aligned}$$

de la última igualdad se sigue

$$\begin{aligned} 155 &= \tfrac{n(2+29)}{2} \\ 310 &= 31n \\ 10 &= n, \end{aligned}$$

luego como $a_9 = 29$, se sigue

$$\begin{aligned} a + 9d &= 29 \\ 2 + 9d &= 29 \\ 9d &= 27 \\ d &= 3. \end{aligned}$$

En resumen obtenemos que son 10 los términos sumados y que la diferencia es 3.

Ejercicios

Si la suma de los primeros siete términos de una progresión aritmética es 49 y la suma de los primeros 17 términos es 289. Calcular la suma de los primeros n términos.

2.4.2 Progresiones Geométricas (P.G.)

Sean $a, r \in \mathbb{R}^*$. Se llama progresión geométrica a la sucesión

$$a_n = ar^n,$$

donde a es el primer término y r la razón.

Observación: . De acuerdo a lo anterior se tiene la siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcll} a_0 & = & a & 1^{ero} \text{ término} \\ a_1 & = & a \cdot r & 2^{do} \text{ término} \\ a_2 & = & a \cdot r^2 & 3^{ro} \text{ término} \\ & \vdots & & \\ a_n & = & a \cdot r^n & (n+1)\text{-ésimo término.} \end{array}$$

1. La razón la podemos encontrar en:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a \cdot r^{n+1}}{a \cdot r^n} = \frac{r^{n+1}}{r^n} = r.$$

2. La suma de los términos

$$\sum_{k=0}^{n} a \cdot r^k,$$

se sigue

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a \cdot r^k &= a \sum_{k=0}^{n} r^k \\ &= a \left(\tfrac{r^{n+1}-1}{r-1} \right) \quad r \neq 1. \end{aligned}$$

Observación: Para la suma de los términos comenzando la suma en un $k \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=s}^{n} a \cdot r^k &= \sum_{k=s-s}^{n-s} a \cdot r^{k+s} \\ &= ar^s \sum_{k=0}^{n-s} r^k \\ &= ar^s \left(\frac{r^{n-s+1}-1}{r-1}\right) \\ &= a\left(\frac{r^{n+1}-r^s}{r-1}\right).\end{aligned}$$

Intercalar términos: Supongamos que tenemos dos números $x, y \in \mathbb{R}^*$ y deseamos que intercalar n-términos de modo que obtengamos un Progresión Geométrica. Luego $a_0 = x, ..., a_{n-1} = y$

De lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} a &= x \\ ar^{n-1} &= y \end{aligned}$$

reemplazando en la segunda ecuación

$$r^{n-1} = \frac{y}{x}$$

la cual puede tener solución vacía, una solución o dos soluciones.

Supongamos que tiene una solución, luego

$$x = a\ ;\ r = \sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}.$$

Por lo tanto la progresión geométrica es:

$$a_k = x\left(\sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}\right)^k$$

Supongamos que tiene dos soluciones, luego

$$x = a\ ;\ r = \pm\sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}.$$

Por lo tanto, existen dos respuesta y están dadas por las progresiones geométricas:

$$a_k = x\left(\sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}\right)^k\ ;\ b_k = x\left(-\sqrt[n-1]{\frac{y}{x}}\right)^k$$

Cuando intercalamos un sólo término (cuando existen dos, nos referimos al positivo), decimos que es el medio geométrico.

Ejemplo 2.4.2 El cuarto término de una P.G es 1/4 y el noveno término es 1/64. Determinar el sexto término. □

Solución. Se tiene que

$$a_3 = 1/64 \quad \wedge \quad a_8 = 1/64,$$

de aquí tenemos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} ar^3 & = & 1/4 \\ ar^8 & = & 1/64 \end{array}\right|$$

de la primera ecuación podemos despejar a en función de r y nos resulta

$$a = \frac{1}{4r^3},$$

luego reemplazamos a en la segunda ecuación

$$\begin{array}{rcl} ar^8 & = & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{4r^3}r^8 & = & \frac{1}{64} \\ r^5 & = & \frac{4}{64} \\ r & = & \frac{1}{\sqrt[5]{16}}, \end{array}$$

luego

$$\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{4r^3} \\ & = & \frac{1}{4\frac{1}{(\sqrt[5]{16})^3}} \\ & = & \frac{1}{4} \cdot (\sqrt[5]{16})^3. \end{array}$$

Así

$$a_5 = a \cdot r^5 = \frac{1}{4}(\sqrt[5]{16})^3)\frac{1}{16} = \frac{1}{64}(\sqrt[5]{16})^3.$$

Ejercicios

Si la suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 52 y el primer término es 5. Determinar la suma de los primeros seis términos.

2.4.3 Interés Simple y Compuesto.

Podemos considerar la siguiente situación, una persona pide un préstamo de monto P a un amigo, y llegan al siguiente acuerdo, todo los meses el pagará D pesos hasta que la deuda este saldа. Modelemos la situación descrita.

$$\begin{array}{ll} a_0 = P & \text{Cuando pide el préstamo} \\ a_1 = P - D & \text{Cumplido el primer mes} \\ a_2 = P - D - D & \text{Cumplido el segundo mes} \\ & \\ a_n = P - nD & \text{Cumplido los \ meses.} \end{array}$$

En este caso hemos encontrado una progresión aritmética que describe el problema del interés simple.

Una situación parecida pero la persona pide un préstamo a un banco este monto a un interés de I mensual, de manera similar modelemos la situación

$$\begin{array}{ll} a_0 = P & \text{Cuando pide el préstamo} \\ a_1 = P + \frac{I}{100}P = \left(1 + \frac{I}{100}\right)P & \text{Cumplido el primer mes} \\ a_2 = \left(1 + \frac{I}{100}\right)P + \frac{I}{100}\left(1 + \frac{I}{100}\right)P & \text{Cumplido el segundo mes} \\ a_2 = \left(1 + \frac{I}{100}\right)^2 P & \end{array}$$

es decir, que $a_{n+1} = a_n + \frac{I}{100}a_n = \left(1 + \frac{I}{100}\right) a_n$.

$$a_n = \left(1 + \frac{I}{100}\right)^n P$$

es la deuda en el mes n -ésimo. En este caso obtenemos una progresión geométrica de razón $1 + \frac{I}{100}$

Finalmente ahora consideremos que el deudor paga una cuota fija al banco C, para un mejor escritura definamos $R = 1 + \frac{I}{100}$

$a_0 = P$	Cuando pide el préstamo
$a_1 = P + \frac{I}{100}P - C = \left(1 + \frac{I}{100}\right) P - C = RP - C$	Cumplido el primer mes
$a_2 = RP - C + \frac{I}{100}(RP - C) - C$	Cumplido el segundo mes
$a_2 = R^2P - C(R + 1)$	

En general tenemos que a_n es la deuda con el banco transcurrido n meses

$$a_{n+1} = a_n + \frac{I}{100}a_n - C = Ra_n - C.$$

Por inducción podemos probar que

$$a_n = R^nP - C\left(\frac{1 - R^n}{1 - R}\right)$$

$n > 0$

Ejemplo 2.4.3 Un banco tiene un interés de 1,5 mensual, para un crédito de \$ 450.000.- pagaderos en 12 cuotas iguales.
Calcular el valor de la cuota □

Solución. Como la deuda con el banco esta dada por:

$$a_n = R^nP - C\left(\frac{R^n - 1}{R - 1}\right)$$

donde $R = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1,015$ y la deuda pasado 12 meses debe ser cero, para no deber nada al banco, tenemos que

$$a_{12} = 450000(1,015)^{12} - C\left(\frac{(1,015)^{12} - 1}{0,015}\right) = 0$$

luego tenemos que despejar C

$$C = 450000(1,015)^{12}\left(\frac{0,015}{(1,015)^{12} - 1}\right) \approx 41256$$

Hacemos una tabla de la deuda al banco durante los 12 meses, para comprobar nuestro resultado.

$$\begin{aligned}
a_0 &= & 450000 & \\
a_1 &= & 415494 &= a_0 * 1.015 - 41256 \\
a_2 &= & 380470 &= a_1 * 1.015 - 41256 \\
a_3 &= & 344921 &= a_2 * 1.015 - 41256 \\
a_4 &= & 308839 &= a_3 * 1.015 - 41256 \\
a_5 &= & 272216 &= a_4 * 1.015 - 41256 \\
a_6 &= & 235043 &= a_5 * 1.015 - 41256 \\
a_7 &= & 197313 &= a_6 * 1.015 - 41256 \\
a_8 &= & 159017 &= a_7 * 1.015 - 41256 \\
a_9 &= & 120146 &= a_8 * 1.015 - 41256 \\
a_{10} &= & 80692 &= a_9 * 1.015 - 41256 \\
a_{11} &= & 40646 &= a_{10} * 1.015 - 41256 \\
a_{12} &= & 0 &= a_{11} * 1.015 - 41256
\end{aligned}$$

2.5 Teorema del Binomio

Definición 2.5.1 Sean $n, r \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq r$, entonces se define el **Número Binomial** n sobre r como

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 2.5.2 Calcular los siguientes valores

$$\binom{3}{1};\binom{3}{2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\binom{3}{1} &= \tfrac{3!}{1!(3-1)!} = \tfrac{6}{2} = 3. \\
\binom{3}{2} &= \tfrac{3!}{2!(3-2)!} = \tfrac{6}{2} = 3.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 2.5.3 *Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $k < n$, entonces*

1 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2 $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Demostración. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $k < n$, entonces

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \left(\tfrac{n!}{k!(n-k)!} + \tfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\right) \\ &= \tfrac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\tfrac{1}{n-k} + \tfrac{1}{k+1}\right) \\ &= \tfrac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\tfrac{n+1}{(n-k)(k+1)}\right) \\ &= \tfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.5.4 Usemos la propiedad anterior para calcular

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$$

□

Solución 1. Por la propiedad anterior tenemos que

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$$

Luego tenemos que

$$6 = 3 + 3 = \binom{4}{2}$$

Teorema 2.5.5 [del Binomio]. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$, y $n \in \mathbb{N}^*$, entonces*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

Ejemplo 2.5.6 Calcularemos $(a+b)^3$. □

Solución 2.

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot a^{3-k} \cdot b^k \\ &= \binom{3}{0} \cdot a^3 + \binom{3}{1} \cdot a^2 \cdot b + \binom{3}{2} \cdot a \cdot b^2 + \binom{3}{3} \cdot b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Demostración del Teorema del Binomio.. Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$, y $n \in \mathbb{N}^*$, entonces

$$p(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

luego verifiquemos $p(1)$, para ello

$$\begin{aligned} p(1) = (a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \cdot a^{1-k} \cdot b^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot a^{1-0} \cdot b^0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a^{1-1} \cdot b^1 \\ &= a^1 b^0 + a^0 b^1 \end{aligned}$$

luego $p(1)$ es verdadero.

ii) Hipótesis $p(n)$. Tesis $p(n+1)$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \right) (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^{n-k} \cdot b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \right) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k \end{aligned}$$

Así tenemos que $p(n+1)$ es verdadero, luego $(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Rightarrow p(n+1))$ se cumple, por teorema de inducción tenemos el teorema del binomio. ■

Observación: El término de lugar k-ésimo de $(a+b)^n$ es

$$\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}.$$

Ejemplo 2.5.7 Calcular $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. □

Solución 3. Por teorema del binomio tenemos

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^{n-k} \cdot b^k.$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k \\ &= (1+1)^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Ejercicios

Calcular $\sum\limits_{k=0}^{18} \begin{pmatrix} 18 \\ k \end{pmatrix} \cdot 2^{18+k}$. tenga presente lo siguiente

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^k.$$

Ejemplo 2.5.8 Determinar el coeficiente de x^{11} y x^4 en el desarrollo de $(x^2 - \frac{3}{x})^{16}$ □

Solución 4. Expresemos el desarrollo del binomio, simplificado

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \tfrac{3}{x}\right)^{16} &= \sum_{k=0}^{16} \begin{pmatrix} 16 \\ k \end{pmatrix} \cdot \left(x^2\right)^{16-k} \cdot \left(\tfrac{-3}{x}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{16} \begin{pmatrix} 16 \\ k \end{pmatrix} \cdot x^{32-3k} \cdot (-3)^k \end{aligned}$$

a) Para determinar el coeficiente de x^{11} debemos determinar el valor de k

$$\begin{aligned} 32 - 3k &= 11 \\ 21 &= 3k \\ k &= \tfrac{21}{3} = 7 \in \mathbb{N} \cap [0, 16] \end{aligned}$$

luego el coeficiente x^{11} es

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot (-3)^7 = \frac{16!}{7!9!} (-3)^7 = -25\,019\,280$$

b) Análogamente para determinar el coeficiente de x^4 debemos determinar el valor de k

$$\begin{aligned} 32 - 3k &= 4 \\ 28 &= 3k \\ k &= \tfrac{28}{3} \notin \mathbb{N} \cap [0, 16] \end{aligned}$$

luego el coeficiente x^4 es cero.

Caso General del Teorema del Binomio

Sean $a_1, a_2, a_3, ..., a_r \in \mathbb{R}^*$, y $n \in \mathbb{N}^*$, entonces

$$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, ..., n_r \in \mathbb{N} \\ n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_r = n}} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! ... n_r!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3} ... a_r^{n_r}.$$

Ejemplo 2.5.9 Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(2 - x^2 - 3x)^6$ □

Solución 5. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$, luego

$$\begin{aligned} (1 - x^2 - 3x)^6 &= \sum_{a+b+c=6} \tfrac{6!}{a!b!c!} \cdot (2)^a \left(-x^2\right)^b \cdot (-3x)^c \\ &= \sum_{a+b+c=6} \tfrac{6!}{a!b!c!} (2)^a (-1)^b \cdot x^{2b+c} \cdot (-3)^c \end{aligned}$$

Para determinar el coeficiente de x^{41} debemos determinar los valores de a, b, c

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 6 \\ 2b+c &=& 4 \end{array}\right|$$

despejando las variables a, c tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} a &=& 2+b \\ c &=& 4-2b \end{array}\right|$$

es decir, construyamos una tabla con las posibilidades

a	b	c
$2+b$	b	$4-2b$
2	0	4
3	1	2
4	2	0

luego el coeficiente x^4 es

$$\tfrac{6!}{2!0!4!}(2)^2(-1)^0(-3)^4+\tfrac{6!}{3!1!2!}(2)^3(-1)^1(-3)^2+\tfrac{6!}{4!2!0!}(2)^4(-1)^2(-3)^0$$
$$=4860-4320+240=780$$

2.6 Permutaciones y Combinatoria

Permutaciones Sea A un conjunto de cardinal n y $r \in \mathbb{N}^*$, tal que $r \leq n$.
Se define

$$\mathcal{P}_r(A)=\{(a_1,a_2,\ldots,a_r)\in A\times A\times\cdots\times A \quad | \quad \text{con } a_i\neq a_j \text{ si } i\neq j\},$$

La interrogante que surge es ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{P}_r(A)$?
Ejemplo 2.6.1 Sea $A=\{a,b,c,d\}$. Luego

$$\begin{array}{rcr} \mathcal{P}_1(A) &=& \{(a),(b),(c),(d)\}, \\ \mathcal{P}_2(A) &=& \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d), \\ && ...(c,a),(c,b),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c)\}, \end{array}$$

Así, se obtiene que

$$P_2^4=\#(\mathcal{P}_2(A))=12.$$

Continuando:
$\mathcal{P}_3(A)=\{(a,b,c),(a,c,b),(a,b,d),\ldots\}$, luego

$$P_3^4=\#(\mathcal{P}_3(A))=24.$$

$\mathcal{P}_4(A)=\{(a,b,c,d),(a,b,d,c),(a,c,b,d),(a,c,d,b),\ldots\}$, y

$$P_4^4=\#(\mathcal{P}_4(A))=24.$$

□

Teorema 2.6.2 *Sea A un conjunto con n elementos entonces número de* ***permutaciones*** *de n elementos sobre $r \leq n$ es*

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \#(\mathcal{P}_r(A)).$$

Ahora si $n = 4$, veamos los siguientes cálculos:

i) Si $r = 1$, entonces:
$$\frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4.$$

ii) Si $r = 2$, entonces:
$$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

iii) Si $r = 3$, entonces:
$$\frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24.$$

iv) Si $r = 4$, entonces:
$$\frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 24.$$

Ejemplo 2.6.3 En cada uno de los siguiente caso considere número de cuatro dígitos

a) ¿Cuántos números con todos sus dígitos distintos se pueden construir?

b) ¿Cuántos números pares con todos sus dígitos distintos se pueden construir?

□

Solución 1. a) Como el primer dígito no pude ser cero tenemos nueve posibilidades y de los otro nueve dígito ordeno 3 luego

$$9P_3^9 = 9\frac{9!}{6!} = 4536$$

b) Tenemos dos posibilidades, la primera es que el número tenga en el dígito de las unidades un cero.
$$P_3^9 = \frac{9!}{6!} = 504$$
La segunda posibilidad es que no sea cero, luego hay que tener cuidado con la cifra de la unidades de mil, ya que no puede ser cero. Para la cuenta argumentamos del siguiente modo, considero que la cifra de las unidades es 2 luego tengo nueve dígitos incluido el cero

$$8P_2^8 = 8\frac{8!}{6!} = 224$$

al repetir la cuenta para 4,6,8

$$8P_2^8 + 8P_2^8 + 8P_2^8 = 3 \cdot 224$$

La cantidad total es

$$P_3^9 + 8P_2^8 + 8P_2^8 + 8P_2^8 + 8P_2^8 = 504 + 4 \cdot 224 = 1400$$

Ejercicios

Repita el ejemplo anterior para números de dos dígitos y después para tres dígitos

Ejemplo 2.6.4 Usando sólo los siguientes dígitos 1,2,3,4,6,8,9. ¿Cuántos números de cuatro dígitos distintos se pueden construir menores que 4000? □

Solución 2. Como los números tiene que ser menores que 4000, luego el dígito de las unidades de mil debe ser 1,2,3 por lo tanto, si es 1 tenemos

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = 120$$

que es el mismo valor para 2 y 3. Luego el total es

$$P_3^6 + P_3^6 + P_3^6 = 3P_3^6 = 360$$

Combinatoria

Sea A un conjunto de cardinal n y $r \in \mathbb{N}$, tal que $r \leq n$.

Se define

$$\mathcal{C}_r(A) = \{B \subseteq A \quad | \quad \#(B) = r\}.$$

La interrogante que surge es ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{C}_r(A)$?.

Ejemplo 2.6.5 Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Determine por extensión $\mathcal{C}_r(A)$ y su cardinal □

Solución 3. Para los primeros caso lo podemos hacer por extensión

$$\begin{array}{l}
\mathcal{C}_0(A) = \{\phi\}, \\
\mathcal{C}_1(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}, \\
\mathcal{C}_2(A) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\},
\end{array}$$

Así, se obtiene que

$$C_2^4 = \#(\mathcal{C}_2(A)) = 6.$$

Para el siguiente caso tenemos que $\mathcal{C}_3(A) = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$, luego

$$C_3^4 = \#(\mathcal{C}_3(A)) = 4.$$

Finalmente $\mathcal{C}_4(A) = \{\{a, b, c, d\}\}$, con lo cual obtenemos

$$C_4^4 = \#(\mathcal{C}_4(A)) = 1.$$

Teorema 2.6.6 *Sea A un conjunto con n elementos entonces número de **combinatoria** de*

n elementos sobre $r \leq n$ es

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \#(\mathcal{C}_r(A)).$$

Ejemplo 2.6.7 En un juego de azar tenemos que escoger 12 números para formar un cartón de un total de 30 números.
¿Cuántos cartones distintos se pueden fabricar?

$$C_{12}^{30} = \begin{pmatrix} 30 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{30!}{18! \cdot 12!} = 86\,493\,225$$

□

Ejemplo 2.6.8 Usando sólo los siguientes dígitos 1,2,3,4,6,8,9. ¿Cuántos números pares de cuatro dígitos distintos se pueden construir menores que 4000? □

Solución 4. Como los números tiene que ser menores que 4000, luego el dígito de las unidades de mil debe ser 1,2,3 por lo tanto, si es 1 tenemos puede terminar en 2,4,6,8

$$C_1^4 P_2^5 = 4\frac{5!}{3!} = 80$$

que es el mismo valor para 3.

Pero para 2 tenemos que puede terminar en 4,6,8

$$C_1^3 P_2^5 = 3\frac{5!}{3!} = 60$$

Luego el total es

$$2C_1^4 P_2^5 + C_1^3 P_2^5 = 220$$

Permutaciones con Repetición

Teorema 2.6.9 *Sean R colores tales que hay n_i repetidos de color i, donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_R$. Entonces el número de permutaciones con repetición es:*

$$P_{n_1,n_2,\ldots,n_R}^n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdots n_R!}$$

Ejemplo 2.6.10 Consideremos tres lápices dos de color rojo (iguales) y uno azul representados por las letras R, R, A, tenemos que:

$$P_{2,1}^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

esta número representa la cantidad de arreglos que podemos hacer con los tres lápices, que podemos distinguir

$$ARR; \quad RAR; \quad RRA$$

□

Ejemplo 2.6.11 Con las letras de la palabra CONTRATO. ¿Cuántas palabras (agrupación de letras) de cuatro letras se pueden construir? □

Solución 5. a) La palabra posee seis letras diferentes, (C,O,N,T,R,A) luego tenemos:

$$P_4^6 = \frac{6!}{2!} = 360.$$

b) La palabra puede tener dos letras repetidas (OO ; TT), para completar la palabra de cuatro letras se necesitan dos letras más distinta entre ella, es decir la cantidad es

$$P_{2,1,1}^4 = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$$

pero para escoger estas dos letra distintas tengo C_2^5 posibilidades, es decir

$$C_2^5 P_{2,1,1}^4 = \frac{5!}{3!2!}\frac{4!}{2!1!1!} = 120$$

pero hemos contado solamente una posibilidad, falta la otra letra, de esta manera tenemos:

$$2C_2^5 P_{2,1,1}^4 = 2\frac{5!}{3!2!}\frac{4!}{2!1!1!} = 240$$

c) Por último nos falta cuando las dos letras repetidas aparecen

$$P_{2,2}^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Así, finalmente tenemos que el número es:

$$P_4^6 + 2C_2^5 P_{2,1,1}^4 + P_{2,2}^4 = \frac{6!}{2!} + 2\frac{5!}{3!2!}\frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!2!} = 360 + 240 + 6 = 606$$

Ejercicios

Determinar usando dos método distintos, cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5231 se pueden formar.

2.7 Guía Ejercicios

I Demostrar por Inducción

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\,(1 + 3 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2)$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(0 + 1 + 3 + \cdots + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}\right)$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(-0 + 1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)\right)$
4. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \dfrac{1}{(4n+1)(4n+5)} = \dfrac{n+1}{4n+5}\right)$

5. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(0 \cdot 0! + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1\ )$

6. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(2 \cdot 1! + 5 \cdot 2! + \cdots + (n^2+1) \cdot n! = n \cdot (n+1)!\ )$

7. $(\forall n \in \mathbb{N})\left(\dfrac{4}{1 \cdot 3} + \dfrac{4}{2 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{4}{(n+1)\,(n+3)} = \dfrac{3n^2+11n+8}{(n+2)(n+3)}\right)$

8. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(0^3 + 2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2)$

9. $(\forall n \in \mathbb{N})\left((2+1/2) + (4+1/4) + \cdots + (2^{n+1} + 1/2^{n+1}) = 2^{n+2} - \dfrac{1}{2^{n+1}} - 1\right)$

10. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{2^{n+1}} = 3 - (2n+5)\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

11. $(\forall n \in \mathbb{N})\left(n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n+1) = \dfrac{3n^2+7n+2}{2}\right)$

12. $(\forall n \in \mathbb{N})\left(1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^n\,(n+1) = (-1)^n \dfrac{2n+3+(-1)^n}{4}\right)$

13. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,\left(n + (n+1) + (n+2) + ... + (3n-2) = (2n-1)^2\right)$

14. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{2n}\dfrac{1}{2n+1}\right)$

15. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\left(0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n+1}n = (-1)^{n+1}\dfrac{2n+1+(-1)^{n+1}}{4}\right)$

16. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^n(2n+1) = (-1)^n\,(n+1))$

17. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2)$

18. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(n^2 + n$ es múltiplo de $2)$

19. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(n^3 - n$ es múltiplo de $6)$

20. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(2 \cdot 4^n + 1$ es múltiplo de $3)$

21. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(5^{2n} - 7^n$ es múltiplo de $6)$

22. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(5^n - 7^{2n} = \dot{4})$

23. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\,(n^3 + 2n$ es múltiplo de $3)$

II Sumatoria y Productoria

Calcular

1 $\displaystyle\sum_{i=3}^{6} i(i-2)$ 2 $\displaystyle\sum_{k=3}^{9}(k+1)$

3 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{4}\left(\frac{(i-j)^2}{2}\right)$

4 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i}(i-j)$

5 $\displaystyle\sum_{i,k=1}^{6}(2i-3k)$

6 $\displaystyle\sum_{i=2}^{5}\sum_{j=1}^{4}(ij^2-ji^2)$

7 $\sum_{k=1}^{7}(2k-n)$

8 $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}(ij^2+2i)$

Calcular

1 $\displaystyle\sum_{k=3}^{27}(2^k-3k)$

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{510}(2k+1)^2$

3 $\displaystyle\sum_{k=21}^{53}(1+\tfrac{3}{2}k)$

4 $\displaystyle\sum_{k=7}^{61}k(n-2)$

5 $\displaystyle\sum_{k=0}^{50}(k-i)$

6 $\displaystyle\sum_{k=23}^{101}k(k-3)$

7 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}(2k+1)^2$

8 $\displaystyle\sum_{k=12}^{105}(2^k+8k^3-k)$

9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{56}(2k+3t).$

10 $\displaystyle\sum_{k=1}^{510}(2k+1)(2k-1)$

11 $\displaystyle\sum_{k=1}^{56}(2k+3i).$

12 $\displaystyle\sum_{k=35}^{52}(2+3k+5^k)$

13 $\displaystyle\sum_{k=0}^{50}(k-i)$

14 $\displaystyle\sum_{k=1}^{125}\left(\frac{3^k+2^k}{5^k}+1+k^2\right)$

15 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}k(2+k)$

16 $\displaystyle\sum_{k=1}^{125}\left(\frac{3^k-2^k}{5^k}+1\right).$

17 $\displaystyle\sum_{k=11}^{73}(k(k+2)+2^k)$

18 $\displaystyle\sum_{k=1}^{33}\tbinom{33}{k}(-2)^{10-k}4^{2k}$

Calcular

1 $\displaystyle\prod_{k=4}^{120}(k-3)$

2 $\displaystyle\prod_{k=1}^{10}3k\frac{k+1}{2k-1}$

3 $\displaystyle\prod_{k=3}^{6}\left(\frac{3i}{i-2}\right)$

4 $\displaystyle\prod_{k=15}^{20}(3k-44)$

5 $\displaystyle\frac{1}{5!}\prod_{k=2}^{6}i$

6 $\displaystyle\prod_{k=1}^{60}\left(\frac{2^k k}{3}\right)$

7 $\displaystyle\prod_{k=1}^{7}(3-i)$

8 $\displaystyle\prod_{k=4}^{120}(k-3$

9 $\displaystyle\prod_{j=10}^{32}3i\left(\tfrac{i-1}{2i-6}\right)$

10 $\displaystyle\prod_{k=1}^{60}\left(1-\tfrac{2}{k}\right)$

11 $\displaystyle\prod_{k=1}^{16}3\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Calcular

1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{35}\sum_{j=3}^{2k-3}(k^2-j)$

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}\sum_{j=k}^{2k+1}(j-k)$

3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{121}\sum_{j=k}^{2k}(jk)$

4 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{k}(2k+3i).$

5 $\displaystyle\sum_{k=10}^{82}\sum_{j=1}^{2k-3}(k-j)$

6 $\displaystyle\sum_{k=0}^{30}\sum_{i=0}^{k}(k-i)$

7 $\displaystyle\sum_{k=0}^{30}\sum_{i=0}^{k}(k-i)$

8 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{k}(2k+3i).$

9 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}\left[\sum_{j=2}^{2k+1}(j+k)\right]$

10 $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(\prod_{j=1}^{4}(2i-j)\right)$

11 $\displaystyle\sum_{k=1}^{25}\sum_{j=1}^{2k+1}jk$

12 $\displaystyle\prod_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{5}(2i-j)\right)$

13 $\displaystyle\sum_{k=1}^{35}\left[\sum_{j=2}^{2k+1}(jk)\right]$

14 $\displaystyle\prod_{k=1}^{10}\prod_{j=1}^{k}2^j$

15 $\displaystyle\sum_{r=1}^{10}\sum_{t=1}^{2r}(2k+3t).$

16 $\displaystyle\prod_{k=1}^{20}\prod_{j=k}^{2k-1}2^j$

Calcular

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2\cdot k!$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)\cdot k!$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3^k-2^k)$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-2}{(k+2)!}$

9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}$

10. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}$

11. Considere la sucesión definida por recurrencia

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_n &= a_{n-1}+n-2; \qquad n\geq 2 \end{aligned}$$

a Determinar un formula explícita para a_n

b Calcular $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k =$

12. Considere la sucesión definida por recurrencia

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1}+3n-3; \qquad n\geq 2 \end{aligned}$$

a Determinar un formula explícita para a_n

b Calcular $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k =$

III Progresiones Aritméticas y Geométricas

1. Calcular la suma de las $n$primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones

   1. $2;\ 3,25;\ 4,5;\ \cdots\quad (n=20)$
   2. $-2;\ 2\frac{1}{2};\ -3\frac{1}{8}\ \cdots\quad (n=51)$
   3. $\frac{3}{\sqrt{5}};\ \frac{4}{\sqrt{5}};\ \sqrt{5};\ \cdots\quad (n=25)$

4. $a - 3b;\ 2a - 5b;\ 3a - 7b;\ \cdots \quad (n = 18),\ a, b \in \mathbb{R}$
5. $2a - b;\ 4a - 3b;\ 6a - 5b;\ \cdots \quad (n = 23),\ a, b \in \mathbb{R}$
6. $\frac{3}{4};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{20}\ \cdots \quad (n = 49)$
7. $\frac{a+b}{2};\ a;\ \frac{3a-b}{2}\ \cdots \quad (n = 42)$
8. $1;\ 2\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{4}\ \cdots \quad (n = 51)$

2. En una Progresión Aritmética el tercer término es igual a 20 y el sexto término es 36. Escriba los seis primeros términos.

3. Los términos del lugar 2, 31, y el k-ésimo término de un Progresión Aritmética son 12, -18 y -56 respectivamente. Hallar el primer término y el valor de k.

4. En una Progresión Aritmética el tercer término es igual a 4 veces el primer término y el octavo es 21 veces. Calcular la suma de los diez primeros términos.

5. En una progresión Aritmética el tercer término es igual a 4 veces el primer término y el sexto término es 17. Escriba los seis primeros términos de la progresión.

6. Los términos de los lugares segundo, trigésimo primero y de $n-$ésimo término de una progresión aritmética son $7\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $-6\frac{1}{2}$ respectivamente. Hallar el primer término y el valor de n.

7. Intercalar siete números entre 3 y 15 de modo que formen una progresión aritmética de nueve términos.

8. Intercalar siete números entre el 3 y el 15 de forma que resulte una Progresión Aritmética.

9. Dada una Progresión Aritmética cuyo quinto término es 17 y noveno término es 28. Determinar la suma de los 20 primero términos.

10. En una Progresión Aritmética cuyo quinto término es 15 y la suma de los 7 primeros término es 28. Determinar el noveno términos.

11. Dada una Progresión Aritmética cuyo cuarto término es 13 y la suma de los 7 primeros término es 32. Determinar el noveno términos.

12. Determinar tres números en Progresión Aritmética tales que la suma de ellos es 36 si al primero se le resta 1, al segundo se le resta 2 y al tercero se le suma 2, obtenemos un progresión geométrica en el mismo orden.

13. Un maderero apila en forma piramidal $19k + 12$ tablones, de tal manera que hay k filas y en la última de ellas hay 8 tablones. Cada fila tiene un tablón más que su inmediata superior. Determinar el número de tablones.

14. Un maderero apila en forma piramidal $14k + 7$ tablones, de tal manera que hay k filas y en la última de ellas hay 8 tablones. Cada fila tiene un tablón más que su inmediata superior. Determinar el número de tablones.

15. El quinto término de una Progresión Geométrica es 162 y el segundo término es 48. Escriba los cinco primeros términos de la Progresión.

16. Si el primer término de una Progresión Geométrica es 6 y la suma de los tres primeros términos es 18. Hallar la razón y el noveno término.

17. El cuarto término de una Progresión Geométrica es $1/4$ y el séptimo término es $1/32$. Hallar el sexto término.

18. Interpolar tres números ente 5 y 3125 de manera que estén en Progresión Geométrica.

19. Se compra una finca de 2000 hectáreas a pagar en 15 años, de modo que el primer año paga US$ 100, el segundo año US$ 300, sabiendo que los pagos están el Progresión Geométrica.

    ¿ Cuánto pago por la finca?.

20. A los 3 primeros términos de una Progresión Geométrica de razón 3. Si se suma 2 al primero de ello, el segundo se mantiene y se le resta 12 al tercero, se obtiene una nueva Progresión Geométrica en el mismo orden. Hallar los números.

21. Una pelota cae desde una altura de 1002 metros si cada vez que rebota sube un tercio de la altura que cayo. ¿ Hasta qué altura desde el suelo sube después de haber rebotado por décima vez?

22. Tres personas $A, B, C.$ se reparten una herencia de US$ 210.000.- La cantidad que recibe cada uno es proporcional a su edad.

    La edad están en progresión geométrica y se sabe que A es menor que B y éste es menor que C.

    Si B tiene 6 años y recibe A recibe US$ 30.000.-

    ¿Cuánto recibe cada personas y cuales son sus edades?

23. Sea una Progresión Geométrica cuyo cuarto término es 12 y décimo término es 96. Determinar la suma de los 5 primero términos.

24. Dada la Progresión Geométrica cuyo segundo término es 20 y octavo término es 5 Determinar la suma de los 6 primero términos.

25. Se tiene dos grupos de números cada uno constituido por 3 término en progresión aritmética y la suma de cada grupo es 15, la diferencia del primer grupo es una unidad mayor que la diferencia del segundo grupo y el producto de los números del primer grupo es al producto de los números de segundo grupo como 7 es a 8.

    Hallar los números que forman cada grupo.

26. La suma de los tres primeros términos de una progresión aritmética es 48 y al primero se le suma 1 al segundo se le suma 4 y al tercero se le suma 17 resulta una progresión geométrica. Hallar los números.

27. Hallar dos números tales que su medio aritmético sea 13 y su medio geométrico sea 12

28. Demostrar que dos números tales que su medio geométrico es igual al medio aritmético son iguales.

29. Demuestre que el medio aritmético entre dos números reales positivos es siempre mayor o igual al medio geométrico.

30. Una persona viaja 50 km el primer día e incrementa 1km, en cada día posterior, el décimo día decide devolverse por el mismo camino. ¿Cuántos km recorre para volver al punto de partida?.

31. Se tiene 3 números en Progresión Geométrica de razón -3. Si se suma 14 al primero de ello y se le suma 21 al tercero, se obtiene una nueva Progresión Geométrica en el mismo orden. Hallar los números.

32. Dada la Progresión Geométrica cuyo segundo término es 5 y octavo término es 15 Determinar la suma de los 6 primero términos.

33. La suma de 3 primeros términos de una Progresión Geométrica es $13/3$. Si al tercero se le suma $-4/3$ y los demás quedan igual resulta una Progresión Aritmética en el mismo orden. Hallar los números.

34. El banco tiene el interés a $1,8$ mensual y se pide un préstamo de \$ 1.255.000.- Si el préstamo es a 36 meses

    ¿Cuál es el valor de la cuota?

35. El banco tiene el interés a $0,7$ mensual y se coloca un capital de \$1.000.000.- Al trascurrido 48 meses

    ¿Cuál es la ganancia?

36. El banco tiene el interés a $1,2$ mensual. Se pide un préstamo de \$ 450.000.- Si el préstamo es a 18 meses

    ¿Cuál es el valor de la cuota?

37. El banco tiene el interés a $1,1$ mensual. Se coloca un capital de \$ 450.000.- Al trascurrido 18 meses

    ¿Cuál es la ganancia?

IV Teorema del Binomio

1. Escribir simplificando

    a El quinto término del desarrollo de $(2a - \frac{b}{3})^8$ con $a, b \in \mathbb{R}$

    b El séptimo término del desarrollo de $(\frac{4x}{5} + \frac{5}{2x})^9$ con $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

c El quinto término del desarrollo de $(\frac{x^{3/2}}{a^{1/2}} - \frac{y^{5/2}}{b^{3/2}})^8$ con $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$

d El cuarto término del desarrollo de $(\frac{a}{3} + 9b)^{10}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

2. Determinar el coeficiente de x^n en el desarrollo de

   a $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x})^{21}$, para $n = 4$
   b $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x})^{20}$, para $n = 1$
   c $(\frac{3}{x} - 2x^3)^{10}$, para $n = 6$
   d $(x^2 + x + 1)^{15}$, para $n = 5$
   e $(x^2 - x + 1)^{15}$, para $n = 2$
   f $(x^3 + 2x + 1)^{15}$, para $n = 7$
   g $(x + 2x^2 + 1)^{10}$, para $n = 6$
   h $(2 + x^2 - x^{-3})^7$, para $n = 5$
   i $(2 + (2x)^{-3} + x^2)^7$, para $n = 7$

3. Determinar el coeficiente de a en el desarrollo de $\left(2a^2 - \frac{1}{2a}\right)^{17}$, con $a \in \mathbb{R}$

4. ¿Cuál es el coeficiente de x^2 que aparece en el desarrollo de:
$$\left(\frac{5}{3}x^3y^4 + \frac{1}{xy^2}\right)^{14} \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

5. Determinar el coeficiente de x^{32} y el de x^{-17} que aparecen en el desarrollo de
$$\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$$

6. Hallar el coeficiente de x^5 que aparece en la expresión reducida del desarrollo de
$$\left(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 1\right)^6$$

7. Hallar el coeficiente de $x^{11}y^4$ que aparece en la expresión reducida del desarrollo de
$$\left(2x^3 - 3xy^2 + z\right)^5$$

V Combinatoria y Permutaciones

1. Un estadio tiene 7 puertas de acceso, cada una de las cuales lleva hasta las gradería por tres pasillos diferentes. ¿De cuántas formas puede llegar hasta las graderías?

2. El menú del casino de la universidad, se ofrecen 7 tipos de entrada, 3 sopas distintas, 2 platos de fondo y 5 postres diferentes.

   ¿De cuántas formas puede hacer un menú que contenga una entrada, una sopa, un plato de fondo y un postre?

3. Una persona tiene 7 novelas y otra 9 revista. ¿De cuántas formas se puede intercambiar 2 revista por una novela?

4. Cinco muchachas y tres muchachos juegan a la pelota ¿De cuántas formas puede dividirse en dos equipos de cuatro personas cada uno, si en cada equipo debe haber por lo menos una muchacho?

5. ¿Cuántos números hay entre 100 y 1000 con todas las cifras distintas?

   ¿De ellos cuantos son pares?

6. Una persona tiene 8 amigos y quiere invitar diariamente a 4 de ellos de modo que el grupo no se repita. ¿Cuántos días puede cursar esta invitación?

7. En un campeonato de tenis donde participan 20 jugadores, se forman dos serie eliminatorias, pasan a la segunda etapa el que obtiene el segundo lugar y el ganador de cada serie, formado un cuadrangular.

   a ¿De cuántas formas se puede obtener tal cuadrangular?. Si los cuatro finalista se les premia de acuerdo al lugar obtenido.

   b ¿De cuántas formas se puede obtener tal situación?

   c ¿De cuántas equipo de doble se pueden realizar con los finalistas?

8. En cierto campeonato de tenis participan los siguientes asociaciones: de Concepción, con 4 jugadores, de Santiago, con 6 jugadores, de Valparaíso, con 8 jugadores, y de Arica, con 4 jugadores.

   a) En un campeonato abierto para todos los jugadores se premian los cinco primeros lugares ¿De cuántas formas se puede obtener tal situación?

   b) En un campeonato abierto para todo los jugadores los 7 últimos bajan en el ranking ¿De cuántas manera se puede obtener tal situación?

   c) ¿De cuántas manera se puede hacer un equipo de doble de cada ciudad para hacer un cuadrangular entre las ciudades? ¿Cuántos cuadrangulares?

   d) Suponga que todos los equipos se forman en una línea, agrupados por asociación ¿De cuántas forma distintas se pueden formar los equipos?

9. En cierto campeonato de tenis participan los siguientes asociaciones: de Concepción, con 3 jugadores, de Santiago, con 7 jugadores, de Valparaíso, con 9 jugadores, y de Arica, con 2 jugadores

   a) En un campeonato abierto para todos los jugadores se premian los 5 primeros lugares ¿De cuántas formas se puede obtener tal situación?

b) En un campeonato abierto para todo los jugadores los 6 últimos bajan en el ranking ¿De cuántas manera se puede obtener tal situación?

c) ¿De cuántas manera se puede hacer un equipo de doble de cada ciudad?

d) Al realizar un cuadrangular entre las ciudades ¿Cuántos cuadrangulares?

e) Suponga que todos los equipos se forman en cuatro filas una por ciudad. ¿De cuántas forma distintas se pueden formar los equipos?

10. ¿De cuántas manera se puede elegir 5 ampolleta de colores de entre 8 ampolleta de colores diferentes?, sabiendo que hay una roja, una azul otra verde en lo siguientes casos

    a Siempre se saca una azul y una verde.

    b No se elige la roja.

    c Siempre se elige la roja y la azul pero no la verde.

11. Hay 12 equipos en competencia oficial de fútbol.

    a ¿Dé cuántas formas puede bajar tres equipos a segunda división?

    b ¿Dé cuántas formas se pueden salir tres equipos campeón vice-campeón, tercer lugar?

12. ¿Dé cuántas formas se puede escoger de los naturales del 1 al 40 dos de ellos de modo que suma sea par?

13. ¿Cuántos diccionarios se necesitan para traducir directamente 12 idiomas diferentes?

14. En una reunión deben intervenir 5 personas, entre ellas esta Juan y Carlos.

    ¿Dé cuántas maneras se pueden hacer una lista de oradores?. Con la condición de Juan no debe hablar antes que Carlos.

15. En un juego de poker con 52 cartas. ¿Cuántas manos distintas pueden construirse? de modo que

    a Aparecen solamente un par.

    b Aparecen un par y un trío(full).

    c Aparecen solamente dos números pares (2,4,6,8 y 10).

    d Aparece una Escalera Real.

    e Aparece una Escalera Sucia.

16. ¿Cuántas palabras de nueve letras se pueden formar con las letras de la palabra "PROBLEMAS" si la palabra debe empezar por una vocal y terminar en consonante?

17. Para las siguientes pregunta considere las letras de la palabra CAMINOS

    a ¿Cuántas palabra de 7 letras diferentes se pueden formar?

b ¿Cuántas palabras de 7 letras diferentes se pueden formar, si no deben tener dos consonantes en lugares consecutivos?

c ¿Cuántas palabras de pueden formar, si todas las vocales deben estar en lugares consecutivos?

18. Para las siguientes pregunta considere las letras de la palabra ENDOSAR

    a ¿Cuántas palabra de 6 letras diferentes se pueden formar?

    b ¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes se pueden formar, si no deben tener dos consonantes en lugares consecutivos?

    c ¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes se pueden formar, si todas las vocales deben estar en lugares consecutivos?

19. Dada la letras de la palabra "PARALELA "

    a ¿Cuántas palabras con todas las letras distintas se pueden formar?

    b ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar?

    c ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar, con las tres A juntas?

    d ¿Cuántas palabras con 7 letras se pueden formar que comiencen y terminen con la letra L?

20. Dada la letras de la palabra "COCINERO"

    a ¿Cuántas palabras con todas las letras distintas se pueden formar?

    b ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar que comiencen y terminen con la letra O?

21. Dada la letras de la palabra "MESONERO"

    a ¿Cuántas palabras con todas las letras distintas se pueden formar?

    b ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar?

    c ¿Cuántas palabras con 4 letras se pueden formar?

    d ¿Cuántas palabras con 6 letras se pueden formar que comiencen **o** terminen con la letra O?

22. Se disponen de 3 fichas Rojas, de 3 fichas Azules y 2 fichas Negras.

    a ¿De cuántas maneras se pueden ordenar todas las fichas?

    b ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 fichas?

    c ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 fichas de modo que la primera sea Azul?

23. Se disponen de 2 fichas Rojas, de 2 fichas Azules y 2 fichas Negras.

    a ¿De cuántas maneras se pueden ordenar todas las fichas?

b ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 fichas?

c ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 5 fichas de modo que la dos fichas Azul estén juntas?

24. Entre 0 y 999

a ¿ En cuántos figura la cifra 7?.

b ¿En cuántos números figura dos veces?.

c ¿En cuántos números figura la dígito cero?

d ¿En cuántos números figura dos veces el dígito cero?

e ¿En cuántos números figura las cifras 5 y 0 ?

f ¿En cuántos números figura los dígitos 5 y 7?

25. Determinar cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5231 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 1,1,5,5,6,8,9 en cada uno de los siguientes caso:

a) Sin dígitos repetidos.

b) Con un dígito repetido.

c) Con dos dígitos repetidos.

26. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5301 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 3,3,5,5,6,7,8,9 en cada uno de los siguientes caso?

a Sin dígitos repetidos.

b Con un dígito repetido.

c Con dos dígitos repetidos.

27. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5351 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 3,5,5,6,6,7,8,9 en cada uno de los siguientes caso?

a) Sin dígitos repetidos.

b) Con un dígito repetido.

c) Con dos dígitos repetidos.

28. ¿Determinar cuántos números naturales menores que 3825 pueden formarse, usando solamente los dígitos dados a continuación 1,2,3,3,3,4,4,5?

29. ¿Determinar cuántos números naturales menores que 3825 pueden formarse, usando solamente los dígitos dados a continuación 1,2,3,3,4,4,5,6?

30. ¿Determinar cuántos números naturales menores que 3825 pueden formarse, usando solamente los dígitos dados a continuación 1,2,3,3,4,4,5?

31. Determinar cuántos números naturales de cuatro cifras menores que 3825 pueden formarse, usando solamente los dígitos dados a continuación 1,1,2,2,3,3,4,5.

32. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos mayores que 5231 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 1,1,5,5,6,8,9 en cada uno de los siguientes caso?

    a Sin dígitos repetidos.

    b Con un dígito repetido.

    c Con dos dígitos repetidos.

33. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos menores que 6500 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 3,3,5,5,6,7,8,9 en cada uno de los siguientes caso?

    a Sin dígitos repetidos.

    b Con un dígito repetido.

    c Con dos dígitos repetidos.

34. ¿Determinar cuántos números de cuatro dígitos menores que 6500 se pueden escribir usando **solamente** los dígitos 2,3,5,5,6,7,9,9 en cada uno de los siguientes caso?

    a) Sin dígitos repetidos.

    b) Con un dígito repetido.

    c) Con dos dígitos repetidos.

35. En un tren se encuentran 83 pasajeros, el cual debe hacer 10 paradas. ¿De cuántas formas puede distribuirse los pasajeros entre estas parada?

36. En un tren se encuentran 83 pasajeros, el cual debe hacer 10 paradas.

    a ¿De cuántas distribuirse los pasajeros entre estas parada?

    b Si 5 quieren bajarse en una de las estaciones.

    c Si los cinco quieren bajarse juntos.

Capítulo 3

Relaciones

3.1 Nociones Básicas

Definición 3.1.1 Sea A un conjunto no vacío.
Se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación** en A si y sólo si $\mathcal{R} \subseteq A \times A$. $\diamondsuit$

Ejemplo 3.1.2 Sea $A = \{a, b, c\}$, y dado los siguientes conjuntos

$$\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}, \mathcal{R}_2 = \{(a, a), (a, b), (b, d)\}$$

Determinar si son relaciones en A
Solución:
El conjunto $\mathcal{R}_1$ es una relación en A, ya que $\mathcal{R}_1$ es un subconjunto de $A \times A$, debido a que la primera coordenada y segunda coordenada de los elementos en $\mathcal{R}_1$ todos pertenecen al conjunto A.
Pero $\mathcal{R}_2$ no es una relación en A, ya que $\mathcal{R}_2$ no es un subconjunto de $A \times A$, por ejemplo $(b, d) \in \mathcal{R}_2, d \notin A$. $\square$

Ejemplo 3.1.3 Sea $A = \{\text{los alumnos de este curso}\}$, entonces podemos definir la siguiente relación el conjunto A, dada por:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ es amigo de } y\}.$$

$\square$

Notación: Denotaremos a los elementos (x, y) que pertenecen a la relación $\mathcal{R}$ del siguiente modo $x\mathcal{R}y$, es decir,

$$(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y,$$

donde $x\mathcal{R}y$ se lee, x esta relacionado con y.

Equivalentemente aquellos elementos que no están relacionados los denotaremos por:

$$(x, y) \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow x\not{\mathcal{R}}y.$$

Ejemplo 3.1.4 Sea $A = \{a, b, c\}$, donde la relación es:

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c)\},$$

en este caso tenemos que los siguientes elementos están relacionados

$$a\mathcal{R}a; \quad a\mathcal{R}b; \quad b\mathcal{R}c$$

pero los siguientes elementos no están relacionados

$$b\not\mathcal{R}a; \quad c\not\mathcal{R}b; \quad a\not\mathcal{R}c$$

□

Ejemplo 3.1.5 Sea $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy \text{ es múltiplo de } 3\}$, es una relación en los números naturales.
En este caso tenemos que 1 y 3 están relacionados, ya que $1 \cdot 3$ es múltiplo de 3, luego lo escribimos $1\mathcal{R}3$.
Y los elementos 2 y 5 no están relacionados, ya que $2 \cdot 5$ no es múltiplo de 3, luego lo expresamos $2\not\mathcal{R}5$. □

Ejemplo 3.1.6 Dado

$$\mathcal{R} = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{R}) \mid x_1 y_1 \text{ es múltiplo de } 3 \vee x_2^2 = y_2^2\},$$

es una relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
Por ejemplo tenemos que:

1. Los elementos $(1, 2)$ y $(3, -5)$ están relacionados, ya que la proposición $1 \cdot 3$ es múltiplo de $3 \vee 2^2 = (-5)^2$ es verdadera. Es decir,

$$(1, 2)\,\mathcal{R}\,(3, -5)$$

2. Los elementos $(-2, 1), (2, 1)$, cumple la proposición

$$(-2) \cdot 2 \text{ es múltiplo de } 3 \vee 1^2 = 1^2$$

pero como $(-2, 1) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ luego, no tiene sentido la expresión $(2, 1)\,\mathcal{R}\,(-2, 1)$.

3. Los elementos $(2, 1)$ y $(2, 5)$ no están relacionados, ya que la proposición $2 \cdot 2$ es múltiplo de $3 \vee 1^2 = (5)^2$, es falsa. Es decir,

$$(2, 1)\,\not\mathcal{R}\,(2, 5)$$

□

Definición 3.1.7 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces diremos:

1. **Refleja.**

   Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación refleja en A si y sólo si

$$(\forall x \in A)(x\mathcal{R}x).$$

2. **Simétrica.**

   Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación simétrica en A si y sólo si

$$(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x),$$

   lo que es equivalente a decir

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x),$$

3. **Antisimétrica.**

   $\mathcal{R}$ es una relación antisimétrica en A si y sólo si

$$(\forall x, y \in A)[(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y].$$

4. **Transitiva.**

   $\mathcal{R}$ es una relación transitiva en A si y sólo si

$$(\forall x, y, z \in A)[(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z].$$

5. **Totalidad.**

   $\mathcal{R}$ es una relación total en A si y sólo si

$$(\forall x, y \in A)\left[x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x\right].$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.1.8 Sea $A = \{a, b, c\}$, y la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}.$$

en A. Determinar si $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica, antisimétrica y transitiva en A. $\square$

Solución 1.

1. $\mathcal{R}$ no es refleja pues para $x = b$, se tiene que $b\mathcal{R}b \equiv F$.

2. $\mathcal{R}$ no es simétrica, ya que para $x = a$ y $b = y$, tenemos que

$$(a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a) \equiv F.$$

3. $\mathcal{R}$ es antisimétrica ya que:

$$\begin{array}{l}(a\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}a) \Rightarrow a = a \equiv V\\(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b \equiv V\\(a\mathcal{R}c \wedge c\mathcal{R}a) \Rightarrow a = c \equiv V\\(b\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b) \Rightarrow b = a \equiv V\\(b\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}b) \Rightarrow b = b \equiv V\\(b\mathcal{R}c \wedge c\mathcal{R}b) \Rightarrow b = c \equiv V\\(c\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}c) \Rightarrow c = a \equiv V\\(c\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow c = b \equiv V\\(c\mathcal{R}c \wedge c\mathcal{R}c) \Rightarrow c = c \equiv V\end{array}$$

4. $\mathcal{R}$ no es transitiva, con $x = a, y = b$ y $z = c$, se tiene que

$$[(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c] \equiv F.$$

Ejemplo 3.1.9 Dada la relación $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y^2\}$ en $\mathbb{N}$.
Determinar si $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica, antisimétrica y transitiva. □

Solución 2.

1. $\mathcal{R}$ no es refleja, ya que para $x = 2$, se tiene

$$2 = 2^4 \equiv F.$$

2. $\mathcal{R}$ no es simétrica, pues para $x = 36$ y para $y = 6$, obtenemos que

$$36\mathcal{R}6, \text{ pues } 36 = 6^2,$$

pero 6 no esta relacionado con 36, puesto que

$$6 \neq (36)^2 .$$

es decir,

$$36\mathcal{R}6 \Longrightarrow 6\mathcal{R}\,(36)^2$$
$$\left[36 = 6^2 \Longrightarrow 6 = (36)^2\right] \equiv F.$$

por lo anterior, al proposición es falsa.

$$(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$$

3. La relación $\mathcal{R}$ es antisimétrica pues.

$$(\forall x, y \in A)\left[(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y\right].$$

Supongamos que $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x)$ es verdadero. Queremos demostrar que $x = y$.

Para ello tenemos que

$$x = y^2 \wedge y = x^2$$

luego reemplazando y en la primera ecuación tenemos

$$\begin{aligned} x &= y^2 \\ x &= (x^2)^2 \\ x &= x^4 \\ 0 &= x^4 - x \\ 0 &= x(x^3 - 1) \\ 0 &= x(x-1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

de donde deducimos que $x = 0 \vee x = 1$.

Si $x = 0$, entonces $y = 0$, por tanto $x = y = 0$.

Si $x = 1$, entonces $y = 1$, por lo tanto $x = y = 1$.

De esta forma queda demostrado que $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

4. $\mathcal{R}$ no es transitiva, ya que para $x = 81, y = 9$ y $z = 3$, se tiene

$$(81 = 9^2 \wedge 9 = 3^2) \Rightarrow 81 = 3^2 \equiv F.$$

Ejercicios

Determine si las siguientes relaciones son reflejas, simétricas, antisimétricas y transitivas:

1. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy \text{ es múltiplo de } 3\}$.
2. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + y \text{ es múltiplo de } 3\}$.
3. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |x - y| < 3\}$.

3.2 Relaciones de Orden

Definición 3.2.1 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A.

1. Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación de **orden** en A o $\mathcal{R}$ es un orden en A si y sólo si $\mathcal{R}$ es una relación refleja, antisimétrica y transitiva en A.
2. Se llama **conjunto ordenado** al par $(A, \mathcal{R})$, donde $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A.
3. Dados dos conjuntos ordenados $(A, \mathcal{R})$ y $(A', \mathcal{R}')$ son iguales si y sólo si se cumple que $A = A'$ y que $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.
4. Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación de **orden total** en A o que $(A, \mathcal{R})$ es un conjunto **totalmente ordenado** si y sólo si cumple

   a $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A

   b $\mathcal{R}$ es una relación total en A, es decir,

$$(\forall a, b \in A)(a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 3.2.2 El conjunto $(\mathbb{R}, \ \leq)$ es un orden total pues:

1. Es Refleja: $(\forall x \in \mathbb{R})(x \leq x)$.
2. Es Antisimétrica: $(\forall x, y \in \mathbb{R})[(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y]$.
3. Es Transitiva: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})[(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x \leq z]$.
4. Es Total: $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leq y \vee y \leq x)$, es decir en $\mathbb{R}$ siempre se pueden comparar dos elementos.

$\square$

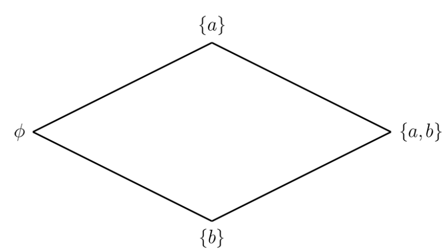
Ejemplo 3.2.3 Sean E una conjunto no vacío y $\mathcal{P}(E)$ el conjunto potencia, luego $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, es un conjunto ordenado pero en general el orden no es total. $\square$

Solución.

1. Refleja:
$$(\forall A \in \mathcal{P}(E))\,(A \subseteq A)$$
2. Antisimétrica:
$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(E))\,[(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Longrightarrow A = B]$$
3. Transitiva:
$$(\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E))\,[(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Longrightarrow A \subseteq C]$$

   por lo tanto, $\subseteq$ es una relación de orden.

Ejemplo 3.2.4 Un caso particular del caso anterior, lo tenemos con $E = \{a, b\}$, y sea $\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, considere el conjunto $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, luego tenemos el siguiente diagrama



Tenemos que $\subseteq$ es refleja antisimétrica y transitiva pero no total, pues

$$\{a\} \not\subseteq \{b\} \vee \{b\} \not\subseteq \{a\}$$

por lo cual la proposición

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(E))\,[A \subseteq B \vee B \subseteq A]$$

es falsas. $\square$

Ejercicios

Sea $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 + x \leq y^2 + y\}$.

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathbb{N}$.

Definición 3.2.5 Sean $\mathcal{R}$ una relación de orden en A, n $a \in A$ y $X \subseteq A$, entonces

1. **Elemento maximal**.

   Se dice que a es el elemento maximal de $(A,\ \mathcal{R})$ si y sólo si
   $$(\forall x \in A)(a\mathcal{R}x \Rightarrow a = x).$$

2. **Elemento minimal**.

   Se dice que a es el elemento minimal de $(A,\ \mathcal{R})$ si y sólo si
   $$(\forall x \in A)(x\mathcal{R}a \Rightarrow x = a).$$

3. **Primer elemento**.

   Se dice a es el primer elemento de $(A,\ \mathcal{R})$ si y sólo si
   $$(\forall x \in A)(a\mathcal{R}x).$$

4. **Último elemento**.

   Se dice a es el último elemento de $(A,\ \mathcal{R})$ si y sólo si
   $$(\forall x \in A)(x\mathcal{R}a).$$

5. **Cota superior**.

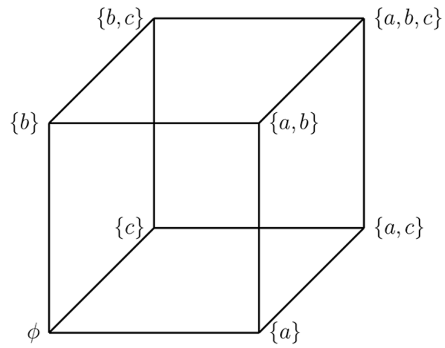
   Se dice que a es cota superior de X si y sólo si
   $$(\forall x \in X)(x\mathcal{R}a).$$

6. **Cota inferior.**

   Se dice que a es cota inferior de X si y sólo si
   $$(\forall x \in X)(a\mathcal{R}x).$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.2.6 Sea $E = \{a, b, c\}$, y consideraremos a $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$.
Tenemos que
$$\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\},$$
mediante el siguiente diagrama podemos ilustrar las contenciones que encontraremos en $\mathcal{P}(E)$.



Luego el elemento maximal es E, pues

$$\begin{gathered}(\forall B \in \mathcal{P}(E))(E \subseteq B \Rightarrow E = B)\\ E \subseteq B \wedge B \in \mathcal{P}(E)\\ E \subseteq B \wedge B \subseteq E\\ E = B.\end{gathered}$$

Por otra parte el elemento minimal es ϕ, ya que

$$(\forall B \in \mathcal{P}(E))(B \subseteq \phi \Rightarrow B = \phi).$$

□

Ejercicios

Sea $A = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,1)\}$, luego definimos la siguiente relación

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow [x < x' \vee (x = x' \wedge y' \leq y)],$$

donde $(A,\mathcal{R})$ es un conjunto ordenado.

Determinar primer elemento, último elemento, elemento maximal, elemento minimal. **Observación:** Recuerde que si un conjunto A posee una propiedad universal P y $B \subseteq A$, entonces la propiedad P se cumple en el subconjunto B.

Definición 3.2.7 Se dice que un conjunto ordenado $(A,\ \mathcal{R})$ esta **bien ordenado** si y sólo si todo subconjunto ordenado de $(A,\mathcal{R})$, no vacío tiene primer elemento. En este caso, también se dice que $\mathcal{R}$ es un **buen orden** en A. ◊

Ejemplo 3.2.8 Sea $(\mathbb{N},\leq)$ es un conjunto bien ordenado. □

Ejemplo 3.2.9 $(\mathbb{Z},\leq)$ no es un conjunto bien ordenado. □

Ejemplo 3.2.10 Sea $E = \{a,b,c\}$, donde $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$, consideraremos el conjunto

$$A = \{\{a\},\{b\},\{a,c\}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

luego $(A,\subseteq)$ no tiene primer elemento, por tanto $(\mathcal{P}(E),\ \subseteq)$ no es un conjunto bien ordenado.
□

Proposición 3.2.11 *Sea $\mathcal{R}$ una relación de orden en A.*
Si $\mathcal{R}$ es un buen orden en A entonces $\mathcal{R}$ es orden total en A

Demostración. Sean $a, b \in A$, luego $\{a, b\} \subseteq A$, por lo tanto $\{a, b\}$ tiene primer elementos.
Si a es el primer elemento de $\{a, b\}$ luego

$$a\mathcal{R}b$$

Si b es el primer elemento de $\{a, b\}$, luego

$$b\mathcal{R}a$$

Por lo tanto

$$a\mathcal{R}b \quad \vee \quad b\mathcal{R}a$$ ■

Observación: No todos los ordenes totales son buen orden, para ello tenemos.

a $\leq$ no es un buen orden en $\mathbb{Z}$

b $\leq$ no es un buen orden en $]0, \infty[$

c $\leq$ no es un buen orden en $[0, \infty[$

Axioma de Elección

Todo producto cartesiano de una familia no vacía de conjunto no vacío es no vacía.

Observación: El anterior axioma nos dice que dado $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía $I \neq \phi$ de conjunto y los conjuntos son no vacíos $(\forall i \in I)(A_i \neq \phi)$, entonces

$$\underset{i \in I}{\times} A_i \neq \phi.$$

Teorema 3.2.12 [Zermelo]. *Si A es un conjunto no vacío, entonces existe una relación sobre A que es un buen orden.*

Teorema 3.2.13 [Lema Zorn]. *Sea $(A, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado inductivo (es decir, si $C \subseteq A$ no vacío, totalmente ordenado entonces C tiene cota superior). Entonces A tiene un elemento maximal.*

3.3 Relación de Equivalencia

Definición 3.3.1 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A. Se dice que $\mathcal{R}$ es una **relación de equivalencia** en A si y sólo si $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva. ◊

Ejemplo 3.3.2 Sea $n \in \mathbb{N}$, se define en $\mathbb{Z}$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = \dot{n}.$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. □

Solución.

1. Refleja: $(\forall x \in \mathbb{Z})(x\mathcal{R}x)$, donde

$$x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x - x = 0 = \dot{n} = 0n,$$

por lo tanto se cumple la proposición.

2. Simétrica: $(\forall x, y \in \mathbb{Z})(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$, es decir,

$$x - y = \dot{n} \Rightarrow y - x = \dot{n},$$

suponemos que se cumple que $x\mathcal{R}y$, entonces

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x - y = \dot{n} \\ &\Leftrightarrow x - y = nk \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow -(x-y) = -nk \\ &\Leftrightarrow y - x = n(-k) \quad (-k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow y - x = \dot{n} \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

Luego es simétrica

3. Transitiva: $(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})[(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z]$.

Suponemos que se cumple que $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$, es decir:

$$x - y = \dot{n} \wedge y - z = \dot{n},$$

si sumamos las dos expresiones se obtiene

$$\begin{aligned} (x-y) + (y-z) &= \dot{n} + \dot{n} \\ x - z &= nk_0 + nk_1 \\ x - z &= n(k_0 + k_1) \\ x - z &= nk_2 \\ x - z &= \dot{n}, \end{aligned}$$

luego $x\mathcal{R}z$, por ello es transitiva.

De este modo, tenemos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

Ejercicios

Se define en $\mathbb{R}$ la relación

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x - y = k).$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$.

Ejercicios

Se define en $\mathbb{Z}$ la relación

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(x = yk^2).$$

Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Definición 3.3.3 Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Para todo $x \in A$ se define la **clase de equivalencia** de x modulo $\mathcal{R}$ al conjunto

$$\mathcal{R}(x) = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}.$$

$\lozenge$

Proposición 3.3.4 *Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A, entonces se cumple*

1. $(\forall x, y \in A)(x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y))$
2. $(\forall x, y \in A)(x\not{\mathcal{R}}y \Leftrightarrow \mathcal{R}(x) \neq \mathcal{R}(y))$
3. $(\forall x, y \in A)(x\not{\mathcal{R}}y \Leftrightarrow \mathcal{R}(x) \cap \mathcal{R}(y) = \phi)$

Definición 3.3.5 Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Se define el **conjunto cuociente** de A por $\mathcal{R}$ al conjunto de las clases de equivalencia

$$A/\mathcal{R} = \{\mathcal{R}(x) \mid x \in A\}$$

$\lozenge$

Ejemplo 3.3.6 Sean $x, y \in J_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, y la relación de equivalencia

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = \dot{3},$$

Encontraremos las clases de equivalencias para los elementos de J_8.

1. $$\begin{aligned} \mathcal{R}(0) &= \{y \in J_8 \mid 0\mathcal{R}y\} \\ &= \{y \in J_8 \mid 0 - y = \dot{3}\} \\ &= \{0, 3, 6\}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \mathcal{R}(1) &= \{y \in J_8 \mid 1\mathcal{R}y\} \\ &= \{y \in J_8 \mid 1 - y = \dot{3}\} \\ &= \{1, 4, 7\}. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \mathcal{R}(2) &= \{y \in J_8 \mid 2\mathcal{R}y\} \\ &= \{y \in J_8 \mid 2 - y = \dot{3}\} \\ &= \{2, 5, 8\}. \end{aligned}$$

Luego concluimos que

1. $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}(3) = \mathcal{R}(6)$,
2. $\mathcal{R}(1) = \mathcal{R}(4) = \mathcal{R}(7)$,
3. $\mathcal{R}(2) = \mathcal{R}(5) = \mathcal{R}(8)$.

Así obtenemos que el conjunto cuociente esta dado por

$$J_8/\mathcal{R} = \{\{0, 3, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}\}.$$

$\square$

Ejercicios

Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, donde

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = \dot{3}.$$

$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Determinar $\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1)$ y $\mathcal{R}(2)$.Recordemos el **Algoritmo de la División** que dice lo siguiente

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces existen $d, r \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a = bd + r, \quad 0 \leq r < b$$

Definición 3.3.7 Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A, y $S \subseteq A$.
Se dice que S es un Sistema de Representante de la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ si y sólo si

1. $(\forall x, y \in S)(x \neq y \Rightarrow \mathcal{R}(x) \neq \mathcal{R}(y))$
2. $(\forall x \in A)(\exists y \in S)(x\mathcal{R}y)$

$\Diamond$

En el ejemplo anterior habíamos obtenido que

$$J_8 \diagup \mathcal{R} = \{\{0, 3, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}\}.$$

En este caso, podemos comprobar que

a $S_1 = \{0, 1, 2\}$ es un sistema de representante,

b $S_1 = \{3, 7, 2\}$ es un sistema de representante,

c $S_1 = \{0, 1\}$ no es un sistema de representante,

d $S_1 = \{0, 1, 5, 8\}$ no es un sistema de representante,

Teorema 3.3.8 *Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A, entonces*

$$A = \dot{\bigcup_{x \in A \diagup \mathcal{R}}} \mathcal{R}(x),$$

es decir $A \diagup \mathcal{R}$ es una partición de A.

En el ejemplo anterior teníamos en J_8 las clases $\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1)$ y $\mathcal{R}(2)$, luego

$$J_8 \diagup \mathcal{R} = \{\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1), \mathcal{R}(2)\} = \{\{0, 3, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}\},$$

por lo tanto

$$J_8 = \{0, 3, 6\} \,\dot{\cup}\, \{1, 4, 7\} \,\dot{\cup}\, \{2, 5, 8\},$$

es decir J_8 es la unión disjunta de las tres clases de equivalencia.

Teorema 3.3.9 *Sea A un conjunto y C una partición de A ($A = \dot{\bigcup_{B \in C}} B$), entonces se define la relación en A dada por*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists B \in C)(x, y \in B),$$

esta es una relación de equivalencia en A y $A/\mathcal{R} = C$.

Entero Módulo n.

Recordemos que

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = \dot{n},$$

es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, luego la clase de un elemento x esta dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x) &= \{y \in \mathbb{Z} \mid x - y = \dot{n}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid -y = \dot{n} - x\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y = \dot{n} + x\} \end{aligned}$$

luego

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1), \ldots, \mathcal{R}(n-1)\},$$

es decir, un sistema de representante de la relación de equivalencia es $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, de donde se obtiene que $\#(\mathbb{Z}/\mathcal{R}) = n$.

Notación: Para la relación dada anteriormente establecemos una notación particular, dada por:

i $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \mathbb{Z}_n$.

ii $\mathcal{R}(a) = \overline{a}$, denotando la clase de a.

iii $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \equiv b \quad (n)$, se lee a es congruente con b módulo n.

Ejemplo 3.3.10 Para $n = 4$ tenemos que $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, ya que todo elemento al dividir por 4 obtenemos resto un numero entre 0 y 3. □

Proposición 3.3.11 *Sean $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, tales que*

$$x \equiv y \quad (n) \quad \wedge \quad z \equiv w \quad (n).$$

Entonces

1. $x + z \equiv w + y \quad (n)$.

2. $xz \equiv wy \quad (n)$.

Demostración. Sean $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ tal que $x \equiv y(n) \quad \wedge \quad z \equiv w(n)$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} x - y &= \dot{n} \\ z - w &= \dot{n} \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} x - y + z - w &= \dot{n} \\ (x + z) - (y + w) &= \dot{n} \end{aligned}$$

Así obtenemos la primera igualdad.

$$x + z \equiv w + y \quad (n).$$

Para la segunda amplificamos las ecuaciones por z la primera y por y la segunda sumando obtenemos

$$\begin{aligned} z(x-y)+y(z-w) &= \dot{n} \\ (xz)-(yw) &= \dot{n} \end{aligned}$$

Lo cual demuestra la proposición. ■

Definición 3.3.12 Sean $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$, se define

1. $\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$.
2. $\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{xy}$.

◊

Ejemplo 3.3.13 En $\mathbb{Z}_7$se tiene que

i $\overline{3}\cdot\overline{4}=\overline{12}=\overline{5}$.

ii $\overline{2}\cdot\overline{5}=\overline{10}=\overline{3}$.

iii $\overline{3}\cdot\overline{4}+\overline{2}\cdot\overline{6}=\overline{12}+\overline{12}=\overline{24}=\overline{3}$.

□

Proposición 3.3.14 *La suma cumple:*

1. *Asociatividad: Dado* $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ *entonces*
$$(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$$
2. *Neutro: Dado* $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ *entonces*
$$\overline{x}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{x}=\overline{x}$$
3. *Inverso: Dado* $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ *entonces*
$$\overline{x}+\overline{-x}=\overline{-x}+\overline{x}=\overline{0}$$
4. *Conmutatividad: Dado* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$ *entonces*
$$\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}.$$

Proposición 3.3.15 *La multiplicación cumple:*

1. *Asociatividad: Dado* $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ *entonces*
$$(\overline{x}\cdot\overline{y})\cdot\overline{z}=\overline{x}\cdot(\overline{y}\cdot\overline{z})$$
2. *Neutro: Dado* $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ *entonces*
$$\overline{x}\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{x}=\overline{x}$$

3. *Conmutatividad: Dado $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}.$$

Además

4. *Distributividad: Dado $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ entonces*

$$\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z})$$

3.4 Funciones

Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, se dice que $\mathcal{R}$ es una función si y sólo si

$$(\forall x, y, z \in A)([x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z] \Rightarrow y = z)$$

Ejemplo 3.4.1 Sea $A = \{a, b, c\}$, y la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}.$$

en A. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función. $\square$

Solución 1. La relación $\mathcal{R}$ no es una función, ya que la proposición

$$[a\mathcal{R}a \wedge a\mathcal{R}b] \Rightarrow a = b$$

es falsa.

Recuerde que una proposición con cuantificador universal basta un caso falso, para que sea la proposición sea falsa.

Ejercicios

La relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad |x - y| < 3\}$$

en $\mathbb{N}$. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función.

Proposición 3.4.2 *Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces$\mathcal{R}$ es una función si y sólo si $|\mathcal{R}(a)| \leq 1$, para todo $a \in A$donde $\mathcal{R}(a) = \{b \in A \ : \ a\mathcal{R}b\}$*

Note que el si $\mathcal{R}$ una relación en A y $B \subseteq A$ entonces se puede definir

$$\mathcal{R}(B) = \{c \in A \ : \ (\exists a \in B)(\ a\mathcal{R}c)\}$$

Definición 3.4.3 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces

a **Dominio**.

El elemento $a \in A$ pertenece al dominio de la función si y sólo si existe $b \in A$ tal que

$a\mathcal{R}b$, es decir, el dominio es el siguiente conjunto

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A \ : \ (\exists b \in A)(a\mathcal{R}b) \ \}.$$

b **Recorrido**.

El elemento $b \in A$ pertenece al recorrido de la función si y sólo si existe $a \in A$ tal que $a\mathcal{R}b$, es decir, el recorrido es el siguiente conjunto

$$Rec(\mathcal{R}) = \{b \in A \ : \ (\exists a \in A)(a\mathcal{R}b) \ \}.$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.4.4 Sea $A = \{a, b, c\}$, y la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, c), (b, c)\}.$$

en A. Determinar el recorrido y dominio de la relación. $\square$

Solución 2. En este caso el dominio es $Dom(\mathcal{R}) = \{a, b\}$ y su recorrido es $Rec(\mathcal{R}) = \{a, c\}$.

Ejercicios

La relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ |x - y| < 3\}$$

en $\mathbb{N}$. Determinar el recorrido y dominio de la relación.

Definición 3.4.5 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, se define la relación inversa como el conjunto

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(a, b) \in A \times A \ : \ (b, a) \in \mathcal{R} \ \}.$$

$\Diamond$

Ejemplo 3.4.6 Sea $A = \{a, b, c\}$, y la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, c), (b, c)\}.$$

en A. Determinar la relación inversa de $\mathcal{R}$.
La relación inversa es

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(a, a), (c, a), (c, b)\}.$$

$\square$

Proposición 3.4.7 *Sea $\mathcal{R}$ una relación en A, entonces se tiene*

$$Dom(\mathcal{R}^{-1}) = Rec(\mathcal{R}); \qquad Rec(\mathcal{R}^{-1}) = Dom(\mathcal{R})$$

Definición 3.4.8 Sean $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ dos relaciones en A, se define la compuesta de las relaciones al conjunto

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(a, b) \in A \times A \ : \ (\exists c \in A)(a\mathcal{S}c \wedge c\mathcal{R}b) \ \}.$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 3.4.9 Sea $A = \{a, b, c\}$, y las relaciones

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(a,c),(b,c)\}, \quad \mathcal{S} = \{(b,a),(b,c),(c,a\}$$

en A. Determinar las relaciones de las siguientes compuestas $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$. $\square$

Solución 3. En primer lugar veremos $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, para ello, el primer elemento en $\mathcal{S}$ es (b,a), notemos lo siguiente $(b,a) \in \mathcal{S} \wedge (a,a) \in \mathcal{R}$ luego $(b,a) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$,

De forma similar, $(b,a) \in \mathcal{S} \wedge (a,c) \in \mathcal{R}$ luego $(b,c) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, no hay otro elemento en $\mathcal{R}$ que tenga primer coordenada a.

Si continuamos con el segundo elemento de $\mathcal{S}$ es decir,(b,c) del mismo modo, nos encontramos que no existe elemento en $\mathcal{R}$ que tenga primer coordenada c.

Para el último elemento de $\mathcal{S}$ es decir,(c,a), encontramos que los elementos en $\mathcal{R}$ que tenga primer coordenada a son $(a,a),(a,c)$, con ellos construimos los elementos $(c,a),(c,c)$.

Revisando todos los casos obtenemos

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(b,a),(b,c),(c,a),(c,c)\}$$

Análogamente calculamos

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a,a),(b,a)\}$$

Definición 3.4.10 Sea $\mathcal{R}$ una relación en A.
Se dice que $\mathcal{R}$ es biyectiva si y sólo si $\mathcal{R}^{-1}$ y $\mathcal{R}$ son funciones $\diamondsuit$

Ejemplo 3.4.11 Dada la relación

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad : \quad 2x + 3y = xy\}.$$

en $\mathbb{R}$.

a Determinar el dominio, recorrido de la relación.

b Determine si $\mathcal{R}$ es biyectiva

c Determinar $\mathcal{R}^{-1}$

$\square$

Solución 4. Veamos el Dominio, sea $x \in \mathbb{R}$, luego debe existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y$, es decir, $2x + 3y = xy$, luego $y(3 - x) = 2x$, podemos encontrar el valor de y si $x \neq 3$.

Notemos que si $x = 3$, luego obtenemos $6 + 3y = 3y$, lo cual es imposible.

$$Dom(\mathcal{R}) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\}$$

Note que el valor de y es único, luego $\mathbb{R}$ es una función.

El recorrido lo obtenemos, sea $y \in \mathbb{R}$, luego debe existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y$, es decir, $2x + 3y = xy$, luego $x(2 - y) = 3y$, podemos encontrar el valor de x si $y \neq 2$.

Análogamente si $y = 2$, luego obtenemos $2x + 6 = 2x$, lo cual es imposible.

$$Rec(\mathcal{R}) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

De forma similar el valor de x es único, luego $\mathcal{R}^{-1}$ es una función, por lo tanto $\mathbb{R}$ es biyectiva.

La relación inversas esta dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}^{-1} & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad b\mathcal{R}a\} \\ & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad 2b+3a=ba\} \\ & = & \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad 2y+3x=yx\}. \end{array}$$

3.5 Guía Ejercicios

1. Determinar si las siguientes relaciones $\mathcal{R}_i$, son refleja, simétricas, antisimétricas o transitiva

   a $\mathcal{R}_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad 2x+3y=xy\}$.

   b $\mathcal{R}_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad x^2=y^2\}$.

   c $\mathcal{R}_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad x^2y-y^2x>0\}$.

2. Determinar si las siguientes relaciones $\mathcal{R}_i$, es refleja, simétricas, antisimétricas o transitiva

   a $\mathcal{R}_1 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \quad : \quad 2x+3y=\dot{5}\}$.

   b $\mathcal{R}_2 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \quad : \quad 4x+3y=\dot{7}\}$.

   c $\mathcal{R}_3 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \quad : \quad x \text{ es múltiplo de } y\}$.

3. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad : \quad x^2y\leq y^2x\}$$

   Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica transitiva

4. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,z)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* \quad : \quad \frac{x}{z}\leq\frac{z}{x}\}$$

   Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica y transitiva

5. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad : \quad x^2+x\leq y^2+y\}$$

   Demostrar que $\mathcal{R}_2$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$.

6. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad : \quad x^2+3x\leq y^2+3y\}$$

   Demostrar que $\mathcal{R}_2$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$.

7. Sea $\mathbb{J}_n = \{x \in \mathbb{N} \quad : \quad x \leq n\}$. Dada la relación en $\mathbb{J}_{10}$ definida por

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (3x^2 - 16x \leq 3y^2 - 16y)$$

   a Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathbb{J}_{10}$

   b ¿$\mathcal{R}$ es una relación de orden total?

   c Ordenar de mayor a menor según $\mathcal{R}$

$$1, 3, 5, 7$$

   d Sea $X = \{2, 3, 6\}$. Determinar cota superior e inferior de X.

   e Hacer un gráfico de la situación

   f Determinar, si existe, elemento maximal, y/o elemento minimal.

8. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_{10}$

$$x\mathcal{R}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2 - 19x \leq 2y^2 - 19y$$

   Determinar elementos maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

9. Dada la relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por

$$(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y') \Longleftrightarrow [(x + y < x' + y') \vee (x + y = x' + y' \wedge x \leq x')]$$

   a Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   b Ordenar los siguientes elementos de menor a mayor según $\mathcal{R}$

$$(3, 0), (1, 1), (1, 2), (0, 2)$$

   c Sea $X = \{(3, 0), (1, 3), (2, 1), (0, 3)\}$. Determinar cota superior de X y cota inferior de X.

   d Hacer un gráfico de la situación

   e Determinar, si existe, elemento maximal, y/o elemento minimal.

10. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x \leq x' \quad \wedge \quad y \geq y')$$

   Determinar en caso que existen los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

11. Dada la siguiente relación $\mathcal{R}_1$ en $\mathbb{R}^*$ definida por:

$$(x, y) \in \mathcal{R}_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x^2 \leq y^2\right)$$

   Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva.

12. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \quad : \quad \frac{x}{z} \leq \frac{z}{x}\}$$

Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica transitiva

13. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad : \quad x^3 + y^3 \text{ es múltiplo de } 2\}$$

Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica transitiva

14. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad : \quad x^2 y \leq y^2 x\}$$

Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica transitiva

15. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad : \quad x^3 - y^3 \text{ es múltiplo de } 3\}$$

Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva

16. Dada la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^*$ definida por:

$$(x,y) \in \mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 \leq \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)$$

Determinar si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva.

17. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad x^2 + x \leq y^2 + y\}$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$.

18. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x \leq x' \quad \wedge \quad y \geq y')$$

Determinar en caso que existen los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

19. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_{10}$

$$x\mathcal{R}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2 - 19x \leq 2y^2 - 19y$$

Determinar elementos maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

20. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$ definida por:

$$(x,y)\in\mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(2x^2 - 23x \geq 2y^2 - 23y\right)$$

   a ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden total en $\mathbb{N}$?
   b Sea $X = \{1,3,4,7\}$. Determinar cotas superiores e inferiores de X
   c Determinar los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{N}$ si existen.

21. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$ definida por:

$$(x,y)\in\mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(2x^2 - 17x \leq 2y^2 - 17y\right)$$

   a) ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden total en $\mathbb{N}$?
   b) Sea $X = \{1,3,4,7\}$. Determinar cotas superiores e inferiores de X
   c) Determinar los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{N}$ si existen

22. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_{10}$ definida por:

$$x\mathcal{R}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(3x^2 - 14x \geq 3y^2 - 14y\right)$$

   a Sea $X = \{1,3,4,7\}$. Determinar el conjunto de todas las cotas superiores e inferiores de X en $\mathbb{J}_{10}$
   b Determinar en caso que existan los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$

23. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_{10}$ definida por:

$$x\mathcal{R}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(2x^2 - 17x \geq 2y^2 - 17y\right)$$

   a Sea $X = \{3,4,6,8\}$. Determinar el conjunto de todas las cotas superiores e inferiores de X en $\mathbb{J}_{10}$
   b Determinar en caso que existan los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

24. Dada la siguiente relación de orden $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_{10}$ definida por:

$$(x,y)\in\mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x^2 - \frac{13}{2}x \geq y^2 - \frac{13}{2}y\right)$$

   a ¿Es $\mathcal{R}$ una relación de orden total en $\mathbb{N}$?
   b Sea $X = \{1,3,4,7\}$. Determinar el conjunto de todas las cotas superiores e inferiores de X en $\mathbb{J}_{10}$
   c Determinar en caso que existan los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

25. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_{10}$

$$x\mathcal{R}y \iff 2x^2 - 19x \leq 2y^2 - 19y$$

Determinar elementos maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_{10}$.

26. Dada la siguiente relación de orden en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff (x \leq x' \quad \wedge \quad y \geq y')$$

Determinar en caso que existen los elementos: maximal, minimal, primer elemento y último elemento de $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$.

27. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad x^2 + x \leq y^2 + y\}$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en$\mathbb{N}$.

28. Dada la siguiente relación

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad : \quad x^2 + 3x \leq y^2 + 3y\}$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden total en $\mathbb{N}$.

29. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_6 \times \mathbb{J}_8$

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff \left(2x + 3x' = \dot{5} \quad \wedge \quad 3y + 4y' = \dot{7}\right)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2, 7)$
   b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_6 \times \mathbb{J}_8) / \mathcal{R}$

30. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff \left(2x + 3x' = \dot{5} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\right)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2, 3)$
   b Calcular $|(\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5) / \mathcal{R}|$ (cardinal)
   c Determinar por extensión $(\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5) / \mathcal{R}$

31. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3$.

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff \left(x + 2x` = \dot{3} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\right)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2, 3)$
   b Calcular $|(\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3) / \mathcal{R}|$ (cardinal)
   c Determinar por extensión $(\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3) / \mathcal{R}$

32. Dada la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_4$

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \iff \quad \big(x - x' = \dot{2} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$ (clase de $(2,3)$)
   b Determinar por extensión $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_4 / \mathcal{R}$ (conjunto cuociente)

33. Dada la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en $\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_5$

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \iff \quad \big(x - x' = \dot{3} \quad \wedge \quad y + y' = \dot{2}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$ (clase de $(2,3)$)
   b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_5)/\mathcal{R}$ (conjunto cuociente)

34. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_6 \times \mathbb{J}_8$

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \iff \quad \big(\ 2x + 3x' = \dot{5} \quad \wedge \quad 3y + 4y' = \dot{7}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,7)$
   b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_6 \times \mathbb{J}_8)/\mathcal{R}$

35. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_4$

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \iff \quad \big(\ 2x + x' = \dot{3} \quad \wedge \quad y + y' = \dot{2}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$
   b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_4)/\mathcal{R}$

36. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \iff \quad \big(\ 2x + x' = \dot{3} \quad \wedge \quad y + y' = \dot{2}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$
   b Determinar por extensión $(\mathbb{J}_4 \times \mathbb{J}_4)/\mathcal{R}$

37. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5$

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \iff \quad \big(\ 2x + 3x' = \dot{5} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$
   b Calcular $|(\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5)/\mathcal{R}|$ (cardinal)
   c Determinar por extensión $(\mathbb{J}_5 \times \mathbb{J}_5)/\mathcal{R}$

38. Dada la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3$.

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \quad \iff \quad \big(x + 2x` = \dot{3} \quad \wedge \quad 2y + y' = \dot{3}\big)$$

   a Determinar por extensión $\mathcal{R}(2,3)$
   b Calcular $|(\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3)/\mathcal{R}|$ (cardinal)
   c Determinar por extensión $(\mathbb{J}_3 \times \mathbb{J}_3)/\mathcal{R}$

Capítulo 4

Números Complejos

4.1 Nociones Básicas

En este capítulo mostraremos los números complejos, e introduciremos los principales representaciones de ellos su forma cartesiana y su forma polar. Cada una de ellas nos permite resolver problemas algebraicos de mejor manera.
Definición 4.1.1 Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se define la suma y multiplicación como sigue

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &= (a + c, b + d) \\ (a,b) \cdot (c,d) &= (ac - bd, ad + cb) \end{aligned}$$

$\lozenge$

por ejemplo tenemos
$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$
Notación: Emplearemos la notación

$$(a, b) = a + bi$$

llamada forma **binomial de número complejo**, además tenemos los acuerdos habituales, es decir, si anteponemos un cero se omite la expresión y si no hay número delante de la i se subentiende que es un uno, como por ejemplo

i $(1, 1) = 1 + 1i = 1 + i$

ii $(0, 1) = 0 + 1i = i$

iii $(-1, 0) = -1 + 0i = -1$

Reescribiendo el ejemplo anterior tenemos

$$\begin{aligned} (0,1) \cdot (0,1) &= (-1, 0) \\ i \cdot i &= -1 \\ i^2 &= -1 \end{aligned}$$

Proposición 4.1.2 *El conjunto $\mathbb{R}^2$ con la suma y multiplicación definida anteriormente es un cuerpo, llamado el cuerpo de los números complejos y se denota por $\mathbb{C}$.*
De otro modo, sean $z, u, w \in \mathbb{C}$, entonces se cumple

I *Suma.*

a $(z + u) + w = z + (u + w)$.

b $z + 0 = 0 + z = z$.

c $z + (-z) = 0$, *donde* $-z = (-a) + (-b)i$, *con* $z = a + bi$.

d $z + w = w + z$.

Notación: *denotamos por*

$$-(a + bi) = (-a) + (-b)i = -a - bi$$

II *Multiplicación.*

a $(zu)w = z(uw)$.

b $1z = z1 = z$.

c *Si* $z = a + bi \neq 0$, *entonces* $zw = 1$, *donde*

$$w = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

d $zw = wz$

Notación: *denotamos por*

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi).$$

III *Distributividad.*

$$z(u + w) = zu + zw,$$

Observación: Con las notaciones anteriores tenemos en particular que

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi)(c + di)^{-1} = \frac{1}{c^2 + d^2}(a + bi)(c - di).$$

Definición 4.1.3 La potencia multiplicativa esta definida por recurrencia, sea $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{array}{rcl} z^0 & = & 1, \text{ con } z \neq 0 \\ z^1 & = & z \\ z^{n+1} & = & z^n \cdot z \end{array}$$

además si $z \neq 0$ entonces $z^{-n} = (z^{-1})^n$. $\Diamond$

Ejemplo 4.1.4 Simplificar $(1+2i)(1-3i)$

$$\begin{aligned}(1+2i)(1-3i) &= 1(1-3i)+2i(1-3i)\\ &= 1-3i+2i-6i^2\\ &= 1-3i+2i+6\\ &= 7-i.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1.5 Simplificar $(3-5i)^2$

$$\begin{aligned}(3-5i)^2 &= 9-30i+25i^2\\ &= 9-30i-25\\ &= -16-30i\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1.6 Simplificar $(a+bi)^2$

$$\begin{aligned}(a+bi)^2 &= (a+bi)\,(a+bi)\\ &= a^2+abi+bai+bibi\\ &= a^2+2abi+b^2i^2\\ &= a^2-b^2+2abi\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1.7 Calcular $(1-2i)^{-1}$

$$\begin{aligned}(1-2i)^{-1} &= \tfrac{1}{(1)^2+(-2)^2}-\tfrac{-2}{(1)^2+(-2)^2}i\\ &= \tfrac{1}{1+4}+\tfrac{2}{1+4}i\\ &= \tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{5}i\end{aligned}$$

□

Ejercicios

Comprobar que $(3-5i)^3=-198-10i$

4.2 Ecuaciones lineales y Cuadráticas

El problema que se abordar en esta sección es resolver las ecuaciones del siguiente tipo

$$Az^2+Bz+C=0$$

en $\mathbb{C}$, donde $A,B,C\in\mathbb{C}$.

4.2.1 Ecuación de Primer Grado

La ecuación de primer grado con $B \in \mathbb{C}^*, C \in \mathbb{C}$ tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} Bz &= C \\ z &= B^{-1}C \end{aligned}$$

Y en el conjunto de los números complejos, siempre tiene solución única.

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 4.2.1 Resolver:

$$2(z+3i)+i(1-3z)=5i.$$

□

Solución 1.

$$\begin{aligned} 2(z+3i)+i(1-3z) &= 5i \\ 2z+6i+1i-3zi &= 5i \\ 2z-3zi+6i+i &= 5i \\ (2-3i)\,z &= -2i \\ z &= (2-3i)^{-1}(-2i) \\ z &= (-2i)\left(\tfrac{2}{13}+\tfrac{3}{13}i\right) \\ z &= \tfrac{6}{13}-\tfrac{4}{13}i \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2 Resolver:

$$(1+i)(2z+3i)+(2-i)(4+z)=5+2i.$$

□

Solución 2.

$$\begin{aligned} (1+i)(2z+3i)+(2-i)(4+z) &= 5+2i \\ 2z+3i+2iz-3+8+2z-4i-iz &= 5+2i \\ 4z-i+iz+5 &= 5+2i \\ (4+i)\,z &= 3i \\ z &= 3i\left(\tfrac{4}{17}-\tfrac{1}{17}i\right) \\ z &= \tfrac{3}{17}+\tfrac{12}{17}i \end{aligned}$$

Observación: Tenga presente que, resolver una ecuación de primer grado, le permite también resolver sistema de ecuaciones lineales como por ejemplo

Ejemplo 4.2.3 Resolver el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2z-iw &=& 3 \\ iz-2w &=& i \end{array}\right|$$

□

Solución 3. Usaremos el método de sustitución. En la primera ecuación tenemos que

$$z=\frac{1}{2}(3+iw)$$

reemplazando en la segunda ecuación tenemos

$$\begin{aligned} i\tfrac{1}{2}\left(3+iw\right)-2w &= i \\ \tfrac{3}{2}i-\tfrac{1}{2}w-2w &= i \\ \tfrac{3}{2}i-\tfrac{5}{2}w &= i \\ w &= \tfrac{1}{5}i \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación que hemos despejado tenemos

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{1}{2}\left(3+i\tfrac{1}{5}i\right) \\ z &= \tfrac{7}{5} \end{aligned}$$

luego la solución es

$$w=\frac{1}{5}i \quad , \quad z=\frac{7}{5}$$

Ejemplo 4.2.4 Resolver el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} (2+i)\,z+(1-i)\,w & = & 9+i \\ (1+2i)\,z+(-2-i)\,w & = & 4+2i \end{array}\right|$$

$\square$

Solución 4. Usaremos el método de sustitución. En la primera ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} (2+i)\,z+(1-i)\,w &= (9+i) \\ (2+i)\,z &= (9+i)-(1-i)\,w \\ z &= \left(\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{5}i\right)\left[(9+i)-(1-i)\,w\right] \\ z &= \left(\tfrac{19}{5}-\tfrac{7}{5}i\right)+\left(-\tfrac{1}{5}+\tfrac{3}{5}i\right)w \end{aligned}$$

Reemplazando en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} (1+2i)\,z+(-2-i)\,w &= 4+2i \\ (1+2i)\left[\left(\tfrac{19}{5}-\tfrac{7}{5}i\right)+\left(-\tfrac{1}{5}+\tfrac{3}{5}i\right)w\right]+(-2-i)\,w &= 4+2i \\ \left[\tfrac{33}{5}+\tfrac{31}{5}i-\tfrac{7}{5}w+\tfrac{1}{5}iw\right]+(-2-i)\,w &= 4+2i \\ \left[33+31i-7w+iw\right]+5\,(-2-i)\,w &= 5\,(4+2i) \\ (-17-4i)\,w &= (20+10i)-(33+31i) \\ w &= (-17-4i)^{-1}\,(-13-21i) \\ w &= 1+i \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación que hemos despejado tenemos

$$\begin{aligned} z &= \left(\tfrac{19}{5}-\tfrac{7}{5}i\right)+\left(-\tfrac{1}{5}+\tfrac{3}{5}i\right)w \\ z &= \tfrac{1}{5}\,(19-7i)+\tfrac{1}{5}\,(-1+3i)\,(1+i) \\ z &= \tfrac{1}{5}\left[(19-7i)+(-1+3i)\,(1+i)\right] \\ z &= \tfrac{1}{5}\,(15-5i)=3-i \end{aligned}$$

luego la solución es

$$w=1+i, \qquad z=3-i$$

4.2.2 Ecuación de Segundo Grado

El problema general, es resolver la siguiente ecuación

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

en $\mathbb{C}$, donde $A, B, C \in \mathbb{C}$ con $A \neq 0$.

1er Etapa Veremos el caso $B = 0$

Consideremos el siguiente ejemplo

$$z^2 = 1 + 2i,$$

Sea $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} (a+bi)^2 &= 1+2i \\ a^2 + 2abi + b^2i^2 &= 1+2i \\ a^2 - b^2 + 2abi &= 1+2i. \end{aligned}$$

Entonces $a^2 - b^2 = 1 \wedge 2ab = 2$.

Como $ab \neq 0$, luego $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, por tanto de la segunda igualdad obtenemos

$$a = \frac{1}{b},$$

reemplazando en la primera igualdad se obtiene que $1 - b^4 = b^2$, que al reescribir se tiene $b^4 + b^2 - 1 = 0$, y es una ecuación de segundo grado en la variable b^2, cuya solución positiva es

$$b^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

de donde deducimos que

$$b = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}},$$

por lo cual se obtiene que

$$a = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}.$$

Finalmente la soluciones son

$$\begin{aligned} z &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{5}-1}} + \sqrt{\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}}i\right] \\ z &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}} + \sqrt{\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}}i\right] \end{aligned}$$

Caso General

La solución de la ecuación $z^2 = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, es

$$z = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \mathrm{sg}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i\right]$$

donde $\mathrm{sg}(b) = \frac{|b|}{b}$ y se extiende o acepta que $\mathrm{sg}(0) = 1$.

La formula anterior se obtiene de considerar $(x + yi)^2 = a + bi$, que al igualar se tiene

$$x^2 - y^2 = a \quad \wedge \quad 2xy = b$$

Si $b = 0$, entonces depende del signo de a para finalizar, es decir, $z = \sqrt{a}, a > 0$ o bien $z = \sqrt{|a|}i, a < 0$.

Si $b \neq 0$, entonces despejando y y reemplazando obtenemos

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

cuyo discriminante es $16a^2 + 16b^2$ siempre positivo, luego siempre tiene solución la ecuación de segundo grado, de este modo se tiene que

$$x^2 = \frac{4a \pm 4\sqrt{a^2 + b^2}}{8} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}$$

La otra solución no es posible en los reales, por lo tanto

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}$$

reemplazando en el despeje de y se obtiene

$$y = \pm b\sqrt{\frac{2}{4(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}} = \pm b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2b^2}} = \pm\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Ejemplo 4.2.5 Resolver

$$z^2 = 3 - 4i$$

$\square$

Solución 1. Notemos que $a = 3$ y $b = -4$, luegosg$(b) = \mathrm{sg}(-4) = -1$

$$\begin{aligned} z &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}+3}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}-3}{2}}i\right] \\ z &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{5+3}{2}} - \sqrt{\tfrac{5-3}{2}}i\right] = \pm\left[\sqrt{\tfrac{8}{2}} - \sqrt{\tfrac{2}{2}}i\right] \\ &= \pm[2 - i] \end{aligned}$$

2^{da} **Etapa**

Consideremos la siguiente ecuación

$$z^2 + 2z + 1 + i = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + 1 + i &= 0 \\ z^2 + 2z &= -1 - i \\ z^2 + 2z + 1 &= -1 - i + 1 \\ (z + 1)^2 &= -i \\ z + 1 &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}i\right] \\ z &= -1 \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}i\right] \end{aligned}$$

Caso General

Consideremos la ecuación

$$z^2+(a+bi)z+(c+di)=0,$$

luego

$$\begin{aligned} z^2+(a+bi)z+(c+di) &= 0\\ \left(z+\left(\tfrac{a+bi}{2}\right)\right)^2 &= \left(\tfrac{a+bi}{2}\right)^2-(c+di)\\ \left(z+\left(\tfrac{a+bi}{2}\right)\right)^2 &= \left(\tfrac{a^2-b^2}{4}-c\right)+\left(\tfrac{ab}{2}-d\right)i \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $w=z+\left(\frac{a+bi}{2}\right)$ tenemos

$$\begin{aligned} w^2 &= \left(\tfrac{a^2-b^2}{4}-c\right)+\left(\tfrac{ab}{2}-d\right)i\\ w^2 &= u+vi \end{aligned}$$

con $u=\frac{a^2-b^2}{4}-c$ y $v=\frac{ab}{2}-d$ es decir

$$w_0=\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}}+\operatorname{sg}(v)\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}i$$

Donde $u^2+v^2=\left(\frac{a^2-b^2}{4}-c\right)^2+\left(\frac{ab}{2}-d\right)^2$

Así tenemos la solución dada por:

$$\begin{aligned} z+\left(\tfrac{a+bi}{2}\right) &= \pm w_0\\ z &= -\left(\tfrac{a+bi}{2}\right)\pm w_0. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.6 Resolver la siguiente ecuación

$$z^2+(1-2i)\,z-(2+4i)=0.$$

□

Solución 2. Completando cuadrado tenemos

$$\begin{aligned} z^2+(1-2i)\,z-(2+4i) &= 0\\ \left(z+\tfrac{1}{2}(1-2i)\right)^2-\tfrac{1}{4}(1-2i)^2-(2+4i) &= 0\\ \left(z+\tfrac{1}{2}(1-2i)\right)^2 &= \tfrac{5}{4}+3i \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable

$$w^2=\frac{5}{4}+3i$$

luego

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+3^2}+\left(\frac{5}{4}\right)}{2}}+\operatorname{sg}(3)\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+3^2}-\left(\frac{5}{4}\right)}{2}}i\\ w &= \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{169}{16}}+\left(\frac{5}{4}\right)}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{169}{16}}-\left(\frac{5}{4}\right)}{2}}i\\ w &= \sqrt{\frac{\frac{13}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)}{2}}+\sqrt{\frac{\frac{13}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)}{2}}i=\sqrt{\frac{18}{8}}+\sqrt{\frac{8}{8}}i\\ w &= \tfrac{3}{2}+i \end{aligned}$$

luego la ecuación tiene la solución

$$\begin{aligned} \left(z+\frac{1}{2}(1-2i)\right)^2 &= \frac{5}{4}+3i \\ z+\frac{1}{2}(1-2i) &= \pm\left(\frac{3}{2}+i\right) \\ z &= -\frac{1}{2}(1-2i)\pm\left(\frac{3}{2}+i\right) \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1}{2}(1-2i)+\left(\frac{3}{2}+i\right) \quad \vee \quad z_2 = -\frac{1}{2}(1-2i)-\left(\frac{3}{2}+i\right) \\ z_1 &= 1+2i \quad \vee \quad z_2=-2 \end{aligned}$$

De modo de facilitar la escritura podemos introducir las siguiente notación
Definición 4.2.7 Sea $z=a+bi\in\mathbb{C}$ donde $a,b\in\mathbb{R}$

1 La **parte real** de $a+bi$ es el número a, y lo denotamos por

$$Re(z)=Re(a+bi)=a.$$

2 La **parte imaginaria** de $a+bi$ es el número b, el que denotamos por:

$$Im(z)=Im(a+bi)=b.$$

3 El **conjugado** de $a+bi$ es el número $a-bi$, y se denota por:

$$\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi.$$

4 El **módulo** o norma de $a+bi$ es el número $\sqrt{a^2+b^2}$, y se denota por

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

$\Diamond$

La solución de la ecuación $z^2=C$, con $C\in\mathbb{C}$, es

$$z=\pm\left[\sqrt{\frac{|C|+Re(C)}{2}}+\mathrm{sg}(Im(C))\sqrt{\frac{|C|-Re(C)}{2}}i\right]$$

Proposición 4.2.8 *Sean $A,B,C\in\mathbb{C}$ con $A\neq 0$, entonces la ecuación de segundo grado*

$$Az^2+Bz+C=0$$

tiene solución en $\mathbb{C}$, para ello sea $\delta^2=B^2-4AC$ entonces las soluciones son

$$z=\frac{-B\pm\delta}{2A}$$

Ejemplo 4.2.9 Resolver la siguiente ecuación

$$iz^2+(2-3i)z+(5i-1)=0.$$

$\square$

Solución 3. Resolvamos directamente la ecuación

$$iz^2 + (2-3i)\,z + (5i-1) = 0.$$

Sea

$$\delta^2 = \triangle = (2-3i)^2 - 4i\,(5i-1) = 15 - 8i$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{225+64}+15}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{225+64}-15}{2}}\,i\right]\\
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{289}+15}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{289}-15}{2}}\,i\right]\\
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{17+15}{2}} - \sqrt{\tfrac{17-15}{2}}\,i\right]\\
\delta &= \pm\left[4-i\right]
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$z = \frac{-(2-3i) \pm (4-i)}{2i}$$

o bien

$$z = 2+3i \qquad z = 1-i$$

Ejemplo 4.2.10 Resolver la siguiente ecuación

$$z^2 + (1-2i)\,z + (2+4i) = 0.$$

□

Solución 4. Resolvamos directamente la ecuación

$$z^2 + (1-2i)\,z + (2+4i) = 0.$$

Sea

$$\delta^2 = \triangle = (1-2i)^2 - 4\,(2+4i) = -11 - 20i$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{121+400}-11}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{121+400}+11}{2}}\,i\right]\\
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{521}-11}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{521}+11}{2}}\,i\right]
\end{aligned}$$

así tenemos que

$$z = \frac{-(1-2i) \pm \left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{521}-11}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{521}+11}{2}}\,i\right]}{2}$$

Ahora veremos algunas propiedades, de los elementos definidos
Proposición 4.2.11 *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:*

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
4. $z + \overline{z} = 2Re(z)$.
5. $z - \overline{z} = 2Im(z) \cdot i$.
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
7. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
8. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, con $w \neq 0$.
9. $|z + w| \leq |z| + |w|$.
10. $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Ejemplo 4.2.12 Simplificar

$$Z = \frac{\overline{(1-2i)} + |1-3i|}{(1+i)^2}$$

□

Solución 5.

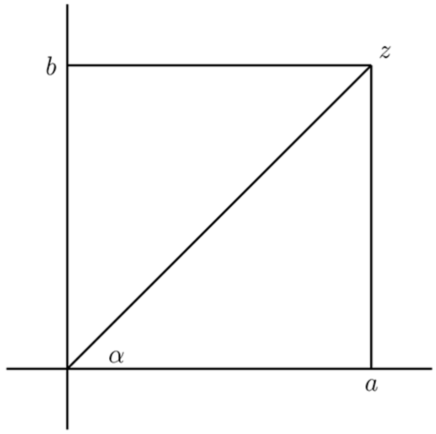
$$\begin{aligned} Z &= \frac{\overline{(1-2i)} + |1-3i|}{(1+i)^2} \\ &= \frac{1+2i+\sqrt{10}}{2i} \\ &= 1 + \left(\frac{1+\sqrt{10}}{2i}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1+\sqrt{10}}{2} i\right) \end{aligned}$$

4.3 Forma Polar de un Complejo

Ahora veremos un interpretación del módulo, para ellos sea $z = a + bi$,

$>$Todo numero complejos z es el par ordenado (a, b), luego el módulo de z es la distancia desde el origen al punto (a, b).

Sea $z = a + bi$, luego tenemos el siguiente gráfico



Recordando que
$\cos(\alpha) = \frac{\text{cat ady}}{\text{hip}}$.
Lo que es equivalente a decir:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}.$$

$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{cat op}}{\text{hip}}$.
Lo que es equivalente a:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}.$$

La forma polar de un complejo $z = a + bi$ esta dada por:

$$z = |z|\cos(\alpha) + (|z|\operatorname{sen}(\alpha))i = |z|[\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha].$$

Notación:

$$\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha) = cis(\alpha)$$

Ejemplo 4.3.1 Transformar a su forma polar

a $z = i = |i|cis(\pi/2) = cis(\pi/2)$.

b $z = 3cis(\pi/4) = 3\cos(\pi/4) + 3i\operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.

□

Ejemplo 4.3.2 Calcular en forma polar

1. $|cis\alpha| = |\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = 1$.

2. $(cis\alpha)^{-1} = cis(-\alpha)$.

□

Propiedades:
Consideremos $z = |z|cis(\alpha), w = |w|cis(\beta) \in \mathbb{C}$, entonces se cumple

1. $z \cdot w = |z \cdot w|cis(\alpha + \beta)$.

2. $z : w = \left|\frac{z}{w}\right| cis(\alpha - \beta)$, con $w \neq 0$.
3. $z^n = |z|^n cis(n\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$.

Observación: Recordemos alguna identidades trigonometrías básicas

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
2. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.
3. $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.
4. $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$.
5. $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$.
   $\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}(\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$

Demostración. La multiplicación compleja en forma binomial

$$\begin{aligned} (cis\alpha)\cdot(cis\beta) &= (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - i\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha \\ &= [\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta] + i[\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta] \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ &= cis(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} z\cdot w &= |z|cis(\alpha)\cdot|w|cis(\beta) \\ &= |z||w|cis(\alpha)cis(\beta) \\ &= |zw|cis(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Además notemos que

$$\begin{aligned} \overline{cis}(\alpha) &= \overline{\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha} \\ &= \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha \\ &= \cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha) \\ &= cis(-\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \div w &= |z|cis(\alpha) \div |w|cis(\beta) \\ &= |z|cis(\alpha)\cdot\frac{1}{|w|}\overline{cis(\beta)} \\ &= |z|\cdot\frac{1}{|w|}cis(\alpha)cis(-\beta) \\ &= \left|\frac{z}{w}\right| cis(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.3.3 Calcular $(1-i)^{50}$. □

Solución 1. Reescribiendo en forma polar el número complejo tenemos

$$1 - i = \sqrt{2}cis(-\pi/4),$$

Aplicando la propiedad

$$\begin{aligned}(1-i)^{50} &= (\sqrt{2})^{50} cis\left(\tfrac{-50\pi}{4}\right)\\ &= (2)^{25} cis\left(\tfrac{-25\pi}{2}\right)\\ &= (2)^{25} cis\left(-(\pi/2+12\pi)\right)\\ &= (2)^{25} \overline{cis(\pi/2)}\\ &= (2)^{25} \overline{[0+i]}\\ &= -2^{25} i.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.4 Simplificar

$$A = \frac{(1+i)^{20}\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}}{\left(\sqrt{3}i+1\right)^{24}}$$

□

Solución 2. Transformando a la forma polar tenemos que

$$\begin{aligned}A &= \tfrac{(1+i)^{20}\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}}{\left(\sqrt{3}i+1\right)^{24}}\\ A &= \tfrac{\left(\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{20}\left(2cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{18}}{\left(2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{24}}\\ A &= \tfrac{2^{10}cis\left(\frac{20\pi}{4}\right)2^{18}cis\left(\frac{18\pi}{6}\right)}{2^{24}cis\left(\frac{24\pi}{3}\right)}\\ A &= 2^4 cis\left(\tfrac{20\pi}{4}+\tfrac{18\pi}{6}-\tfrac{24\pi}{3}\right)\\ A &= 2^4 cis\left(5\pi+3\pi-8\pi\right) = 2^4 cis\,(0) = 2^4.\end{aligned}$$

Propiedades de la raíz n-ésima:

Sea $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, entonces:

$$z^n = w = |w|cis(\alpha),$$

tiene n soluciones y son

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\cdot cis\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k \in \mathbb{J}_{n-1}.$$

Ejemplo 4.3.5 Encontrar las soluciones de la ecuación

$$z^2 = i = cis(\pi/2),$$

□

Solución 3. Aplicando la propiedad tenemos

$$z_k = \sqrt{1}cis\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right), \quad k \in \{0,1\},$$

de donde

$$\begin{aligned}&z_0\sqrt{1}cis\left(\tfrac{\pi/2+0}{2}\right)\\ &= cis(\pi/4)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{1} cis\left(\tfrac{\pi/2+2\pi}{2}\right) \\ &= cis(5\pi/4) \\ &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

De donde $z_0 = -z_1$.

Ejercicios

Resolver

$$z^4 = \frac{(1-i)^{20}\left(\sqrt{3}-i\right)^{15}}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{24}}$$

4.4 Guía Ejercicios

1. Expresar los siguientes complejos en la forma cartesiana $a + bi$

   a $(2+3i)+(-1-2i)$

   b $(-1+i)(3-2i)$

   c $(1+i)(1-i)$

   d $\dfrac{1}{i}$

   e $\dfrac{1}{1-i}$

   f $\dfrac{3-i}{2+\sqrt{2}i}$

   g $\dfrac{11-i}{11+i}$

   h $\dfrac{1+i}{1+2i}+\dfrac{1-i}{1-2i}$

   i $\left(\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\right)^5$

   j $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$

   k $\dfrac{1-i}{1+i}$

   l $i^{13}-i^9$

   m $\left(\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\right)^5$

n $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$

o $(-1+i)^{15}$

p $\dfrac{1+ri}{2r+(r^2-1)i}$, con $r \in \mathbb{R}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones

 a $2iz = 3 - i$. Respuesta: $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

 b $(1+i)\,z = 1 + 2i$. Respuesta: $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

 c $(1-i)\,(z+i) = 2 + i$. Respuesta: $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

 d $(2-3i)\,(z+i) + (1-2i)\,(z-1+2i) = 1 + 4iz = -\frac{5}{34} - \frac{31}{34}i$

 e $\frac{1}{3}\,(2-i)\left(\frac{1}{5}z + 5i\right) + \frac{3}{2}\,(1-i)\left(\frac{1}{5}z + 1 - 3i\right) = 1 + 4i$. Respuesta: $z = -\frac{129}{29} + \frac{337}{29}i$

3. Resolver los siguientes sistema

 a
$$\left.\begin{array}{rcl} 2z + iw & = & 3 \\ iz + 2w & = & i \end{array}\right|$$
 Respuesta : $w = -\frac{1}{5}i, z = \frac{7}{5}$

 b
$$\left.\begin{array}{rcl} (2+i)\,z + iw & = & 4 \\ (1-i)\,z + 2w & = & 1+i \end{array}\right|$$
 Respuesta : $z = \frac{13}{5} - \frac{6}{5}i, w = -\frac{1}{5} + \frac{12}{5}i$

 c
$$\left.\begin{array}{rcl} (1+i)\,z + (2i-1)\,w & = & 1+i \\ (2-i)\,z + (2+3i)\,w & = & 4+i \end{array}\right|$$
 Respuesta : $z = -5 + 2i, w = -4i$

 d
$$\left.\begin{array}{rcl} (1+i)\,z + (2i-1)\,w & = & -9+4i \\ (2+3i)\,z + (1-3i)\,w & = & 7+4i \end{array}\right|$$
 Respuesta : $w = 2 + 3i, z = 1 + 2i,$

 e
$$\left.\begin{array}{rcl} (1-2i)\,z + (3-2i)\,w & = & 7-14i \\ (2-i)\,z + (1-3i)\,w & = & 3-14i \end{array}\right|$$
 Respuesta : $z = 2 - i, w = 3 - i$

4. Determinar todos los complejos tales que satisfacen

 a $z^2 = 3 - 4i$. Respuesta son : $z_1 = -2 + i, z_2 = 2 - i$

 b $z^2 = -8 - 6i$. Respuesta son : $z_1 = -1 + 3i, z_2 = 1 - 3i$

c $z^2 = -2$. Respuesta son : $z_1 = i\sqrt{2}, z_2 = -i\sqrt{2}$

d $z^2 + 2z + 8 = 0$. Respuesta son : $z_1 = -1 + i\sqrt{7}, z_2 = -1 - i\sqrt{7}$

5. Hallar los conjugados de

a $\dfrac{1}{i} + i$. Respuesta: 0

b $|1 - i| + i$. Respuesta: $\sqrt{2} - i$

c $||1 + i| + i| + i$. Respuesta : $\sqrt{3} - i$

d $1 + i + i^2 + ... + i^{21}$. Respuesta: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

e $(1 + 2i)(2 - i)(1 + i)$. Respuesta: $1 - +7i$

6. Hallar los módulo en los siguientes casos:

a -1. Respuesta : 1

b $-1 - i$. Respuesta : $\sqrt{2}$

c $1 - \sqrt{2}i$. Respuesta : $\sqrt{3}$

d i^{17}. Respuesta : 1

e $\dfrac{2 - i}{i - 2}$. Respuesta : 1

f $\dfrac{2}{1 - i\sqrt{2}}$. Respuesta : $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

g $\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Respuesta : 1

h $\dfrac{|1 - i| - i}{|1 - i| + i}$. Respuesta : 1

i $10^6 \left[\dfrac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right]$. Respuesta : $1000\,000$

7. Expresar los siguientes complejos en la forma polar $r\,\mathrm{cis}(\alpha)$

a) -1

b) $-1 - i$

c) $\sqrt{3} - i$

d) $i^{13} - i^8$

e) $4 + 5i$

8. Completar las siguientes Afirmaciones

a $z = (1 + i)^2$ entonces $\mathrm{Re}(z) =$.........................

b $z = (2 + 3i)(1 + i)$ entonces $\mathrm{Im}(z) =$.........................

c $z = \dfrac{(1+i)^2}{\|1-i\|}$ entonces $\mathrm{Im}(z) =$.........................

d $z = \dfrac{(1+2i)^2}{\|1-i\|}$ entonces $\mathrm{Re}(z) =$.........................

e $(3+i)z = \overline{(1+2i)}$ entonces la forma binomial de $z =$.........................

f $(3+i)z = \overline{(4+i)}$ entonces la forma binomial de $z =$.........................

g $1 + (3+i)z + 2z^2 = 0$ entonces las soluciones en forma binomial son

$$z_1 = \text{.............................} z_2 = \text{.............................}$$

h $z^2 + (1+3i)z - 2 + i = 0$ entonces las soluciones en forma binomial son

$$z_1 = \text{.............................} z_2 = \text{.............................}$$

9. Resolver los siguientes sistemas

a

$$\left.\begin{array}{rcl} z + (2+i)\,w &=& 1+i \\ iz + (1+2i)w &=& 1-i \end{array}\right|$$

b

$$\left.\begin{array}{rcl} iz + 3w &=& 1+i \\ 2z + (1-2i)w &=& 1 \end{array}\right|$$

c

$$\left.\begin{array}{rcl} (1+i)z + 2iw &=& 1+2i \\ iz + (1+2i)w &=& 1-i \end{array}\right|$$

d

$$\left.\begin{array}{rcl} iz + 2w &=& 2+1 \\ iz + (1+2i)w &=& 1-i \end{array}\right|$$

e

$$\left.\begin{array}{rcl} 3z + (2-i)\,w &=& 1+i \\ iz + (1+i)w &=& 1-i \end{array}\right|$$

f

$$\left.\begin{array}{rcl} iz + 3w &=& 1+i \\ 2z + (1-2i)w &=& 1 \end{array}\right|$$

10. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $z^2 - iz + 6 = 0$

b) $z^2 - 3z + 2iz - 6i = 0$

c) $z^2 - z - 5iz - 8 + i = 0$

d) $z^2 - 4z + 6iz - 5 - 10i = 0$

e) $6z^2 - 5z + 16iz - 7 - 6i = 0$

f) $(7+i)\,z^2+(16i-3)\,z-7-6i=0$

11. Resolver la ecuación $z^n=w$ en cada caso

a $w=i, \qquad n=4$

b $w=1+i, \qquad n=6$

c $w=1+\sqrt{3}i, \qquad n=5$

d $w=1-\sqrt{3}i, \qquad n=8$

e $w=\sqrt{3}-i, \qquad n=6$

f $w=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}, \qquad n=8$

12. Sea n un número natural. Calcular

a $\sum\limits_{k=0}^{n} i^k$

b $\prod\limits_{k=0}^{n} i^k$

13. Determinar el conjunto solución de la ecuación

$$z^6=\frac{(1+i)^4(\sqrt{3}+i)^{15}}{(-3+3i)^2}$$

$$z^5=\frac{(1+i)^7(\sqrt{3}-i)^{15}}{(3-3i)^2}$$

14.

$$z^5=\frac{(1-i)^7(\sqrt{3}-i)^{15}}{(3+3i)^8}$$

15.

$$(z-i)^3=\frac{(i-1)^{10}(1+\sqrt{3}i)^{15}}{(\sqrt{3}-i)^6}$$

16. Hallar $z\in\mathbb{C}$ (en formar polar) tal que

$$4(i-z^2)^2=(1+i)^4$$

17. Hallar $z\in\mathbb{C}$ (en formar polar) tal que

$$-2iz^3+\overline{(1-i)}\cdot i=\bar{i}\cdot(1+i)$$

18. Sean $z,w\in\mathbb{C}$. Demostrar que si $z+w$ y zw son números reales entonces z y w son números reales

Capítulo 5

Polinomios

5.1 Nociones Básicas

Definición 5.1.1 Sea $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Un polinomio en la variable x con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde a_i con i desde 0 hasta n son los **coeficientes del polinomio** y n es un número natural Además si $a_n \neq 0$, se dice que n es el **grado del polinomio**, solamente esta definido el grado cuando el polinomio es distinto de 0. $\Diamond$

Notación: Un polinomio lo denotamos por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \vee \ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

El grado del polinomio $p(x)$ lo denotamos por

$$gr(p(x)) = n = deg(p(x)),$$

cuando $a_n \neq 0$.

El conjunto de todos los polinomios con coeficiente en $\mathbb{K}$ lo denotamos por $\mathbb{K}[x]$

Ejemplo 5.1.2 Los siguientes son algunos ejemplos de polinomios

a $p(x) = 5x^8 - \sqrt{2}x^3 + 20x - 4 \in \mathbb{R}[x]$.

b $q(x) = (2-i)x^4 - (4+\sqrt{3}i) \in \mathbb{C}[x]$.

c $r(x) = 3x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 4 \in \mathbb{Z}[x]$.

$\square$

Ejemplo 5.1.3 Los siguientes son algunos ejemplos de los grados del polinomio correspondiente

a $p(x) = 5x^8 - \sqrt{2}x^3 + 20x - 4 \in \mathbb{R}[x]$ y su grado es 8.

b El polinomio $p(x) = 3x^6 - 2x^2 - 5$, tiene grado 6.

c $q(x) = (2-i)x^4 - (4+\sqrt{3}i) \in \mathbb{C}[x]$ y su grado es 4.

d $r(x) = 3x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 4 \in \mathbb{Z}[x]$ y su grado es 5

$\square$

Definición 5.1.4 Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Los **términos** de $p(x)$ son $a_i x^i$ con $i = 0, ..., n$.

2. a_i es el **coeficiente** del término $a_i x^i$

3. El coeficiente $a_n \neq 0$ recibe el nombre de **coeficiente principal** o coeficiente director del polinomio.

4. a_0 es el **coeficiente constante** del polinomio.

5. El polinomio se llama constante si y sólo si $p(x) = a_0$.

6. El polinomio se llama lineal si y sólo si $gr(p(x)) = 1$.

7. El polinomio se llama cuadrático si y sólo si $gr(p(x)) = 2$.

$\diamondsuit$

Ejemplo 5.1.5 Algunos ejemplos de tipo o elementos de un polinomio.

a $p(x) = 8x^2 - 20x - 4 \in \mathbb{R}[x]$ y es un polinomio cuadrático.

b $q(x) = (1-5i)x^4 - (4+\sqrt{3}i)x + 2 - i \in \mathbb{C}[x]$ y el coeficiente constante es $2-i$.

c $r(x) = 4x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ y el coeficiente del término cúbico es 5

$\square$

5.2 Álgebra Polinomial

Definición 5.2.1 Sean $p(x) = a_n x^n + \cdots a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$, entonces

I **Igualdad** $p(x) = q(x)$ si y sólo si

a. $p(x)$ y $q(x)$ tienen el mismo grado.
b. Los coeficientes de los respectivas términos deben ser iguales.

II **Suma** supondremos que $n > m$, entonces se define

$$p(x)+q(x) = a_n x^n + \cdots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \cdots + (a_0 + b_0),$$

donde

$$gr(p(x) + q(x)) = max(gr(p(x)), gr(q(x)))$$

III **Producto**

$$p(x) \cdot q(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \cdots + c_0,$$

donde $r = m + n$ y además

$$c_i = \sum_{j+k=n} a_j \cdot b_k.$$

Por otra parte

$$gr(p(x) \cdot q(x)) = gr(p(x)) + gr(q(x)).$$

$\Diamond$

Ejemplo 5.2.2 Determine el valor de α de modo que los polinomios sean iguales.

a $8x^2 - 20x - 4 = 8x^2 + \alpha x - 4$, son iguales cuando $\alpha = -20$.

b $4x^5 + 2x^4 - x^4 + 2 = 4x^5 + \alpha x^4 + 2$, son iguales cuando $\alpha = 1$.

c $x^4 - 4x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - \alpha)$, para ningún valor de α son iguales ya que $2\alpha = 2 \wedge 2 + \alpha = 4$.

$\square$

Proposición 5.2.3 *Sean $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$, entonces.*

I ***Suma***

a Asociatividad.

$$p(x) + [q(x) + r(x)] = [p(x) + q(x)] + r(x)$$

b Conmutatividad.

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

c Neutro existe $0 \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$p(x) + 0 = p(x) = 0 + p(x).$$

d Inverso

Dado $p(x) \in \mathbb{K}[x], \exists q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$p(x) + q(x) = 0 = q(x) + p(x),$$

donde $q(x) = -p(x) = -\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (-a_i) x^i.$

II ***Producto***

a Asociatividad.

$$p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)] = [p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x)$$

b Conmutatividad).

$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$$

c Neutro existe $1 \in \mathbb{K}[x]$ *tal que*

$$1 \cdot p(x) = p(x) \cdot 1 = p(x)$$

d Los únicos polinomios que tienen inverso multiplicativo son los polinomios constantes y no nulos.

III ***Distributividad***

a) $r(x)(p(x) + q(x)) = r(x)p(x) + r(x)q(x)$,

b) $(p(x) + q(x))r(x) = p(x)r(x) + q(x)r(x)$,

Ejemplo 5.2.4 Determine el valor de A, B, C de modo que los polinomios sean iguales.

$$5x^2 - 2x - 3 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

□

Solución. dado la igualdad polinomial

$$5x^2 - 2x - 3 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

desarrollemos el polinomio de la izquierda

$$\begin{array}{rcl} A(x-1)^2 + B(x-1) + C & = & A(x^2 - 2x + 1) + B(x-1) + C \\ & = & Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C \\ & = & Ax^2 + (-2A + B)x + (A - B + \end{array}$$

coeficiente tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} A & = & 5 \\ -2A + B & = & -2 \\ A - B + C & = & 3 \end{array}\right|$$

Luego tenemos que $A = 5, B = 8, C = 6$.**Observación:** En resumen, con esta propiedades se tiene que $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Una propiedad adicional que tenemos en $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es la de cancelación

Proposición 5.2.5 *Sean* $p(x) \in \mathbb{K}[x]$*, no nulo y* $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$*, entonces*

$$p(x)q(x) = p(x)r(x) \Rightarrow q(x) = r(x)$$

Proposición 5.2.6 *Sean* $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$*, no nulos entonces*

1. $gr(p(x) + q(x)) \leq \max\{gr(p(x)), gr(q(x))\}$.
2. $gr(p(x) \cdot q(x)) = gr(p(x)) + gr(q(x))$.

5.3 División Polinomial

Teorema 5.3.1 *Sea* $p(x), q(x)$ *dos polinomios en* $\mathbb{K}[x]$ *con* $q(x) \neq 0$ *y* $\mathbb{K}$ *un cuerpo* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$*, entonces existen polinomios* $s(x)$ *y* $r(x)$ *(únicos) en* $\mathbb{K}[x]$ *tal que se cumple lo siguiente*

$$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x),$$

donde $r(x) = 0$*, o bien* $gr(r(x)) < gr(q(x))$

Ejemplo 5.3.2 Sean $q(x) = 2x^4 + 3x^5 + 2x - 1$ y $p(x) = -2x^5 + 6x^7 + 2$.
Para dividir $p(x)$ por $q(x)$ primero debemos ordenar el polinomio de mayor a menor en los exponente

$$p(x) = 6x^7 - 2x^5 + 2 \qquad q(x) = 3x^5 + 2x^4 + 2x - 1$$

A continuación, buscamos un término que multiplicado $q(x)$ se obtenga el mismo término principal de $p(x)$, en este caso es $2x^2$, para finalmente restar

$$6x^7 - 2x^5 + 2 - 2x^2[3x^5 + 2x^4 + 2x - 1] = -4x^6 - 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 2$$

Para continuar con el proceso. Este proceso concluye debido a que el grado disminuye en cada una de las etapas □

Definición 5.3.3 Sean $p(x), q(x), r(x), s(x)$ polinomios en $\mathbb{K}[x]$.

a Si tenemos $p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$, diremos que $p(x)$ es el **dividendo**, $q(x)$ es el **divisor**, $r(x)$ es el **resto** y $s(x)$ es el **cociente**.

b Diremos que " $q(x)$ **divide** a $p(x)$" o "$p(x)$es **divisible** por $q(x)$" si y sólo si existe $h(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(x) = q(x)h(x)$.

c Si $p(x) = q(x)h(x)$ entonces la expresión $q(x)h(x)$ es una **factorización** de $p(x)$ y $q(x), h(x)$ son los **factores**.

♢

Ejemplo 5.3.4 Sean $q(x) = 3x^5 + 2x^4 + 2x - 1$ y $p(x) = 6x^7 - 2x^5 + 2$.
Determinar el cociente y el resto al dividir $p(x)$ por $q(x)$ □

Solución.

$$\begin{array}{rcl}
6x^7 - 2x^5 + 2 & : & 3x^5 + 2x^4 + 2x - 1 \ = \ 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{9} \\
-(6x^7 + 4x^6 + 4x^3 - 2x^2) & & \\ \hline
-4x^6 - 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 2 & & \\
-(-4x^6 - \frac{8}{3}x^5 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x) & & \\ \hline
\frac{2}{3}x^5 - 4x^3 + \frac{14}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 & & \\
-(\frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{9}x^4 + \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}) & & \\ \hline
-\frac{4}{9}x^4 - 4x^3 + \frac{14}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{20}{9} & &
\end{array}$$

Luego $s(x) = 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{9}$ y $r(x) = -\frac{4}{9}x^4 - 4x^3 + \frac{14}{3}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{20}{9}$.

5.3.1 Ejercicios

Sea $p(x) = 3x^5 - 2x^3 - 1$ y $q(x) = 4x^2 + 2x - 3$.
Determinar el cociente y el resto al dividir $p(x)$ por $q(x)$

5.3.2 División Sintética

Debemos tener presente que la división sintética, es un arreglo mnemotécnico, que se obtiene a partir de la división habitual de polinomios, y en un caso particular en que el divisor tiene grado 1, es decir, sean $p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ y $q(x) = x - a$.

Veamos un ejemplo particular que se puede generalizar:

Sea $p(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$, entonces

1^{er} **paso**

$$\begin{array}{l}
b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 : x - a = b_3x^2 \\
\underline{-(b_3x^3 - ab_3x^2)} \\
(b_2 + b_3a)x^2 + b_1x + b_0
\end{array}$$

2^{do} **paso**

$$\begin{array}{l}
b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 : x - a = b_3x^2 + (b_3a + b_2)x \\
\underline{-(b_3x^3 - ab_3x^2)} \\
(b_3a + b_2)x^2 + b_1x + b_0 \\
\underline{-[(b_3a + b_2)x^2 - (b_3a + b_2)ax]} \\
(b_1 + (b_2 + b_3a)a)x + b_0
\end{array}$$

3^{er} **paso**

$$\begin{array}{l}
b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 : x - a = b_3x^2 + (b_3a + b_2)x + [b_1 + (b_2 + b_3a)a] \\
\underline{-(b_3x^3 - ab_3x^2)} \\
(b_3a + b_2)x^2 + b_1x + b_0 \\
\underline{-[(b_3a + b_2)x^2 - (b_3a + b_2)ax]} \\
(b_1 + (b_2 + b_3a)a)x + b_0 \\
\underline{-[(b_1 + (b_2 + b_3a)a)x - (b_1 + (b_2 + b_3a)a)a]} \\
(b_1 + (b_2 + b_3a)a)a + b_0
\end{array}$$

Como resultado de esto se tiene que

1. $q(x) = b_3x^2 + (b_2 + a \cdot b_3)x + [b_1 + (b_2 + a \cdot b_3) \cdot a]$.

2. $r(x) = b_0 + [b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a$.

Esquemáticamente la división sintética corresponde a:

1^{er} **paso**

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
a & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline
 & & b_3 \cdot a & & \\
 & b_3 & b_2 + b_3 \cdot a & &
\end{array}$$

2^{do} **paso**

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
a & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline
 & & b_3 \cdot a & (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a & \\
 & b_3 & b_2 + b_3 \cdot a & b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a &
\end{array}$$

3^{er} **paso**

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
a & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline
 & & b_3 \cdot a & (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a & [b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a \\
 & b_3 & b_2 + b_3 \cdot a & b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a & b_0 + [b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a
\end{array}$$

Como resultado se obtiene

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
a & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
\hline
 & & b_3 \cdot a & (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a & [b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a \\
 & \underbrace{b_3}_{coef.x^2} & \underbrace{b_2 + b_3 \cdot a}_{coef.x} & \underbrace{b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a}_{term.indep} & \underbrace{b_0 + [b_1 + (b_2 + b_3 \cdot a) \cdot a] \cdot a}_{resto}
\end{array}
$$

Caso General,

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c||c|}
a & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \\
\hline
 & & ac_{n-1} & ac_{n-2} & & ac_1 & ac_1 \\
 & b_n & ac_{n-1} + b_{n-1} & ac_{n-1} + b_{n-1} & & ac_1 + b_1 & ac_0 + b_0 \\
 & \| & \| & \| & & \| & \| \\
 & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & & c_0 & r
\end{array}
$$

es decir,

$$b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 = (x-a)\left(c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0\right) + r.$$

Ejemplo 5.3.5 Sea $p(x) = 3x^5 - 2x^3 - 1$ y $q(x) = x - 2$, encontraremos $s(x)$ y $r(x)$. □

Solución 1. Para dividir $p(x) = 3x^5 - 2x^3 - 1$ por $q(x) = x - 2$ usando división sintética, ordenemos del siguiente modo los datos

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
2 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
 & & 2\cdot 3 & 2\cdot 6 & 2\cdot 10 & 2\cdot 20 & 2\cdot 40 \\
\hline
 & 3 & 6 & 10 & 20 & 40 & 79
\end{array}
$$

Luego $q(x) = 3x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 20x + 40$, y $r(x) = 79$, de otro modo

$$3x^5 - 2x^3 - 1 = (x-2)\left(3x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 20x + 40\right) + 79$$

Ejemplo 5.3.6 Aplicar división sintética para dividir $p(x) = 4x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$ por $q(x) = 2x + 1$. □

Solución 2. Para dividir $p(x) = 4x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$ por $q(x) = 2x + 1$ usando división sintética, ordenemos del siguiente modo los datos

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
-\frac{1}{2} & 4 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\
\hline
 & & -2 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\
\hline
 & 4 & -2 & -2 & 2 & -1 & -\frac{1}{2}
\end{array}
$$

Luego $4x^5 - 3x^3 + x^2 - 1 = (x + \frac{1}{2})(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1) - \frac{1}{2}$ de otro modo

$$
\begin{aligned}
4x^5 - 3x^3 + x^2 - 1 &= (x + \tfrac{1}{2})(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1) - \tfrac{1}{2} \\
&= (x + \tfrac{1}{2})2 \cdot \tfrac{1}{2}(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1) - \tfrac{1}{2} \\
&= (2x + 1)(2x^4 - x^3 - x^2 + x - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.3.7 Aplicar división sintética para dividir $p(x) = 3x^5 - 8x^4 - x^3 - x - 1$ por $q(x) = (x+1)(x-2)$. $\square$

Solución 3. Para dividir $p(x) = 3x^5 - 8x^4 - x^3 - x - 1$ por $q(x) = (x+1)(x-2)$ usando división sintética, ordenemos del siguiente modo los datos

-1	3	-8	-3	0	-1	-1
		-3	11	-8	8	-7
	3	-11	8	-8	7	-8
2	3	-11	8	-8	7	
		6	-10	4	-8	
	3	-5	-2	-4	-1	

Luego ahora el resultado>

$$\begin{aligned} & 3x^5 - 8x^4 - x^3 - x - 1 \\ = \; & (x+1)(3x^4 - 11x^3 + 8x^2 - 8x + 7) - 8 \\ = \; & (x+1)[(x-2)(3x^3 - 5x^2 - 2x - 4) - 1] - 8 \\ = \; & (x+1)(x-2)(3x^3 - 5x^2 - 2x - 4) - 1(x+1) - 8 \\ = \; & (x+1)(x-2)(3x^3 - 5x^2 - 2x - 4) - (x+9) \end{aligned}$$

El cuociente es $3x^3 - 5x^2 - 2x - 4$ y el resto es $-x - 9$

Ejercicios

Realizar las siguientes divisiones sintéticas

1. $p(x) = x^5 - 11x^3 + 5x^2 + x - 3$ por $q(x) = x + 1$.
2. $p(x) = 3x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x + 3$ por $q(x) = 2x - 1$.

Definición 5.3.8 Sea $q(x)$ un factor de $p(x)$ en $\mathbb{K}[x]$ entonces

1. El polinomio $q(x)$ es un **factor propio** de $p(x)$ si y sólo si el $gr(p(x)) > gr(q(x)) > 0$
2. El polinomio $q(x)$ es un **factor impropio** de $p(x)$ si no es propio.
3. Se dice que $p(x)$ es un **polinomio irreducible** sobre $\mathbb{K}[x]$ si y sólo si $p(x)$ no tiene factores propios.
4. Un polinomio $p(x)$ es **reducible** sobre $\mathbb{K}[x]$ si tiene factores propios.

$\lozenge$

Ejemplo 5.3.9

1. El polinomio $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+1)(x^2+2)$, luego es reducible en $\mathbb{R}[x]$.
2. El polinomio $x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$
3. El polinomio $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ es reducible en $\mathbb{C}[x]$

$\square$

5.4 Funciones Polinomiales

Sean $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ y $D \subseteq \mathbb{K}$ entonces se define la función polinomial

$$\begin{array}{cccc} p & D & \to & \mathbb{K} \\ & a & \rightsquigarrow & p(a) \end{array}$$

que consiste en reemplazar la variable por la cantidad a y el grado de la función polinomial es el mismo del polinomio.

Definición 5.4.1 Sea $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$. Se llama **ecuación polinomial** a la proposición

$$p(a) = q(a)$$

y al conjunto $S = \{a \in \mathbb{K} \mid p(a) = q(a)\}$ el conjunto solución de la ecuación polinomial. $\diamondsuit$

Definición 5.4.2 Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.
Se dice que α es una **raíz** de $p(x)$ si y sólo si $p(\alpha) = 0$ $\diamondsuit$

Tenga presente que una ecuación polinomial lineal, tiene solamente una solución, la cual es una raíz.

Teorema 5.4.3 [del Resto]. *Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ de grado n y $a \in \mathbb{K}$, entonces existe un único polinomio $q(x)$ tal que*

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + p(a).$$

Ejemplo 5.4.4 Sea $p(x) = 3x^5 - 2x^3 - 1$ y $q(x) = x - 2$.
Luego

$$p(x) = (x - 2) \cdot s(x) + r(x),$$

donde

$$r(x) = p(2) = 3(2)^5 - 2(2)^3 - 1 = 96 - 16 - 1 = 79.$$

El resto de la división es 79. $\square$

Corolario 5.4.5 [Teorema del Factor]. *Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$*
$p(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si a es una raíz de $p(x)$.

Corolario 5.4.6

1. *Un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces.*
2. *Dos polinomios de grado n son iguales si hay $n + 1$ elementos donde las funciones polinomiales son iguales.*

Teorema 5.4.7 *Sea $p(x) : a_n x^n + \cdots + a_0$, polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces existen los $r_i \in \mathbb{C}$ y son las raíces de $p(x)$ y se cumple*

$$p(x) = a_n \underbrace{(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)}_{n \text{ factores de grado 1}},$$

Teorema 5.4.8 *Sea $p(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{R}$, si $z = a + bi$ con $b \neq 0$ es raíz de la ecuación $p(x) = 0$, entonces $\overline{z} = a - bi$ también es una raíz de $p(x)$.*

Ejemplo 5.4.9 Encontrar todas las raíces de $p(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 22x - 40$, sabiendo que $x = -1 + 3i$ es una raíz de $p(x)$.
Como $x = -1 + 3i$ es una raíz, por teorema anterior sabemos que $x = -1 - 3i$ también es raíz de $p(x)$, luego

$-1+3i$	1	5	12	22	-40
		$-1+3i$	$(4+3i)(-1+3i)$	$(-1+9i)(-1+3i)$	$(-4-12i)(-1+3i)$
	1	$4+3i$	$-1+9i$	$-4-12i$	0

Volvemos a realizar división sintética

$-1-3i$	1	$4+3i$	$-1+9i$	$-4-12i$
		$1(-1-3i)$	$3(-1-3i)$	$-4(-1-3i)$
	1	3	-4	0

Ahora el polinomio se descompone de la siguiente manera

$$p(x) = (x - (-1 + 3i))(x - (-1 - 3i))(x^2 + 3x - 4).$$

las raíces del polinomio $x^2 + 3x - 4$ son $1, -4$, luego tenemos que

$$p(x) = (x - (-1 + 3i))(x - (-1 - 3i))(x - 1)(x + 4).$$

$\square$

Ejercicios

Determinar un polinomio de grado 4 con coeficiente en los reales, tal que $1 + i$ y $1 - 2i$ son raíces del polinomio.

Teorema 5.4.10 *Todo polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado mayor que 1 puede ser factorizado en factores lineales o cuadráticos irreducibles, donde factorización es única salvo orden de los factores.*

Definición 5.4.11 Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.
Se dice que la raíz c tiene **multiplicidad** t en $p(x)$ si y solo si $p(x) = (x - c)^t \cdot s(x)$, con $t \geq 1$ y $s(c) \neq 0$. $\lozenge$

Ejercicios

Determine la multiplicidad de $2, -2$ en $p(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 36x + 72$.

Ejercicios

Determine si 1 es una raíz multiple de $p(x) = x^5 - 3x^4 + 8x^2 - 9x + 3$.

Teorema 5.4.12 [Posibles Raíces Racionales]. *Sean $p, q \in \mathbb{Z}$ primos relativos tal que $\frac{p}{q}$ es una raíz del polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, entonces se cumple que p divide a a_0 y que q divide a a_n.*

Ejemplo 5.4.13 Sea $p(x) = 2x^6 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6$.
Determinar las posibles raíces racionales de $p(x)$.
Si $\frac{p}{q}$ es una raíz de $p(x)$, entonces

a p divide a -6, por lo tanto $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

b q divide a 2, por lo tanto $q \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Luego las posibles raíces racionales están dadas por

$$\frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\},$$

□

Teorema 5.4.14 [Cotas de ceros reales para polinomios reales]. *Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, donde $a_n > 0$, y $p(x)$ se divide por $(x - r)$ usando división sintética, entonces:*

1. *Si $r \geq 0$ y todos los números de la última fila de la división sintética (coeficientes de cociente y residuo) son mayores e iguales a 0 entonces para todo t con t raíz de $p(x)$ se tiene que $t \leq r$*

2. *Si $r \leq 0$ y todos los números de la última fila de la división sintética alternan en signo (se admite $+0$ y -0) entonces para todo t, con t raíz de $p(x)$ se tiene que $t \geq r$*

Ejemplo 5.4.15 Sea $p(x) = 2x^6 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6$.
Determinar todas las raíces racionales de $p(x)$ □

Solución. Como las posibles raíces racionales son:

$$p/q \in P = \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\},$$

Evaluamos en $\frac{p}{q} = 1$,

$$p(1) = 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 6 = 2 - 7 - 4 - 6 = 0.$$

Por tanto $\frac{p}{q} = 1$ es una raíz de $p(x)$, ahora realizamos división sintética.

1	2	0	0	-7	4	7	-6
		$2 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$-5 \cdot 1$	$-1 \cdot 1$	$6 \cdot 1$
	2	2	2	-5	-1	6	0

$$p(x) = (x - 1)(2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - x + 6),$$

Ahora veremos si $\frac{p}{q} = 1$ es una raíz multiple

1	2	2	2	-5	-1	6
		$2 \cdot 1$	$4 \cdot 1$	$6 \cdot 1$	$1 \cdot 1$	$0 \cdot 1$
	2	4	6	1	0	$6 \neq 0$

Luego $\frac{p}{q} = 1$ es una raíz simple, y no hay mayores a 1 raíces,

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c}
\frac{1}{2} & 2 & 2 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ \hline
 & & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{13}{8} & -\frac{21}{16} \\
 & 2 & 3 & \frac{7}{2} & -\frac{13}{4} & -\frac{21}{8} & \frac{75}{16} \neq 0
\end{array}$$

No hay más raíces positiva racionales de $p(x)$.

Ahora veremos las raíces negativas de

$$q(x) = 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

Consideremos ahora a $p/q = -1$, luego

$$\begin{aligned}
q(-1) &= 2(-1)^5 + 2(-1)^4 + 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - (-1) + 6 \\
&= -2 + 2 - 2 - 5 + 1 + 6 \\
&= -7 + 7 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como -1 es raíz, hacemos división sintética:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c}
-1 & 2 & 2 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ \hline
 & & 2(-1) & 0(-1) & 2(-1) & (-7)(-1) & 6(-1) \\
 & 2 & 0 & 2 & -7 & 6 & 0
\end{array}$$

Luego hemos factorizado

$$p(x) = (x-1)(x+1)(2x^4 + 2x^2 - 7x + 6)$$

Para determinar si existe otras raíces negativas, argumentamos de la siguiente forma, para ello sea

$$s(x) = 2x^4 + 2x^2 - 7x + 6$$

Si $-a \in P$ un número negativo

$$s(-a) = 2a^4 + 2a^2 + 7a + 6 > 0$$

con lo cual obtenemos que no existe raíces negativas.

Ejercicios

Determinar las raíces racionales de los polinomios

a) $p(x) = 8x^6 + 20x^5 - 2x^4 - 25x^3 - 13x^2 + 5x + 3$

b) $p(x) = 4x^3 - 20x^2 - 23x + 6$

Definición 5.4.16 [Variación de signo]. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, cuando los términos de $p(x)$ se ordenan en orden creciente de potencias, decimos que ocurre una **variación de signo**, si dos términos consecutivos tienen signos opuestos. Los términos que el coeficiente es cero se ignoran. $\lozenge$

Ejemplo 5.4.17 Sea $p(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 + x + 5$, podemos observar que en $p(x)$ hay dos variaciones de signo, ahora si reemplazamos x por $-x$ se obtiene

$$\begin{aligned} p(-x) &= 2(-x)^5 - (-x)^4 - (-x)^3 - x + 5 \\ &= -2x^5 - x^4 + x^3 - x + 5 \end{aligned}$$

luego tenemos tres variaciones en $p(-x)$. Estas variaciones las denotamos como:

$$\nu(p(x)) = 2, \quad \nu(p(-x)) = 3.$$

□

Teorema 5.4.18 [Regla de los signos]. *Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, entonces*

1. *El número de raíces reales positivas de $p(x)$, contados cada uno, tantas veces como indique su multiplicidad, es igual o menor que $\nu(p(x))$ en un número par.*

2. *El número de raíces reales negativas de $p(x)$, contados, cada uno, tantas veces como indique su multiplicidad es igual o menor que $\nu(p(-x))$ en un número par.*

Ejemplo 5.4.19 Sea $p(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 + x + 5$, por el ejemplo anterior tenemos que

$$\nu(p(x)) = 2, \quad \nu(p(-x)) = 3.$$

Por lo tanto el polinomio $p(x)$ tiene 2 o 0 raíces positiva y 3 o 1 raíces negativas □

Ejercicios

Determinar las posibles raíces positivas y negativas de polinomio

$$p(x) = x^5 - x^3 + x + 1.$$

Teorema 5.4.20 *Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $p(a)p(b) < 0$ entonces existe $\alpha \in [a, b]$ un raíz del polinomio.*

Ejercicios

Para cada uno de los polinomios, determinar si existe una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

1. $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 5$

2. $p(x) = \frac{3}{2}x^3 + x^2 + x - \frac{1}{2}$

5.5 Descomposición de fracciones parciales

Sean $p(x), q(x)$ dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Si el $gr(p(x)) \geq gr(q(x))$, dividimos $p(x)$ por $q(x)$ para obtener $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$, luego dividiendo por $q(x)$ obtenemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde $r(x) = 0$ o $gr(r(x)) < gr(q(x))$.

Por ejemplo:

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x^2 - x - 1 + \frac{-6x + 2}{x^2 - 2x + 1}.$$

Por lo anterior podemos suponer que en el cuociente $p(x)/q(x)$, tenemos que $gr(p(x)) < gr(q(x))$

Definición 5.5.1 Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, diremos que $p(x)/q(x)$ es una **fracción propia** si el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. $\diamondsuit$

Teorema 5.5.2 [Descomposición en fracciones parciales]. *Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios reales, entonces cualquier fracción propia $p(x)/q(x)$ se puede descomponer en la suma de **fracciones parciales** como sigue:*

1. *Si $q(x)$ tiene un factor lineal, de la forma $ax+b$, no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales de $p(x)/q(x)$, contiene un término de la forma*

$$\frac{A}{ax + b},$$

donde A es una constante.

2. *Si $q(x)$ tiene un factor lineal repetido k veces, de la forma $(ax + b)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales de $p(x)/q(x)$ contiene términos de la forma:*

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k},$$

donde $A_1, A_2, \ldots, a_k$ son constantes.

3. *Si $q(x)$ tiene un factor irreducible de la forma $ax^2 + bx + x$, no repetido, la descomposición en fracciones parciales de $p(x)/q(x)$ contiene un término de la forma*

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

donde A y B son constantes.

4. *Si $q(x)$ contiene un factor irreducible repetido k veces, de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales de $p(x)/q(x)$ contiene términos de la forma*

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k},$$

donde $A_1, \ldots, A_k$ y $B_1, \ldots, B_k$ son constantes.

Ejemplo 5.5.3 a. Determine la forma de la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{7}{(x - 1)^2(x + 3)}$$

solución

$$\frac{7}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

b. Determine la forma de la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+x+3)}$$

solución

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+3}$$

Note que el polinomio x^2+x+3 es irreducible en $\mathbb{R}[x]$.

c. Determine la forma de la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+3)^2}$$

solución

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+3)^2}$$

$\square$

Ejemplo 5.5.4

$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)}$$

$\square$

Solución 1. Por teorema se tiene

$$\begin{aligned} \tfrac{5x+7}{(x-1)(x+3)} &= \tfrac{A}{x-1} + \tfrac{B}{x+3} \\ &= \tfrac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \end{aligned}$$

luego igualamos los numeradores,

$$\begin{aligned} 5x+7 &= A(x+3)+B(x-1) \\ &= (A+B)x + (3A-B) \end{aligned}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{rl} A+B & = 3 \\ 3A-B & = 7 \end{array}\right|$$

donde se obtiene que $A=3$ y $B=2$.

Por tanto

$$\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3}$$

Ejemplo 5.5.5

$$\frac{x^3-4x^2+9x-5}{(x^2-2x+3)^2}$$

$\square$

Solución 2. Note que $\Delta(x^2-2x+3)=-5<0$, por ello es irreducible el polinomio, por teorema se tiene

$$\begin{aligned}\tfrac{x^3-4x^2+9x-5}{(x^2-2x+3)^2} &= \tfrac{Ax+B}{(x^2-2x+3)}+\tfrac{Cx+D}{(x^2-2x+3)^2}\\ &= \tfrac{(Ax+B)(x^2-2x+3)+Cx+D}{(x^2-2x+3)^2}\end{aligned}$$

luego, igualamos los numeradores,

$$\begin{aligned}x^3-4x^2+9x-5 &= (Ax+B)(x^2-2x+3)+Cx+D\\ &= Ax^3+(B-2A)x^2+(3A-2B+C)x+(3B+D)\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{array}{rcr|}A &=& 1\\ -2A+B &=& -4\\ 3A-2B+C &=& 9\\ 3B+D &=& -5\\ \hline\end{array}$$

resolviendo se obtiene que $A=1, B=-2, C=2, D=1$.

Por tanto, se obtiene que

$$\frac{x^3-4x^2+9x-5}{(x^2-2x+3)^2}=\frac{x-2}{(x^2-2x+3)}+\frac{2x+1}{(x^2-2x+3)^2}$$

Ejercicios

Descomponga en fracciones parciales

1. $\frac{7x+6}{x^2+x-6}$
2. $\frac{5x+7}{x^2+2x-3}$
3. $\frac{6x^2-14x-27}{(x+2)(x-3)^2}$
4. $\frac{x^2+11x+15}{(x-1)(x+2)^2}$
5. $\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}$
6. $\frac{3x^3-6x^2+7x-2}{(x^2-2x+2)^2}$

5.6 Guía Ejercicios

1. Hallar los valores de A, B, C, D, en cada caso, de modo que los polinomios sean iguales

   a) $2x^2-3x-1=A(x-1)^2+B(x-1)+C$

   b) $x^3-3x^2+2x-7=A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D$

2. Hallar el cuociente y el residuo de las siguientes divisiones

   a) $(2x^3 + 11x^2 + 22x + 15) : (2x + 3)$
   b) $(4x^5 - x^4 + 12x^3 + 2x^2 + x + 5) : (4x^3 - x^2 + 1)$
   c) $(13x^3 + 3x + 10x^5 - 16 - 18x^2 - 4x^4 + 2x^3) : (3 + 2x^2)$
   d) $(x^6 + 1) : (x^2 + 1)$

3. Sea $p(x) = x^9 + x^8 + x + 1$

   Factoricé $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$

4. Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}^+$ para que el polinomio $p(x) = -x^3 - k^2x^2 + x + k$, tenga solamente una raíz en $[0, 1]$

5. Sea $p(x) = 9x^8 - 24x^7 + 4x^6 + 40x^5 - 70x^4 + 88x^3 - 68x^2 + 24x - 3$. Factorizar $p(x)$ en $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$, si se sabe que $1, i, \sqrt{3}$,son raíces de $p(x)$.

6. Sabiendo que $(x - 2)^2$ es un factor de $x^3 + 2px + q$. Determinar p, q.

7. Obtener un polinomio $p(x)$ del menor grado posible, tal que $p(1) = 0 = p(1 - i)$

   a) $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$
   b) $p(x)$ en $\mathbb{C}[x]$

8. Demuestre que, si $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, entonces $p(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ es divisible por $x(x - 1)(2x + 1)$.

9. Determinar si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas.

   a El polinomio $8x^{4n} + x^2 + 60$ no tiene raíces reales, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   b El polinomio $2x^{n+1} - 4x^n + 1$ tiene al menos una raíz en $]1, 2[$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   c El polinomio $x^{8n} - x + 1$ tiene raíces racionales, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   d 1 es una raíces de multiplicidad 2 del polinomio $x^6 - x^5 - x + 1$

10. Sea $p(x) = x^7 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{5}{3}x^5 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$. Factoricé al máximo $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.

11. Sea $p(x) = 3x^4 - 7x^3 + 6kx^2 + 12k^2x - 2$. Determine el $k \in \mathbb{R}$, de modo que $(x - 1)^2$ sea un divisor de $p(x)$, y factorizar $p(x)$.

12. Encuentre los valores de k para los cuales $2x^3 - kx^2 + 6x - 3k$, es divisible por $x + 2$.

13. Sea $p(x) = x^4 + ax^3 - bx^2 + 8x + c$. Determine el valor de la constante $a, b, c \in \mathbb{R}$, de modo que 2 sea una raíz doble de $p(x)$ y al dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ el resto es -1.

14. Factoricé en $\mathbb{C}[x]$, el polinomio $p(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 16x + 24$, sabiendo que $p(2i) = 0$.

15. Sea $p(x) = 3x^5 - 20x^4 + 33x^3 + 28x^2 - 118x + 60$, se sabe que una de las raíces es $2 + i$.

a) Factoricé $p(x) = q(x) * r(x)$, donde $gr(q(x)) = 3$ y $gr(r(x)) = 2$.

b) Determinar las posibles raíces racionales de $p(x)$.

16. Sea $p(x) = 2x^5 - 13x^4 + 8x^3 + 50x^2 + ax + b$. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que 7 sea una raíz de $p(x)$, y al dividir $p(x)$ por $(x + 2)$ el resto es -100.

17. Hallar un polinomio de grado menor tal que $p(x) = p(x - 1)$, y $p(0) = \frac{1}{2}$.

18. Hallar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que el polinomio $4x^4 + ax^2 + bx - 4$, sea divisible por $2x^2 + 3x - 2$.

19. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^3 + ax - b$, sabiendo que -2 es una raíz de $p(x)$ y que al dividir $p(x)$ por $(x - 2)$ el resto es 2.

20. Sea $p(x) = x^5 - 2x^4 - ax^2 + bx + c$. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $(x + 1)$ sea un factor de $p(x)$, $p(3) = -6$ y al dividir $p(x)$ por x el resto es 3.

21. Sea $p(x) = x^5 + 3x^4 - ax^3 - 6x^2 + 4bx - 12a$.

    a Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $\sqrt{2}i$ sea un raíz de $p(x)$.

    b Determine las raíces del polinomio $p(x)$.

22. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que 2 sea una raíz de multiplicidad 2 del polinomio $p(x) = ax^2(x^2 - 1) - 7x(x^2 - 4) - 8b$

23. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que -1 sea una raíz de doble del polinomio $p(x) = ax^4 - bx^3 + 2x^2 + 3$

24. Determinar todas las raíces del polinomio $p(x) = 6x^8 - x^7 - 55x^6 + 9x^5 - 15x^4 + 4x^3 + 220x^2 - 36x - 36$.

    Sabiendo que $\sqrt{2}, \sqrt{2}i$, son raíces de $p(x)$.

    a Descomponer en factores irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

    b Descomponer en factores irreducibles en $\mathbb{C}[x]$.

25. Sea $p(x) = ax^4 - x^3 + 2x^2 + 3a$.

    Hallar $a \in \mathbb{R}$, tal que -1 es una raíz de $p(x)$.

26. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que $p(x) = ax^4 + bx + 1$, tenga como raíz a -1 y que al dividir por $(x + 2)$ da resto -8.

27. Sea $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + mx^2 - 12x - 12$. Si $(x + 2i)$ es un factor de $p(x)$ y -1 es una raíz

    Determinar $m \in \mathbb{R}$, y factoricé.

28. Determine los cero racionales de

    a) $x^3 + 4x^2 + 9x + 6$.

b) $2x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6$.

29. Determine los valores de $m \in \mathbb{R}$, para que la ecuación $x^3 + 2x^2 + mx - 3 = 0$, tenga al menos una raíz racional.

30. Sea $p(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 9$

    a Existe una raíz en el intervalo $[1, 2]$ de $p(x)$.

    b Encontrar todas las raíces de $p(x)$.

31. Factorizar $p(x) = 2x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 4x^3 - 6x^2 + x + 3$ en $\mathbb{R}[x]$

32. Obtener un polinomio de grado 6 con coeficiente entero que tenga a $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{2}$ como raíces.

33. Encontrar cota superior e inferior para

    a) $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$.

    b) $x^4 - x^2 + 3x + 2$.

34. Sea $p(x) = 2x^2 - 5x + 3$ y $q(x) = x - c$.

    Determinar $c \in \mathbb{R}$, tal que al dividir $p(x)$ por $q(x)$ da resto 10.

35. Encontrar las raíces del polinomio $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36$, si las suma de dos de sus raíces es cero.

36. Encontrar las raíces del polinomio $4x^3 + 20x^2 - 23x + 6$ si dos raíces son iguales.

37. Determinar a y b tal que -1 es un cero doble del polinomio, $x^4 + ax^3 + (a+b)x^2 + bx + 1$.

38. Dado el polinomio

$$p(x) = 6x^6 - 20x^4 + 5x^5 + 20x^3 - 108x^2 + 15x + 18$$

    Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

    a) Existe al menos una raíz de $p(x)$ en intervalo $[0, 1]$.........................

    b) El resto al dividir $p(x)$ por $(x + 1)$ es 144.........................

    c) El resto al dividir $p(x)$ por $(x^2 - 1)$ es $40x - 104$ ....

    d) -3 es una cota inferior de las raíces de $p(x)$.........................

39. Dadas $a, b \in \mathbb{R}$ y el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 - 5x + b$.

    a Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, Si el resto al dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ es -8 y $p(-2) = 4$

    b Factorizar $p(x)$.

40. Dado el polinomio

$$p(x) = 4x^6 - 33x^4 - 4x^5 + 9x^3 + 56x^2 - 2x - 12$$

Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

a) Existe al menos una raíz de $p(x)$ en intervalo $[0, 1]$.........................

b) El resto al dividir $p(x)$ por $(x + 1)$ es 36.........................

c) El resto al dividir $p(x)$ por $(x^2 - 1)$ es 36 ....

d) -3 es una cota inferior de las raíces de $p(x)$.........................

41. Dadas $a, b \in \mathbb{R}$ y el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 - 5x + b$.

a) Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, tal que el resto al dividir $p(x)$ por $x^2 - 2x - 3$ es 12

b) Factorizar $p(x)$.

42. Determinar A, B, C, D en los reales tal que

$$x^3 + x^2 - 3 = A(x^2 + 1)(x - 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)^2$$

43. Dadas $a, b \in \mathbb{R}$ y el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 - 5x + b$.

a Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, tal que el resto al dividir $p(x)$ por $x^2 - 3x + 2$ es 8

b Factorizar $p(x)$.

44. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que 2 sea una raíz de multiplicidad 2 del polinomio $p(x) = ax^2(x^2 - 2) - x(x^2 - 4) - 8b$

45. Determinar $a, b \in \mathbb{R}^*$, de modo que $(x - 2)^2$ divida al polinomio

$$p(x) = ax(x^3 + 16) - bx^2\,(x - 5) - 2ab$$

46. Determinar si existe $a, b \in \mathbb{R}^*$, de modo que $(x + 2)^2$ divida al polinomio

$$p(x) = ax(x^3 - 4) + bx^2\,(2x - 3) - 2ab$$

47. Sea $p(x) = x^4 - 3x^2 + bx + c$. Determinar el valor de las constantes $b, c \in \mathbb{R}$, de modo que -2 es una raíz de $p(x)$ y de resto 2 al dividir $p(x)$ por $(x - 1)$

48. Sea $p(x) = 3x^4 - 7x^3 + 6kx^2 + 12k^2x - 2$. Determine el $k \in \mathbb{R}$, de modo que $(x - 1)^2$ sea un divisor de $p(x)$.