UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

"Otro paso en el estudio de la probabilidad".

Memoria de título para optar al título de Profesor de Matemática de estado, con grado de Licenciado en Educación, presentada por
Guido Berrios Placencio.

Profesor Guía Dr. Daniel Jiménez Briones.

Valparaíso, Enero de 2007.

Índice general

Introducción

Durante los años de permanencia como estudiante en la Universidad, se ha percibido la necesidad de dar aportes a la educación, buscando estrategias que den eficacia al proceso de enseñanza-aprendizaje, para así ayudar a mejorar la educación y a la buena integración de la nueva reforma educacional que hoy estamos viviendo en el país y para cumplir la importante función del profesor de integrar a nuestros alumnos a la sociedad con las herramientas necesarias.

Buscar una estrategia que sea nueva o que atraiga la atención de los alumnos es una tarea algo complejo, tomando encuenta, que esta también debe considerar el marco curricular y los contenidos mínimos obligatorios de la educación media.

Sabemos que en el futuro, la sala de clases será concebida por los especialistas como un espacio holístico que facilita el trabajo en grupo y la interacción, éstas contarán con rincones exploratorios dotados de múltiples instrumentos pedagógicos.

Actualmente la enseñanza de la matemática que se imparte en el país no es del todo satisfactoria, hay necesidad de trabajar en forma más profunda o con nuevas estrategias algunos tópicos. Uno de estos es la teoría de la probabilidad, área de la matemática, que tiene múltiples aplicaciones en la vida cotidiana.

Dado el aporte que ha entregado la teoría del constructivismo, en el aprendizaje: "Describe a los aprendices como procesadores de información activos y asigna funciones decisivas al conocimiento y a la perspectiva que los alumnos aporten a su aprendizaje"(Bruning R., 2002). Este entrega un aporte al desarrollo de estrategias, que cumplen la función, de hacer que los alumnos tengan un papel importante en su proceso de enseñanza-aprendizaje; permite trabajos en grupos, llevando esto al aprendizaje cooperativo y el aprendizaje en forma asistido y la interacción entre los alumnos, enriqueciendo el aprendizaje y haciéndolo de mejor calidad.

La enseñanza de la probabilidad, usando y aplicando la teoría del constructivismo, permite crear, nuevas propuestas, que ayudarán a mejorar la educación y a la creación de nuevas estrategias, que dan eficacia al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Sabemos que hoy en día la computación ha tomado un rol importante, en muchas áreas, es hoy una herramienta que permite enseñar, un gran número de contenidos, haciendo que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más enriquecedor, donde el alumno perciba la información como útil e interesante, permitiéndole pasar de un elemento pasivo a un personaje activo y diferenciado de otros alumnos. Es por eso y por los avances que se han producido, que la informática y la educación, seguirán ampliándose en el futuro.

Debido a lo anterior es que utilizamos el programa Excel, para la creación de juegos, que cumplen la función de repasar y evaluar, parte de los contenidos entregados en este trabajo.

Los **objetivos generales** de este trabajo son:

- Desarrollar los tópicos de probabilidad.
- Desarrollar una propuesta educativa a través del constructivismo y la computación.

Y los **objetivos específicos** son:

- Conocer y comprender los conceptos y temas de probabilidad.
- Crear un material de estudio, para utilizarlo en la enseñanza de la probabilidad.
- Conocer y comprender el Marco Curricular, dictado por el Ministerio de Educación, en sus planes de estudio de matemática.

La problemática

La necesidad de crear un nuevo material de estudio, para los alumnos, en la enseñanza de la probabilidad.

Fundamentación del problema

Las experiencias obtenidas hasta el momento, ayer como estudiante y hoy en mi práctica profesional, me han permitido ver las carencias que existen, en propuestas y materiales que permitan enseñar los tópicos de probabilidad; propuestas en el sentido que hoy en día los profesores no logran motivar a los alumnos a desarrollar libertad de pensamiento, relación de propiedades y creatividad; por otro lado materiales en que los profesores no poseen muchas herramientas que faciliten la buena comprensión de la probabilidad.

Estos son motivos suficientes para querer crear propuestas que incluyan materiales de estudio. Por tal motivo, es que este seminario esta enfocado a utilizar la teoría del constructivismo y la computación, para la creación de una propuesta de estudio con el contenido de probabilidad .

Enunciado del problema

¿Es posible crear nuevos materiales de estudio, en la enseñanza de un tópico como la probabilidad?.

Delimitación del problema

La delimitación del material de estudio está enfocada hacia la implementación de los niveles de educación media, específicamente para 3^{o}medio, tema tratado en el Capítulo 3.

Justificación del problema

Los motivos que llevan a la elección del problema mencionado anteriormente son los siguientes:

- Bajo nivel de aprendizaje en el estudio de la probabilidad.
- Falta de nuevas estrategias de enseñanza en la probabilidad.
- Falta de actividades donde el alumno sea parte de esta.
- Falta de actividades grupales, donde los mismos alumnos se ayuden en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Capítulo 1

Unidad Temática

En este capítulo haremos una recopilación de información, de la directriz principal, que obtenemos del Ministerio de Educación y un somero análisis de los textos escolares de uso masivos, para así tener una mayor información respecto al tema que nos interesa y para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Marco curricular, Ministerio de Educación de Chile.

El Ministerio de Educación, en sus planes de estudio de matemática, trata el contenido de probabilidad, en los niveles de segundo y tercero medio.

Revisaremos las unidades donde se trata este contenidos, en la siguiente sección.

1.1.1. Contenidos Matemática, Segundo año Medio.

En el programa de estudio de matemática de segundo medio, la primera unidad, contempla los siguientes detalles:

Unidad 1: Nociones de Probabilidad.

Contenidos

- Juegos de azar sencillos, representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos.
- Comentarios históricos acerca de los inicios del estudio de la probabilidad.

- La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables. Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol.

- Iteración de experimentos sencillos, por ejemplo, lanzamiento de una moneda; relación con el triángulo de Pascal.

  Interpretación combinatorias.

1.1.2. Contenidos Matemática, Tercer año Medio.

En el programa de estudio de matemática de tercero medio la cuarta unidad, contempla los siguientes detalles:

Unidad 4: Otro paso en el estudio de las probabilidades.

Contenidos

- Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.

- Relación entre probabilidad y frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.

- Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.

1.2. Texto Escolares.

En esta sección se harán observaciones, a los textos escolares de matemática, para el estudiante de segundo y tercero medio. Nos interesa realizar un análisis de cómo es introducido, presentado, tratado (metodología), enfatizado, entre otros puntos, el contenido de probabilidad.

Las editoriales que disponen de material para el estudiante de segundo y tercero medio son las siguientes:

- Arrayán Editores.
- Santillana.
- Mare Nostrum.

1.2.1. Textos para 2º año medio

Editorial Arrayán Editores.

"Matemática 2º medio: Texto del alumno", publicado en el año 2002, de los autores Bernardo Campusano F., Verónica Soto R. y Marta Ulloa A.

En este texto, lo relativo a probabilidad lo encontramos en la Unidad 1: "Nociones de probabilidad", donde se realizó un somero análisis, a los ejemplos, las actividades, las definiciones, el énfasis, etc y además si cumplen con los requisitos del Ministerio de Educación de Chile.

El índice del texto en esta unidad es el siguiente:

1. Aprendizaje esperado.
2. Fracciones, razones, porcentajes y gráficos.
3. La probabilidad en la genética.
4. Frecuencia relativa y probabilidad.
5. Sucesos aleatorios y sucesos determinísticos.
6. Sucesos equiprobables.
7. Laplace y el cálculo de probabilidades.
8. Valores máximos y mínimos de la probabilidad.
9. Formas para registrar los resultados de un experimento.

- En forma de pares ordenados.
- En forma de diagrama de árbol.

10. Sucesos compuestos.
    - Sucesos independientes.
    - Sucesos dependientes.
    - Probabilidad, triángulo de Pascal y teorema del binomio.
11. Aplicaciones de probabilidad.
    - En la biología.
    - En juegos de azar
    - En la estadística.
12. Taller.
13. Autoevaluación.
14. Evaluación.

Observaciones:

Después de revisar la Unidad 1 y ver sus contenidos, el tipo de ejemplos, actividades y aprendizaje esperado, el diseño que tiene y cómo se presentan los contenidos a los alumnos, se observa lo siguiente:

En la estrategia comunicativa existen un 16 % del libro para esta unidad; dos notas históricas del saber matemático y su evolución; visualmente se hace atrayente e interesante, teniendo dibujos a colores; existen algunos resúmenes de cada contenido; uso de la tecnología en la aplicación de la estadística en la probabilidad; los ejemplos son coherentes al contenido, existiendo situaciones reales, en las que los alumnos comprenden que las matemáticas son parte de la realidad.

Se comienza esta unidad hablando de los juegos de azar y la relación que tiene la probabilidad en variadas ciencias, tratando el tema de la probabilidad en la genética.

Se da a conocer a los alumnos casos donde la probabilidad puede ayudar a determinar qué posibilidades existen de tener ciertas características de los padres, permitiendo así comprender el vínculo que existe entre las matemáticas y la realidad.

Los contenidos están dados en forma continua, así los alumnos no pierden la idea central de la unidad y no se olvidan de los conceptos vistos.

Faltan actividades grupales donde los alumnos, puedan reafirmar los contenidos con sus compañeros o aprender de sus iguales lo que no comprendió antes; existe también una falta de problemas de exploración, donde los alumnos ayuden a la construcción de su aprendizaje.

Se encuentra presente la representación mediante gráficos, de los ejemplos, ejercicios, contenidos y problemas.

Al final de la unidad hay una autoevaluación y evaluación, que es parte importante para ver cuánto fue lo aprendido en este proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este texto escolar se trabaja con los conocimientos previos (fracciones, frecuencia relativa, etc), esto ayuda a tener una mejor comprensión de lo que se verá en la unidad.

Cumple con lo dictado por el Ministerio de Educación de Chile, en lo referente a los contenidos mínimos.

Editorial Santillana.

"Educación Matemática 2º medio", publicado en el año 2005, de los autores Angela Baeza P., Verónica Soto R. y Otros.

En este texto, lo relativo a probabilidad lo encontramos solamente en la Unidad 6: "Nociones de probabilidad", donde se realizó un somero análisis, a los ejemplos, las actividades, las definiciones, el énfasis, etc y además si cumplen con los requisitos del Ministerio de Educación de Chile.

El índice del texto en esta unidad es el siguiente:

1. Repaso.
2. El azar y la incertidumbre.
3. Frecuencia de un suceso.
4. Probabilidad experimental.
5. Eventos equiprobables: Regla de Laplace.
6. Diagrama del árbol y probabilidad.
7. Probabilidad y triángulo de Pascal.
8. El azar y la genética.
9. Juegos de simulación.
10. Juegos equitativos.

11. Ejercicios resueltos.
12. Desafíos.
13. Medios: Jugando con la probabilidad.
14. Síntesis.
15. Evaluación.
16. Ejercicios de refuerzo.

Observaciones:

Después de revisar la Unidad 6 y ver sus contenidos, el tipo de ejemplos, actividades y aprendizaje esperado, el diseño que tiene y cómo se presentan los contenidos a los alumnos, se observa lo siguiente:

En la estrategia comunicativa existen un 11 % del total de las páginas para esta unidad; seis notas históricas del saber matemático y su evolución; visualmente se hace atrayente para los alumnos, teniendo dibujos a colores entretenidos; contiene cuadros con el nombre "para archivar", los cuales contienen las definiciones con registro natural y algebraico; se encuentra presente el uso de la tecnología dando un sitio web para el desarrollo de laboratorios "www.santillana.cl/mat2"; los ejemplos son adecuados al contenido, existen situaciones reales en las que los alumnos comprenden que las matemáticas son parte de la realidad.

Se comienza esta unidad hablando de tipos de juegos y apuestas, en donde la probabilidad esta presente, luego se da un ejemplo en que se utiliza una moneda de \$100 y se realiza la pregunta de ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?.

Este tipos de ejemplos con las moneda o dados son usualmente utilizados para comenzar esta unidad, esto deja claro que este libro no tiene un ejemplo, el cual pueda ser más novedoso para los alumnos y para la presentación de esta unidad, ya que tener un ejemplo de introducción novedoso puede ayudar a enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los contenidos están dados en forma continua, uniendo un tema con otro, ayudando a que los alumnos no olviden lo visto anteriormente.

Faltan actividades grupales donde los alumnos puede reafirmar los contenidos con sus compañeros o aprender de sus iguales lo que no comprendió antes; existe también una falta de problemas de exploración, donde los alumnos ayude a la construcción de su aprendizaje.

Se encuentra presente la representación mediante gráficos, de los ejemplo, ejercicios, contenidos y problemas.

Al final de la unidad se encuentra presente una síntesis, evaluación y ejercicios de refuerzo, que es parte importante para ver cuánto fue lo aprendido en este proceso de enseñanza-aprendizaje y qué es lo que se debe reforzar.

En este texto escolar no se trabaja con el tema de “valor máximo” y “valor mínimo”, no cumpliendo en este punto con lo dictado por el Ministerio de Educación de Chile.

Los contenidos están dados en un orden diferente, a como los entrega el Ministerio de Educación, pero sin perder la idea central de la unidad.

Editorial Mare Nostrum.

“Matemática 2º medio: Texto para el Estudiante”, publicado en el año 2003, de los autores Patricio Gonzáles G. y Jorge Soto A.

En este texto, lo relativo a probabilidad se encuentra presente en la Unidad 1: “El azar del juego”, donde se realizó un somero análisis, a los ejemplos, las actividades, las definiciones, el énfasis, etc y además si cumplen con los requisitos del Ministerio de Educación de Chile.

El índice del texto en esta unidad es el siguiente:

1. Introducción activa.
    - El torneo inconcluso.
2. De los juegos de azar al cálculo de probabilidades.
3. ¿Cómo repartir probabilidades?.
    - Repartiendo la herencia en el árbol genealógico.
    - El método hidráulico de asignación de probabilidades: vertir el fluido probabilista.
4. Dilemas históricos: ¿qué ocurrió un par de siglos?.
    - D’Alembert y sus dos monedas.
5. ¿Me conviene jugar?.
    - ¿Me conviene este juego?.
    - ¿Qué juego me conviene más?.
    - Sumando puntos.
    - ¿Cómo se comporta la suma de dos dados? Cálculo teórico.

6. Retorno a los orígenes: el caballero de Méré, Pascal, Fermat...
    - Esperando el doble seis.
    - El torneo de tenis inconcluso.
7. Ejercicios de la unidad.
8. Problemas de ingenio.
9. Resumen.
10. Autoevaluación.

Observaciones:

Después de revisar la Unidad 1 y ver sus contenidos, el tipo de ejemplos, actividades y aprendizaje esperado, el diseño que tiene y como da a conocer los contenidos a los alumnos, se observa lo siguiente:

En la estrategia comunicativa existen un 13 % del total de las páginas del libro para esta unidad; contiene notas históricas del saber matemático y su evolución, cumpliendo así con lo dictado por el Ministerio de Educación de Chile; visualmente se hace atrayente e interesante, teniendo dibujos a colores relacionados con los contenidos, ejemplos y ejercicios; no se utiliza algún tipo de tecnología (computador o calculadora) en esta unidad; los ejemplos son coherentes al contenido, algunos explicados con dibujos o diagramas, esto ayudan a la comprensión del contenido en forma distinta, existen situaciones reales, en las que los alumnos pueden ver que las matemáticas son parte de la realidad.

Se comienza esta unidad con un ejemplo del torneo inconcluso, en donde dos jugadores A y B, que tienen la misma destreza y el que entere primero siete victorias es el ganador, pero el torneo es interrumpido, con lo cual se realiza la siguiente pregunta, ¿Cómo debería repartirse el premio entre A y B, para que queden todos contentos?, luego se realizan otras preguntas para que los alumnos piensen en esta situación. Esto ayuda que los alumnos analicen un caso donde existen posibilidades para obtener un resultado, este es un buen ejemplo para comenzar la unidad, ya que los alumnos no sólo trabajan en forma individual, sino que también puede hacerlo con sus compañeros, ayudando así al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los contenidos están dados en forma continua, unido los temas, ayudando así, a que los alumnos no olviden lo visto anteriormente.

Se encuentran presente en este libro actividades grupales y de exploración, donde los alumnos pueden reafirmar los contenidos con sus compañeros o aprender de sus iguales lo que no comprendió antes. Al haber problemas de exploración, los alumnos están ayudando a la construcción de su aprendizaje.

Esta presenta la representación de los contenidos, ejemplos y ejercicios, mediante gráficos.

Al final de la unidad se encuentran presentes, ejercicios, problemas de ingenio, resumen y autoevaluación, que permiten ver cuánto fue lo aprendido en este proceso de enseñanza-aprendizaje y qué es lo que aún no se ha dominado.

En esta unidad se trabaja con los conocimientos previos (fracciones, frecuencia relativa, etc), esto ayuda a tener una mejor comprensión de lo que se verá en la unidad..

Cumple con lo dictado por el Ministerio de Educación de Chile, en lo referente a los contenidos mínimos.

1.2.2. Textos para 3º año Medio

Editorial Arrayán Editores.

"Matemática 3º medio: Texto del alumno", publicado en el año 2002, de los autores Julio Orellana S., Marta Ulloa A. y Mario Zañartu N.

En este texto, lo relativo a probabilidad lo encontramos en la Unidad 4: "Otro paso en el estudio de la probabilidad", donde se realizó un somero análisis, a los ejemplos, las actividades, las definiciones, el énfasis, etc y además si cumplen con los requisitos del Ministerio de Educación de Chile.

El índice del texto en esta unidad es el siguiente:

1. Pasado, futuro y probabilidad.
2. Conocimientos previos.
    - Concepto de razón.
    - Gráficos y diagramas.
    - Certeza e incertidumbre
3. Experimentos aleatorios.
4. Experimentos aleatorios y frecuencias relativas.
5. Probabilidad frecuencial o empírica.
    - Ley de los Grandes Números.
6. Resultados equiprobables y no equiprobables.

- Regla de Laplace.

7. Sucesos en un experimento aleatorio.
    - Probabilidad de un suceso.
    - Suceso contrario.
    - Relaciones entre sucesos.
    - Variable aleatoria.
8. Juegos equitativos.
    - Números aleatorios y simulación de experimentos aleatorios.
9. Experimentos sucesivos o compuestos.
10. Sucesos dependientes e independientes.
    - Independencia de sucesos y probabilidad condicionada.
11. Resultados en forma de lista ordenadas.
    - Arreglos o variaciones. Permutaciones.
12. Contando conjuntos: cuando no influye el orden.
13. Auto evaluación.
14. Ejercitación adicional.
15. Taller.
16. Profundización de conocimientos.
17. Evaluación final.

Observaciones:

Después de revisar la Unidad 4 y ver sus contenidos, el tipo de ejemplos, actividades y aprendizaje esperado, el diseño que tiene y cómo da a conocer los contenidos a los alumnos, se observa lo siguiente:

En la estrategia comunicativa existe para esta unidad un 23 % del total de el libro; notas históricas del saber matemático y su evolución; visualmente se hace atrayente e interesante, teniendo dibujos a colores, adecuados a los ejemplos y ejercicios; existen algunos resúmenes de cada contenido; explicación de lo que los alumnos aprenderán en cada contenido y cuadros que permiten ampliar los conocimientos; existe el uso de la tecnología en “Números aleatorios y simulación de experimentos aleatorios”, cumpliendo con uno de los puntos del contenido dictado por el Ministerio de Educación de Chile; los ejemplos son coherentes al contenido, existiendo situaciones reales, en la que los alumnos comprenden que las matemáticas son parte de la realidad.

Se comienza esta unidad dando a conocer la importancia que el ser humano ha dado al saber, sobre su futuro, y cómo este interés llevó al descubrimiento de la astronomía, la cual da surgimiento de algunas ciencias y da origen a la idea de “determinismo”, y con el tiempo la idea de “incertidumbre”, el cual fue un concepto que tomó cuerpo en la ciencia, y en el desarrollo de las ideas probabilísticas surgiendo como el único camino para comprender y descubrir muchos acontecimientos. Dar a conocer la unidad de esta manera, se hace novedoso, pero no se utiliza, eso si algún ejemplo o problema para exponer el tema, sólo se habla de cuáles son las raíces de la probabilidad. Lo interesante de esta propuesta de los autores, es que no se vuelve a usar el *juego*, para introducir el tema de la probabilidad.

Los contenidos están dados en forma continua, unido los temas, ayudando así, a que los alumnos no olviden lo anteriormente visto.

Se encuentran presentes actividades grupales donde los alumnos pueden reafirmar los contenidos aprendidos con sus compañeros o aprender de sus iguales lo que no comprendió antes; existe problemas de exploración, en donde los alumnos ayudan a la construcción de su propio aprendizaje. Todo esto ayudando a tener un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje.

Está presente la representación mediante gráficos y diagramas de los contenidos y ejemplos y ejercicios, dando una mejor ejemplificación de las unidades.

Al final de la unidad se encuentra presente una autoevaluación, ejercitación adicional, taller, profundización de conocimientos y evaluación final, que permite ver cuánto fue lo aprendido en este proceso de enseñanza-aprendizaje y para la retroalimentación de la unidad y del conocimiento adquirido.

En este texto escolar se trabajó con los conocimientos previos, para poder abordar la unidad, esto permite que los alumnos comprendan mejor la materia y no tengan algunas lagunas, estas son necesarias eliminar para una mejor comprensión de la unidad.

Cumplen con los contenidos mínimos dictados por el Ministerio de Educación de Chile, llevando el mismo orden y dando el contenido en forma continua.

Se incluye otro tema en esta editorial, “conteo de casos mediante arreglos, variaciones, permutaciones y combinaciones”.

Editorial Santillana.

"Matemática 3º medio", publicado en el año 2001, de los autores Jaime Velásquez V., Gladys Sepúlveda R. y Pamela Solabarrieta A.

En este texto, lo relativo al tema de probabilidad se encuentra presente en el capítulo IV y en sus unidades:' 'Enumerando posibilidades" y "Ley de los grandes números", donde se realizó un somero análisis, a los ejemplos, las actividades, las definiciones, el énfasis, etc y además si cumplen con los requisitos del Ministerio de Educación de Chile.

El índice del texto en esta capítulo es el siguiente:

Unidad Uno: Enumerando posibilidades.

1. El primer paso en el conteo.
2. Principio multiplicativo.
3. Seleccionando con orden.
4. Seleccionando sin orden.
5. Jugando con las probabilidades.
6. Desafíos.
7. Proyecto de investigación.
   - Hacer esquemas.
8. Objetivo transversal.
   - El libre albedrío.
9. Evaluación 1.
10. Evaluación 2.
11. Ejercicios.

Unidad Dos: Ley de los grandes números.

1. Ley de los grandes números.
2. Fractal de Pascal y probabilidades.
3. Eligiendo al azar.
4. Adición de probabilidades.
5. Regla general de adición.
6. Eventos independientes.

7. Probabilidad condicionada.
8. Desafíos.
9. Proyecto de investigación.
    - Ley de los grandes números.
10. Objetivo transversal.
    - Los paradigmas de las matemáticas.
11. Evaluación 1.
12. Evaluación 2.
13. Ejercicios.

Observaciones

Una vez revisado el Capítulo IV y ver sus contenidos, el tipo de ejemplos, actividades y aprendizaje esperado, el diseño que tiene y como da a conocer los contenidos a los alumnos, se observa lo siguiente:

En la estrategia comunicativa existe para este capítulo el 27 % del total de el libro; existen en las dos unidades notas históricas del saber matemático y su evolución; visualmente es interesante, para el alumno y la alumna, contiene dibujos a colores, adecuados al contenido, ejemplos y ejercicios; existen cuadros de ayuda que contienen definiciones de algunas fórmulas matemáticas necesarias para el desarrollo de los contenidos presentes en cada unidad; está presente lo que los alumnos aprenderán en cada unidad, "aprendizaje esperado"; no se utiliza la computación en este capítulo, estando presente si el uso de la calculadora, pero al no utilizar algún programa computacional, no cumple con uno de los puntos del contenido, dictado por el Ministerio de Educación de Chile.

Se comienza este capítulo hablando del cubo Rubik o también llamado "cubo mágico" y el número de posibilidades de poder armarlo. A continuación se realiza un ejemplo donde un grupo de personas en total 4 se saludan con la mano, de lo cual se debe determinar el número de apretones de manos que se dieron, concluyendo con la explicación de cuántos apretones de manos se dieron, mediante un ejemplo gráfico.

Los contenidos están dados en forma continua y unido un tema con otro ayudando a que los alumnos no olviden lo anteriormente visto.

Los contenidos están representados mediante gráficos y diagramas, dando una mejor ejemplificación a cada unidad; los ejemplos son coherentes al contenido, existiendo situaciones reales, en las que los alumnos pueden ver que las matemáticas son parte de la realidad.

No existe en ninguna de las dos unidades, actividades grupales donde los alumnos pueden reafirmar los contenidos aprendidos con sus compañeros o aprender de sus iguales lo que no comprendió antes; no existen en las dos unidades, problemas de exploración, en donde los alumnos ayuden a la construcción de su aprendizaje. La falta de actividades grupales y de exploración, no ayudan a que haya un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje.

No existe un ejercitación de los conocimientos previos (razón, gráficos, diagramas, certeza e incertidumbre), esta podría ayudar a los alumnos a tener una mejor comprensión de cada unidad.

En este capítulo existen dos evaluaciones que permiten a los alumnos comprender cuánto fue lo que aprendió en este proceso de enseñanza-aprendizaje y qué es lo que tienen que repasar.

En los contenidos de este Capítulo no se encuentran presente los siguientes puntos: “Gráficos de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico”; “El uso de programas computacionales para la utilización de experimentos aleatorios”, con lo cual no cumple con los contenidos mínimos dictados por el Ministerios de Educación Chile, sí estando presente los otros requisitos.

Editorial Mare Nostrum

“Matemática 3º medio: Texto para el Estudiente”, publicado en el año 2003, de los autores Patricio González G. y Jorge Soto A.

En este texto, lo relativo a probabilidad lo encontramos en la Unidad 6: “El retorno de la incertidumbre” y la unidad 7: “Simulemos y grafiquemos”, donde se realizó un somero análisis, a los ejemplos, las actividades, las definiciones, el énfasis, etc y además si cumplen con los requisitos del Ministerio de Educación de Chile.

El índice del texto en esta unidad es el siguiente:

Unidad 6 El retorno de la incertidumbre.

1. Introducción activa.
2. Variables aleatorias por doquier.
3. ¿Cómo se comporta?.
    - La variable aleatoria D. el número de puntos que muestra un dado.
    - ¿Cuán probable es un “ó” o un “y”?.
    - El tiempo de vida T de una mosca que sobrevive precariamente.
4. ¿La probabilidad de qué?. Probabilidades condicionales.
5. ¿Qué se puede esperar de una variable aleatoria?.

- Se puede esperar un valor promedio.
- Una interpretación física de la esperanza.
- Una variable de la interpretación física de la esperanza.

6. ¿Cuál es el precio justo?.
7. Ejercicios de la unidad.
8. Problemas de ingenio.
9. Resumen.
10. Autoevaluación.

Unidad 7 Simulemos y grafiquemos.

1. Introducción activa.
2. Simulemos el lanzamiento de 1.000 monedas.
   - Iniciación a Excel.
3. ¡Grafiquemos con WinPlot!.
   - Retorno a las mesas y armarios....
4. ¡Grafiquemos curvas!.
5. Ejercicios de la unidad.
6. Problemas de ingenio.
7. Resumen.
8. Autoevaluación.

Observaciones:

Después de revisar la Unidad 6 y Unidad 7, y ver sus contenidos el tipo de ejemplos, actividades y aprendizaje esperado, el diseño que tiene y como da a conocer los contenidos a los alumnos, se observa lo siguiente:

En la estrategia comunicativa existe para la unidad 6 un 15 % y para la unidad 7 un 10 % del total de el libro; visualmente no es muy interesante para los alumnos, contiene dibujos a colores, adecuados a los ejemplos y ejercicios; existen conclusiones de cada contenido, cuadros de recordatorios y de definiciones, ayudando al aprendizaje y reforzamiento; no contiene notas historicas del saber matemático y su evolución; existe el utilización de la tecnología (computador) en la unidad 7 "Simulemos el lanzamiento de 1.000 monedas", cumpliendo con uno de los puntos del contenido, dictado por el Ministerio de Educación de Chile; los ejemplos son coherentes al contenido, existiendo situaciones reales, en las que los alumnos pueden comprender que las matemáticas son parte de la realidad.

Se comienza esta unidad, hablando que en invierno, cuando hay epidemia de gripe, no es raro que nos contagiemos de esta enfermedad al viajar en transporte público, de la cual resulta la primera pregunta, ¿Cómo podrías estimar la probabilidad de contagiarte con el virus de la gripe en un viaje de microbús?, luego se realizan otras preguntas relacionadas a esta misma situación, para la comprensión de este problema se habla de las observaciones de Carolina, ayudando a determinar la probabilidad de contraer gripe en cierto caso. A continuación se presenta el ejemplo de las bolitas de colores. Comenzar la unidad de esta manera permite que los alumnos vean la relación que existe entre las probabilidades (las Matemática) y la vida, siendo bueno, debido a que no se vuelve a utilizar *el juego*, como introducción, para el tema de probabilidad.

Los contenidos están dados en forma continua y unido un tema con otro ayudando a que los alumnos no olviden lo anteriormente visto.

Existen actividades grupales donde los alumnos pueden reafirmar los contenidos aprendidos con sus compañeros o aprender de sus iguales lo que no comprendió antes; existe problemas de exploración "observa", en donde los alumnos ayudan a la construcción de su aprendizaje. Contener esto ayuda a un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje para los alumnos.

Se encuentra presente la representación mediante gráficos y diagramas de los contenidos, dando una mejor ejemplificación de la unidad.

No existe un ejercitación de los conocimientos previos (razón, gráficos, diagramas, certeza e incertidumbre), esta podría ayudar a que los alumnos tengan una mejor comprensión de cada unidad.

Al final de la unidad se encuentra presente, ejercicios, problemas de ingenio, resumen y autoevaluación, que es parte importante para ver cuánto fue lo aprendido en este proceso de enseñanza-aprendizaje, faltando si la evaluación.

Los contenidos en esta unidad cumplen con lo dictado por el Ministerio de Educación de Chile, estando presente el uso de programas computacionales, en la unidad 7.

1.3. Conclusiones

Una vez realizado un somero análisis de los textos escolares de 2^{do} y 3^{ro} medio correspondiente a las editoriales Mare Nostrum, Santillana y Arrayán Editores, se concluye que.

Existe una diferencia entre Mare Nostrum y las otra editoriales. Su formato es diferente a los otros textos escolares, su presentación es menos conocida y debido a esto es algo mas difícil de analizar. Además trabaja la unidad de forma diferente y con títulos que no expresan en forma directa lo que se esta aprendiendo. Lo interesante es la presentación de cada unidad, ya que en los textos de 2º y 3º medio, se entregan ejemplos novedosos. El autor no reutilizó los casos con monedas, dados y otros más, que suelen ser comunes en otro textos.

Santillana contiene un formato de libros que es usado comúnmente en los establecimientos educacionales municipales, su presentación es más conocida y por ende se hace más fácil un análisis. Sus ejemplos y ejercicios resultan ser comunes, ya que no sale de trabajar con dados, monedas, bolitas de colores y otros casos, aunque se sabe que hay ejemplos en los que son adecuados de usar estos. Así también sería bueno que los alumnos se enfrentaran a diversos tipos de situaciones, para que comprendan que no toda la unidad trata de lo mismo. Faltaron algunos contenidos mínimos dictados por el Ministerio de Educación, una posible explicación es el año en que fue editado este libro (2001).

Arrayán Editores es el que mejor se aproxima a lo que pretendemos encontrar en un texto escolar. Contiene ejemplos interesante, dibujos llamativos para los alumnos, la materia explicada en forma clara (teniendo un formato más familiar), con cuadros que explican lo que el alumno debe aprender. Existen situaciones y casos variados. El texto de 3º medio, de nuestra perspectiva es una excelente libro de consultas para la unidad de probabilidad, por sobre el texto de la editorial Mare Nostrum que recomienda el Ministerios.

El libro de la Editorial Arrayán por lo anterior, será un texto de consulta obligada, para el desarrollo de esta propuesta metodológica.

Capítulo 2

Métodos de Enseñanza-Aprendizaje

2.1. Constructivismo

La idea de constructivismo la introduce Piaget, "el aprendizaje escolar no consiste en una interpretación pasiva del conocimiento, sino más bien en un proceso activo de elaboración; los errores de comprensión provocados por las asimilaciones incompletas o incorrectas del contenido son peldaños necesarios y a menudo útiles de este proceso activo de elaboración; la enseñanza debe favorecer las interacciones múltiples entre el alumno y los contenidos que tienen que aprender; el alumno construye el conocimiento a través de las acciones efectivas o mentales que realice sobre el contenido de aprendizaje; etc" (Piaget, 1896-1980).

"Básicamente puede decirse que es la idea que sostiene que el individuo tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción?. Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que le rodea.

Dicho proceso de construcción depende de dos aspectos fundamentales:

- De los conocimientos previos o representaciones que se tenga de la nueva información, o de la actividad o tarea a resolver.

- De la actividad externa o interna que el aprendiz realice al respecto.” (Carretero, 1993).

La interpretación contructivista en sentido estricto, pone énfasis en los procesos individuales y endógenos de construcción del conocimiento y presenta la actividad autoestructurante del alumno, “actividad cuyo origen, organización y planificación corresponden al alumno”, como el camino mejor, si no único, para el que éste pueda llevar acabo un verdadero aprendizaje.

La acción pedagógica dentro de una sala de clases es crear una ambiente rico y estimulante, donde se pueda desplegar sin límites las actividades autoestructurante de los alumnos.

2.1.1. Constructivismo Cognitivo

El constructivismo cognitivo concibe el pensamiento, el aprendizaje y en general los procesos psicológicos como un fenómeno que tiene lugar en la mente de las personas. En la mente se encuentran almacenadas representaciones (esquemas o modelos metales) del mundo físico y social, de modo que el aprendizaje consiste, en relacionar las experiencias nuevas con las ya existentes, lo que da a un proceso interno de revisión y modificación de las representaciones, o a la construcción de otras nuevas.

El constructivismo cognitivo esta enfocado fundamentalmente en:

- Analizar la dinámica interna del proceso de construcción del conocimiento.
- Entender cómo esta dinámica resulta afectada por la incorporación, el ajuste o la relación de la información nueva con las representaciones ya existentes en la mente.
- Indagar las condiciones de enseñanza, en las que el encuentro cognitivo de la nueva información y las representaciones, pueden orientar internamente la revisión, modificación, reorganización o diferenciación.

2.1.2. Constructivismo Social

El constructivismo social no niega la importancia de los procesos mentales, pero dice que estos no son individuales, su naturaleza se despliega y manifiesta en lo social, por lo que no hay que estudiarlo en la “cabeza”, de las personas, sino en la interacción entre las personas, en las relaciones sociales.

Los procesos sociales en la sala de clase, es la vía a través de la cual los alumnos adquieren y retienen el conocimiento, el aprendizaje es el fruto de las aportaciones individuales, como de la dinámica de las relaciones sociales que se crean entre el profesor y los alumnos, en el seno de la sala de clases.

2.1.3. Teoría del aprendizaje de Vigotsky

Teoría de Lev Vigotsky: el entorno social como base de las estructuras internas de pensamiento

La teoría de Vigotsky aparece como una aproximación histórico-social del desarrollo, que propone por primera vez una visión de la formación de las funciones psíquicas superiores como una internalización mediada de la cultura.

Vigotsky hace una distinción entre lo que él llama "funciones elementales" y "funciones superiores". Las funciones elementales son naturales, y por lo tanto no se aprenden (por ejemplo, la percepción, el hambre). No hay realmente implicados pensamientos voluntarios en estas funciones. Las funciones superiores (la lengua, la memoria voluntaria, el pensamiento, la atención dirigida, la abstracción, etc.), en cambio, permiten manejar voluntariamente los estímulos y no son controlados por éstos. Las funciones psicológicas superiores se originan cuando el ser humano genera "instrumentos".

Los instrumentos son símbolos que "están por" estímulos. Los instrumentos permiten salir del aquí y ahora y autorregular el propio comportamiento.

Los instrumentos son construidos culturalmente. Algunos instrumentos son: lenguaje, la lectura, escritura, aritmética, computador, nudos en el pañuelo, etc.

Las características de las funciones psicológicas superiores son:

- Permiten superar el condicionamiento del medio y permiten la reversibilidad de estímulos y respuestas indefinidamente.

- Suponen el uso de intermediarios externos o "instrumentos psicológicos", entre ellos los signos y el más importante de ellos es el lenguaje.

- Implican un proceso de mediación por "instrumentos psicológicos" cuyo fin es la modificación y el control del propio comportamiento.

La mediación instrumental es aquella donde un instrumento psicológico es utilizado para orientar y guiar un proceso cognitivo, que es generado por el uso de estímulos artificiales que se convierte en las causas inmediatas de la conducta.

La mediación social: la "mediación social" es aquella donde interviene una relación interpersonal. El individuo se entrena en dominar el sistema de signos de su mediador y al hacerlo internaliza las relaciones sociales de modo que quedan incorporadas como funciones psíquicas superiores. Esta internalización se va a producir a través de la interacción social.

Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre seres humanos"(Vigotsky, 1978, citado por Carretero, 1986).

Vigotsky propuso entender de un modo radicalmente distinto la relación entre aprendizaje y desarrollo, a través de su concepto de "zona de desarrollo próximo". Esta zona sería aquel trecho que separa el desarrollo real (aquellas capacidades que un niño puede desarrollar independientemente) y el desarrollo potencial (o las capacidades que un niño puede presentar si es auxiliado por un mediador, alguien más capacitado que él). Gracias a esta distinción, este autor concluye que el aprendizaje se debe centrar en las habilidades que un niño aún no presenta por sí solo. Este aprendizaje es, en definitiva, el que permite que el desarrollo sea progresivo.

Este nuevo concepto va a traer grandes implicancias para la educación. Propone, en primer lugar, que el aprendizaje es el motor del desarrollo. Con ello se desmitifica la idea que la maduración es previa al aprendizaje, subraya la importancia de un sujeto activo y estimulado. En segundo lugar, el aprendizaje no es un proceso individual, en el que el entorno social (familia y colegio incluidos) tienen mucho que decir. Por último, se reconoce que la responsabilidad del aparato escolar es mayúscula. No sólo consiste en promover el aprendizaje de los niños; también implica que un establecimiento educacional tiene el deber de desarrollar al niño. El no hacerlo implicará que el niño no "madurará"por sí solo.

En un aula vigotskiana se enfatiza el descubrimiento asistido, en forma de guía verbal, de la colaboración de profesores y compañeros. El juego imaginativo en los años preescolares y las actividades de lectura y escritura durante la mitad de la niñez favorecen importantes avances cognitivos. Las innovaciones educativas vigotskianas incluyen enseñanza recíproca y aprendizaje cooperativo.

2.2. Metodología

Se sabe que el razonamiento matemático, como la lectura, se construye sobre el conocimiento informal, es por eso que la metodología a utilizar en el desarrollo de este trabajo estará fundamentado en el constructivismo. Tanto en el constructivismo cognitivo como en el constructivismo social y dentro de esta la teoría del aprendizaje de Vigotsky.

Se quiere que los alumnos en cada unidad ayuden a la construcción de su propio conocimiento. El aprendizaje será en cierta medida informal (habrá momentos en el que el profesor, dará explicaciones para guiarlos), los alumnos estarán involucrados en la construcción de su aprendizaje, dejando el aprendizaje burocrático, el cual ya no es utilizado y pasando con esto al aprendizaje significativo ("El cual, conduce a la creación de estructuras de conocimiento mediante la realización sustantiva entre la nueva información y las ideas previas") (Ver [5]).

Al inicio de un contenido de la unidad de probabilidad, el alumno se encontrará primero con un experimento (prueba práctica realizada para estudiar e intentar entender el nuevo conocimiento y experimentar, notando y viendo ellos mismo algo). “El alumno es un procesador activo de información y el aprendizaje es sistemático y organizado, pues es un fenómeno complejo que no se reduce a simples asociaciones memorísticas. Esta concepción señala la importancia que tiene el *aprendizaje por descubrimiento* (el alumno reiteradamente descubre nuevos hechos, forma conceptos, infiere relaciones, genera productos originales, etc.), considerando que no es factible que todo el aprendizaje significativo que ocurre en el aula sea por descubrimiento” (Ver [5]). Se espera que ellos utilicen sus conocimientos previos para la comprensión y realización del experimento (que indagen en sus esquemas o modelos mentales). Después de esto se entregará una explicación del problema, continuando con la exposición y definición de la materia que trata cada contenido que se está viendo.

El contenido, problema o experimento explicativos, son la guía, para el aprendizaje; las indicaciones y explicaciones verbales, adaptadas cuidadosamente en el proyecto de tesis, harán que surja un esfuerzo en la zona de desarrollo próximo de cada alumno.

Se darán actividades grupales, para que se promueva el descubrimiento asistido, donde se espera que los alumnos se apoyen entre sí. De acuerdo con Vigotsky (1930-1935/1978), casi todos los iguales con conocimiento pueden también llevar el aprendizaje hacia adelante, en la medida en que ajustan la ayuda que proporcionan para adaptarse a la zona de desarrollo próximo, y en línea con esta teoría y la planificación y solución de problemas de los alumnos mejoran más cuando sus pares son “expertos”. Un factor importante en las actividades de grupo, es que existe un aprendizaje cooperativo, los alumnos trabajan en conjunto, para así lograr una meta y se llegará a la construcción del aprendizaje.

Se darán también actividades de exploración donde tendrán que indagar en sus conocimientos previos y los nuevos conocimientos adquiridos para así poder desarrollar los problemas, esto implica una autoevaluación. Estas actividades de exploración tienen su fundamentación, en la metodología del constructivismo cognitivo.

Al final de la unidad habrá una autoevaluación y evaluación final de los contenidos estudiados, para así terminar con la unidad y ver cuánto es el fruto obtenido en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Esta metodología incluye también todos los requisitos dictados por el Ministerio de Educación de Chile, cumpliendo con el marco curricular nacional.

Esta metodología se implementará en el próximo capítulo.

Se comenzará con un experimento, donde los alumnos deberán indagar y descubrir. Para el desarrollo de estos, los alumnos contarán con la ayuda del profesor, que servirá de guía, para poder cumplir con la meta, luego de intentar desarrollarlo, habrá una explicación, para enseñar a desarrollar el experimento.

Así los alumnos tendrán una mejor comprensión y sabrán a que apuntaba el experimento.

Después de lo anterior vendrá la exposición del contenido, esta cumple la función de ser guía para el desarrollo de los problemas que se verán a continuación y para su misma comprensión.

Una vez comprendido el contenido, los alumnos desarrollarán actividades grupales, esto ayuda a que los alumnos se apoyen unos con otros en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

A continuación revisaremos las características de los experimentos, la exposición y las actividades grupales.

Experimentos:

- Deben ser familiares, siendo casos o situaciones reales.
- Su objetivo no es que los alumnos lo realicen, si no que, motiven la curiosidad, el investigar, el aprender, además del deseo del desarrollo de la experiencia.
- Se deben desarrollar los experimentos, de dos o más alumnos, permitiendo de esta forma el descubrimiento en forma asistida.
- Deben ayudar a la formación de conceptos.

Exposición:

- Permiten comprender para qué fueron realizados los experimentos introductorios.
- Aclara los conceptos que trata cada experimento introductorio.
- Permiten la mejor comprensión del contenido que se esta viendo.
- Son una guía, para desarrollar las actividades grupales.
- Activa la zona de desarrollo proximo de cada alumno.

Actividades Grupales:

- Deben ser familiares, siendo casos o situaciones reales
- Su objetivo es la apropiación de conceptos y solución de problemas.
- Son significativos y repetitivos.
- Deben motivar en el desarrollo del experimento, en el aprendizaje y en el descubrimiento.
- Permiten el descubrimiento asistido y aprendizaje cooperativo.

Capítulo 3

Propuesta para la enseñanza de la probabilidad

3.1. Introducción.

Sin saber realmente que es la probabilidad, sabemos que se debe poder medir, dado que decimos que algo es *MAS* o *MENOS* probable, *MUY* probable o *POCO* probable.

Mas aún, sabemos que una probabilidad puede convertirse en certeza (su mayor valor) o resultar nula (su menor valor). Si llegamos a determinar que un jugador este errado en un movimiento, en el juego de la "Dama", la probabilidad que gane se vuelve nula mientras que la probabilidad que la tenga su compañero se vuelve una certeza. Para ser más comprensible lo que es probabilidad, reflexionemos sobre algunas situaciones usuales:

- Si llegando a un casino, nos detenemos unos momentos a observar la ruleta, y notamos que el color rojo gana en forma consecutiva en 10 ocasiones, ¿a qué color apostaremos enseguida? ¿al negro por que ya le toca? ¿al rojo porque está de suerte? y si llega alguien más en ese momento y apuesta a algún color, ¿cambiará su probabilidad de éxito si le decimos que el rojo ha ganado 10 veces?

- ¿Compraríamos un billete de lotería cuyo número fuera 333333? ¿nos sentiremos defraudados si es premiado el 123456? ¿no tienen estos números la misma oportunidad de ganar que el 916593 o cualquier otro?

- Si en una rifa tenemos el boleto n° "015", y el maestro de ceremonias anuncia "el número ganador empieza con 01", ¿habremos tenido mayor posibilidad de ganar que si se anuncia directamente el número ganador?

¿Qué es entonces la probabilidad?

La **probabilidad** *es una rama de las matemáticas que se ocupa de medir o determinar cuantitativamente la posibilidad de que ocurra un determinado suceso.* La probabilidad está basada en el estudio de la combinatoria y es fundamento necesario de la estadística.

3.2. Experimentos aleatorios.

¿Qué es un experimento aleatorio?, para ello veamos un experimento introductorio.

Experimento Introductorio.

Vaso de Café

Materiales : Un vaso pequeño plásticos, usado para beber agua o café.

Este experimento consiste en lanzar el vaso desde una cierta altura al suelo (por ejemplo un metro), de modo que de algunas vueltas en el aire y luego observa cómo queda cuando cae en el suelo (boca arriba, boca abajo o de costado).

Cuestionario:

1. Antes de hacer el experimento, ¿Cuáles son las posibles formas en que el vaso termine en el suelo?.
2. ¿Cuál de los resultados crees que ocurrirá un mayor número de veces?.

Desarrollo del Cuestionario

Si dejamos caer el vaso de café y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc., sabremos con seguridad dónde caerá, cuánto tiempo tardará, etc. Cuando soltamos el vaso de una cierta altura, ignoramos si caerá boca arriba, boca abajo o de costado. El resultado depende del azar. Este es una experiencia aleatoria.

Exposición del Contenido.

Experimentos o fenómenos aleatorios, *son los que pueden dar lugar a varios resultados, cuando se han realizado varias veces un experimento, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento.*

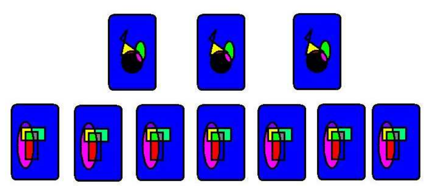
Actividades Grupales.

Junto a tus compañeros construyan y luego resuelvan los siguientes problemas.

Actividad 1: Lotería.
Materiales: Cartulina, tijera, 7 símbolos o dibujos iguales, 3 símbolos o dibujos iguales, pero distintas a las otras 7, sino dos lápices de color distintos (ejemplo rojo y azul) y una bolsa plástica no transparente (puede ser una de supermercado).

Con la cartulina, recortar 10 fichas iguales, marcar 7 de ellas con un símbolo o color y luego hacer lo mismo con las otras 3 y las echemos en una bolsa. Luego saquen de la bolsa una ficha, vean que símbolo sale y devuelvan la ficha a la bolsa.

1. Antes de hacer el experimento, ¿Cuáles son los resultados que considerastes posibles?.
2. ¿Cuál fue el primer resultado que les apareció?
3. ¿Cuál de los resultados crees que ocurrirá un mayor número de veces?.
4. ¿Cuál es la posibilidad de sacar una ficha con el primer símbolo? ¿y con el segundo?



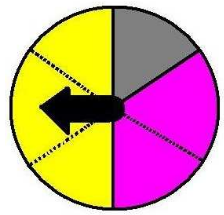
Actividad 2: Ruleta.
Materiales: Un plato de carton o un transportador, una cartulina, una tijera, un alfiler o tachuela y 3 lápices de colores.

Con la cartulina construyan una ruleta o con el plato, dividan esta ruleta en tres sectores, de tres colores diferentes y ángulos distintos (por ejemplo de 90º, 120º y 150º), luego pongan una flecha que rote, esto se puede hacer con la tachuela o alfiler. Una vez hecha la ruleta hagan girar la flecha.

1. Hacer un pronóstico del color donde más se detendrá la flecha.

2. ¿Cuál fue el primer resultado que tuvieron?, ¿Coincidió con su pronóstico?.

3. Repitan este experimento 15 veces y anoten, sus resultados. ¿Cuál es el sector que más veces se repitió?.



3.3. Frecuencia relativa.

Experimento Introductorio.

Moneda.

Materiales: Una moneda de \$10, \$50 o \$100.

El experimento consiste en que junto con un compañero, lancen una moneda 15 veces, en una superficie dura, anotando los resultados que se obtengan.

Cuestionario:

1. ¿Qué símbolo creían que saldría más veces?.

2. Según ustedes después de ver todas las veces que salió cara, sello y comparando sus resultados con otros compañeros, ¿cuál es el símbolo que tienes más posibilidades de salir en el lanzamiento de una moneda?.

Desarrollo del Cuestionario

La vida cotidiana está plagada de sucesos aleatorios, muchos de ellos, de tipo sociológico (viajes, accidentes, número de personas que acudirán a un gran almacén o que se matricularán en una carrera...) aunque son suma de muchas decisiones individuales, pueden ser estudiados, muy ventajosamente, como aleatorios.

Exposición del Contenido.

Espacio muestral: *es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.*

Del experimento de la moneda, podría ocurrir que obtuviéramos como posible resultado cara o sello, estos conformarían el espacio muestral de el experimento.

Abreviadamente lo podemos anotar:

$$E=\{\text{cara,sello}\}$$

El espacio muestral es entonces el conjunto de todos los posibles resultados al realizar un experimento aleatorio.

El experimento que realizamos se puede resumir en una tabla, de la siguiente forma, los datos de la tabla son posibles resultados obtenidos:

	Número de lanzamientos	Número de caras	Número de sellos
Juan	15	5	10
Pedro	15	8	7
Diego	15	10	5

Frecuencia relativa: *es el cociente entre la frecuencia y el tamaño de la muestra. La denotaremos por f_r.*

Por Ejemplo:

Si Pedro lanzo 15 veces la moneda y en 8 ocasiones se obtuvo “cara”, entonces
- La frecuencia de “cara” es $f = 8$
- La frecuencia relativa de “cara” es $f_r = \frac{8}{15}$

Los datos de los lanzamiento hechos por Diego se pueden anotar en una tabla de frecuencias relativas de la siguiente formar:

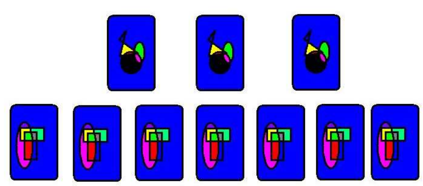
Numeros de lanzamiento	Numero de caras	Numero de sellos	Frecuencias relativas de Caras por lanzamiento
1	1	0	$1/15 = 0.0\overline{6}$
4	3	1	$3/15 = 0.2$
5	4	1	$4/15 = 0.2\overline{6}$
8	4	4	$4/15 = 0.2\overline{6}$
10	6	4	$6/15 = 0.4$
12	7	5	$7/15 = 0.4\overline{6}$
15	10	5	$8/15 = 0.\overline{6}$

Actividades Grupales.

ACTIVIDAD 1: 10 fichas.
Materiales: Las 10 fichas que construyeron con cartulina (3 fichas con un símbolo a su elección y 7 fichas con otro símbolo, todas del mismo tamaño), colocarlas en una bolsa, y realizar las tareas.

1. Construyan una tabla de frecuencia relativa, luego saquen 12 veces la ficha de la bolsa y anoten los resultados.

2. Analice la frecuencia relativa obtenida para cada caso.

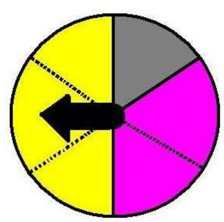


ACTIVIDAD 2: Ruleta de 3 sectores.
Materiales: La ruleta construida anteriormente.
Hacer girar 20 veces la ruleta con tres sectores.

1. Completar la siguiente tabla de frecuencia relativa.

Número de vueltas	N^o de veces: Sector 1 (Frecuencia absoluta)	N^o de veces: Sector 2 (Frecuencia a.)	N^o de veces: Sector 3 (Frecuencia a.)	Frecuencia Relativa Sector 1
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

2. ¿Cuál es el sector mas probable que salga, según la tabla de frecuencia relativa?.



3.3.1. Probabilidad frecuencial o empírica.

Experimento Introductorio.

Cucharas.

Materiales : Una cuchara de té o sopa.

El experimento consiste en que junto con un compañero, lancen la cuchara desde cierta altura hacia el suelo 15 veces al mismo tiempo, anotando los resultados que se obtengan (vuelta hacia arriba o vuelta hacia abajo) en una tabla.

Cuestionario:

1. Según los datos obtenidos de la tabla cuál es el valor en porcentaje cuando la cuchara cae "vuelta hacia arriba" y "vuelta hacia abajo".
2. ¿Qué significa que el 0,6 de las veces la cuchara cayó vuelta hacia abajo?.

Desarrollo del Cuestionario

De este experimento observamos la frecuencia relativa de que quede "vuelta hacia arriba" y puede que se estabiliza en las vecindades de 0.7, diremos entonces que la probabilidad de caer en esa posición es 0.7 o 70 % y que quede en la otra posición es de 0.3 o 30 %.

Cuando decimos que la probabilidad de una cierta situación es: Incierto, seguro, puede ser, casi posible, bastante probable, es imposible, altamente probable, es dudoso, difícil que suceda, es casi probable, es igualmente probable. Si le asignamos el, valor 0 a imposible y 100 a seguro, ¿qué significado le daríamos a 50?.

Exposición del Contenido.

El valor asignado a la probabilidad de obtener un determinado resultado en un experimento aleatorio, como la frecuencia relativa, se denomina **probabilidad frecuencial**, *experimental o empírica.*

Este valor de probabilidad es un número entre *0* y *1* y la suma de las probabilidades de todos los resultados es *1*.

La probabilidad puede también darse como porcentaje como vimos anteriormente y la suma de las probabilidades de todos los resultados es **100**.

Actividades Grupales.

ACTIVIDAD 1: Los tres vasos.
Materiales: 3 vasos pequeños plásticos iguales, usados para beber agua o café y una moneda de \$10, \$50 o \$100 o una bolita.

Coloquen sobre una mesa los tres vasos iguales boca hacia abajo y en uno de ellos pongan debajo la moneda o bolita. Mezclen los vasos (como hacen los conocidos jugadores) y pidan a sus compañeros que adivinen debajo de que vaso está el objeto. Repitan en forma sucesiva este juego y elaboren una tabla que contenga el número de pruebas realizadas, cuántas de ellas fueron adivinadas y respondan el siguiente cuestionario:

1. ¿Cuál es la frecuencia relativa de adivinar, dónde esta el objeto?.
2. ¿Cuál es el porcentaje de no acertar dónde esta el objeto?.

ACTIVIDAD 2: Caja de manzanas.
Si en una caja hay 10 manzanas y 2 de ellas están podridas (al menos en este momento), al extraer tres manzanas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1, 2 o 3 manzanas en buenas condiciones (0 buenas es imposible)?.
2. Si se pudren 2 manzanas más, ¿la probabilidad de obtener una manzana buena al extraer una cuánto es?, ¿existe alguna diferencia ahora con la situación anterior?

3.4. Ley de los grandes Números

Experimento Introductorio.

Del tiempo.

Materiales : Tres diarios de este año del mismo mes que contenga el informe del tiempo.
El experimento consiste en que junto con un compañero puedan determinar el informe del tiempo con los datos que tienen, respondiendo el siguiente cuestionario.

Cuestionario:

1. ¿Lloverá el mes (corresponde al mes que tiene la información del diario), del próximo año?.

2. ¿Lloverá el 15 de ese mes(el mes que tiene para trabajar, del diario), el próximo año?.

Desarrollo del Cuestionario

Los experimentos aleatorios, si bien son impredecibles, unos tienen más oportunidad de suceder que otros. Sabemos que es imposible determinar si lloverá el próximo 15 de enero o el 15 de julio de 2007 o lloverá el próximo año, el mes que tenemos en el diario, pero si podemos decir que usualmente llueve con más frecuencia en julio que en enero, y por tanto, hay más confianza en que llueva el día 15-07-07 y que si el mes que estamos trabajando esta dentro del período en que más llueve, entonces sabemos que hay una confianza de que llueva.

¿Cómo medir este grado de confianza?. Antes de responder a esta pregunta consideremos el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire, que tiene dos eventos: "cara" o "sello".

Sabemos que el resultado es impredecible, lo mismo cae "cara"que "sello", cualquiera de los dos resultados puede suceder. Sin embargo, dentro de la incertidumbre de este evento hay cierta regularidad que sólo se detecta cuando el experimento se reproduce muchas veces. Si hacemos esto último y realizamos un pequeño ejercicio estadístico que consiste en contar el número de lanzamientos que caen "cara"(frecuencia absoluta), entonces podremos observar el particular comportamiento de la frecuencia relativa (cociente de la frecuencia absoluta y el número de lanzamientos). Conforme el número de lanzamiento se incrementa, la frecuencia relativa se va acercando lentamente al número 0.50. Este número se conoce como la probabilidad de obtener cara.

Número de Pruebas	Frecuencia Absoluta F	Frecuencia Relativa f/n
20	11	0.550
40	18	0.450
60	31	0.517
80	42	0.525
100	48	0.480
120	59	0.492
140	72	0.514
160	83	0.519
180	92	0.511
200	101	0.505

En conclusión, cada experimento individual es aleatorio, porque cualquier resultado puede suceder, pero en cambio, cuando consideramos a todas las pruebas en conjunto, no todo es aleatorio. La frecuencia relativa tiene un comportamiento muy regular, pues sus valores y la probabilidad tienden a aproximarse a medida que el número de pruebas se incrementa. Esta regularidad que presentan los experimentos aleatorios se conoce como la Ley de los grandes números.

Si en el experimento introductorio, consideramos un gran número de pruebas y realizamos una tabla como la anterior y vemos si la frecuencia relativa tiende a estabilizarse, esta se va acercando al número 0.50, sabremos que es o no un mes probable en que llueva y también tendremos confianza en que un día específico llueva.

Exposición del Contenido.

La **ley de los grandes números***, en un principio establece que cuando una situación aleatoria se analiza para una enorme cantidad de sucesos, en iguales condiciones, se puede establecer reglas estables para la situación, donde el azar tiende a desaparecer.*

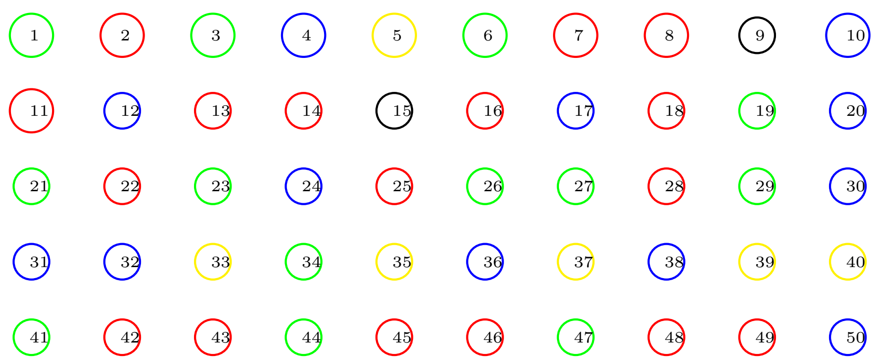
Actividades Grupales

ACTIVIDAD 1: Las 50 fichas enumeradas.

Materiales: Una bolsa plástica de supermercado u otra, que no sea transparente, una cartulina, tijera, lápiz de color.
Con la cartulina construyan 50 fichas iguales, del tamaño de una moneda de $100 y enumerenlas del 1 al 50 y luego introducimos dentro de la bolsa.

1. Promedien los números de las 50 fichas, para verificar que este da el valor de 25,5.

2. Saquen de la bolsa muestras de 4 fichas. Calculen el promedio de cada muestra (después de sacarlas devuelvan las 4 fichas a la bolsa) y luego saquen el promedio de los promedios dados por cada muestras.
   a) ¿Este promedio final se acerca al promedio de la pregunta 1?.
   b) ¿Existe una diferencia mas o menos del 12 %?.



Actividad 2: Condón.

Cuando leen en las especificaciones de un condón que la efectividad es del 99 %.

1. ¿Eso quiere decir que el 99 % de los condones de esa marca funcionan?.

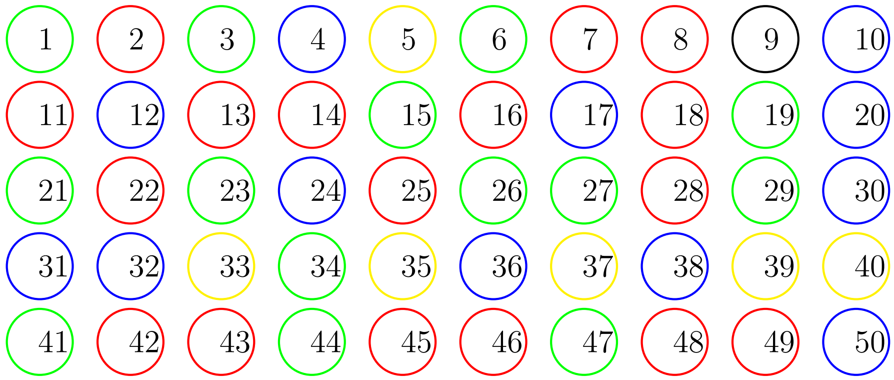
2. Si usas un condón del 1 %, ¿la probabilidad de que falle, con las concebidas consecuencias, es del 100 %?.

3. ¿Creen que esta información es parte de la *Ley de los grandes Números*, por qué?.

3.5. Equiprobables y no equiprobables.

Experimento Introductorio.

Las 50 fichas



Materiales : Las 50 fichas construidas anteriormente en la sección "Ley de los grandes Números" y dos bolsas plásticas de supermercado u otra, que no sea transparente.

El experimento consiste en utilizar estas 50 fichas, para así poder comprender mejor el desarrollo del experimento y así responder el siguiente cuestionario.

Cuestionario:
Ahora con tu compañero tomen una de las bolsas y pongan ahí todas las fichas.

1. ¿Creen que todas la fichas tienen la misma posibilidad de salir, si sacan una de ellas?.

2. Repartanse las 50 fichas, las pares para uno y las impares para el otro y tome una bolsa cada uno y pongan dentro de ella las fichas que les tocaron.
   Si estuvieran jugando con las fichas que tienen y les dicen que el primero que saque un múltiplo de 2, gana.
   a) ¿Ambos tienen la misma posibilidad de ganar?.
   b) ¿Creen que es justo el juego?.

Desarrollo del Cuestionario

Todas la fichas tienen la misma probabilidad de salir, pero cuando se reparten las fichas el juego no es justo, porque uno de los niños tiene las fichas impares y sabemos que no existe una ficha impar que sea múltiplo de dos, por lo cual no tienen la misma probabilidad de salir ganador.

Algunos juegos de azar como la Lotería, el Kino, Experto, cartas, dados, monedas, etc, en cualquiera de ellos, existe la misma probabilidad de acertar o ser ganador, estos resultados son **equiprobables**, en cambio en el ejemplo de repartirse las fichas y no tener la misma posibilidad de ganar o que un dado este cargado en un número (que cuando se lanza el dado siempre sale un solo número), el resultado de acertar tiene un resultado **no equiprobable**.

Exposición del Contenido.

Se dice que un experimento aleatorio es **equiprobable** *si todos sus resultados tienen la misma probabilidad de aparecer.* Las frecuencias relativas tienden a estabilizarse en valores parecidos (casi iguales) para los diferentes resultados, pudiendo concluir con cierta certeza que dichos resultados tienen igual probabilidad.

Al contrario si un experimento no tiene la misma probabilidad de que un resultado aparezca, **no es equiprobable**. Las frecuencias relativas de los resultados tienden a estabilizarse en valores diferentes, pudiendo concluir que los resultados no son equiprobables.

Si lanzamos un dado normal (un dado que no este cargado en un número o que tenga todos los número, sin que falte alguno), entonces podemos suponer que cada resultado es equiprobable.

Para determinar la probabilidad de cada resultado en el supuesto de que sean equiprobable.

1. Sabemos que, en el experimento de un dado, el espacio muestral tiene 6 resultado, E={1,2,3,4,5,6}.

2. Cada resultado tiene la misma probabilidad, es decir, p.

3. Tal como ocurre con las frecuencias relativas, la suma de las probabilidades de todos los resultados del espacio muestral es igual a 1.

   Por lo tanto:

$$p + p + p + p + p + p = 6p = 1$$

   De donde $p = \frac{1}{6}$

Generalizando lo anterior:

Un experimento aleatorio tiene n resultados equiprobables, en el experimento del dado n=6. A cada uno de estos le asignamos una probabilidad:

$$p = \frac{1}{n}$$

Al sumar las n probabilidades de un experimento aleatorio se tiene:

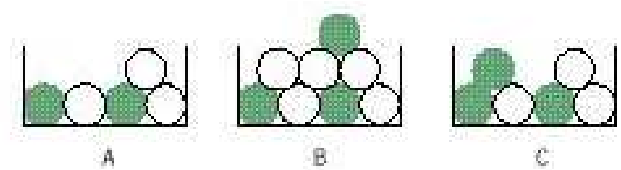
$$n \cdot p = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

En el experimento de los dados, se sabe que n=6 y p=$\frac{1}{6}$, si reemplazamos estos valores se obtiene:

$$6 \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

Actividades Grupales.

ACTIVIDAD 1: Las tres cajas y sus fichas.
Dentro de estas tres cajas hay fichas verdes y blancas.



1. ¿De cuál de estas cajas creen que es más probable sacar una ficha verde?, fundamenten la respuesta.

2. Complementen el ejemplo, de las cajas si es que en una de ellas no existe la misma probabilidad de tener un resultado equiprobable, para así tener la misma probabilidad en las tres cajas.
   a) ¿Qué cambios pueden hacer?.
   b) ¿Es posible agregar fichas, blancas o verdes, para tener la misma probabilidad de sacar una ficha de ese color, en cada caja?.

ACTIVIDAD 2: El alfabeto.
Materiales: Un alfabeto.
Si eligen cada uno, una vocal del alfabeto, al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de ustedes acierte?

2. ¿Creen que uno de ustedes tiene más probabilidades de acertar que el otro?.
3. Ahora si se elige una letra del alfabeto al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea la letra B?.

3.5.1. Regla de Laplace

Experimento Introductorio.

Naipe Español.

Materiales : Una baraja Española de 40 cartas.

El experimento consiste, repartirse las cartas, 20 para cada uno (14 con número y 6 con figuras). Luego de haber recibido las 20 caras, revolverlas bien. Este experimento, permitirá ayudar a comprender mejor el contenido a estudiar y sirve para poder contestar el siguiente cuestionario.

Cuestionario:

1. Si ambos sacan una carta de su mazo, ¿cuál es la probabilidad de que al sacar una carta ésta sea una figura?
2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una copa?

Desarrollo del Cuestionario

Se sabe que un experimento tiene un número finito de resultados, en el experimento introductorio cada mazo tiene como número de resultado "20" y los naipes completos tienen como número finito de resultados "40".

En un experimento que tiene n número finito de resultados y suponiendo que todos ellos son equiprobable, se define:

1. La probabilidad de un resultado o suceso elemental como: $\frac{1}{n}$.

2. La probabilidad de un suceso A que consta de k resultados como: $P(A)=\frac{k}{n}$.

Entonces en el experimento de los naipes españoles, la probabilidad que tenía cada uno en sacar una figura (suceso A) es:

$$P(\textit{sacar una figura})=P(A)=\frac{6}{20}$$

Ya que cada uno tiene 6 figuras de un mazo de 20 cartas.

Para sacar una copa (suceso B) depende de cuántas copas tiene cada uno, si uno tiene 7 copas la probabilidad es:

$$P(\textit{sacar una copa})=P(B)=\frac{7}{20}$$

Para quien tiene 3 copas sería entonces:

$$P(B)=\frac{3}{20}$$

Exposición del Contenido.

La **Regla de Laplace** *dice que la probabilidad de obtener resultado equiprobable, se obtiene con la siguiente división:*

$$P(A)=\frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Actividades Grupales

ACTIVIDAD 1: Naipes Españoles.
Materiales: Un Naipe Español.
Barajar un mazo y contestar el siguiente cuestionario.

1. Si se saca una carta la azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar un “caballo”?. Con este resultado, que se obtuvo al sacar una carta la azar, ¿qué piensan que sucederá si sacan otra carta, devolviendo la carta al mazo antes de sacar la segunda?.

2. Se revuelven las cartas y se reparten 20 cartas para cada uno, ¿cuál es la probabilidad de obtener una espada?.

Actividad 2: Los 2 dados.
Materiales: Dos dados normales.
Esta actividad tiene como objetivo el uso de estrategias ganadoras en un experimento aleatorio.
Se trata de arrojar 2 dados y adivinar la suma de los puntos de las caras superiores.
Las diferentes sumas posibles son los números del 2 al 12.
Cada participante escoge uno de éstos números (pueden coincidir en esta elección), y gana el primero que adivine.

1. ¿Hubo ganadores?
2. ¿Con qué números?
3. Repitan el procedimiento algunas veces más.
   a) ¿Cuál es el resultado que aparece con más frecuencia?.
   b) Calculen la probabilidad de obtener este número usando el método de Laplace.

3.6. Sucesos en un experimento aleatorio.

Experimento Introductorio.

Dos dados.

Materiales : Dos dados normales.

El experimento consiste, en utilizar los dos dados para una mejor comprensión y así también puedan responder el siguiente cuestionario, y comprender el contenido que se estudiará.

Cuestionario:

1. ¿Cuál es el espacio muestral de un dado?.
2. ¿Cuáles son los suceso que creen que pueden aparecer al lanzar los dados?.
3. Lance los dados, ¿los sucesos que creen que pueden aparecer, coinciden con lo que aparece al lanzar los dados?
4. Lance los dados hasta ver que aparezca un suceso que ustedes creen que existe.

Desarrollo del Cuestionario

Sabemos que el conjunto de todos resultados posibles al realizar un experimento aleatorio se denomina espacio muestral.
Entonces el espacio muestral de un dado sería:

$$E=\{1,2,3,4,5,6\}$$

Los posibles sucesos que podrían aparecer al lanzar los dos dados serían: 5 y 6, 6 y 4, 3 y 3, etc. Entonces el espacio muestral de dos dados es:

$$E \times E=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$$

Exposición del Contenido.

En general se llamara **suceso** *o* **evento** *a un conjunto de resultados. Denominaremos como* **suceso imposible** *cuando no existe este resultado*, por ejemplo es imposible tener un resultado 9 al lanzar un dado normal.*Por otra parte todo espacio muestral es también un suceso denominado* **suceso seguro**, por ejemplo al lanzar una moneda, sobre una superficie dura, es seguro que salga cara o sello.

Un resultado se considera también como un suceso y por ello se le suele llamar **suceso elemental** *o* **simple**, *mientras que a los sucesos que contienen dos o más resultados se les llama* **sucesos compuestos**.
La diferencia entre el espacio muestral y un suceso, es que el espacio muestral es el

conjunto de todos los posibles resultados al realizar un experimento aleatorio y el suceso solo es un conjunto de resultados.

Actividades Grupales.

Para el desarrollo de estas 2 actividades se necesitara como *material* : las 50 fichas construidas anteriormente, en la *ley de los Grandes Números* y una bolsa plástica no transparente.

Poner las fichas en la bolsa.

ACTIVIDAD 1: las 50 fichas
Utilizando las 50 fichas realizar los siguientes ejercicios.

1. Escriban el espacio muestral, de las 50 fichas.

2. Anoten al menos 7 sucesos diferentes, que pueden ocurrir al sacar de la bolsa 3 fichas de las 50, que están dentro de la bolsa.

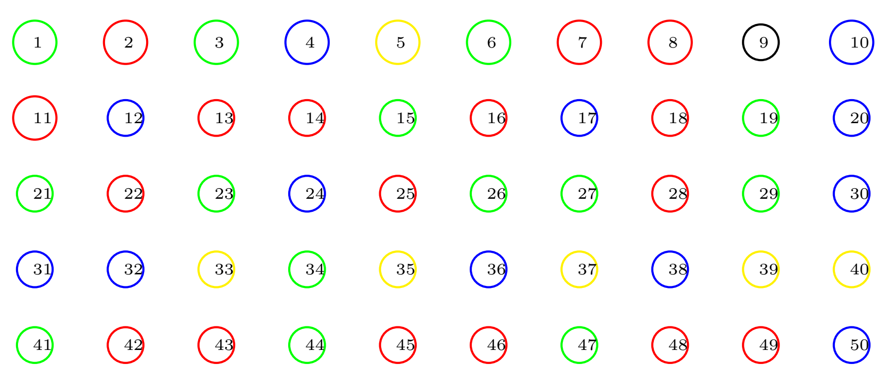
ACTIVIDAD 2:
Extraer una ficha de la bolsa al azar y anotar los resultados que constituyen los siguientes sucesos, realizar esto 10 veces por suceso, devolver la ficha a la bolsa después de verla.

1. La ficha tiene un número par.

2. La ficha tiene un múltiplo de 5.

3. El número de la ficha es impar y mayor que 16.

4. El número de la ficha es mayor que 4 y menor que 41.



3.6.1. Probabilidad de un suceso.

Experimento Introductorio.

Naipes españoles.

Materiales : Una baraja de Naipe Español.

El experimento consiste, en responder el cuestionario, utilizar los naipes para poder comprender mejor los problemas. Sacar naipes al azar y analizar, los resultados, con respecto a las preguntas.

Cuestionario:

1. Al sacar una carta de la baraja, ¿cuál es la probabilidad de sacar cualquier carta?.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea una copa y menor estricto que 6?.
3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una carta par de figura espada?.

Desarrollo del Cuestionario

Como estudiamos anteriormente un experimento aleatorio tiene n resultados equiprobables, a cada uno le asignamos una probabilidad $p = \frac{1}{n}$, en este caso se tienen 40 resultados equiprobables, por lo que la probabilidad de que salga cualquiera de las cartas es: $p = \frac{1}{40}$.

Sabemos que existen 10 cartas con la figura "copa (Ψ)" y como en este caso necesitamos solo las menores estrictos que 6 tenemos entonces, del 1 al 5 de copa. Podría entonces considerarse la probabilidad de tener 1Ψ, 2Ψ, 3Ψ, 4Ψ *o* 5Ψ de copa.

Sea $P(\{1\Psi, 2\Psi, 3\Psi, 4\Psi, 5\Psi\})$

$$= P(\{1\Psi\})+P(\{2\Psi\}+P(\{3\Psi\})+P(\{4\Psi\})+P(\{5\Psi\})$$
$$=\frac{1}{40}+\frac{1}{40}+\frac{1}{40}+\frac{1}{40}+\frac{1}{40}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$$

Por lo tanto la probabilidad de obtener una carta que sea copa y menor que 6 es: $p = \frac{1}{8}$.

La probabilidad de obtener una carta par de "espada (†)" es:

$$P(\{2\dagger, 4\dagger, 6\dagger, 10\dagger, 12\dagger\})=\frac{1}{8}$$

Exposición del Contenido.

En general la **probabilidad de un evento o suceso** *compuesto es la suma de las probabilidades de los resultados que lo componen.*

Si A es un suceso tal que $A = \{r_1, r_2, r_3, ..., r_k\}$, donde cada r representa un evento, entonces la probabilidad de A está dada por:

$$P(\{r_1, r_2, r_3, ..., r_k\}) = P(r_1) + P(r_2) + ... + P(r_k)$$

Pero nosotros utilizaremos la siguiente notación:

$$P(A) = P(r_1) + P(r_2) + ... + P(r_k)$$

Donde $P(A)$, es la probabilidad de que ocurra el suceso A.

Actividades Grupales

ACTIVIDAD 1: Los 2 dados.
Materiales: Dos dados normales.
El experimento consiste en responder el siguiente cuestionario, comparando las respuestas, por medio del lanzamiento de los dados.

1. ¿Cuál es la probabilidad que salgan un par de números pares?.
2. ¿Cuál es la probabilidad, de que la suma de los resultados sea un múltiplo de 5?.

ACTIVIDAD 2: El alfabeto.
Materiales: Un alfabeto.

1. Se elige una letra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una vocal?.

2. Se elige una letra al azar, ¿cuál es la probabilidad que salga una letra de la palabra murciélago?.

ACTIVIDAD 3: Simulación de hacer girar una ruleta.
Materiales: Archivo **"Ruleta"**.
Esta actividad trata de la simulación de hacer girar una ruleta, de tres sectores. Se realizara en el computador con el programa excel, para ello inserte el disco y abra el archivo Ruleta.xls".
Antes de realizar la actividad vea las recomendaciones en el apéndice B.

3.6.2. Suceso contrario.

Experimento Introductorio.

Dos dados.

Materiales: Dos dados normales.

El experimento consiste en que junto con un compañero, observen bien los dados y los utilicen, para que comprendan y respondan las siguiente preguntas, apoyándose en los conocimientos que ya tienen.

Cuestionario:

1. ¿Cuál es el espacio muestral de los dos dados?.

2. Sea A el suceso de que al lanzar los dos dados, "la suma obtenida sea 7". Determinar A, mediante un diagrama o dibujo.

3. Ya determinado A, ¿cuál creen ustedes que sería el suceso contrario a A, utilicen el diagrama o dibujo.

Desarrollo del Cuestionario

El espacio muestral, de los dos dados es el siguiente:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

La zona con color amarillo corresponde a A, 'la suma obtenida sea 7", por lo tanto lo que no esta con amarillo corresponde al suceso contrario.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Exposición del Contenido.

Dado un suceso A, se denominara **suceso contrario** *a todos los resultados del espacio muestral que no están en A y se anotara $\overline{A}$ o A^c. Es claro que $\overline{A}$ contiene todos los resultados del espacio muestral que no están en A.*

Por ejemplo:

Si en una caja tenemos 7 bolitas, 3 rojas y 4 azules y se define el suceso A: "la bolita es roja", el suceso contrario, sería entonces, $\overline{A}$: "la bolita es azul".

Actividades Grupales

Actividad 1: Las dos monedas.
Materiales: Dos monedas de $10, $50 o $100.
El experimento consiste en tirar las dos monedas en una superficie dura y responder el siguiente cuestionario, comparando las respuestas, por medio de la observación de las monedas.

1. ¿Cuál es el espacio muestral, de las dos monedas?.

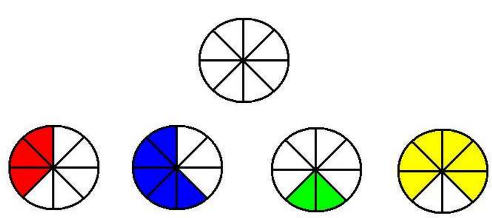
2. Si se pide determinar la probabilidad de que al lanzar las monedas salgan solo cara, en culaquiera de las dos.
   a) ¿Cuál sera el suceso contario a este?.
   b) ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?.

3. Inventen un suceso con las monedad y determinen luego la probabilidad del suceso contrario.

Actividad 2: El dardo.
Se ha construido un "blanco" para el lanzamiento de dardos, como el siguiente dibujo. Considere que la probabilidad de que el dardo se clave en un sector es la misma para cualquier otro.

1. ¿Cuál es la probabilidad para uno de los sectores?.

2. ¿Cuál es la probabilidad para cada región sombreada?.

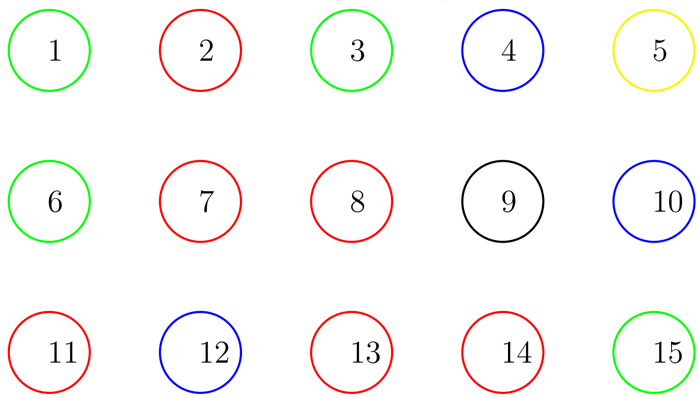


Actividad 3: Simulación del lanzamiento de 2 dados.
Materiales: Archivo **"Dados"**.
Esta actividad trata de la simulación de lanzar 2 dados. Se realizara en el computador con el programa excel, para ello inserte el disco y abra el archivo "Dados.xls".
Antes de realizar la actividad vea las recomendaciones en el apéndice B.

3.6.3. Relaciones entre sucesos.

Experimento Introductorio.

15 Fichas.



Materiales : Las 50 fichas construidas anteriormente, en la *Ley de los Grandes Números*, que están enumeradas del 1 al 50, pero para este experimento ocuparemos las 15 primeras, del 1 al 15.

El experimento consiste utilizar las 15 primeras fichas para poder comprender las preguntas que se harán y el experimento en si.
Imaginen que se saca una ficha de la bolsa y se deben considerar los siguientes sucesos:

- A: "obtener el número 3".
- B: "obtener un número impar".
- C: "obtener un número mayor que 2".

Cuestionario:

1. ¿Cuáles son los conjuntos que deben observar: para afirmar que ocurre el suceso A, ocurre el suceso B y ocurre el suceso C?.

2. Cuando se saca una ficha al azar y se obtiene 3. ¿Pódemos afirmar que: ocurrieron los tres sucesos?.

3. ¿Cuáles elementos aparecen en los tres conjuntos?.

4. ¿Cuáles elemento tienen en común B y C?.

Desarrollo del Cuestionario

Los conjuntos que se observan para los tres sucesos son los siguientes:

- A={3}
- B={1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
- A={3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

Si ahora tomamos las fichas y las separamos por lo conjuntos que hemos encontrado, nos damos cuenta que el "3" aparece en los tres conjuntos y que el "3, 5, 7, 9, 11, 13, 15", aparecen en los conjuntos B y C, ahora nos podemos dar cuenta que estos elemento forma el conjunto B.

A, B y C son sucesos, es decir, subconjuntos del espacio muestral E. Recordemos que muestro espacio muestral consiste de las 15 fichas

Exposición del Contenido.

Relaciones entre sucesos: *Dos sucesos se dicen* **incompatibles** *o* **mutuamente excluyentes** *si no tienen resultado alguno en común. Simbólicamente A y B son sucesos incompatibles, es decir, no existen elementos en común entre A y B ($A \cap B = \varnothing$), en caso contrario, si tiene algún resultado en común, se dice que los sucesos son compatibles.*

Los sucesos A y $\overline{A}$, son incompatibles.

Para poder determinar la probabilidad de un suceso compatible, debemos primero saber como calcular la probabilidad de cada suceso y saber en que son compatibles.

Por ejemplo:

Si en una caja tenemos 7 fichas, cada una de estas con una letra y con estas podemos construir la palabra **POLERAS**. Consideremos los sucesos:

- A: "La letra elegida es vocal".
- B: "La letra elegida es una de **POLE**".

El experimento tiene 7 sucesos y la probabilidad de cada suceso es: $\frac{1}{7}$.

- Como A es un suceso con 3 resultados, ya que $A = \{\mathbf{O}, \mathbf{E}, \mathbf{A}\}$, por lo tanto, $P(A) = \frac{3}{7}$.
- Como B es un suceso con 4 resultados, ya que $B = \{\mathbf{P}, \mathbf{O}, \mathbf{L}, \mathbf{E}\}$, por lo tanto $P(B) = \frac{4}{7}$.
- Como $A \cap B$ es el suceso "la letra elegida es vocal y una de POLE"; entonces $A \cap B$ tiene 2 suceso resultados: "obtener **O**" y "obtener **E**" de modo que:

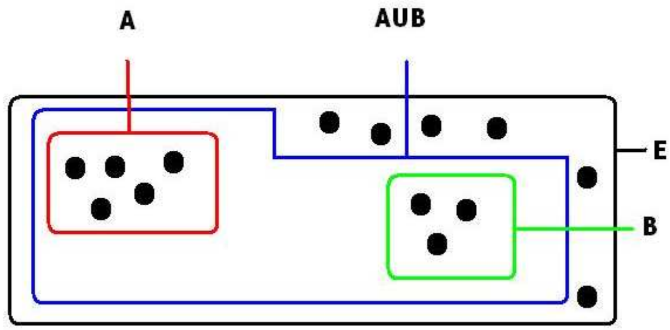
$$P(A \cap B) = \frac{2}{7}$$

Teorema:

La probabilidad de la unión de los sucesos es igual a la suma de las probabilidades de éstos si sólo son incompatibles.

De otro modo, si $A \cap B = \varnothing$ (incompatibles), entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Por ejemplo:

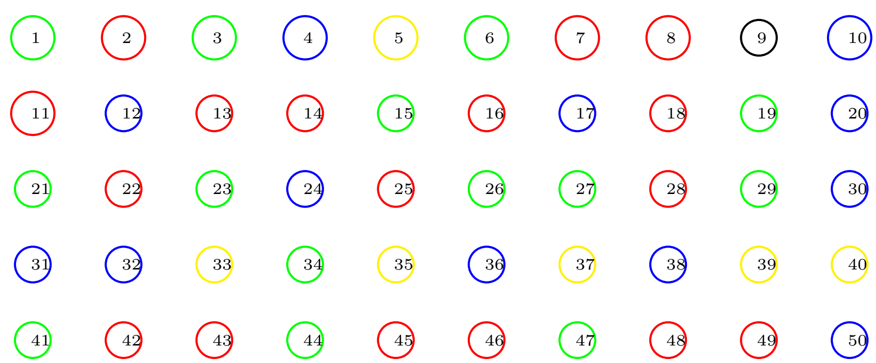


Como se ve en el ejemplo A y B son eventos incompatibles o mutuamente excluyentes y nos podemos dar cuenta que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se cumple.

Actividades Grupales

ACTIVIDAD 1: Las 15 fichas.
Materiales : La 15 fichas, utilizadas al comienzo.
A es el suceso: "la ficha extraída tiene un número menor que 6" y B es el suceso: "el número de la ficha es mayor que 7".

1. Obtener el conjunto que determina el suceso A y B.
2. ¿Cuál es la intersección de A y B?.
3. ¿Qué concluyes respecto a A y B?.
4. Si el suceso A es cambiado por "la ficha extraída es impar", ¿cuál es la probabilidad $P(A \cup B)$?



Actividad 2: Lanzamiento de un dado.

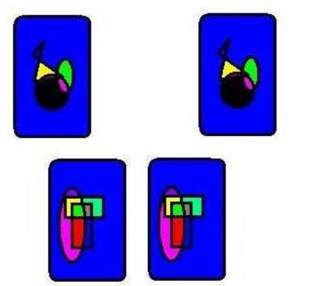
1. En el lanzamiento de un dado, consideramos los sucesos A = {2, 3} y B = {2, 4, 6}. Halla el suceso unión de A y B y el suceso intersección de A y B.

2. Determinar la probabilidad de AUB.

3.6.4. Variable aleatoria.

Experimento Introductorio.

Las 4 Fichas.



Materiales : Las 10 fichas construidas, en *Experimentos aleatorios*. 7 con una figura y las otras 3 que tienen otra figura y una bolsa plástica no transparente.

Junto a tu compañero, utilizaran 2 fichas de una figura y 2 de la otra, para poder responder las preguntas del siguiente cuestionario y para la realización del experimento. Se espera también que se apoyen, en los conocimientos que ya tienen, para la realización del experimento.

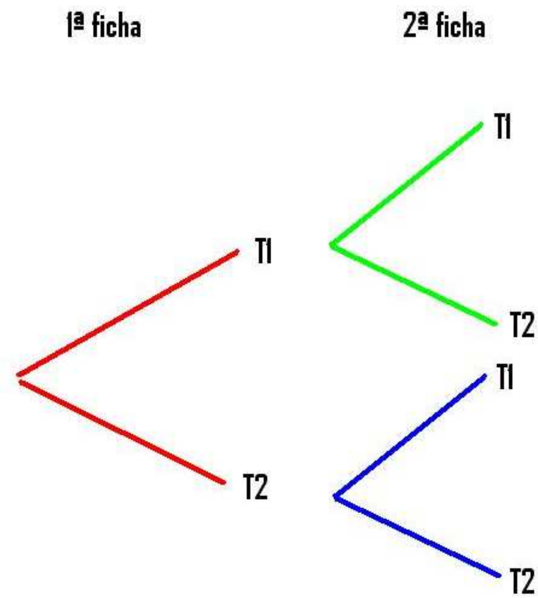
Cuestionario:
Revolver las 4 fichas y ponerlas en una bolsa.
A un tipo, denominaremos "T1" y al otro tipo, llamaremos "T2", si se realiza una extracción aleatoria, donde se extraen 2 fichas de la bolsa:

1. Anoten los diferentes suceso o eventos que pueden ocurrir al extraer las 2 fichas.

2. Para cada extracción aleatoria o azar que se hace de las 2 fichas se debe definir una variable aleatoria. Asignar un número a cada uno de estos eventos.

Desarrollo del Cuestionario

Mediante este diagrama de árbol nos podemos dar cuenta de los posibles resultados al extraer las 2 fichas:



Cada camino da un resultado.

Ahora podemos definir los posibles resultados de la siguiente forma:

$$A = \{T1T1, T1T2, T2T2, T2T1\}$$

La probabilidad de cada suceso, al realizar el experimento seria: $\frac{1}{4}$

Por ejemplo:

$$P(T1T1) = \frac{1}{4}$$

Ahora con estos datos, se puede definir la Variables, X: “número de T1”, que pueden tomar los valores $\{0, 1, 2\}$, (0, que en la extracción no salió T1, 1 que salió, un T1 y 2 que salieron 2 T1) .

Ahora se deben buscar todos los puntos muestrales que dan lugar a cada valor de la variable ya definida, y a esos valores se les calculara la probabilidad del suceso correspondiente.

x	Sucesos	P(x)
0	{T2T2}	$\frac{1}{4}$
1	{T1T2, T2T1}	$\frac{2}{4}$
2	{T1T1}	$\frac{1}{4}$

Con esta tabla se definen los posibles valores de las variables X: "número de T1".

Otra variable a definir podría haber sido X: "número de T2", X:" número de T2T2", etc.

Exposición del Contenido.

Cuando a cada resultado de un experimento aleatorio se asocia un único número, se dice que se ha definido una **variable aleatoria**, *para ese experimento. Habitualmente dicha variable se denota X.*

Los valores diferentes de la variable aleatoria constituyen el conjunto de valores posibles de la variable.

Para un mismo experimento aleatorio se pueden definir diversas variables aleatorias, como vimos en el experimento de las 10 fichas.

Si una variable aleatoria toma sólo un número finito, o numerable, de valores, diremos que es **discreta**; si puede tomar todos los valores reales de un intervalo, se dice que es **continua**.

Por ejemplo:

1. Si al lanzar dos dados y definimos la variable X: "suma de los resultado", la variable es discreta.

2. Si al cosechar cierta cantidad de naranjas se observa su diámetro, que varían entre 6 cm y 11 cm máximo; entonces el diámetro de una naranja es una variable aleatoria continua.

Actividades Grupales.

ACTIVIDAD 1: 2 dados.
Materiales: Dos dados normales.
Se lanzan los dos dados

1. Definir una variable, para el lanzamiento de estos dos dados.

2. Se define para el lanzamiento de los dados, la variable X:"producto de los resultados".
a) Anotar los posibles suceso, que hacen que se cumpla X.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que X sea 4?.

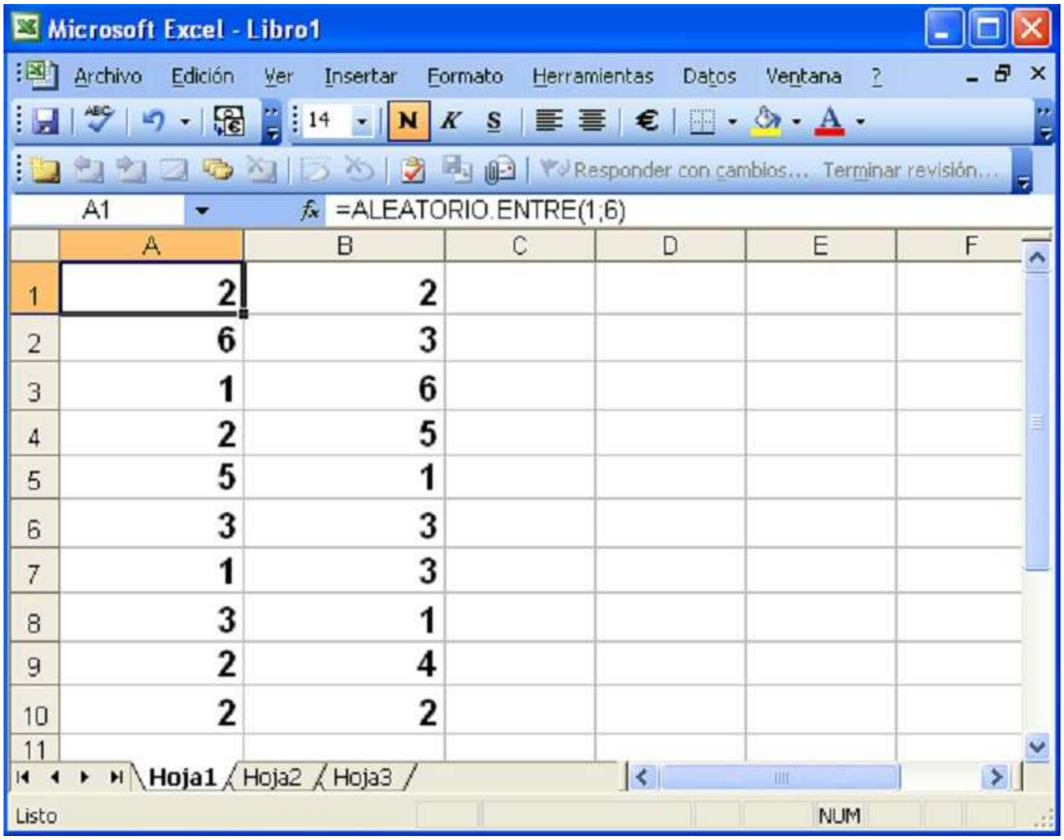
3. ¿Que tipo de variables es X?.

ACTIVIDAD 2: Búsqueda.
Con tus compañeros busquen tres ejemplos de variables continua y tres de discreta y un juego de azar donde se pueda definir una variable discreta.

3.7. Números aleatorios y simulación de experimentos aleatorios.

Experimento Introductorio.

Planilla Excel.



Materiales: Un computador que contenga el programa excel.

Junto con tu compañero, deben investigar las funciones "ALEATORIO()" y "ALEATORIO.ENTRE()" de la planilla de calculo Excel y cual es la forma de poder trabajar con un experimento aleatorio, viendo estos comando y los otros comandos necesarios, e ingresando los datos y respondiendo las siguientes preguntas.

Cuestionario:

1. Realizar un experimento aleatorio, donde se lanza un dado 18 veces, utilizando una formula o función, que permita ingresar los datos en forma aleatoria.

2. Grafica la información.

Desarrollo del Cuestionario

Para el desarrollo de este experimento debemos utilizar "ALEATORIO.ENTRE()".
Ubiquémonos en la casilla A1 de la pantalla del programa excel y escribe:
=ALEATORIO.ENTRE(1;6)

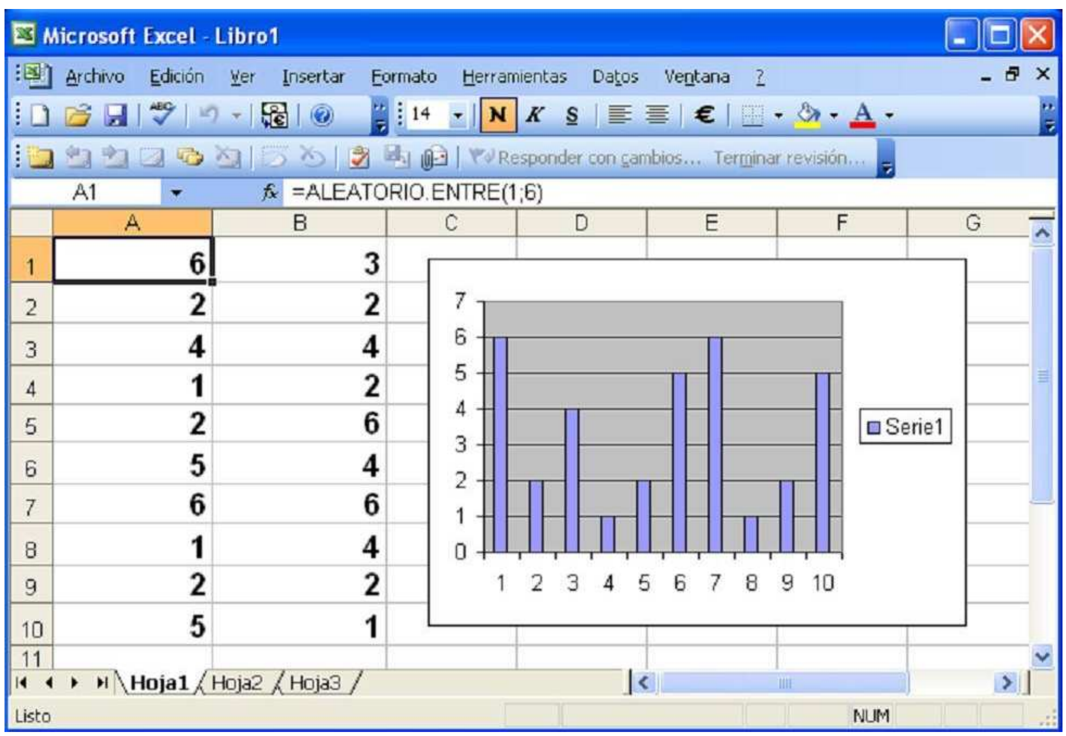
Presiona la tecla "ENTER", entonces en la casilla seleccionada "A1" aparecerá un valor entre 1 y 6. Ahora arrastra con el mouse el signo "+" que aparece en el extremo inferior derecho de la casilla "A1", hasta la casilla "A18" y obtendrás 18 números aleatorios que simulan haber lanzado el dado 18 veces.

Ahora si realizamos la misma operación en la casilla "B1", podremos simular el lanzamiento de 2 dados, "A1" será el lanzamiento de un jugador y "B2" el otro jugador.

Si quieres hacer la simulación del lanzamiento de una moneda seleccionada una casilla y escribir "=ALEATORIO.ENTRE(1,2)", considera 1=cara y 2=sello, puedes elegir también para este tipo de experimento "=ALEATORIO.ENTRE(0,1)".

La función ALEATORIO(), entrega números al azar entre 0 y 1 con 9 cifras decimales

Para aplicar un gráfico, deben arrastrar el mouse por toda la columna, con los datos y luego deben aplicar gráfico, ahí podrán elegir el tipo de gráfico a utilizar, para un gráfico de dispersión deben elegir la modalidad Estándar, XY (dispersión). La siguiente imagen muestra un tipo de gráfico (de barras).



Exposición del Contenido.

Este tipo de planilla en excel, nos permite desarrollar **simulaciones de experimentos aleatorios**, *que pueden contener un gran número aleatorio de posibilidades o casos, como vimos en la "Ley de los Grandes Números" y simulaciones como el lanzamiento de una moneda, con un gran número de lanzamientos y casos por lanzamiento.*

Actividades Grupales

ACTIVIDAD 1: Ruleta de 36 sectores.
Imaginen que juegan en una ruleta que contiene números enteros del 0 al 36.

1. Simulen una planilla de cálculo, con 40 jugadores, utilizando la función necesaria para este tipo de simulación.

2. Gráficar la información que tienen.

ACTIVIDAD 2: Los 3 dados.
Imaginen que tienes 3 dados, que como saben tienen números enteros del 1 al 6.

1. Simulen una planilla de cálculo, con 25 jugadores.

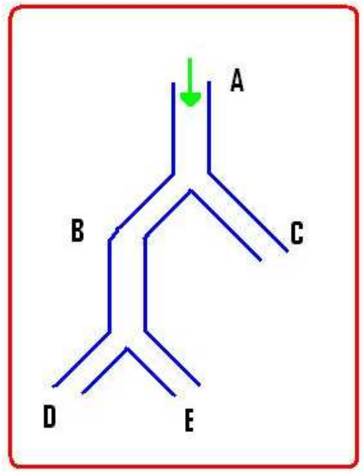
2. Simulen una planilla de cálculo, ahora con 5 dados y 18 jugadores, gráfica.

3. ¿Qué diferencia existe entre frecuencia relativa y probabilidad?.

3.8. Experimentos sucesivos y compuestos.

Experimento Introductorio.

Laberinto en Y.



Materiales: Cartulina, tijera, pegamento, 2 bolitas.

El experimento consiste en construir un laberinto como el de la imagen, para utilizarlo en el desarrollo del siguiente cuestionario y con ellos visualizar las preguntas.

<u>Cuestionario</u>:

Si se lanza la bolita por A.

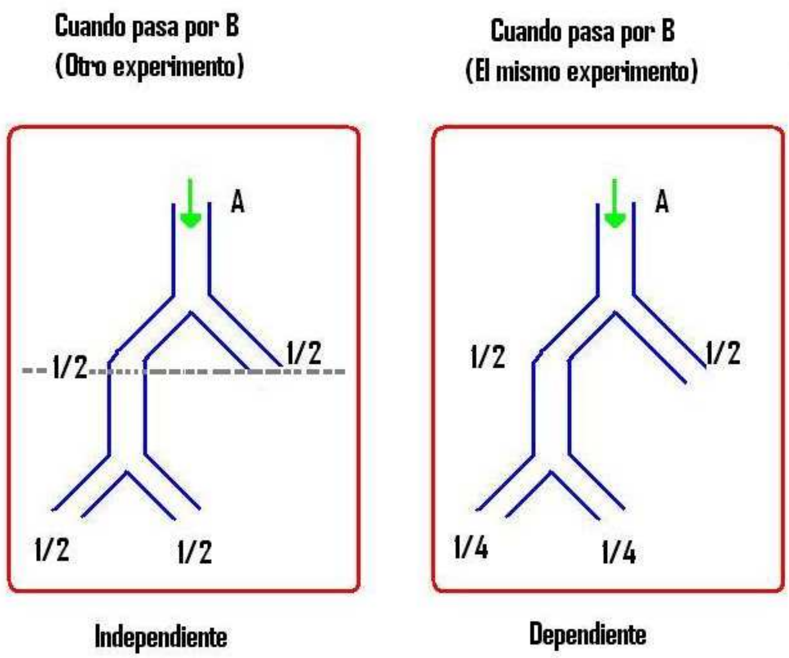
1. ¿En todas las bifurcaciones la bolita tienen la misma probabilidad de continuar por ahí?. Intenten averiguar, viendo que pasa cuando lanzan la bolita por el laberinto.

2. ¿Cuál es la probabilidad de A, B, C, D y E?.

<u>Desarrollo del Cuestionario</u>

La probabilidad de que la bolita pase por B y C es $\frac{1}{2}$, debido a que tienen un resultado equiprobable. Si suponemos que cuando paso por B, esta sucediendo otro experimento, entonces la probabilidad de que pase por D y E es $\frac{1}{2}$.

Ahora si consideramos que la bolita pasa por B y que el experimento es continuo la probabilidad de que pase por D y E es $\frac{1}{4}$, como muestra la imagen.



Debido a esto si se considera el primer caso cuando esta sucediendo otro experimento, al pasar por B, todas las salidas tienen la misma probabilidad. En el otro caso, cuando es continuo, la probabilidad de B y C es la misma, pero no tienen la misma probabilidad C y E, C y D, B y D o B y E.

Exposición del Contenido.

Al utilizar el diagrama de árbol nos permitió ver lo que sucede en un **experimento sucesivo y compuesto** *y aprender cual es la diferencia entre uno y el otro.* Cuando se llevan a cabo dos o más experimentos aleatorios sucesivos, se pueden presentar dos casos:

1. El resultado de uno de los experimento no depende del resultado de los otros experimentos.
   Esto ocurre cuando se lanza un dado 2 veces: el resultado obtenido en el segundo lanzamiento no depende de lo ocurrido en el primer lanzamiento.
   Se dice entonces que los experimentos son **independientes**.

2. El resultado en uno de los experimentos influye en la probabilidad de los resultados de los experimentos siguientes, como vimos en el experimento introductorio

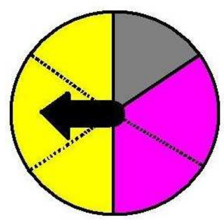
y en su ejemplo.
En este caso se dice que los experimentos son **dependientes**.

Actividades Grupales

ACTIVIDAD 1: Ruleta de 3 sectores.
Materiales: La ruleta de tres sectores construida anteriormente.
Se hace girar la ruleta 4 veces.

1. Construir un diagrama de árbol y anotar los resultados, de hacer gira la ruleta 4 veces.

2. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno, cuando son dependientes e independiente?.



ACTIVIDAD 2: Las 3 pruebas.
Para optar a un trabajo, Juan Manuel, debe dar tres pruebas sucesivas. Si fracasa en una de ella no puede dar la siguiente. Para la primera prueba, la probabilidad de éxito es de un 98 %; para la segunda, de 90 %, y para la tercera, de 78 %.

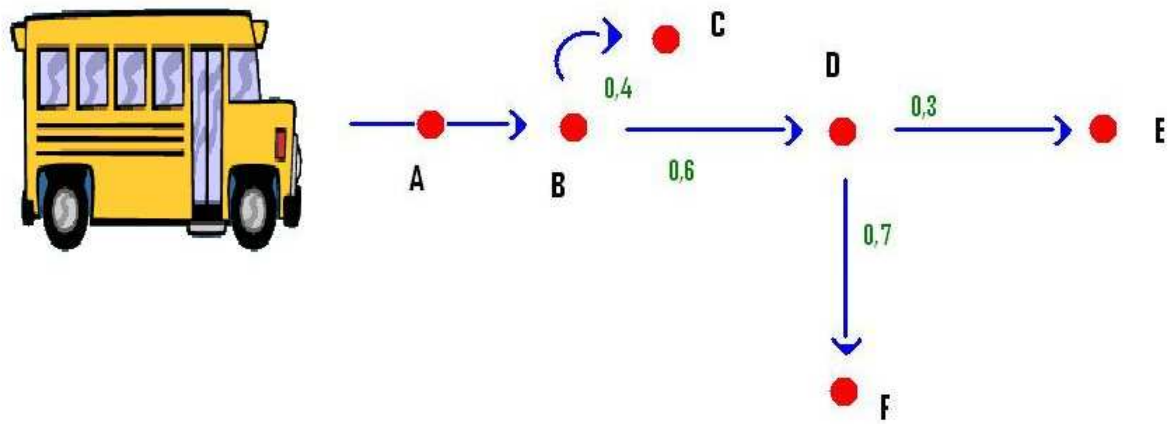
1. Construyan un diagrama de árbol que ilustre esta situación, incluyendo las probabilidades de éxito y fracaso en cada caso.

2. Calcular la probabilidad de tener éxito en las tres pruebas.

3.9. Sucesos dependientes e independientes.

Experimento Introductorio.

Recorridos de los Buses.



El dibujo representa los recorridos de los Buses. Por A pasan diferentes recorridos de modo que en B, el 40 % dobla hacia C y los restantes siguen hacia D. De los buses que llegan a D, el 30 % va hasta E y el resto a F.

Si distraídamente toman en A la primera micro que pasa.

Cuestionario:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el bus que tomaron vaya a C?, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a F?, ¿y que llegue a E?.
2. Si el bus que tomaron dobla en C, ¿cuál es la probabilidad de que lleguen a E?.
3. ¿Creen que los sucesos, tienen algún tipo de dependencia?, ¿por qué?.

Desarrollo del Cuestionario

Sabemos por medio de la imagen que P(llegue a C)=0,4.

Para calcular la probabilidad de llegar a E, debemos multiplicar la probabilidad de llegar a D por la de llegar a E, de la siguiente forma:

$$P(\text{llegue a E})=P(\text{llegue a D})\cdot P(\text{ir hacia E})=0{,}6\cdot 0{,}3=0{,}18.$$

Para calcular la probabilidad de llegar a F se debe hace los mismo.

$$P(\text{llegue a F}){=}P(\text{llegue a D}){\cdot}P(\text{ir hacia F}){=}0{,}6\cdot 0{,}7{=}0{,}42.$$

Otra forma de tomar el problema de llegar a E, es que si en un tiempo cualquiera, 100 buses pasan por A, continuando a D solo 60 buses de los cuales $60\cdot\dfrac{30}{100}=18$, llegan a E.

La suma de las probabilidades de llegar a los tres terminales: C, E y F, suman 1.

$$P(\text{llegue a C}){+}P(\text{llegue a E}){+}P(\text{llegue a F}){=}0{,}4{+}0{,}18{+}0{,}42{=}1.$$

Podemos darnos cuanta con este experimento que los sucesos son dependiente, ya que para que el bus llegue a D, E y F, depende uno del otro, D depende de que el bus se vaya por B y que el bus llegue a E o F, depende de que camino tome en D.

Exposición del Contenido.

Un suceso A es **independiente** *de otro suceso B, cuando la probabilidad de A no depende de la aparición de B, en caso contrario, serán* **dependientes**.

Por ejemplo:

Si lanzamos una moneda 3 veces. Representamos cara por "C" y sello por "S". Entonces el espacio muestral es: $W=${CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}.

La probabilidad de cada suceso al lanzar una moneda tres veces es: $\frac{1}{8}$.

Ahora si por ejemplo sucede la siguiente situación, en que las tres monedas son caras, la probabilidad de esta sera:

$$P(CCC)=\frac{1}{8}$$

Según la definición que estudiamos anteriormente en `Sucesos dependientes e independientes`, las lanzadas de monedas no dependen una de otra, estas son independientes. Por lo tanto en este caso el suceso es independiente ya que los lanzamientos no están relacionados.

El experimento introductorio es un ejemplo de sucesos dependientes.

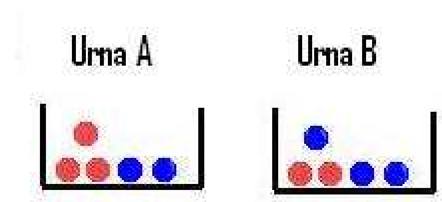
Actividades Grupales

Actividad 1: Las 2 cajas.
En una caja (A) hay tres bolas rojas y dos azules y en otra caja (B) hay tres bolas

azules y dos rojas. Se saca una carta de una baraja española de cuarenta cartas y si sale una figura se extrae una bola de la caja A, si no sale figura se extrae una bola de la caja B.

1. Calcular la Probabilidad de sacar una bola roja.

2. ¿Son independientes los sucesos: B={sacar una bola roja} y A={sacar una figura}?.



Actividad 2: los naipes españoles y una moneda.
De una baraja española (40 cartas) se extrae una carta. Si sale un Oro o una Copa se lanzan dos monedas, si sale una espada se lanza una moneda y si sale bastos no se lanza ninguna.

1. ¿Cuál es la Probabilidad de que salga alguna cara? .

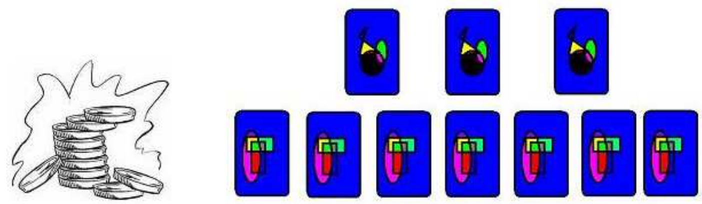
2. ¿Cuál es la Probabilidad de que salga un Oro y a demás no salga ninguna cara?.

3. ¿Cuál es la Probabilidad de que salgan dos caras?

3.10. Juegos equitativos.

Experimento Introductorio.

las monedas y las 10 fichas



Materiales: Dos monedas de \$10, \$50 o de \$100, las 10 fichas utilizandas anteriormente (las que son 7 con una figura "T1" y 3 que tienen otra "T2") y una bolsa plástica no transparente.

Utilicen las dos monedas y luego las fichas, para la realización y comprensión de este experimento. La utilización de estos materiales ayudaran también a responder las siguientes preguntas y la comprensión de lo que se estudiara a continuación.

Cuestionario:

Realicen el siguiente juego y respondan las preguntas.

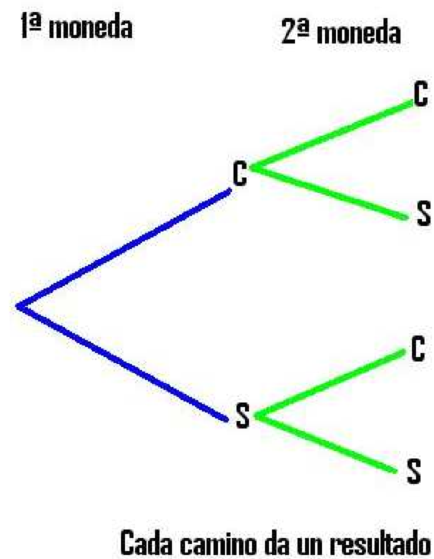
Uno de los jugadores debe escoger "Cara" o "Sello" y el otro corresponde el otro lado de la moneda que no eligió su compañero.

El juego consiste, en un jugador lanza las monedas, si al caer ambas tienen el lado que escogió entonces puede sacar una ficha. Para ganar el juego el que escoge "Cara" debe obtener de la extracción una ficha "T1", si no es así corresponde jugar al otro compañero, y el otro jugador al extraer una ficha debe obtener "T2" para poder ganar.

1. ¿Les parece que sea un juego justo?.
2. ¿Creen que tienen las mismas posibilidades de ganar?.
3. ¿Cómo sabe quien tiene o no tiene la misma probabilidad de ganar?.

Desarrollo del Cuestionario

Para poder determinar si este juego es justo construyamos, como primera formada de comprensión, el siguiente diagrama de árbol, que nos permite comprender los posibles resultados de lanzar dos monedas.



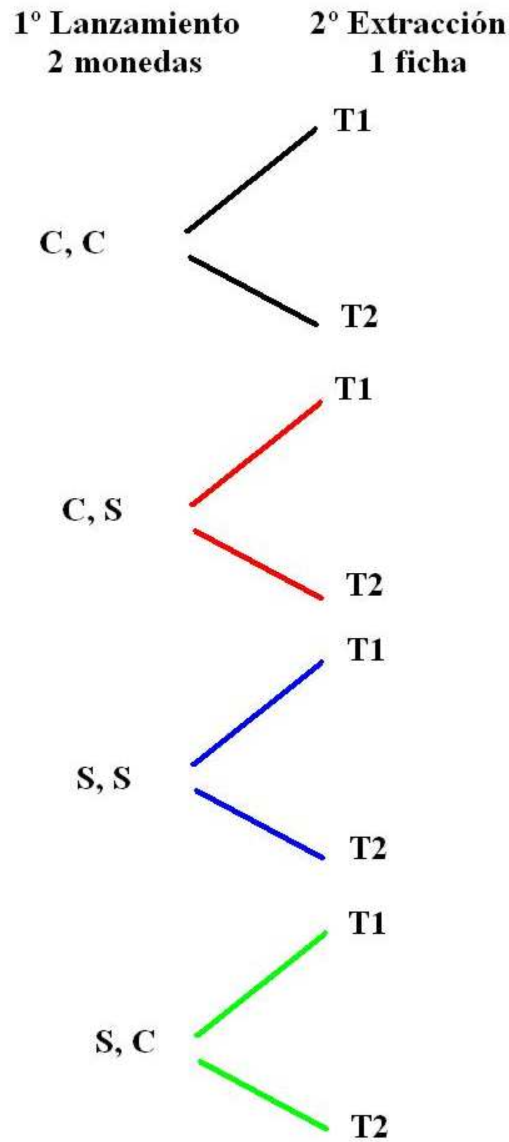
Mediante este diagrama sabemos que por cada lanzamiento de un par de monedas hay 4 resultados posibles:

E={(C, C), (C, S), (S, C), (S, S)}

Con esta información sabemos que la probabilidad de cada resultado al lanzar las dos monedas es: $\frac{1}{4}$

Por lo tanto en esta parte el juego es justo, en cualquier situación tiene la misma probabilidad de ganar, por ejemplo la probabilidad de P(C, C)=$\frac{1}{4}$ o la probabilidad de, P(S, C)=$\frac{1}{4}$.

Después de haber lanzado las dos monedas, debemos estudiar que sucede cuando se extrae de la bolsa una ficha. Para esto utilizaremos un diagrama de árbol.



Mediante este diagrama sabemos que por cada lanzamiento de un par de monedas y la extracción de una ficha hay 8 resultados posibles:

E={(C, C, T1), (C, C, T2), (C, S, T1), (C, S, T2), (S, C, T1), (S, C, T2), (S, S, T1), (S, S, T2)}

Con esta información sabemos que la probabilidad de cada resultado al lanzar las dos monedas y realizar una extracción es: $\frac{1}{8}$

Pero debemos recordar que dentro de la bolsa se encuentra repetida 7 veces la ficha “T1” y sólo 3 “T2” y por lo tanto la probabilidad de sacar “T1” es:

$$P(T1) = \frac{7}{10}$$

Y la de sacar “T2” es:

$$P(T2) = \frac{3}{10}$$

Anteriormente estudiamos el espacio muestral de lanzar dos monedas y la probabilidad de cada resultado.

Ahora para poder determinar si el juego es justo, se debe calcular la probabilidad de que el jugador “cara” gane. Para esto debemos calcular la probabilidad de que al lanzar las dos monedas el obtenga “cara”, esto se multiplica por la probabilidad de que al extraer una ficha esta sea “T1”, por lo tanto queda de la siguiente forma:

$$\text{P(obtener Cara, Cara)} \cdot \text{P(T1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{40}$$

Ahora la probabilidad de que el jugador “sello” gane. Para esto debemos calcular la probabilidad de que al lanzar las dos monedas el obtenga “sello”, esto se multiplica por la probabilidad de que al extraer una ficha esta sea “T2”, por lo tanto queda de la siguiente forma:

$$\text{P(obtener Sello, Sello)} \cdot \text{P(T2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{40}$$

Comparando estos resultados se determina que:
$\frac{7}{40}$ es mayor que $\frac{3}{40}$
Por lo tanto este juego no es justo, ya que el jugador “cara” tiene más posibilidades de ser ganador.

El juego seria justo, si al interior de la bolsa hubieran la misma cantidad de fichas, por ejemplo que hubieran 7 de un tipo y 7 del otro ó 3 de uno y 3 de otro.

Exposición del Contenido.

Se dice que un **juego es equitativo***, cuando todos los jugadores tienen las mismas posibilidades de ganar.*

Para poder determinar si un **juego es equitativo** es necesario:

1º Determinar todos los resultados posibles del juego.
2º Decidir si estos resultados son equiprobables.
3º Determinar la probabilidad de cada evento o suceso que hace uno
u otro jugador.

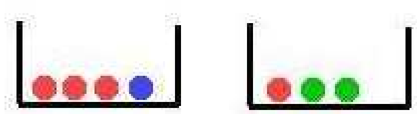
Actividades Grupales.

ACTIVIDAD 1: La moneda y las dos cajas.
Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda. Si sale cara se extrae de una caja, una bola. Esta caja contiene 1 bola azul y 3 rojas y si sale sello se extrae una bola de otra caja, que contiene 1 bola roja y 2 verdes.

1. Determinar el espacio muestral.

2. Hacer una tabla para este experimento y un diagrama de árbol.

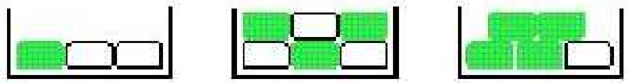
3. ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado?.



ACTIVIDAD 2: Las tres cajas y las fichas.
En un juego, a tres personas se le asigna una caja y se les dice que gana el juego, quien saque una ficha blanca. Ver la figura siguiente.

1. ¿Cuántas fichas blancas es necesario agregar en cada caja, para que todos los jugadores tengan la misma probabilidad de sacar una ficha verde de ellas?.

2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha verde de cada caja, antes de hacer el juego equitativo?.

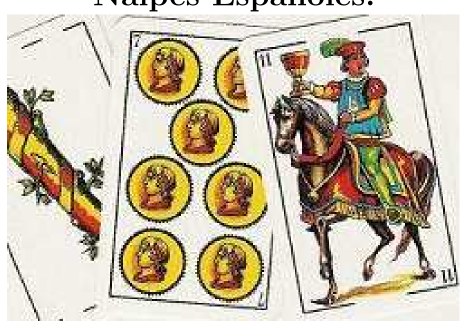


ACTIVIDAD 3: Simulación de lanzar una moneda y luego un dado.
Materiales: Archivo **"Moneda y dados"**.
Esta actividad trata de la simulación de lanzar una moneda y un dado. Se realizara en un computador con el programa Excel, para ello inserte el disco y abra el archivo "Moneda y dados.xls".
Antes de realizar actividad vea las recomendaciones en el apéndice B.

3.10.1. Independencia de sucesos y probabilidad condicionada.

Experimento Introductorio.

Naipes Españoles.



Materiales: Una baraja de naipes españoles.

Este experimento tiene como objetivo el poder ayudar a comprender el contenido que se estudiara, deben utilizar los naipes para poder comprender mejor, ya que estos son ayuda para poder responder el siguiente cuestionario.

Cuestionario:

Se extrae una carta de la baraja española. Sea A el evento "la carta es una figura", sea B el suceso "la carta es de oro" y sea C el suceso "la carta es un número par".

1. ¿Calcular $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$?.

2. Sea $A \cap B$ el suceso "la carta es figura y de oro", ¿determinar $P(A \cap B)$?.
3. Sea $A \cap C$ el suceso "la carta es figura y par", ¿cuánto es $P(A \cap C)$
4. Calcula $P(A) \cdot P(B)$ y compárenlo con $P(A \cap B)$, calcula $P(A) \cdot P(C)$ y compárenlo con $P(A \cap C)$.

<u>Desarrollo del Cuestionario</u>

Para poder calcular la probabilidad de $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$, primero debemos saber que son 40 los naipes, 12 son figura, 10 de oro y 20 son las cartas par.
Por lo tanto la probabilidad de $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$ es:

$$P(A) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$
$$P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$
$$P(C) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

Ahora para calcular el valores de $P(A \cap B)$, sabemos que son 12 las figuras y 10 son de oro, pero como deben ser figura y de oro, solo tenemos 3 cartas, por lo tanto:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{40}$$

Luego hacemos lo mismo para calcular $P(A \cap C)$, sabemos que 12 son figura y 20 son par, pero como queremos que sea figura y par, solo tenemos 8 cartas, por lo tanto:

$$P(A \cap C) = \tfrac{8}{40} = \tfrac{1}{5}$$

Ahora debemos comprar $P(A) \cdot P(B)$ con $P(A \cap B)$. tenemos que:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{40}$$
$$P(A \cap B) = \frac{3}{40}$$

Por lo tanto concluimos que los resultados son iguales.
¿Sucede lo mismo cuando comparamos $P(A) \cdot P(C)$ con $P(A \cap C)$?. Tenemos que:

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$$
$$P(A \cap C) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

Tenemos en este caso que los resultados no son iguales, debido a que uno de los sucesos es independiente y el otro es dependientes. ¿Cómo podemos determinar cuál es independiente y cuál es dependiente?.

Exposición del Contenido.

Si dos eventos A y B de un experimento aleatorio son **independientes**, *entonces:*

1. $P(A{\cap}B){=}P(A){\cdot}P(B)$
2. $P(B$, habiendo ocurrido $A){=}P(B$, no ocurrido $A){=}P(B)$

Por ejemplo:

Veamos esto en el experimento introductorio.

Sea A el evento "la carta es una figura" y sea B el suceso "la carta es de oro". Concluimos que $P(A{\cap}B){=}P(A){\cdot}P(B)$. Ahora debemos ver si se cumple lo siguiente, $P(B$, habiendo ocurrido $A){=}P(B$, no ocurrido $A){=}P(B)$.

Suponemos que ocurrió A, que la carta extraída es una figura, evento que es satisfecho por 12 cartas.

De estas 12 cartas, ¿cuántas son de oro?. De las 12 cartas sabemos que 3 son oro, por lo tanto:

$$P(B, \text{ habiendo ocurrido } A){=}\frac{3}{12}{=}\frac{1}{4}$$

Ahora debemos calcular, $P(B$, no ocurrido $A)$. Si no ocurrió A, sabemos que las cartas que no son figura son 28.

De estas 40 cartas, se tiene que 10 son de oro, por lo tanto:

$$P(B, \text{ no ocurrido } A){=}\frac{7}{28}{=}\frac{1}{4} \; P(B){=}\frac{1}{4}$$

Calculando estas probabilidades concluimos que se cumple que:

$P(B$, habiendo ocurrido $A){=}P(B$, no ocurrido $A){=}P(B)$.

Y por lo estudiado anteriormente en el experimento introductorio sabemos que :

$$P(A{\cap}B){=}P(A){\cdot}P(B)$$

Por lo tanto A y B, son sucesos **independientes**.

Teorema:

Si dos eventos A y B de un experimento aleatorio son **dependientes**, entonces:

1. $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

2. $P(B$, habiendo ocurrido $A) \neq P(B)$

Por ejemplo:

Veamos esto en el experimento introductorio.

Sea A el evento "la carta es una figura" y sea C el suceso "la carta es un número par". Tenemos que comprobar que:

$$P(C, \text{ habiendo ocurrido } A) \neq P(C).$$

Suponemos que ocurrió A, que la carta extraída es una figura, evento que es satisfecho por 12 cartas.

De estas 12 cartas, ¿cuántas son par?. De las 12 cartas sabemos que 8 son par, por lo tanto:

$$P(C, \text{ habiendo ocurrido } A) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$
$$P(C) = \frac{1}{2}$$

Y por lo estudiado anteriormente en el experimento introductorio sabemos que :

$$P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C)$$

Por lo tanto A y C son eventos **dependientes**.

Las situaciones planteadas en el experimento anterior se puede analizar en forma más general.

Supongamos que los N resultados equiprobables de un experimento aleatorio se distribuyen respecto de dos eventos A y B, según la siguiente tabla:

	B	$\overline{B}$	Total
A	a	b	a+b
$\overline{A}$	c	d	c+d
Total	a+c	b+d	N

Para comprender mejor esto veamos el experimento anterior y los sucesos. Sea A el evento "la carta es una figura" y sea B el suceso "la carta es de oro".

	B: es Oro	$\overline{B}$: no es Oro	Total
A : es Figura	3	9	12
$\overline{A}$: no es Figura	7	21	28
Total	10	30	N=40

Entonces utilizando la primera tabla tenemos:

$P(A)=\frac{a+b}{N}$
$P(B)=\frac{a+c}{N}$
$P(A\cap B)=\frac{a}{N}$
$P(B$, habiendo ocurrido $A)=\frac{a}{a+b}$
$P(A$, habiendo ocurrido $B)=\frac{a}{a+c}$

De lo anterior se deduce:

1. $P(B$, habiendo ocurrido $A)=\frac{a}{a+b}=\frac{\frac{a}{N}}{\frac{a+b}{N}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

2. $P(A$, habiendo ocurrido $B)=\frac{a}{a+c}=\frac{\frac{a}{N}}{\frac{a+c}{N}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Las expresiones 1) y 2) se denominan **probabilidades condicionadas** y se anotan, de manera más breve, $P(B/A)$ y $P(A/B)$, respectivamente.

Nótese que A y B son independientes si $P(B/A)=P(B)$ o $P(A/B)=P(A)$, lo cual se cumple sólo si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, como puede verificarse en las fórmulas obtenidas en 1) y 2).

La **probabilidad condicionada** *de un suceso B, se produce cuando ha ocurrido otro suceso A*. Como hemos visto.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Actividades Grupales

ACTIVIDAD 1: El concurso de los autos.
En un concurso de televisión, se dispone de 20 autos, para premiar al concursante, de las marcas y colores que se indican en la siguiente tabla:

	Azul	Rojo	Total
Honda	2	8	10
Nisan	7	3	10
Total	9	11	**20**

1. Determinar si son eventos independientes o dependientes.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el auto sea un Nisan?.

3. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un Honda rojo?.

4. Si ocurre el suceso $\bar{A}$: "el auto no es un Nisan", ¿cuál es la probabilidad de que sea B: "azul", $P(B/A)$?.

ACTIVIDAD 2: El invernadero.
En un invernadero hay flores de dos especies (tulipanes y rosas) y de dos colores (rojos y blancos). Se sabe que hay un 60 % de tulipanes, de los cuales la mitad son rojos, y un 40 % de rosas, de las cuales una cuarta parte son blancas.

1. Calcular la probabilidad de que al escoger al azar una flor sea un tulipán blanco.

2. Calcular la probabilidad de que al escoger al azar una flor blanca sea un tulipán.

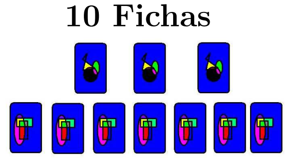
3. Calcular la probabilidad de que al escoger al azar un tulipán este sea blanco.

4. Calcular la probabilidad de que al escoger al azar una flor sea blanca.

3.11. Resultados en forma de listas ordenadas.

Experimento Introductorio.

10 Fichas



Materiales: Las 10 fichas utilizadas anteriormente, 7 de una figura y 3 de la otra figura y construidas en *Experimento Aleatorios*.

Cuestionario:

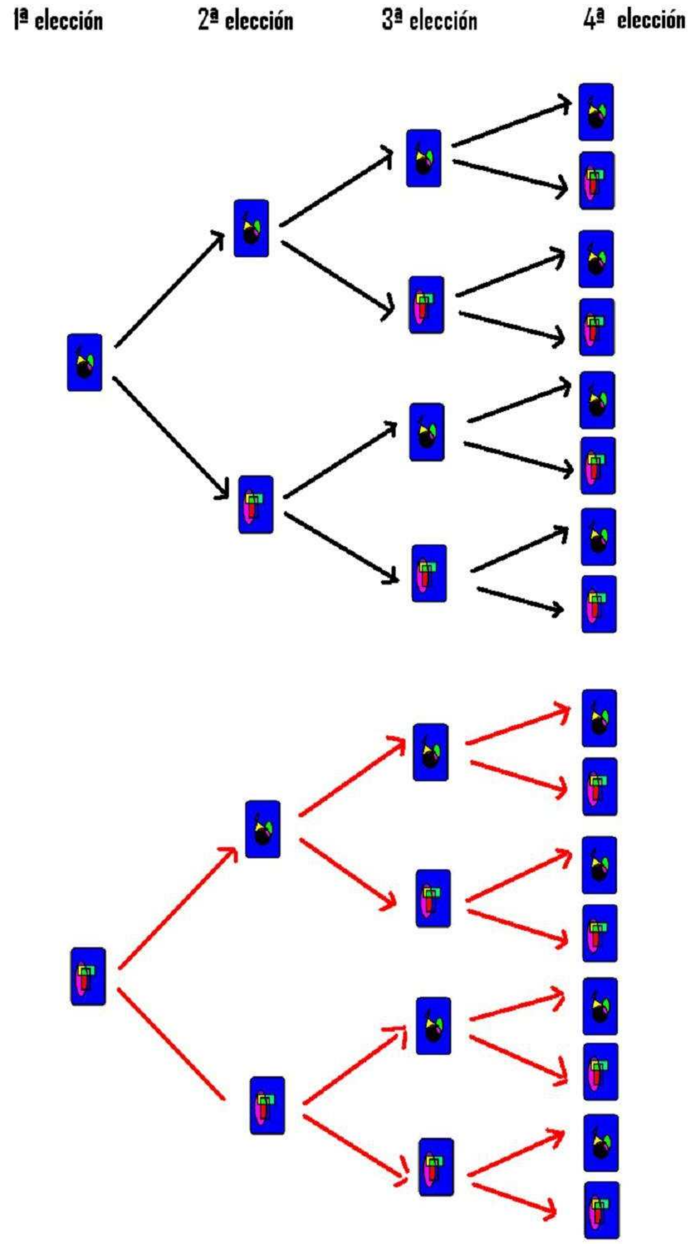
Revolver las fichas y luego escoger 4.

1. ¿De cuántas formas de pueden quedar las fichas?. Utilizar un diagrama de árbol.

2. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar las 4 fichas?.

Desarrollo del Cuestionario

El siguiente diagrama muestra de cuántas formas posibles se pueden ordenar las fichas:



Ahora para poder determinar de cuántas formas diferentes dan los grupos de a 4, podemos contar los resultados finales, que son 15 o también ver cuantos caminos tenemos en la 1ª elección, 2ª, 3ª y 4ª. En este experimento en la 1ª elección tenemos dos caminos, en la 2ª dos, en la 3ª dos y en la 4ª tenemos dos también, pero debemos recordar que en una de las posibilidades no existen dos caminos. Si en este experimento todas las posibilidades hubieran tenidos el mismo número de caminos, el resultado se hubiera calculado, multiplicando los caminos ($2*2*2*2 = 16$).

Exposición del Contenido

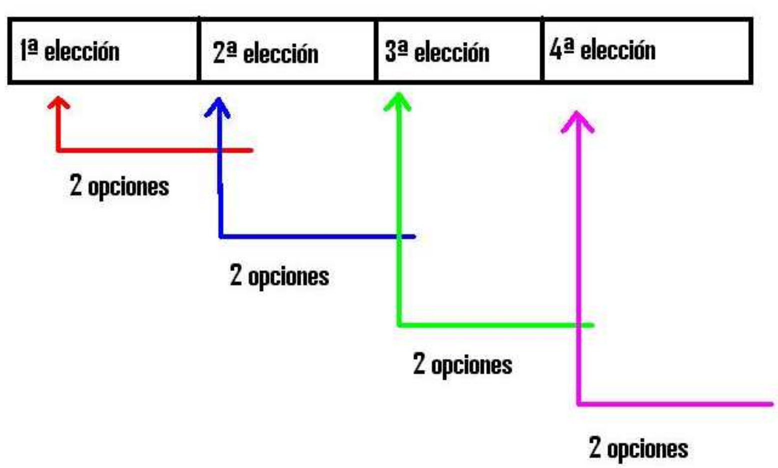
El diagrama de árbol nos permite ver y ordenar los dados en forma de *listas ordenadas*.

Características de experimentos del tipo que hemos desarrollado:

1. Cada resultado es una **lista ordenada** de componentes(2 o más).
2. Elegido el primer componente de la lista, el segundo se elige de entre todas las opciones disponibles y de igual manera los siguientes.
3. El número total de resultados se calcula multiplicando el número de opciones que hay para cada componente de la lista entre sí.

Cuando se forman agrupaciones ordenadas de elementos (objetos, personas, animales, etc.), se debe tener presente que:

- Se forman secuencias o listas ordenadas que pueden ser; pares (a,b), tríos (a,b,c), cuartetos (a,b,c,d) o con n elementos "n-uplas" $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y para visualizar conviene hacer un esquema de casillas del largo de las listas.
  Ejemplo experimento introductorio:



- Hay casos en los cuales los elementos que constituyen las listas ordenadas pueden repetirse; en otro, los elementos deben ser diferentes. Es decir, debe observarse si para cada casilla del esquema es posible elegir todos los elementos disponibles o si quedan prohibidos algunos.

- La cantidad total de listas se obtiene multiplicando el número de opciones para cada lugar de la lista entre sí.

Actividades Grupales

Actividad 1: La tenida de Andrea.
Andrea tiene una fiesta, pero no sabe que ropa ponerse, para ir a la fiesta, por lo que decide probarse todas las tenidas posibles, con sus 3 faldas, 4 poleras y 3 jeans.

1. Construir un diagrama, con todas las combinaciones posibles.

2. Calcular el número de resultados posibles.

Actividad 2: La nueva bandera.
Se tienen tres colores, verde, rojo y blanco, para la construcción de una bandera, de franjas horizontales.

1. ¿Cuántas banderas se pueden construir con estos 3 colores?.

2. ¿Cuántas banderas se pueden construir, si solo se puede repetir un color?.

3.11.1. Arreglos o variaciones. Permutaciones

Experimento Introductorio.

Cubiertos

Materiales: Una cuchara de té, de sopa, un cuchillo y un tenedor, puede ser de plástico o cubiertos de la casa.

La utilización de este material ayuda a la mejor comprensión del experimento y también al poder responder el siguiente cuestionario.

Cuestionario: Sea A={cuchara de sopa, cuchara de té, cuchillo, tenedor}.

1. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto A.
2. ¿De cuántas formas distintas, se pueden ordenar estos cubiertos, en una fila?.
3. Se desea ahora hacer una fila con tres elementos, ¿de cuántas formas distintas queda la fila, utilizando todos los cubiertos?.

Desarrollo del Cuestionario

El conjunto del experimento, es un conjunto finito, que contiene 4 elementos, y se anota como: $\#A = 4$.

Como se estudio anteriormente mediante un diagrama de árbol, se puede determinar, de cuántas formas distintas se puede ordenar este conjunto o también de la siguiente forma:

Se sabe que son 4 elementos, por lo tanto, tenemos 4 primeras opciones, pero, si nos sale una de estas cuatro opciones, para la segunda posición, solo tenemos 3 opciones, para la tercera 2 opciones y para la cuarta 1 opción.

El total de ordenamientos con 4 elementos, entonces es: $4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1{=}24$.

Para el desarrollo de la otra pregunta podemos hacerlo de la misma forma.

Se sabe que tenemos tres posiciones, para 4 elementos, por lo tanto si sale uno de las 4 elementos en el la primera posición, para la segunda posición tenemos 3 opciones y para la tercera 3 opciones.

El total de ordenamientos con 4 elementos, en una fila de tres posiciones es: $4{\cdot}3{\cdot}2{=}24$.

Exposición del Contenido.

Generalización: Si A es un conjunto finito constituido por n elementos ($n \in$ al conjunto de los números naturales), anotaremos $\#A = n$, y leeremos "la cardinalidad de A es n". En el experimento introductorio la cardinalidad del conjunto era 4, A={cuchara de sopa, cuchara de té, cuchillo, tenedor}.

Teorema

Sean A y B conjuntos finitos, donde:

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$$

- Por ejemplo:

  Sean A y B conjuntos finitos con $\#A = p$ y $\#B = q$, entonces la cantidad de pares ordenados (a,b) con a $\in A$ y b $\in B$ que se pueden formar es $p \cdot q$.
  Ejemplo: A={a, b, c}; B={♣, ♠}
  Los pares ordenados se pueden observan en la siguiente tabla:

$A \times B$	♣	♠
a	(a, ♣)	(a, ♠)
b	(b, ♣)	(b, ♠)
c	(c, ♣)	(c, ♠)

  Entonces todos los pares ordenados (a,b) con a $\in A$ y b $\in B$ son 3·2=6.
  Estos se puede generalizar en 3 o más conjuntos.

- Si E es un conjunto finito de cardinalidad n, entonces el número total de listas ordenadas de k elementos de E, donde está permitido que se repitan, está dado por n^k.

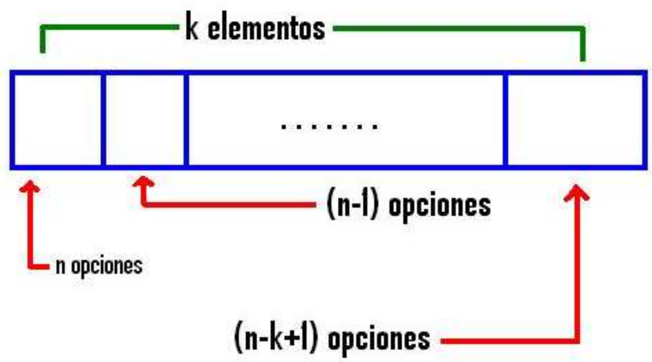
  Por ejemplo:

  Podemos ver el experimento introductorio: A={cuchara de sopa, cuchara de té, cuchillo, tenedor}, entonces $\#A = 4$.

  - El número de pares ordenados (k=2) de elemento A está dado por por 4^2=16. Sin olvidar que existe repetición.
  - La cantidad de todos los tríos ordenados (k=3) de elementos de A se calcula por 4^3=64.
    Nótese que k puede tomar cualquier valor, perteneciente a los números naturales, incluso mayor que n.

Teorema:

Si E es un conjunto finito con $\#E$=n, la cantidad de todas las listas ordenadas de k elementos **diferentes** entre sí, donde $k \leq n$, está dada por el producto:



$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{\text{k factores}}$$

Nótese que el producto está formado por k factores, tantos como elementos tengan las listas, y que ellos empiezan en n (cardinalidad de E) y decrecen de 1 en 1.

Por ejemplo:

En el experimento introductorio, se deseaba hacer una fila de tres elementos, de forma distintas, con A={cuchara de sopa, cuchara de té, cuchillo, tenedor}.

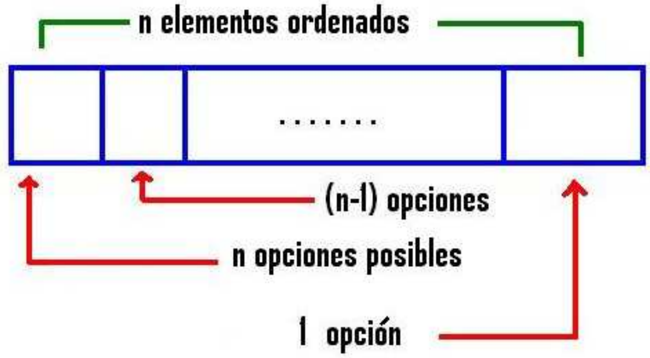
Entonces $\#A$=4; número de elementos de cada lista k=3 total de filas con 3 elementos distintos: 4·3·2=24.

Estas secuencias o listas ordenadas de k elementos distintos sin repetición) tomados de entre los n elementos disponibles se denominan **arreglos** o **variaciones**.

El número total de **arreglos** o **variaciones** formados por k distintos tomados de un total de n elementos lo anotaremos A_k^n o V_k^n; por lo tanto:

$$A_k^n{=}n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

Si se desea conocer todas las ordenaciones posibles de los n elementos de un conjunto, entonces basta considerar.



Resultado:

$$V_n^n = A_n^n = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(1)}_{\text{n factores}}$$

Por ejemplo:

En el experimento introductorio estudiamos las posibilidades que teníamos en ubicar los servicios en una fila.
Se tenían n=4, del total de ordenaciones con estos elementos es: 4·3·2·1.

Esta situación es un caso particular del anterior (arreglos o variaciones) cuando $n = k$ se denomina **permutación** de n elementos. El número total de permutaciones de n elementos lo anotaremos P_n.

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots(1) = n!$$

El símbolo $n!$ se lee "n factorial" y corresponde al producto de los n primeros números naturales.

Actividades Grupales

Actividad 1: Las 10 fichas.
Material: Las 10 fichas, 7 con una figura y 3 con otra.
Al utilizar esta fichas, y junto con tu compañero respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la cardinalidad de este conjunto?.

2. ¿Cuál es el número total de permutaciones, que se obtiene con las fichas?

3. Determinar el numero total de arreglos, si $k = 5$.

Actividad 2: Pedro y el almuerzo.
Pedro es invitado a almorzar y debe elegir entre 3 entradas, 4 platos de fondo, 8 postres y 5 tipos de bebidas.

1. ¿Cuál es el número total de combinaciones que puede hacer?.

2. Si los puede mezclar no importando el orden, ¿cuál es el número total de permutaciones?.

3.12. Contando conjuntos: cuando no influye el orden.

Experimento Introductorio.

Las monedas

Materiales: Una moneda de \$1, una de \$5, una de \$10, y una de \$50 y una moneda de \$100.

Este experimento consiste en utilizar las monedas para poder responder las siguientes preguntas, junto a tu compañero, la utilización de este material ayudará a entender mejor el concepto.

Cuestionario:

1. Hacer un listado de todos los subconjuntos con tres monedas.

2. ¿Cuántos subconjuntos con 3 elementos se obtienen a partir de los 5 elementos?.

Desarrollo del Cuestionario

Los subconjuntos que se pueden hacer con 3 elementos son:

$\{1, 5, 10\}$, $\{1, 5, 50\}$, $\{1, 5, 100\}$, $\{1, 10, 50\}$, $\{1, 10, 100\}$, $\{1, 50, 100\}$, $\{5, 10, 50\}$, $\{5, 10, 100\}$, $\{5, 50, 100\}$, $\{10, 50, 100\}$.

Estos tríos nos dan en forma ordenada.

Ahora si calculamos todas la maneras posibles para obtener estos tríos, es decir, utilizamos las permutaciones de 3 elementos, obtenemos, $P_3 = 3! = 6$.

Por ejemplo:

Tríos donde no importa el orden	Tríos ordenados
{1,5,10}	(1, 5, 10) (1, 10, 5) (10, 1, 5) (10, 5, 1) (5, 10, 1) (5, 1, 10)

Ahora si lo anterior lo hacemos por cada uno de los subconjuntos encontrados, obtenemos en total 60 subconjuntos. Esto se puede calcular de la siguiente forma:

$$\boxed{10 \cdot 6 = 60}$$

Donde del cuadro anterior se determina lo siguiente:

10: Corresponde al números de subconjuntos con 3 elementos.

6: Corresponde al números de permutaciones de los elementos de cada subconjunto: P_3.

60: Corresponde al números de tríos ordenados a partir de los 5 elemento del conjunto: A_3^5.

Por lo tanto el número de todos los subconjuntos con 3 elementos que se obtienen a partir de los 5 elementos del conjunto se puede calcular de la siguiente forma:

$$\frac{A_3^5}{P_3} = \frac{60}{6} = 10$$

Exposición del Contenido.

Cada subconjunto o agrupación, no ordenada, de k elementos distintos obtenibles a partir de n elementos dados se llama **combinación** *y* C_k^n *es el* **número de todas las combinaciones** *de n elementos en grupos de k elementos.*

Si E es un conjunto con n elementos, el número total de subconjunto con k elementos, siendo $k \leq n$, está dado por:

$$C_k^n = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1*2*\cdots*k} = \frac{A_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Resultando una fracción con n factores en el numerador y n factores en el denominador, entre los cuales siempre hay simplificación.

Para comprender mejor la diferencia entre una combinación y una permutación, veamos el siguiente cuadro:

Combinaciones	Permutaciones
$\{a, b, c\}$	$abc, acb, bac, bca, cab, cba$
$\{a, b, d\}$	$abd, adb, bad, bda, dab, dba$
$\{a, c, d\}$	$acd, adc, cad, cda, dac, dca$
$\{b, c, d\}$	$bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb$

Este cuadro nos permite ver el número de combinaciones que podemos hacer con las letras "a, b, c, d", tomadas de tres en tres y también las permutaciones que se obtienen por cada combinación, que se hace.

Actividades Grupales.

Actividad 1: Los grupos de alumnos.
En su curso se necesitan hacer grupos de alumnos, para el desarrollo de una actividad, si el profesor les pide a ustedes que calculen el número de combinaciones que se pueden hacer con el curso, tomando en cuenta de que los grupos deben ser de 5 personas.

1. ¿Cuál es el número de combinaciones?.
2. Si los grupos ahora se deben hacer de a 7, ¿cuál es el número de estas nuevas combinaciones?.

Actividad 2: Algo sobre los naipes españoles.
Hemos trabajado anteriomente con naipes españoles, se sabe cuantas cartas tienen, utilizar si es necesario los naipes, para comprender y responder las siguientes preguntas.

1. Calcular el número de grupos de 5 cartas que se pueden formar con estos naipes

2. Calcular el número de grupos de tres que se pueden formar utilizando solo esta vez las figuras.

Actividad 3: Calcular.
C_1^5, C_1^7, C_3^{12} y C_5^5. Compara los resultados con tus otros compañeros

3.13. Evaluación

El "juego" para realizar en excel, es una autoevaluación del alumno, para ello es necesario un computador con el programa, después insertar el disco y abrir el archivo "juego.xls".

Recuerde que esta actividad la puede realizar tantas veces como sea necesario.

En caso de algún problema ver las recomendaciones en el apéndice B.

Conclusión

Nuestra Memoria de Titulo, se ha enmarcado en la teoría de el constructivismo y la teoría de Vigotsky, el material de estudio se ha diseñado de modo a obtener aprendizaje asistido, ya que los experimentos permiten un descubrimiento más significativo para los alumnos, debido a que él intenta comprender cual es la solución del problema que se le presenta, con lo cual activa la zona de desarrollo próximo.

Las actividades están sugeridas por lo general para dos alumnos, pero los grupos de trabajo pueden estar formados por más alumnos que lo realicen, una forma de ampliar el grupo es que un alumno realice las labores de registro de las actividades y los otros realicen los experimentos y al final de las experiencias, con todos los datos que se han obtenido, respondan juntos el cuestionario o preguntas planteadas.

En general el utilizar medios audiovisuales, incluido la informática en la enseñanza de un contenido, para el alumno es atrayente y novedoso, ya que, permite crear estrategias motivadoras dando una mayor eficacia en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en particular para nuestro contenido de probabilidad.

Hemos elegido trabajar con el programa Excel, ya que se encuentra en la mayoría de los computadores, por lo cual para el alumno no sería difícil de encontrar un equipo donde desarrollar la actividad 3 y la evaluación.

El desarrollo de esta trabajo nos ha permitido, mediante la investigación y la creación de experimentos, el aprender nuevas estrategias para poder enseñar la probabilidad y en el camino comprender cuáles son los apéndices, que no se dominaban en forma completa.

Esta propuesta de material, para enseñar o reforzar el contenido de probabilidad en 3º medio, incluido su apoyo computacional, y por lo dicho anteriormente creemos que cumple con los objetivos planteados.

Bibliografía

[1] Baeza A., Soto V. (2005). *Educación Matemática 2º medio*. Chile: Santillana.

[2] Berk L. (1999). *Desarrollo del niño y del adolescente*. España: Petrice Hall.

[3] Bruning R., Schraw G. y Ronning R. (2002). *Psicología cognitiva e instrucción*. España: Alianza Editorial.

[4] Campusano B., Soto V., Ulloa M. (2002). *Matemática 2º medio: texto del alumno*. Chile: Arrayán Editores.

[5] Díaz-Barriga F. y Hernández G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista*. McGRAW-HILL Interamericana.

[6] González P. y Soto J. (2003). *Matemática 3º medio: Texto para el Estudiante*. España: Mare Nostrum.

[7] González P. y Soto J. (2003). *Matemática 2º medio: Texto para el Estudiante*. España: Mare Nostrum.

[8] Lipschutz S. (1971). *Teoria y problemas de Probabilidad*. Mexico: McGRAW-HILL.

[9] Orellana J., Ulloa M., Zañartu M. (2002). *Matemática 3º medio: Texto del alumno*. Chile: Arrayán Editores.

[10] Rice, P. (2000). *Adolescencia*. España: Petrice Hall.

[11] Velásquez J., Sepúlveda G., Solabarrieta P. (2001). *Matemática 3º medio*. Chile: Santillana.

[12] Brihuega J. (2005). *Problemas de Probabilidad* . *www.reypastor.org/departamentos/dmat/jabrni/probl.htm*.

[13] Del Pozo J. (2002). *Probabilidad condicionada.* *http://www.terra.es/personal2/jpb00000/tprobabilidad3.htm.*

[14] Gacetilla Matemática (2001). *Conjunto de sucesos.* *www.arrakis.es/ mcj/azar03.htm.*

[15] Rodríguez M. (2002). *Actividades para aprender frecuencias y probabilidades.* *http://www.mismates.net/matematicas/manipulables/.*

[16] Roig M. (1998). *Ejercicios de cálculo de probabilidades.* *http://usuarios.lycos.es/manuelnando/practicacalculoprobabilidades1sin.htm.*

[17] Sanhueza G. (2001). *El constructivismo.* *www.monografias.com/trabajos11/constru/constru.sh*

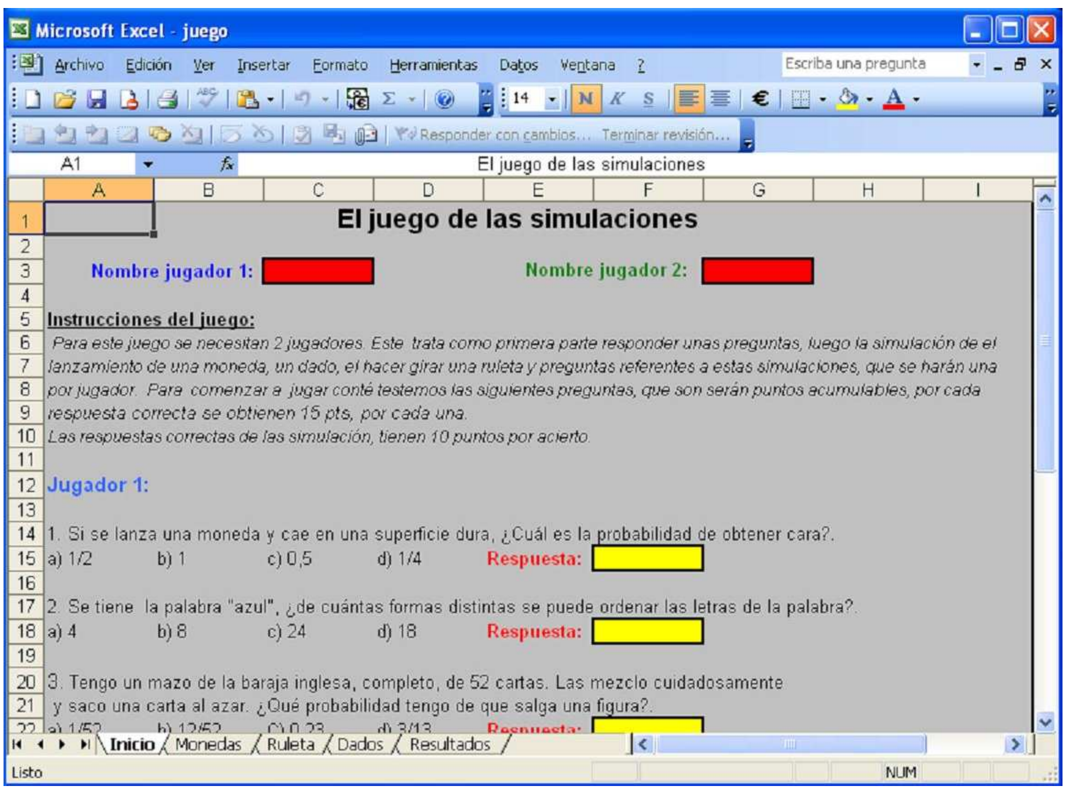
[18] Seda J. (2002). *Probabilidad.* *http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/.*

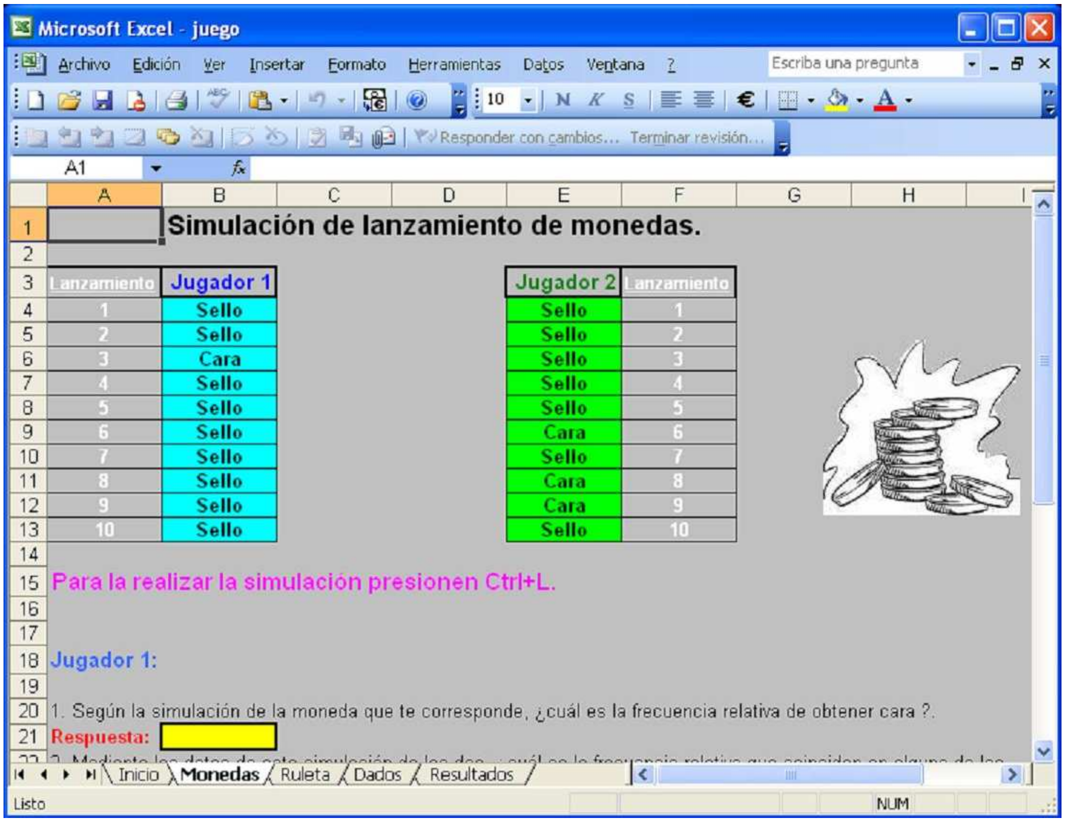
[19] Velázquez F. (2005). *¿Qué es la probabilidad?.* *http://mx.geocities.com/fracosta11/probabilidad.html.*

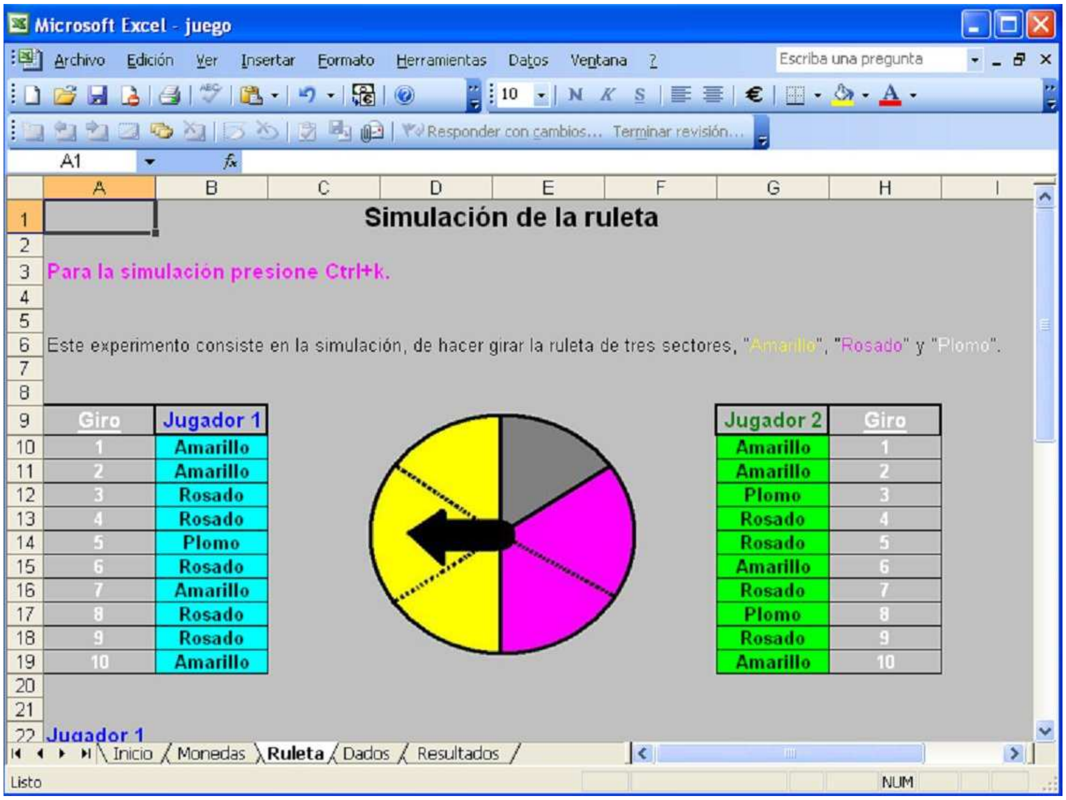
Apéndice A

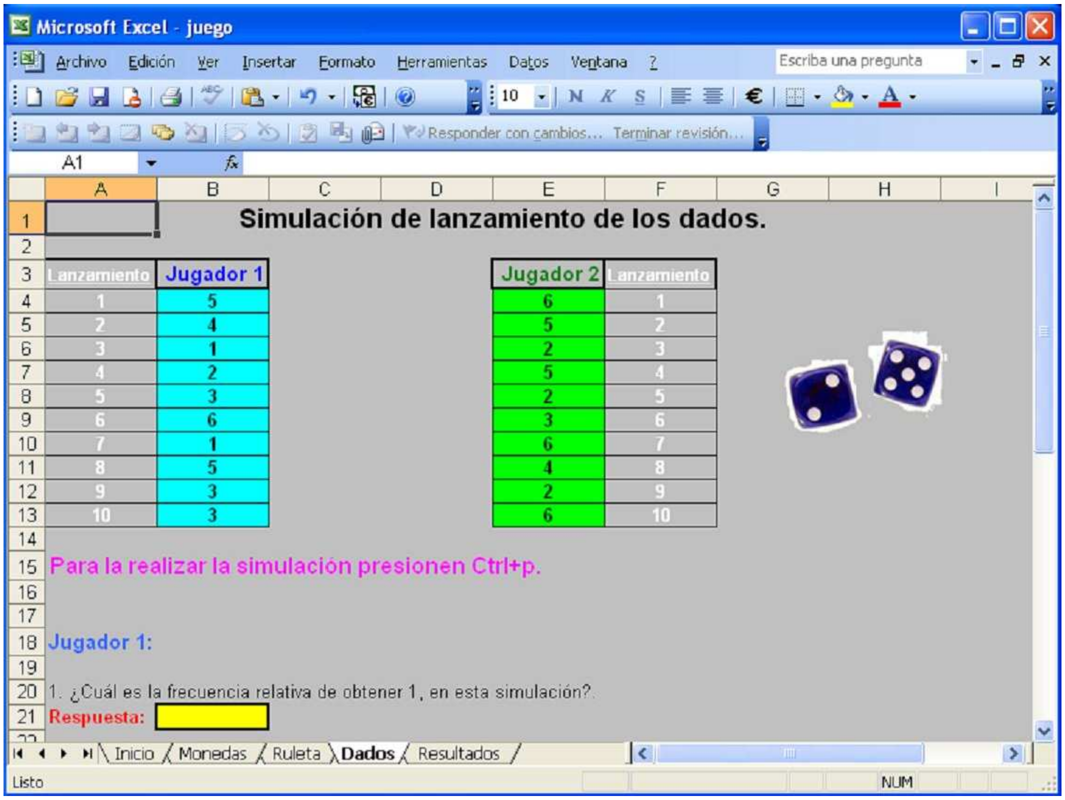
Excel

Este Apéndice contiene algunas imágenes de las actividades y del juego que se realizaron en el programa Excel, de la propuesta educativa, en la enseñanza de la probabilidad.




Microsoft Excel - juego
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?
Escriba una pregunta
Responder con cambios... Terminar revisión...
A1
Simulación de lanzamiento de monedas.
Lanzamiento
Jugador 1
Jugador 2
Lanzamiento
1 Sello Sello 1
2 Sello Sello 2
3 Cara Sello 3
4 Sello Sello 4
5 Sello Sello 5
6 Sello Cara 6
7 Sello Sello 7
8 Sello Cara 8
9 Sello Cara 9
10 Sello Sello 10
Para la realizar la simulación presionen Ctrl+L.
Jugador 1:
1. Según la simulación de la moneda que te corresponde, ¿cuál es la frecuencia relativa de obtener cara ?.
Respuesta:
Inicio
Monedas
Ruleta
Dados
Resultados
Listo
NUM


Microsoft Excel - juego
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?
Escriba una pregunta
Responder con cambios... Terminar revisión...
A1
Simulación de la ruleta
Para la simulación presione Ctrl+k.
Este experimento consiste en la simulación, de hacer girar la ruleta de tres sectores, "Amarillo", "Rosado" y "Plomo".
Giro
Jugador 1
1 Amarillo
2 Amarillo
3 Rosado
4 Rosado
5 Plomo
6 Rosado
7 Amarillo
8 Rosado
9 Rosado
10 Amarillo
Jugador 2
Giro
Amarillo 1
Amarillo 2
Plomo 3
Rosado 4
Rosado 5
Amarillo 6
Rosado 7
Plomo 8
Rosado 9
Amarillo 10
Jugador 1
Inicio Monedas Ruleta Dados Resultados
Listo
NUM


Microsoft Excel - juego
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?
Escriba una pregunta
Responder con cambios... Terminar revisión...
A1
Simulación de lanzamiento de los dados.
Lanzamiento Jugador 1
1 5
2 4
3 1
4 2
5 3
6 6
7 1
8 5
9 3
10 3
Jugador 2 Lanzamiento
6 1
5 2
2 3
5 4
2 5
3 6
6 7
4 8
2 9
6 10
Para la realizar la simulación presionen Ctrl+p.
Jugador 1:
1. ¿Cuál es la frecuencia relativa de obtener 1, en esta simulación?
Respuesta:
Inicio Monedas Ruleta Dados Resultados
Listo
NUM


Microsoft Excel - juego
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?
Escriba una pregunta
Responder con cambios... Terminar revisión...
A1
Resultados del juego
Puntos del jugador 0
Preguntas: 0
Simulación dados: 0
Simulación moneda: 0
Simulación ruleta: 0
Puntos del jugador 0
Preguntas: 0
Simulación dados: 0
Simulación moneda: 0
Simulación ruleta: 0
El ganador es: Empate
Para volver a jugar presionen Ctrl + m.
Inicio Monedas Ruleta Dados Resultados
Listo
NUM

Apéndice B

Instrucciones para actividades y juego

Antes de abrir los archivos deben verificar que estén activos los complementos necesarios para la ejecución de ellos y activados las macros.

1. El juego incluye funciones que no están disponibles en todas las versiones de excel, para ello debemos tener Excel 2003.

2. Para activar los **complementos** deben ir a "Herramientas", luego a "Complementos" y activar "Herramientas para análisis" y aceptar. Si hay una flecha verde en "Herramientas para análisis" es que esta ya está activada.

3. Para activar las **macros** deben ir a "Herramientas", enseguida a "Macro" y luego a "Seguridad" y elegir "Nivel de seguridad", puede ser "Bajo" o "Medio" y aceptar. Si hay un punto verde en "Bajo" o "Medio" es que esta ya está activada.

Ahora que has realizado estos pasos, puedes comenzar con las actividades o el juego.