



Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

# Grupos de Reflexiones Afines

Tesis presentada por **Felipe Concha Eyzaguirre**.  
Para optar al grado de Licenciado en Matemáticas.

Profesor Guía Dr. Daniel Jiménez Briones.

Valparaíso, Agosto de 2010.

## Índice general

Introducción	2
Símbolos	4
Capítulo 1. Conceptos Básicos	5
1. Grupos	5
2. Espacio Vectorial	7
Capítulo 2. Grupos de Reflexiones Finitos	10
1. Sistemas de Raíces Cristalográficos	10
2. Sistemas Positivos y Simples	11
3. Grupos de Coxeter Finitos	14
4. Reticulados de Raíces y Coraíces	14
5. Grafos de Coxeter	19
Capítulo 3. Grupo de Reflexiones Afines	24
1. Hiperplanos Afines	25
2. Reflexiones Afines	26
3. Grupos de Weyl Afines	30
4. Cámaras	35
5. La Función Largo	40
6. Transitividad Fiel	48
7. Sistema de Representantes	52
8. Condición de Cambio	53
9. Diagramas de Dynkin	54
Capítulo 4. El orden de un Grupo de Weyl	64
Bibliografía	79

## Introducción

Esta tesis tiene como objetivo estudiar los Grupos de Reflexiones Afines, para lo cual nos introducimos a la teoría de grupos de Coxeter finitos y grafos de Coxeter; y terminamos entregando el orden de los grupos de Weyl según su tipo. Este trabajo esta dividido en cuatro capítulos. A continuación, haremos una descripción de cada uno de los capítulos.

En un primer capítulo, recordaremos propiedades de grupos y espacios vectoriales, básicos para el desarrollo de esta tesis.

El siguiente capítulo establece las definiciones y propiedades de los Grupos de Reflexiones Finitos que son fundamentales para los capítulos posteriores.

Iniciamos este capítulo definiendo las reflexiones y traslaciones por elementos de un espacio vectorial; explicamos los sistemas de raíces cristalográficos, donde construimos un ejemplo que se seguirá desarrollando durante toda la tesis. Introducimos un orden lexicográfico sobre un espacio vectorial  $V$ , el cual permite determinar los sistemas positivos, sistemas negativos, sistemas simples y raíz suprema, que cumple un rol esencial en el desarrollo de esta tesis; posteriormente vemos que estos grupos finitos están generados por reflexiones simples y entregamos una presentación de ellos, lo que nos permite definir el concepto de grupos de Coxeter y la función largo, que es fundamental para demostrar la cancelación de Matsumoto. Luego, definimos los reticulados de raíces y coraíces con sus respectivos pesos. Concluimos este capítulo, mostrando que dado un sistema de Coxeter irreducible, entonces su grafo de Coxeter es uno de los dados en el teorema 17.

En el tercer capítulo se describen las reflexiones afines, y con ello los grupos de Weyl afines y grupos de Weyl afín extendido.

Introducimos este capítulo definiendo los hiperplanos y reflexiones afines, con ello estudiaremos los grupos de Weyl afines y la extensión de estos, para luego entregar el concepto de cámaras y demostrar como estos grupos actúan sobre ellas. Proseguimos con definir la función largo para los grupos de Weyl y analizamos la geometría de esta función. Continuamos dando la lista de hiperplanos que separa la

cámara fundamental de una cámara cualquiera, probando como el grupo de Weyl actúa fielmente sobre las cámaras. Establecemos un sistema de representantes para la acción del grupo de Weyl sobre  $V$ . También obtenemos la condición de cambio y con ello la noción de sistemas de Coxeter. Verificamos las relaciones de los grupos de Weyl para los tipos  $\widetilde{A}_n$  y  $\widetilde{B}_n$ , mostrando los respectivos diagramas de Dynkin, además construimos un isomorfismo de estos grupos con un subgrupo del grupo de permutaciones de  $\mathbb{Z}$ . Terminamos este capítulo con el teorema 45, el cual nos da una lista de diagramas de Dynkin para los distintos tipos de grupos de Weyl.

Este último capítulo tiene como objetivo principal demostrar el teorema 52, el cual nos da el orden para un grupo de Weyl. Concluimos esta tesis entregando una lista que nos indica el orden de un grupo de Weyl según su tipo.

## Símbolos

$V$	: $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.
$\langle , \rangle$	: Producto interno en $V$ .
$\ll , \gg$	: Subespacio Generado o Subgrupo Generado.
$\leq$	: Subgrupo o Subespacio Vectorial.
$O(V)$	: Grupo Ortogonal.
$GL(V)$	: Grupo General Lineal.
$T(V)$	: Conjunto de las traslaciones de $V$ en si mismo.
$Aff(V)$	: Grupo Afín.
$W$	: Grupo de Weyl.
$W_a$	: Grupo de Weyl afín.
$\widehat{W}_a$	: Grupo de Weyl Afín Extendido.
$\Phi$	: Sistemas de Raíces Cristalográfico.
$\Phi^+$	: Sistema Positivo.
$\Phi^-$	: Sistema Negativo.
$\Delta$	: Sistema Simple.
$\check{\Phi}$	: Sistemas de Coraíces.
$\mathcal{R}$	: Reticulado de Raíz.
$\mathcal{P}$	: Peso del Reticulado.
$\check{\mathcal{R}}$	: Reticulado de Coraíces.
$\check{\mathcal{P}}$	: Copeso del Reticulado.
$H_{u,k}$	: Hiperplano ortogonal al espacio generado por $u$ trasladado.
$\mathcal{H}$	: Conjunto de los Hiperplanos Afines.
$V^\circ$	: Colección de componentes conexas.
$\tilde{v}$	: Raíz Suprema.

## Capítulo 1

### Conceptos Básicos

En este capítulo enunciaremos algunas definiciones de grupos y espacios vectoriales las cuales son esenciales para comprender de buena manera el contenido de esta tesis.

#### 1. Grupos

DEFINICIÓN 1. Sea  $G$  un conjunto no vacío, se dice que el par  $(G, *)$  es un **grupo**, si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. *Clausura*:  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$  una aplicación.
2. *Asociatividad*:  $(\forall a, b, c \in G)(a * (b * c) = (a * b) * c)$
3. *Neutro*:  $(\exists! e \in G)(\forall a \in G)(a * e = a = e * a)$
4. *Inverso*:  $(\forall a \in G)(\exists! a^{-1} \in G)(a * a^{-1} = e = a^{-1} * a)$

*Si, además se satisface la siguiente condición:*

5. *Conmutatividad*:  $(\forall a, b \in G)(a * b = b * a)$ ,  
decimos que el par  $(G, *)$  es un grupo abeliano.

PROPOSICIÓN 1. Sea  $(G, *)$  un grupo y  $a, b \in G$ , entonces:

1.  $(a^{-1})^{-1} = a$
2.  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

DEFINICIÓN 2. Sean  $(G, *)$  un grupo y  $\emptyset \neq H \subset G$ .

Se dice que  $H$  es un **subgrupo** de  $G$ , lo cual se denota por  $H \leq G$ , si y sólo si  $(H, *|_H)$  es un grupo.

DEFINICIÓN 3. Sean  $G$  un grupo y  $S \subset G$ .

Se dice que el conjunto  $S$  **genera** a  $G$ , lo cual denotaremos por  $G = \langle\langle S \rangle\rangle$ , si, y sólo si, todo elemento de  $G$  puede ser expresado como producto de un número finito de elementos de  $S \cup S^{-1}$ , con  $S^{-1} = \{x \mid x^{-1} \in S\}$ .

DEFINICIÓN 4. Sean  $G$  un grupo y  $H, K \leq G$ . El conjunto  $HK$  se define por:

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

DEFINICIÓN 5. Sean  $(G, *)$  un grupo y  $H \leq G$ .

El **normalizador** de  $H$  en  $G$  es el conjunto:

$$N_G(H) = \{g \in G \mid g * H * g^{-1} = H\}$$

DEFINICIÓN 6. Sean  $G$  un grupo y  $H \leq G$ .

$H$  es un **subgrupo normal** de  $G$ , lo cual denotamos por  $H \trianglelefteq G$  si, y sólo si, se cumple la siguiente condición:

$$(\forall g \in G)(gHg^{-1} \subset H)$$

PROPOSICIÓN 2. Sean  $G$  un grupo,  $K \leq G$  y  $H \trianglelefteq G$ , entonces  $HK \leq G$ .

DEFINICIÓN 7. Sean  $(H, *)$  y  $(K, \cdot)$  dos grupos. Consideremos el producto cartesiano  $H \times K = \{(h, k) \mid h \in H, k \in K\}$  y definamos en el conjunto  $H \times K$  la siguiente operación binaria,

$$\begin{aligned} \star & : (H \times K) \times (H \times K) \longrightarrow (H \times K) \\ ((h_1, k_1) \times (h_2, k_2)) & \longmapsto (h_1 * h_2, k_1 \cdot k_2) \end{aligned}$$

Así,  $(H \times K, \star)$  es un grupo, llamado **producto directo** de  $H$  y  $K$ .

DEFINICIÓN 8. Sea  $G$  un grupo.

$G$  es **producto semidirecto** de  $H$  y  $K$ , lo cual denotamos por  $G = H \rtimes K$ , si y sólo si

1.  $K$  es un subgrupo de  $G$
2.  $H$  es un subgrupo normal de  $G$
3.  $H \cap K = \{e\}$
4.  $G = HK$

DEFINICIÓN 9. Sea  $(G, *)$  un grupo y  $A$  un conjunto ( $A \neq \emptyset$ ). Se dice que  $G$  **actúa** sobre  $A$ , si y sólo si existe una función

$$\begin{aligned} \cdot & : G \times A \longrightarrow A, \quad \text{que cumple con} \\ (g, a) & \longmapsto ga \end{aligned}$$

1.  $(\forall a \in A)(ea = a)$ , donde  $e \in G$  es el neutro.
2.  $(\forall g_1, g_2 \in G)(\forall a \in A)(g_1(g_2a) = (g_1 * g_2)a)$ .

En este caso se dice también que  $A$  es un  $G$ -conjunto.

DEFINICIÓN 10. Sea  $G$  un grupo que actúa sobre un conjunto  $A$ , y  $a \in A$ . Entonces:

1. La **órbita** de  $a$ , se denota por  $O_a$ , y está definida de la siguiente manera:

$$O_a = \{ga \mid g \in G\} \subseteq A$$

2. El **estabilizador** de  $a$  el cual se denota por  $G_a$  es:

$$G_a = \{g \in G \mid ga = a\} \leq G$$

DEFINICIÓN 11. Sea  $G$  un grupo que actúa sobre un conjunto  $A$ .

Se dice que  $G$  actúa sobre  $A$ :

1. **Trivialmente**, si y sólo si  $(\forall g \in G)(\forall a \in A)(ga = a)$ . O sea,  $O_a = a$  y  $G_a = G$ .
2. **Transitivamente**, si y sólo si  $(\forall a \in A)(O_a = A)$
3. **Fielmente Transitivo o Fiel**, si y sólo si  $(\forall a, b \in A)(\exists! g \in G)(ga = b)$

## 2. Espacio Vectorial

DEFINICIÓN 12. Se dice que  $(V, +, \cdot)$  es un  **$\mathbb{R}$ -espacio vectorial**, si y sólo si

1.  $(V, +)$  es un grupo abeliano,  
además con el producto por escalar posee las siguientes propiedades:
2. Clausura:  $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$  es función.
3.  $(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x)$
4.  $(\forall x, y \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y)$
5.  $(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x)$
6.  $(\forall x \in V)(1x = x)$ , donde  $1$  es el elemento neutro multiplicativo del cuerpo  $\mathbb{R}$ .

OBSERVACIÓN 1. En esta tesis consideraremos sólo espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ . Por ende, el lector debe asumir que todo espacio vectorial es sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ .

DEFINICIÓN 13. Sean  $V$  un espacio vectorial y  $U \subset V$  ( $U \neq \emptyset$ ).

Se dice que  $U$  es un **subespacio vectorial** de  $V$ , si y sólo si  $U$  es un espacio vectorial con las restricciones a  $U$  de la suma y el producto en  $V$ , que denotamos por  $U \leq V$ .

DEFINICIÓN 14. Sean  $V$  un espacio vectorial y  $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset V$ .

- a) Un conjunto  $S$  **genera** a  $V$ , lo cual denotaremos por  $V = \ll S \gg$ , si y sólo si,

$$(\forall y \in V)(\exists \alpha_i \in \mathbb{R})(y = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n), \text{ con } .$$

b)  $S$  es un conjunto **linealmente independiente**, si y sólo si,

$(\forall \alpha_i \in \mathbb{R})(\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n = 0)$ , entonces  $\alpha_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

c) El conjunto  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  es una **base** del espacio vectorial  $V$  si se cumplen las dos condiciones anteriores, y en este caso  $V$  es un espacio de dimensión  $n$ , lo cual denotamos por  $\dim V = n$ .

DEFINICIÓN 15. Sean  $V$  un espacio vectorial y  $W_1, W_2 \leq V$ . La suma de los subespacios  $W_1$  y  $W_2$  es el conjunto:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \in V \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

DEFINICIÓN 16. Sean  $V$  un espacio vectorial y  $W_1, W_2$  subespacios de  $V$ .

Se dice que  $V$  es **suma directa** de  $W_1$  y  $W_2$ , y se denota  $V = W_1 \oplus W_2$ , si y sólo si

1.  $V = W_1 + W_2$
2.  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

### 2.1. Transformación Lineal.

DEFINICIÓN 17. Sean  $U, V$  dos espacios vectoriales.

Una aplicación  $f : U \rightarrow V$  es una **transformación lineal** de  $U$  en  $V$ , si y sólo si

1.  $(\forall x, y \in U)(f(x + y) = f(x) + f(y))$
2.  $(\forall x \in U)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(f(\alpha x) = \alpha f(x))$

DEFINICIÓN 18. Sea  $V$  un espacio vectorial. Se define  $GL(V)$  como el conjunto de todas las transformaciones lineales biyectivas de  $V$  en si mismo.

### 2.2. Producto Interno.

DEFINICIÓN 19. Sea  $V$  un espacio vectorial, un **producto interno** sobre  $V$  es una forma bilineal, simétrica, definida positiva. Es decir, es una función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

tal que,

1.  $(\forall x, y, z \in V)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\langle x + \alpha z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \alpha \langle z, y \rangle)$
2.  $(\forall x, y \in V)(\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle)$

$$3. (\forall x \in V - \{0\})(\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+)$$

DEFINICIÓN 20. Sean  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $x, y \in V$ . Decimos que  $x$  e  $y$  son **ortogonales** si, y sólo si, el producto interno entre ellos es cero. Lo denotamos  $x \perp y$ .

DEFINICIÓN 21. Sea  $S \subset V$ , el **conjunto ortogonal** a  $S$  está dado por:

$$S^\perp = \{y \in V \mid (\forall x \in S)(\langle x, y \rangle = 0)\}$$

NOTACIÓN 1. Sea  $u \in V - \{0\}$

$$\ll u \gg^\perp = \{y \in V \mid \langle y, u \rangle = 0\} = H_u$$

DEFINICIÓN 22. Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno. El **grupo ortogonal**, denotado por  $O(V)$  es el conjunto de las transformaciones lineales de  $V$  en si mismo que preservan este producto interno. Es decir,

$$O(V) = \{\tau \in GL(V) \mid \langle \tau x, \tau y \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in V\}.$$

NOTACIÓN 2.

1. El símbolo  $\leq$  denotará subgrupo o subespacio vectorial dependiendo si estamos trabajando en grupos o espacios vectoriales respectivamente.
2. El símbolo  $\ll \gg$  representa al subespacio generado o subgrupo generado si estamos trabajando en espacios vectoriales o grupos respectivamente.

## Grupos de Reflexiones Finitos

En este capítulo veremos conceptos esenciales sobre sistemas de raíces, y sistemas de raíces cristalográficos que nos permiten comprender de mejor forma los grupos de Coxeter y grupos de Weyl respectivamente. Además, estudiaremos los reticulados y algunas de sus propiedades, para luego finalizar explicitando los grafos de Coxeter para cada tipo de grupo.

DEFINICIÓN 23. Una **reflexión** es una transformación lineal de un espacio vectorial  $V$  en si mismo, que fija todos los elementos del hiperplano ortogonal al vector  $u$  no nulo, y envía todo vector de la recta  $\ll u \gg$  en su inverso aditivo.

La reflexión anterior la denotamos por  $s_u$  y se define del siguiente modo:

$$s_u(v) = v - 2 \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

DEFINICIÓN 24. Sea  $u \in V$ , se define la **traslación** en  $u$ , denotada por  $t_u$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} t_u &: V \longrightarrow V \\ v &\longmapsto t_u(v) = v + u \end{aligned}$$

Denotemos por  $T(V)$ , el conjunto de las traslaciones de  $V$  en si mismo.

PROPOSICIÓN 3. Sea  $V$  un espacio vectorial. Entonces,

$$(\forall v \in V)((t_v)^{-1} = t_{-v})$$

Además,  $T(V)$  es un subgrupo de las biyecciones de  $V$ .

### 1. Sistemas de Raíces Cristalográficos

DEFINICIÓN 25. Sea  $\Phi \subset V$ .

Se dice que  $\Phi$  es un **sistema de raíces** si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones:

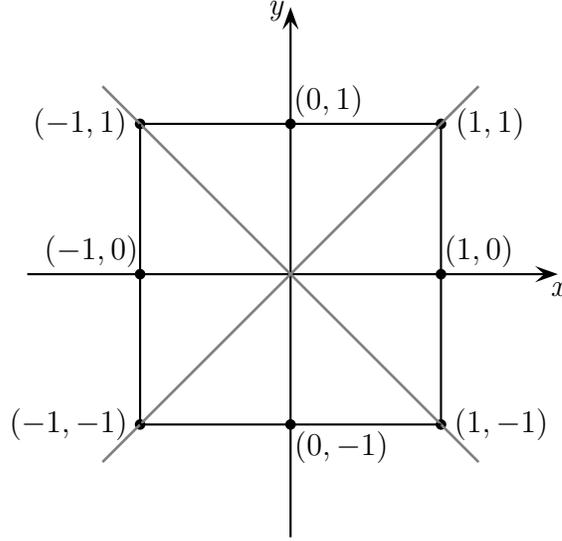
$$\mathbf{R}_1 : \quad \Phi \cap \ll u \gg = \{u, -u\}, \quad \forall u \in \Phi.$$

$$\mathbf{R}_2 : \quad s_u(\Phi) = \Phi, \quad \forall u \in \Phi.$$

Se dice que  $\Phi$  es un **sistema de raíces cristalográfico** si satisface la condición adicional:

$$\mathbf{R}_3: \quad 2\frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \in \mathbb{Z}, \quad \forall u, v \in \Phi.$$

EJEMPLO 1. El conjunto de vectores que se muestran en la siguiente grafica, el cual denotaremos por  $\Phi$ , representa un sistema de raíces en  $\mathbb{R}^2$ , pues satisface claramente las condiciones  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$



Es decir, el sistema de raíces está dado por:

$$\Phi = \{(0, 1), (1, 1), (1, 0), (1, -1), (0, -1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1)\}$$

Además, este sistema cumple la condición  $\mathbf{R}_3$ , por lo cual es un sistema de raíces cristalográfico.

## 2. Sistemas Positivos y Simples

DEFINICIÓN 26. Sea  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  una base ordenada de  $V$ .

La relación de **orden lexicográfico** en  $V$  se define por:

$$x \prec y \iff [(x = y) \vee (\exists k \in \{1, \dots, n\})(a_k < b_k \wedge ((\forall i < k)(a_i = b_i)))]],$$

donde  $x = \sum a_i z_i$ ,  $y = \sum b_i z_i$ . Esta es una relación de orden total.

PROPOSICIÓN 4. Dado un orden lexicográfico, entonces tenemos que:

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in V)(x \prec 0 \implies \alpha x \prec 0)$$

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}^-)(\forall x \in V)(x \prec 0 \implies 0 \prec \alpha x)$$

DEFINICIÓN 27. Dados un orden  $\prec$  en  $V$  y un sistema de raíces  $\Phi$ :

1. Se dice que  $\Phi^+$  es un **sistema positivo** de  $\Phi$ , si y sólo si,  $\Phi^+$  es el conjunto de todas las raíces positivas de  $\Phi$ . Es decir,

$$\Phi^+ = \{u \in \Phi \mid 0 \prec u\}$$

2. Decimos que  $\Phi^-$  es un **sistema negativo** de  $\Phi$ , si y sólo si  $\Phi^-$  es el conjunto de todas las raíces negativas de  $\Phi$ . En otras palabras,

$$\Phi^- = \{u \in \Phi \mid u \prec 0\}$$

OBSERVACIÓN 2. Como las raíces vienen en pares  $\{u, -u\}$ , una positiva y la otra negativa, según el orden lexicográfico. Entonces, el sistema de raíces  $\Phi$  es unión disjunta del sistema positivo  $\Phi^+$  y el sistema negativo  $\Phi^-$ , es decir,

$$\Phi = \Phi^+ \dot{\cup} \Phi^-$$

EJEMPLO 2. Sea  $\Phi$  el sistema del ejemplo 1 y consideremos el orden lexicográfico asociado a la base canónica. Los sistemas positivos y negativos están dados por:

$$\Phi^+ = \{(0, 1), (1, 1), (1, 0), (1, -1)\}$$

$$\Phi^- = \{(0, -1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1)\}$$

DEFINICIÓN 28. Sean  $\Phi$  un sistema de raíces y  $\Delta \subset \Phi$ .

Se dice que  $\Delta$  es un **sistema simple** si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones:

1.  $\Delta$  es linealmente independiente.
2. Todo elemento de  $\Phi^+$  se escribe como una combinación lineal de elementos de  $\Delta$ , con los escalares no negativos.

Los elementos en el sistema simple se llaman **raíces simples**.

EJEMPLO 3. Sea  $\Phi$  el sistema del ejemplo 1 y consideremos el orden lexicográfico asociado a la base canónica, entonces el sistema simple asociado de  $\Phi$  es:

$$\Delta = \{(0, 1), (1, -1)\}$$

PROPOSICIÓN 5. Dados un orden lexicográfico sobre  $V$  y un sistema de raíces  $\Phi$ , esto implica que existe un único  $\tilde{v} \in \Phi^+$  tal que, para todo  $u \in \Phi^+$ , se tiene que  $u \prec \tilde{v}$ . Este elemento se llama **raíz suprema**.

Además, para toda raíz positiva  $u$ , se tiene que  $\tilde{v} - u$  es suma de raíces simples. Esto es,

$$(\forall u \in \Phi^+) \left( \tilde{v} - u = \sum_{v \in \Delta} \lambda_v v \right)$$

DEFINICIÓN 29. Sean  $W \leq O(V)$  finito y  $\Phi$  un sistema de raíces.

Se dice que  $W$  es un **grupo de reflexiones**, si y sólo si

$$W = \langle\langle s_u \mid u \in \Phi \rangle\rangle$$

Además, si  $\Phi$  es un sistema de raíces cristalográfico entonces el grupo de reflexiones es llamado **grupo de Weyl**.

Estos son los grupos que nos interesan en el desarrollo de esta tesis.

TEOREMA 6. Sea  $W$  un grupo de reflexiones asociado a  $\Phi$  y  $\Delta$  un sistema simple en  $\Phi$ , entonces  $W$  está generado por reflexiones simples. De otro modo,

$$W = \langle\langle s_v \mid v \in \Delta \rangle\rangle$$

COROLARIO 7. Sea  $\Delta$  un sistema simple, entonces para todo  $u \in \Phi$  existe  $w \in W$  tal que  $wu \in \Delta$ . Es decir,

$$(\forall u \in \Phi)(\exists w \in W)(wu \in \Delta)$$

TEOREMA 8. Dado  $W$  un grupo de reflexiones finito, entonces

$$W = \langle S \mid R \rangle,$$

donde  $S$  es el conjunto de generadores dado por:

$$S = \{s_v \mid v \in \Delta\}$$

y sujetas a las siguientes relaciones,

$$R = \{(s_v s_{v'})^{m_{v,v'}} = e \mid v, v' \in \Delta, m_{v,v'} \in \mathbb{N}\}$$

con  $m_{v,v} = 1$  y si  $v \neq v'$  se tiene que  $m_{v,v'} \neq 1$ .

### 3. Grupos de Coxeter Finitos

DEFINICIÓN 30. Sea  $W$  un grupo finito.

Se dice que  $W$  es un **grupo de Coxeter finito**, si y sólo si, existe  $S \subset W$  tal que:

$$W = \langle\langle S \rangle\rangle$$

donde los elementos de  $S$  cumplen solamente las siguientes relaciones

$$(ss')^{m_{s,s'}} = e, \quad \forall s, s' \in S$$

$m_{s,s} = 1$  y  $m_{s,s'} \in \mathbb{N} - \{1\}$ . El par  $(W, S)$  se llama **sistema de Coxeter**.

PROPOSICIÓN 9. Todos los grupos de reflexiones finitos son grupos de Coxeter.

DEMOSTRACIÓN. Ver Teorema 26 en tesis de Roberto Medina de Grupos de Reflexiones finitos.  $\square$

DEFINICIÓN 31. Sea  $(W, S)$  un sistema de Coxeter.

Se define la función **largo** de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} l: W &\longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto l(w) = r, \end{aligned}$$

donde  $r$  es la menor cantidad de reflexiones simples, tal que  $w = s_1 s_2 \cdots s_r$ . Además,  $l(e) = 0$ .

PROPOSICIÓN 10 (Cancelación de Matsumoto).

Sean  $(W, S)$  un sistema de Coxeter y  $w \in W$ .

Si  $w = s_1 \cdots s_r$  y  $l(w) < r$ , entonces existen  $1 \leq i < j \leq r$  tal que:

$$w = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots \widehat{s}_j \cdots s_r$$

donde las reflexiones  $\widehat{s}_i$  y  $\widehat{s}_j$  han sido removidas de la expresión.

DEMOSTRACIÓN. Ver Teorema 22 en tesis de Roberto Medina de Grupos de Reflexiones finitos.  $\square$

## 4. Reticulados de Raíces y Coraíces

### 4.1. Coraíces.

DEFINICIÓN 32. Dado  $\Phi$  un sistema de raíces. Para cada  $u \in \Phi$ , se define la **coraíz** de  $u$  como,

$$\check{u} = \frac{2}{\langle u, u \rangle} u.$$

Denotaremos por  $\check{\Phi}$  el **conjunto de las coraíces**.

PROPOSICIÓN 11. Si  $\Phi$  es un sistema de raíces cristalográfico, entonces  $\check{\Phi}$  también es un sistema de raíces cristalográfico.

EJEMPLO 4. Sea  $\Phi$  el sistema del ejemplo 1 y consideremos el orden lexicográfico asociado a la base canónica, tenemos el sistema de raíces cristalográfico dado por:

$$\Phi = \{(0, 1), (1, 1), (1, 0), (1, -1), (0, -1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1)\}$$

Los elementos del sistema de coraíces están dados por:

$$\begin{aligned} (0, \check{1}) &= \frac{2}{\langle (0, 1), (0, 1) \rangle} (0, 1) = (0, 2) \\ (1, \check{1}) &= \frac{2}{\langle (1, 1), (1, 1) \rangle} (1, 1) = (1, 1) \\ (1, \check{0}) &= \frac{2}{\langle (1, 0), (1, 0) \rangle} (1, 0) = (2, 0) \\ (1, \check{-1}) &= \frac{2}{\langle (1, -1), (1, -1) \rangle} (1, -1) = (1, -1) \\ (0, \check{-1}) &= \frac{2}{\langle (0, -1), (0, -1) \rangle} (0, -1) = (0, -2) \\ (-1, \check{-1}) &= \frac{2}{\langle (-1, -1), (-1, -1) \rangle} (-1, -1) = (-1, -1) \\ (-1, \check{0}) &= \frac{2}{\langle (-1, 0), (-1, 0) \rangle} (-1, 0) = (-2, 0) \\ (-1, \check{1}) &= \frac{2}{\langle (-1, 1), (-1, 1) \rangle} (-1, 1) = (-1, 1) \end{aligned}$$

Así, el sistema de coraíces está dado por:

$$\check{\Phi} = \{(0, 2), (1, 1), (2, 0), (1, -1), (0, -2), (-1, -1), (-2, 0), (-1, 1)\}$$

**4.2. Reticulados.** Un reticulado  $\mathcal{L}$ , se define como un  $\mathbb{Z}$ -módulo libre en un espacio vectorial  $V$ , particularmente nos interesan en el desarrollo de esta tesis, los reticulados de raíces y coraíces.

DEFINICIÓN 33. Dado un sistema de raíces cristalográfico  $\Phi$ , el **reticulado de raíz**  $\mathcal{R}(\Phi)$  denotado simplemente por  $\mathcal{R}$ , es el conjunto de todas las combinaciones lineales enteras de los elementos de  $\Phi$ . Es decir,

$$\mathcal{R} = \sum_{u \in \Phi} \mathbb{Z}u$$

donde  $\mathbb{Z}u = \{nu \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

En particular, si consideramos el sistema de raíces  $\check{\Phi}$ , el **reticulado de coraíces**  $\mathcal{R}(\check{\Phi})$  el cual lo denotamos por  $\check{\mathcal{R}}$  está dado de la siguiente manera:

$$\check{\mathcal{R}} = \sum_{u \in \check{\Phi}} \mathbb{Z}u$$

LEMA 12. Sea  $\Phi$  un sistema de raíces cristalográfico y  $\Delta = \{v_1, \dots, v_n\}$  un sistema simple en  $\Phi$ , entonces

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}v_i$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{L} = \bigoplus_{v_i \in \Delta} \mathbb{Z}v_i$ , claramente  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$ .

Para la otra contención ( $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ ), observemos que  $\mathcal{L}$  es  $W$ -invariante, pues

$$s_{v_i}(v_j) = v_j - 2 \frac{\langle v_j, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i \in \mathcal{L}$$

Luego,

$$(\forall w \in W)(w(\mathcal{L}) = \mathcal{L})$$

Además, por el corolario 7, dado  $u \in \Phi$  existe  $w \in W$  tal que

$$w(v_i) = u, \text{ para algún } v_i \in \Delta$$

De lo cual obtenemos que,

$$(\forall u \in \Phi)(u = w(v_i) \in w(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L})$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$$

□

DEFINICIÓN 34. Se define el **reticulado de peso** de  $\Phi$  como el conjunto:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \mathcal{P}(\Phi) &:= \left\{ z \in V \mid 2 \frac{\langle u, z \rangle}{\langle u, u \rangle} \in \mathbb{Z}, \forall u \in \Phi \right\} \\ &:= \left\{ z \in V \mid \langle \check{u}, z \rangle \in \mathbb{Z}, \forall u \in \check{\Phi} \right\} \end{aligned}$$

De la misma forma el **reticulado de copeso** de  $\check{\Phi}$  esta dado por:

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\check{\Phi}) &:= \left\{ z \in V \mid 2 \frac{\langle \check{u}, z \rangle}{\langle \check{u}, \check{u} \rangle} \in \mathbb{Z}, \forall \check{u} \in \check{\Phi} \right\} \\ &:= \{ z \in V \mid \langle u, z \rangle \in \mathbb{Z}, \forall u \in \Phi \}\end{aligned}$$

LEMA 13. Sea  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  base dual del sistema simple  $\Delta = \{v_1, \dots, v_n\}$ , es decir,  $\langle \bar{v}_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ , entonces se tiene que,

$$\check{\mathcal{P}} = \mathbb{Z}\bar{v}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\bar{v}_n$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  es una base de  $V$  construimos,

$$\Upsilon = \mathbb{Z}\bar{v}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\bar{v}_n$$

y demostremos que  $\check{\mathcal{P}} = \Upsilon$ .

Dado  $z \in \Upsilon$ , esto implica que,

$$\langle z, v_j \rangle \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } v_j \in \Delta.$$

De esta manera,  $z \in \check{\mathcal{P}}$ .

En el otro sentido: Sea  $z \in \check{\mathcal{P}}$ , entonces  $z$  se escribe en combinación lineal de  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ , es decir

$$z = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{v}_i, \text{ donde } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Por la definición de  $\check{\mathcal{P}}$  se tiene que,

$$\langle z, v_j \rangle \in \mathbb{Z}, \text{ con } v_j \in \Delta.$$

Con lo cual se obtiene que  $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ , para todo  $j$ .

Luego,

$$z = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{v}_i, \text{ donde } \lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto,  $z \in \Upsilon$ . □

LEMA 14. El grupo  $W$  permuta los elementos del sistema de coraíces  $\check{\Phi}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\check{u} \in \check{\Phi}$  y  $w \in W$ , entonces

$$\begin{aligned} w(\check{u}) &= w\left(\frac{2u}{\langle u, u \rangle}\right) \\ &= \frac{2wu}{\langle u, u \rangle} \\ &= \frac{2wu}{\langle wu, wu \rangle} \\ &= (\check{wu}) \end{aligned}$$

De este modo,  $W$  permuta los elementos de  $\check{\Phi}$ . □

OBSERVACIÓN 3. Notemos que, por el lema anterior, si  $z \in \check{\mathcal{R}}$ , entonces  $wz \in \check{\mathcal{R}}$ .

PROPOSICIÓN 15. Sean  $\check{\mathcal{P}}$  el copeso de reticulado y  $\check{\mathcal{R}}$  el reticulado de coraíces, entonces,  $\check{\mathcal{R}} \subseteq \check{\mathcal{P}}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z \in \check{\mathcal{R}}$ , esto quiere decir que,

$$z = \sum_i \lambda_i \check{u}_i$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle z, u \rangle &= \left\langle \sum_i \lambda_i \check{u}_i, u \right\rangle \\ &= \sum_i \lambda_i \langle \check{u}_i, u \rangle \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

y como  $\Phi$  es un sistema de raíces cristalográfico, tenemos

$$\langle \check{u}_i, u \rangle = \frac{2\langle u_i, u \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto,  $z \in \check{\mathcal{P}}$ . □

Análogamente notemos que,

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$$

## 5. Grafos de Coxeter

DEFINICIÓN 35. Sean  $(W, S)$  un sistema de Coxeter, entonces el **grafo de Coxeter** etiquetado es el grafo dado por:

1. El conjunto de vértices es  $S$ .
2. Si  $m(s, s') = 2$ , entonces no hay arista entre  $s$  y  $s'$ , donde  $s, s' \in S$ .
3. Si  $m(s, s') = 3$ , entonces la arista entre  $s$  y  $s'$  no tiene etiqueta.
4. Si  $m(s, s') > 3$ , entonces la arista entre  $s$  y  $s'$  es etiquetado con  $m(s, s')$ .

PROPOSICIÓN 16. Sea  $X$  un grafo de Coxeter, entonces el grafo satisface las siguientes condiciones:

1. Un vértice pertenece a lo más a tres aristas.
2. Un vértice pertenece a tres aristas sólo si todas las aristas tienen etiqueta igual a 3.
3. Un vértice pertenece a lo más a una arista de etiqueta mayor ó igual a 4.
4. Existe una arista de etiqueta mayor ó igual a 6 sólo si  $X$  tiene dos vértices.

DEMOSTRACIÓN. Ver Lema 41 en tesis de Roberto Medina de Grupos de Reflexiones finitos.  $\square$

DEFINICIÓN 36. Se dice que el sistema de Coxeter  $(W, S)$  es **irreducible** si dados dos puntos en el grafo de Coxeter existe un camino que los une.

EJEMPLO 5. Describir el grafo de Coxeter de tipo  $(A_n, n \geq 1)$ .

SOLUCIÓN 5. Consideremos el espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la base canónica  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ . Sabemos que su sistema de raíces esta dado por:

$$\Phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j, 0 \leq i, j \leq n\}$$

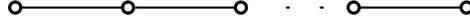
y el sistema simple asociado a  $\Phi$  es:

$$\Delta = \{e_1 - e_2, \dots, e_n - e_{n+1}\}$$

En este caso, denotemos por  $s_i = s_{e_i - e_{i+1}}$  las reflexiones simples, que cumplen con:

1.  $(s_i)^2 = Id$ , para  $0 < i < n$ .
2.  $m(s_i, s_{i+1}) = 3$ .
3.  $m(s_i, s_j) = 2$ , si  $|i - j| > 2$ .

Con lo cual su grafo de Coxeter es,



Para la demostración de cada una de estas relaciones  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

1. Sea  $e_i - e_{i+1} \in \Delta$ , donde  $0 < i < n$ . Luego,

$$\begin{aligned} s_i(x) &= x - \langle x, e_i - e_{i+1} \rangle (e_i - e_{i+1}) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Claramente  $(s_i)^2(x) = Id$ .

2. Sean  $e_i - e_{i+1}, e_{i+1} - e_{i+2} \in \Delta$ , para  $0 < i < n - 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (s_i s_{i+1})(x) &= s_i(s_{i+1}(x)) \\ &= s_i(x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, x_{i+1}, x_{i+3}, \dots, x_{n+1}) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+2}, x_i, x_{i+1}, x_{i+3}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

De esta manera,

$$(s_i s_{i+1})^2(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, x_i, x_{i+3}, \dots, x_{n+1})$$

Concluyendo obtenemos que,

$$(s_i s_{i+1})^3(x) = x$$

3. Supongamos que  $|i - j| > 2$ , entonces  $s_i$  y  $s_j$  actúan sobre diferentes coordenadas sin relacionarse entre ellas.

En otras palabras,  $(s_i s_j)^2 = Id$ .

Así hemos demostrado las relaciones anteriormente dadas.

EJEMPLO 6. Realizar el grafo de Coxeter de tipo  $(B_n, n \geq 2)$ .

SOLUCIÓN 6. Para comenzar consideremos la base canónica  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

El sistema de raíces está determinado por:

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{\pm e_i\}$$

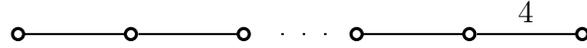
y su sistema simple es:

$$\Delta = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n\}$$

Donde las reflexiones simples denotadas por  $s_i = s_{e_i - e_{i+1}}$ ;  $s_n = s_{e_n}$  satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $(s_i)^2 = Id$ , para  $0 < i \leq n$ .
2.  $m(s_i, s_{i+1}) = 3$ .
3.  $m(s_i, s_j) = 2$ , si  $|i - j| > 2$ .
4.  $m(s_{n-1}, s_n) = 4$ .

De esta manera el grafo de Coxeter está descrito por:



Para la demostración de estas relaciones  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Sea  $e_i - e_{i+1} \in \Delta$ , donde  $0 < i < n$ . Luego,

$$\begin{aligned}
 s_i(x) &= x - \langle x, e_i - e_{i+1} \rangle (e_i - e_{i+1}) \\
 &= (x_1, \dots, x_n) - (x_i - x_{i+1})(e_i - e_{i+1}) \\
 &= (x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - (0, \dots, x_i - x_{i+1}, x_{i+1} - x_i, \dots, 0) \\
 &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

Claramente  $(s_i)^2(x) = Id$ . Además,

$$\begin{aligned}
 s_n(x) &= x - \langle x, e_n \rangle 2e_n \\
 &= (x_1, \dots, x_n) - (0, \dots, 2x_n) \\
 &= (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)
 \end{aligned}$$

De esta forma se observa que  $(s_n)^2(x) = Id$ .

2. Sean  $e_i - e_{i+1}, e_{i+1} - e_{i+2} \in \Delta$ , para  $0 \leq i < n - 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 (s_i s_{i+1})(x) &= s_i(s_{i+1}(x)) \\
 &= s_i(x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, x_{i+1}, x_{i+3}, \dots, x_n) \\
 &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+2}, x_i, x_{i+1}, x_{i+3}, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 (s_i s_{i+1})^2(x) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, x_i, x_{i+3}, \dots, x_n) \\
 (s_i s_{i+1})^3(x) &= x
 \end{aligned}$$

3. Si  $|i - j| > 2$ , entonces se tiene que  $s_i$  y  $s_j$  actúan sobre diferentes coordenadas haciendo que estas reflexiones conmuten.

Es decir,  $(s_i s_j)^2 = Id$ .

4. Sean  $e_{n-1} - e_n, e_n \in \Delta$ . Calculando tenemos que,

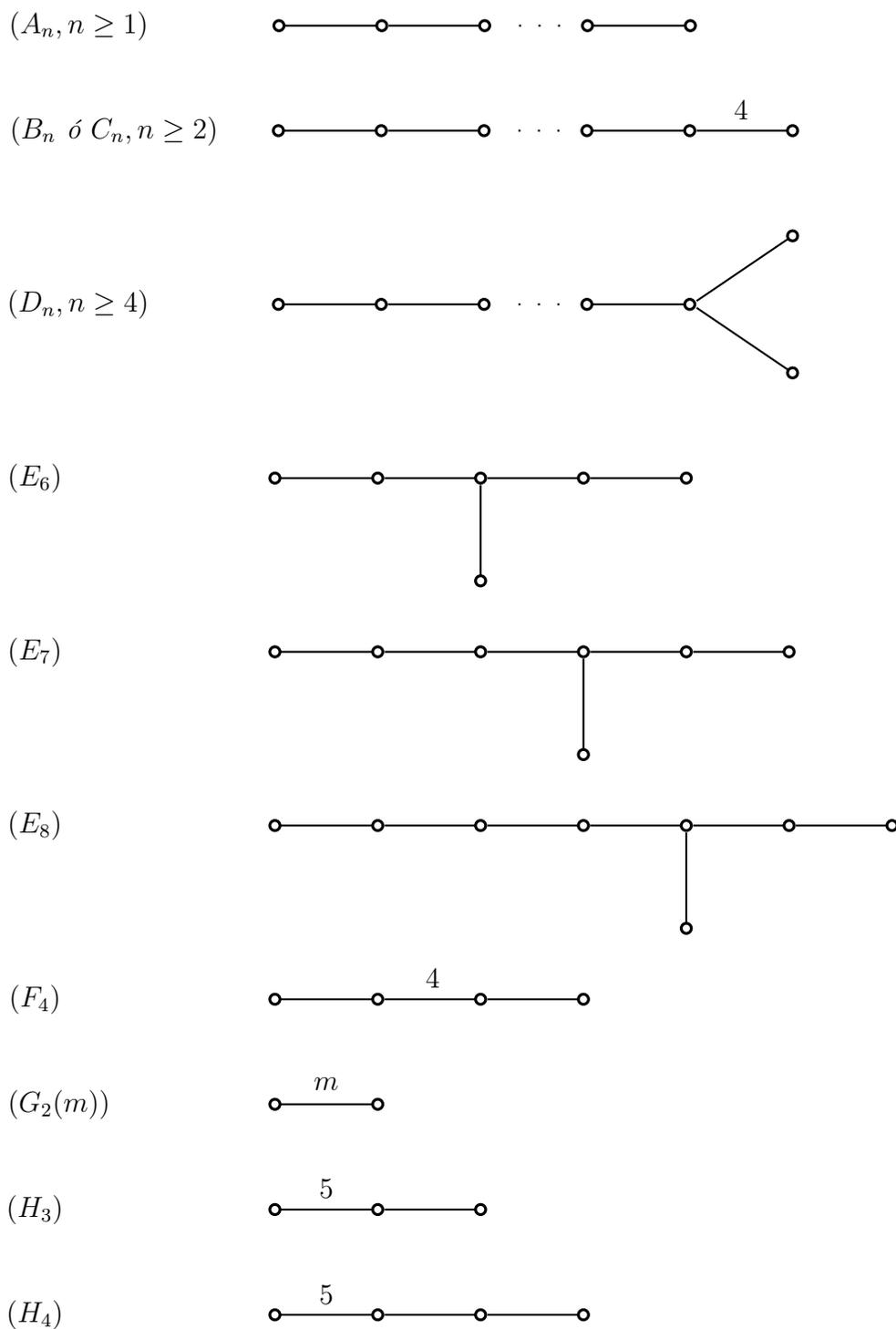
$$\begin{aligned}
 (s_{n-1} s_n)(x) &= s_{n-1}(s_n(x)) \\
 &= s_{n-1}(x - \langle x, e_n \rangle 2e_n) \\
 &= s_{n-1}(x - (x_n) 2e_n) \\
 &= s_{n-1}((x_1, \dots, x_n) - (0, \dots, 2x_n)) \\
 &= s_{n-1}(x_1, \dots, -x_n) \\
 &= (x_1, \dots, x_{n-2}, -x_n, x_{n-1})
 \end{aligned}$$

Por lo cual se obtienen los siguientes resultados,

$$\begin{aligned}
 (s_{n-1} s_n)^2(x) &= (x_1, \dots, -x_{n-1}, -x_n) \\
 (s_{n-1} s_n)^3(x) &= (x_1, \dots, x_n, -x_{n-1}) \\
 (s_{n-1} s_n)^4(x) &= x
 \end{aligned}$$

De esta forma concluimos la demostración de estas condiciones.

TEOREMA 17. Si  $(W, S)$  es un sistema de Coxeter finito irreducible, entonces su grafo de Coxeter es uno de los siguientes:



## Capítulo 3

### Grupo de Reflexiones Afines

Para el desarrollo de este capítulo denotaremos por  $W$  un grupo de Weyl y comenzaremos estudiando la estructura del grupo afín, definiendo los conceptos de hiperplanos y reflexiones afines, determinando la interrelación entre ellos y la importancia que tienen para demostrar que el grupo de Weyl afín actúa transitivamente sobre las cámaras.

PROPOSICIÓN 18. *El conjugado de una traslación por transformaciones lineales es una traslación. Es decir,*

$$(\forall g \in GL(V))(\forall x \in V)(gt_xg^{-1} = t_{gx})$$

DEMOSTRACIÓN. Para todo  $y \in V$  tenemos que,

$$\begin{aligned}(gt_xg^{-1})(y) &= (gt_x)(g^{-1}(y)) \\ &= g(t_x(g^{-1}(y))) \\ &= g(g^{-1}(y) + x) \\ &= y + g(x) \\ &= t_{gx}(y)\end{aligned}$$

□

Lo cual demuestra que  $GL(V)$  está contenido en el normalizador de las traslaciones.

DEFINICIÓN 37. *El **grupo afín** que es denotado por  $Aff(V)$  es el producto semidirecto del grupo general lineal y el grupo de traslaciones de  $V$ . De otra forma,*

$$Aff(V) = T(V) \rtimes GL(V) \leq Biy(V)$$

## 1. Hiperplanos Afines

DEFINICIÓN 38. Para cada  $z \in V - \{0\}$  y  $k \in \mathbb{Z}$  un **hiperplano afín** se define por:

$$H_{z,k} := \{y \in V \mid \langle y, z \rangle = k\}$$

Nos interesa solamente el caso  $z \in \Phi$ .

PROPOSICIÓN 19. Sean  $u \in \Phi$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Entonces para los hiperplanos afines se tiene lo siguiente:

1.  $H_{u,k} = H_{-u,-k}$
2.  $H_{u,0} = H_u$
3.  $H_{u,k}$  puede ser obtenido trasladando  $H_u$  por  $\frac{k}{2}\check{u}$

donde  $H_u$  es el hiperplano ortogonal al espacio generado por  $u$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $u \in \Phi$  y  $k \in \mathbb{Z}$ .

La demostración de estas igualdades las haremos por contenciones.

1. Consideremos  $z \in H_{u,k}$  lo cual implica que  $\langle z, u \rangle = k$ . Ahora veamos si  $z$  se encuentra en el hiperplano  $H_{-u,-k}$ . Para ello observemos que,

$$\langle z, -u \rangle = -\langle z, u \rangle = -k$$

Con lo cual  $z \in H_{-u,-k}$ .

Dado  $z \in H_{-u,-k}$ , entonces  $\langle z, -u \rangle = -k$ . Para demostrar que  $z$  pertenece al hiperplano  $H_{u,k}$ , notemos lo siguiente,

$$\langle z, u \rangle = -\langle z, -u \rangle = -(-k) = k$$

Así,  $z \in H_{u,k}$

2. Su demostración es inmediata, pues,

$$H_{u,0} = \{z \in V \mid \langle z, u \rangle = 0\} = H_u$$

3. Dado  $z \in H_u$ , luego  $\langle z, u \rangle = 0$ . Debemos verificar que  $z$  trasladado por  $\frac{k}{2}\check{u}$  se encuentra en el hiperplano  $H_{u,k}$ . Para ello calculemos,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{k}{2}\check{u} + z, u \right\rangle &= \frac{k}{2}\langle \check{u}, u \rangle + \langle z, u \rangle, \text{ pero } \langle z, u \rangle = 0 \\ &= \frac{k}{2} \left\langle \frac{2}{\langle u, u \rangle} u, u \right\rangle \\ &= \frac{k}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle \\ &= k \end{aligned}$$

Por lo tanto  $z \in H_{u,k}$ .

Ahora consideremos  $z \in H_{u,k}$ , es decir  $\langle z, u \rangle = k$ , y por lo anterior tenemos que,

$$\frac{k}{2}\langle \check{u}, u \rangle = k$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} \langle z, u \rangle &= \frac{k}{2}\langle \check{u}, u \rangle \\ \langle z, u \rangle - \frac{k}{2}\langle \check{u}, u \rangle &= 0 \\ \left\langle z - \frac{k}{2}\check{u}, u \right\rangle &= 0 \\ \langle t_{-\frac{k}{2}\check{u}}(z), u \rangle &= 0 \end{aligned}$$

De esta manera  $t_{-\frac{k}{2}\check{u}}(z) \in H_u$ , luego tenemos que  $z \in t_{\frac{k}{2}\check{u}}(H_u)$ .

□

## 2. Reflexiones Afines

DEFINICIÓN 39. Para  $u \in \Phi$  y  $k \in \mathbb{Z}$  una **reflexión afín** se define:

$$s_{u,k}(z) := z - (\langle z, u \rangle - k)\check{u}, \text{ con } z \in V.$$

PROPOSICIÓN 20. Sean  $u \in \Phi$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Las reflexiones afines cumplen con las siguientes propiedades:

1.  $s_{u,0} = s_u$ .
2.  $s_{u,k}(\vec{0}) = k\check{u}$ .
3.  $t_{k\check{u}} \circ s_u = s_{u,k}$ .
4. La reflexión  $s_{u,k}$  fija el hiperplano  $H_{u,k}$  punto por punto.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $u \in \Phi$  y  $k \in \mathbb{Z}$ .

1. Sea  $z \in V$  entonces,

$$\begin{aligned} s_{u,0}(z) &= z - (\langle z, u \rangle - 0)\check{u} \\ &= z - \langle z, u \rangle \check{u} \\ &= z - 2 \frac{\langle z, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \\ &= s_u(z) \end{aligned}$$

2. Denotemos por  $0 = \vec{0}$ ,

$$\begin{aligned} s_{u,k}(0) &= 0 - (\langle 0, u \rangle - k)\check{u} \\ &= -(-k)\check{u} \\ &= k\check{u} \end{aligned}$$

3. Dado  $z \in V$ . Sabemos que,

$$s_u(z) = z - 2 \frac{\langle z, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = z - \langle z, u \rangle \check{u}$$

Luego, trasladando esta reflexión por  $t_{k\check{u}}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} t_{k\check{u}}(s_u(z)) &= t_{k\check{u}}(z - \langle z, u \rangle \check{u}) \\ &= z - \langle z, u \rangle \check{u} + k\check{u} \\ &= z - (\langle z, u \rangle - k)\check{u} \\ &= s_{u,k}(z) \end{aligned}$$

4. Debemos demostrar que,

$$(\forall z \in H_{u,k})(s_{u,k}(z) = z)$$

Sea  $z \in H_{u,k}$  entonces  $\langle z, u \rangle = k$ . Calculando se tiene,

$$\begin{aligned} s_{u,k}(z) &= z - (\langle z, u \rangle - k)\check{u} \\ &= z - (k - k)\check{u} \\ &= z \end{aligned}$$

De esta manera, todos los puntos del hiperplano  $H_{u,k}$  son fijos por  $s_{u,k}$ .

□

NOTACIÓN 3. Sea  $H_{u,k}$  el hiperplano fijo por la reflexión afín  $s_{u,k}$ . Denotemos  $H_{u,k}$  por  $H_s$ , en caso que no induzca error omitiendo la raíz  $u$  y el entero  $k$ .

Además se define  $\mathcal{H}$  como la colección de hiperplanos afines asociado a las reflexiones afines, es decir

$$\mathcal{H} = \{H_{u,k} \mid u \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}$$

PROPOSICIÓN 21. Sean  $u \in \Phi$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces para  $w \in W$  tenemos que:

1.  $ws_{u,k}w^{-1} = s_{wu,k}$
2.  $s_us_{u,1}s_{u,-k} = s_{u,-(k+1)}$
3.  $s_{u,1}s_us_{u,n+1} = s_{u,n+2}$

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea  $z \in V$ . Luego,

$$\begin{aligned} (ws_{u,k}w^{-1})(z) &= (ws_{u,k})(w^{-1}z) \\ &= w(s_{u,k}(w^{-1}z)) \\ &= w(w^{-1}z - (\langle w^{-1}z, u \rangle - k)\check{u}) \\ &= z - (\langle w^{-1}z, u \rangle - k)w\check{u} \\ &= z - \langle w^{-1}z, u \rangle - k \frac{2}{\langle u, u \rangle}wu \\ &= z - (\langle z, wu \rangle - k) \frac{2}{\langle wu, wu \rangle}wu \\ &= z - (\langle z, wu \rangle - k)(\check{w}u) \\ &= s_{wu,k}(z) \end{aligned}$$

2. Sea  $z \in V$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (s_us_{u,1}s_{u,-k})(z) &= (s_us_{u,1})(s_{u,-k}(z)) \\ &= (s_us_{u,1})(z - (\langle z, u \rangle + k)\check{u}) \\ &= (s_u)(s_{u,1}(z - (\langle z, u \rangle + k)\check{u})) \\ &= s_u(z - (\langle z, u \rangle + k)\check{u} - (\langle z - (\langle z, u \rangle + k)\check{u}, u \rangle - 1)\check{u}) \\ &= s_u(z - \langle z, u \rangle\check{u} - k\check{u} - \langle z, u \rangle\check{u} + 2\langle z, u \rangle\check{u} + 2k\check{u} + \check{u}) \\ &= s_u(z + (k+1)\check{u}) \\ &= z + (k+1)\check{u} - (\langle z + (k+1)\check{u}, u \rangle)\check{u} \\ &= z + (k+1)\check{u} - \langle z, u \rangle\check{u} - 2(k+1)\check{u} \\ &= z - \langle z, u \rangle\check{u} - (k+1)\check{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s_u s_{u,1} s_{u,-k})(z) &= z - (\langle z, u \rangle + (k+1))\check{u} \\
&= s_{u,-(k+1)}(z)
\end{aligned}$$

3. Sea  $z \in V$ . Calculando se tiene que,

$$\begin{aligned}
&(s_{u,1} s_u s_{u,k+1})(z) \\
&= (s_{u,1} s_u (s_{u,k+1}(z))) \\
&= (s_{u,1} s_u)(z - (\langle z, u \rangle - (k+1))\check{u}) \\
&= (s_{u,1})(s_u(z - (\langle z, u \rangle - (k+1))\check{u})) \\
&= s_{u,1}(z - (\langle z, u \rangle - (k+1))\check{u} - (\langle z - (\langle z, u \rangle - (k+1))\check{u}, u \rangle)\check{u}) \\
&= s_{u,1}(z - \langle z, u \rangle\check{u} + (k+1)\check{u} - \langle z, u \rangle\check{u} + 2\langle z, u \rangle\check{u} - 2(k+1)\check{u}) \\
&= s_{u,1}(z - (k+1)\check{u}) \\
&= z - (k+1)\check{u} - (\langle z - (k+1)\check{u}, u \rangle - 1)\check{u} \\
&= z - (k+1)\check{u} - \langle z, u \rangle\check{u} + 2(k+1)\check{u} + \check{u} \\
&= z - \langle z, u \rangle\check{u} + (k+2)\check{u} \\
&= z - (\langle z, u \rangle - (k+2))\check{u} \\
&= s_{u,k+2}(z)
\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición demuestra, en los dos primeros items, como los elementos de  $W$  y las traslaciones actúan sobre  $\mathcal{H}$ , y luego de que manera actúan las traslaciones sobre las reflexiones afines.

PROPOSICIÓN 22. *Con las condiciones de la proposición anterior. Si  $x \in V$  es tal que  $\langle x, u \rangle \in \mathbb{Z}$ , entonces*

1.  $wH_{u,k} = H_{wu,k}$
2.  $t_x H_{u,k} = H_{u,k+\langle x,u \rangle}$
3.  $t_x s_{u,k} t_{-x} = s_{u,k+\langle x,u \rangle}$

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea  $z \in H_{u,k}$ , entonces  $\langle z, u \rangle = k$ . Veamos si  $wz$  se encuentra en el hiperplano  $H_{wu,k}$ . Para esto notemos que,

$$\langle wz, wu \rangle = \langle z, u \rangle = k$$

Por lo tanto,  $wH_{u,k} \subseteq H_{wu,k}$ .

En el otro sentido. Consideremos  $z \in H_{wu,k}$  esto es  $\langle z, wu \rangle = k$ . Observemos que,

$$\langle w^{-1}z, u \rangle = \langle z, wu \rangle = k$$

Así,  $w^{-1}z \in H_{u,k}$  lo cual implica que  $z \in wH_{u,k}$ .

2. Sea  $z \in H_{u,k}$ , esto nos dice que  $\langle z, u \rangle = k$

Veamos si  $z$  trasladado por  $x$  se encuentra en  $H_{u,k+\langle x,u \rangle}$ . Para ello realizaremos el siguiente cálculo,

$$\begin{aligned} \langle t_x(z), u \rangle &= \langle z + x, u \rangle \\ &= \langle z, u \rangle + \langle x, u \rangle \\ &= k + \langle x, u \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $t_x H_{u,k} \subseteq H_{u,k+\langle x,u \rangle}$

En la otra contención. Sea  $z \in H_{u,k+\langle x,u \rangle}$  entonces  $\langle z, u \rangle = k + \langle x, u \rangle$ .

Luego,

$$\begin{aligned} \langle z, u \rangle - \langle x, u \rangle &= k \\ \langle z - x, u \rangle &= k \end{aligned}$$

De esta manera  $t_{-x}(z) \in H_{u,k}$  lo cual demuestra que  $z \in t_x H_{u,k}$ .

3. Sea  $z \in V$ , entonces

$$\begin{aligned} (t_x s_{u,k} t_{-x})(z) &= (t_x s_{u,k})(t_{-x}(z)) \\ &= t_x(s_{u,k}(z - x)) \\ &= t_x[(z - x) - (\langle z - x, u \rangle - k)\check{u}] \\ &= x + (z - x) - (\langle z, u \rangle - \langle x, u \rangle - k)\check{u} \\ &= z - (\langle z, u \rangle - (k + \langle x, u \rangle))\check{u} \\ &= s_{u,k+\langle x,u \rangle}(z) \end{aligned}$$

□

### 3. Grupos de Weyl Afines

En esta sección definiremos los grupos de Weyl afines y los grupos de Weyl afines extendidos. Además, determinaremos el grupo de Weyl afín de tipo  $\widetilde{A}_1$ .

DEFINICIÓN 40. Sea  $\Phi$  un sistema de raíces cristalográfico.

Se define el **grupo de Weyl Afín**  $W_a$  al subgrupo de  $\text{Aff}(V)$  generado por todas las reflexiones afines  $s_{u,k}$ , con  $u \in \Phi$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Es decir,

$$W_a = \langle\langle s_{u,k} \mid u \in \Phi, k \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$$

**3.1. Grupo de Weyl Afín de Tipo  $\widetilde{A}_1$ .** Sea  $W$  el grupo de Coxeter del tipo  $A_1$  dado en el teorema 17 y  $\Phi$  su sistema de raíces. El grupo de Weyl afín del tipo  $\widetilde{A}_1$  es

$$W_a = \langle\langle s_{u,k} \mid u \in \Phi, k \in \mathbb{Z} \rangle\rangle$$

Entonces el grupo Afín  $W_a$  es generado por  $s_u$  y  $s_{u,1}$  con  $u \in \Phi$ , sujeto a las relaciones obvias. De otra forma,

$$W_a = \langle\langle s_u, s_{u,1} \mid (s_u)^2 = (s_{u,1})^2 = 1, u \in \Phi \rangle\rangle$$

LEMA 23. Sean  $A = s_u s_{u,1}$  y  $B = s_{u,1} s_u$ . Entonces,

1.  $(\forall n \in \mathbb{N})(A^n s_u = s_{u,-n})$
2.  $(\forall n \in \mathbb{N})(B^n s_{u,1} = s_{u,n+1})$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $u \in \Phi$ .

1. Definamos  $p(n) : A^n s_u = s_{u,-n}$  y procedamos por inducción sobre  $n$ . Se obtiene fácilmente que  $p(0) : s_u = s_u$  es verdadera.

En la segunda parte de la inducción, supongamos que  $p(n)$  es verdadera y demostremos  $p(n+1) : A^{n+1} s_u = s_{u,-(n+1)}$ . Para esto se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} A^{n+1} s_u &= A(A^n s_u) \\ &= A s_{u,-n} \\ &= s_u s_{u,1} s_{u,-n} \\ &= s_{u,-(n+1)} \end{aligned}$$

Para justificar la última igualdad consideremos la segunda parte proposición 21.

Entonces por inducción se cumple que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(A^n s_u = s_{u,-n})$$

2. Sea  $p(n) : B^n s_{u,1} = s_{u,n+1}$  y procedamos por inducción sobre  $n$ . Claramente  $p(0) : s_{u,1} = s_{u,1}$  es verdadera.

Supongamos que  $p(n)$  es verdadera y demostremos

$$p(n+1) : B^{n+1}s_{u,1} = s_{u,n+2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} B^{n+1}s_{u,1} &= B(B^n s_{u,1}) \\ &= Bs_{u,n+1} \\ &= s_{u,1}s_u s_{u,n+1} \\ &= s_{u,n+2} \end{aligned}$$

Para la justificación de la última igualdad observemos la tercera parte de la proposición 21.

De esta forma:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(B^n s_{u,1} = s_{u,n+1})$$

□

Observemos que por la primera parte del lema anterior tenemos que,

$$\{s_{u,k} \mid u \in \Phi, k \in \mathbb{Z}_o^-\} \subseteq \ll s_u, s_{u,1} \mid (s_u)^2 = (s_{u,1})^2 = 1, u \in \Phi \gg$$

Por otro lado, la segunda parte del mismo lema nos muestra que,

$$\{s_{u,k} \mid u \in \Phi, k \in \mathbb{Z}^+\} \subseteq \ll s_u, s_{u,1} \mid (s_u)^2 = (s_{u,1})^2 = 1, u \in \Phi \gg$$

Así,

$$\ll s_{u,k} \mid u \in \Phi, k \in \mathbb{Z} \gg = \ll s_u, s_{u,1} \mid (s_u)^2 = (s_{u,1})^2 = 1, u \in \Phi \gg$$

Además el grupo  $W_a$  es llamado grupo diedral infinito, denotado por  $D_\infty$ .

### 3.2. Estructura de Grupos de Weyl Afines.

PROPOSICIÓN 24. Sean  $\check{\Phi}$  un sistema de raíces cristalográfico,  $\check{\mathcal{R}}$  su correspondiente reticulado de coraíces y  $\check{\mathcal{P}}$  el reticulado del copeso, entonces todo reticulado  $\mathcal{L}$  tal que  $\check{\mathcal{R}} \subset \mathcal{L} \subset \check{\mathcal{P}}$  es  $W$ -invariante.

DEMOSTRACIÓN. Basta con demostrar que todo elemento de  $W$  actúa trivialmente sobre el cociente de reticulados  $\check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}}$ . Pero el grupo  $W$  es generado por reflexiones, por ello nos concentramos en mirar como actúan las reflexiones de  $W$ .

Sea  $z \in \check{\mathcal{P}}$  y  $s_v$  una reflexión en  $W$ , entonces:

$$s_v(z) = z - 2 \frac{\langle z, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = z - \langle z, v \rangle \check{v}$$

Como  $z \in \check{\mathcal{P}}$ , entonces  $\langle z, v \rangle \in \mathbb{Z}$ . Así,  $\langle z, v \rangle \check{v} \in \check{\mathcal{R}}$

Entonces  $s_v(z) \equiv z \pmod{\check{\mathcal{R}}}$

Luego, cada elemento de  $W$  actúa como la identidad en el grupo  $\check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}}$ .

Concluimos la demostración notando que  $\mathcal{L} \subset \check{\mathcal{P}}$  por lo cual todo reticulado  $\check{\mathcal{R}} \subset \mathcal{L} \subset \check{\mathcal{P}}$  es  $W$ -invariante.  $\square$

LEMA 25. *La traslación por todo elemento del reticulado de coraíces se encuentra en el grupo  $W_a$ . Es decir,*

$$(\forall z \in \check{\mathcal{R}})(t_z \in W_a)$$

DEMOSTRACIÓN. Es inmediata por la tercera parte de la proposición 20.  $\square$

PROPOSICIÓN 26. *El grupo  $W_a$  es el producto semidirecto de  $W$  y el grupo de traslaciones correspondiente al reticulado de coraíces  $\check{\mathcal{R}}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Debemos demostrar que  $W_a = T(\check{\mathcal{R}}) \rtimes W$

Donde  $T(\check{\mathcal{R}}) = \{t_z \mid z \in \check{\mathcal{R}}\}$

1. Claramente,  $T(\check{\mathcal{R}}) \cap W = \{e\}$ .
2.  $T(\check{\mathcal{R}})$  es normal en  $W$

Sea  $z \in \check{\mathcal{R}}$  y  $w \in W$ . Luego, por la proposición 18, tenemos que:

$$wt_z w^{-1} = t_{wz}, \text{ donde por observación 3, } wz \in \check{\mathcal{R}}.$$

3.  $W_a = T(\check{\mathcal{R}})W$

Para los generadores de  $W_a$  tenemos, por la proposición 20.3, que:

$$s_{u,k} = t_{k\check{u}} s_u \in W_a$$

y como  $W_a = \langle\langle s_{u,k} \rangle\rangle$ , entonces se tiene que todo los elementos se pueden escribir de la forma:

$$s_{u,k} = t_{k\check{u}} s_u$$

Por lo tanto,  $W_a = T(\check{\mathcal{R}}) \rtimes W$   $\square$

**3.3. Grupos de Weyl Afines Extendidos.** Sabemos por la proposición 24 que  $\check{\mathcal{P}}$  es  $W$ -invariante, luego el subgrupo de las traslaciones por elementos de  $\check{\mathcal{P}}$ , representado por  $T(\check{\mathcal{P}})$ , es normalizado por  $W$ . De este modo  $T(\check{\mathcal{P}}) \rtimes W$  es un subgrupo del grupo afín llamado grupo de Weyl Afín Extendido denotado por  $\widehat{W}_a$ , es decir,

$$\widehat{W}_a = T(\check{\mathcal{P}}) \rtimes W$$

LEMA 27. *El grupo de Weyl afín  $W_a$  es subgrupo normal del grupo de Weyl afín extendido  $\widehat{W}_a$ . Es decir,*

$$W_a \trianglelefteq \widehat{W}_a; \quad \widehat{W}_a/W_a \cong \check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}}$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar la contención, para ello, por la proposición 24, tenemos que  $T(\check{\mathcal{R}}) \subseteq T(\check{\mathcal{P}})$ , entonces  $W_a \subseteq \widehat{W}_a$ .

Además,  $T(\check{\mathcal{P}})$  es un grupo abeliano, por lo cual  $T(\check{\mathcal{R}})$  es normal en  $T(\check{\mathcal{P}})$ . Así,

$$W_a \trianglelefteq \widehat{W}_a$$

Además tenemos que,

$$\widehat{W}_a/W_a \cong T(\check{\mathcal{P}}) \rtimes W/T(\check{\mathcal{R}}) \rtimes W \cong T(\check{\mathcal{P}})/T(\check{\mathcal{R}}) \cong \check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}} \quad (1)$$

□

COROLARIO 28. *Sean  $w \in \widehat{W}_a$  y  $H_{u,k} \in \mathcal{H}$ , luego existen  $x \in \Phi$  y  $\ell \in \mathbb{Z}$  tal que:*

1.  $wH_{u,k} = H_{x,\ell}$
2.  $ws_{u,k}w^{-1} = s_{x,\ell}$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $w \in \widehat{W}_a$ , entonces:

$$\begin{aligned} w &= t_z w_1, \quad z \in \check{\mathcal{P}}, \quad w_1 \in W. \\ w^{-1} &= w_1^{-1} t_{-z}. \end{aligned}$$

1. Por las proposiciones anteriores ya tenemos que:

$$\begin{aligned} wH_{u,k} &= t_z w_1 H_{u,k} \\ &= t_z H_{w_1 u, k}, \quad \text{por la primera parte de la proposición 22} \\ &= H_{w_1 u, k + \langle z, w_1 u \rangle}, \quad \text{por la segunda parte de la proposición 22} \end{aligned}$$

2. Sabemos que,

$$\begin{aligned}
ws_{u,k}w^{-1} &= t_z w_1 s_{u,k} w_1^{-1} t_{-z} \\
&= t_z (w_1 s_{u,k} w_1^{-1}) t_{-z} \\
&= t_z s_{w_1 u, k} t_{-z}, \text{ por la primera parte de la proposición 21} \\
&= s_{w_1 u, k + \langle z, w_1 u \rangle}, \text{ por la tercera parte de la proposición 22}
\end{aligned}$$

De esta forma obtenemos que  $x = w_1 u$  y  $\ell = k + \langle z, w_1 u \rangle$ .

□

#### 4. Cámaras

En esta sección veremos como los grupos  $\widehat{W}_a$  y  $W_a$  actúan sobre la colección de componentes conexos en  $V^\circ = V - \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ .

DEFINICIÓN 41. Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de las componentes conexas de  $V^\circ$ , los elementos de  $\mathcal{A}$  se llaman **cámaras**.

Notemos que  $\widehat{W}_a$  permuta  $\mathcal{A}$ , pues los elementos de  $Aff(V)$ , actúan como homeomorfismo.

PROPOSICIÓN 29. Sea  $A$  una cámara, entonces para todo  $u \in \Phi^+$ , existe  $k_u \in \mathbb{Z}$  tal que:

$$A = \{z \in V \mid (\forall u \in \Phi^+)(k_u < \langle u, z \rangle < k_u + 1)\}$$

PROPOSICIÓN 30. La colección  $V^\circ$  es abierta en  $V$ .

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que los hiperplanos son cerrados, por ende la unión arbitraria de estos es cerrado, y como  $V^\circ$  es el complemento de esta unión, concluimos que es  $V^\circ$  abierto. □

DEFINICIÓN 42. Sean  $\Phi$  irreducible y  $\Delta$  un sistema simple en  $\Phi$ . La **cámara fundamental** es el conjunto:

$$A_\circ = \{z \in V \mid (\forall u \in \Phi^+)(0 < \langle z, u \rangle < 1)\}$$

PROPOSICIÓN 31. La cámara  $A_\circ$  es una componente conexa de  $V^\circ$ .

DEMOSTRACIÓN. Comencemos notando que  $A_\circ \subseteq V^\circ$ , pues dado  $x \in A_\circ$ , se tiene,

$$\langle x, u \rangle \notin \mathbb{Z}, \forall u \in \Phi^+$$

Por lo tanto,  $x \in V^\circ$ .

Ahora veremos que  $A_\circ$  es un conjunto convexo.

Sean  $x, y \in A_\circ$  y  $t \in [0, 1]$ . Probaremos que  $tx + (1 - t)y \in A_\circ$ . Para ello sea  $u \in \Phi^+$ ,

$$\langle tx + (1 - t)y, u \rangle = t\langle x, u \rangle + (1 - t)\langle y, u \rangle$$

como  $x, y \in A_\circ$  se tiene,

$$0 < t\langle x, u \rangle + (1 - t)\langle y, u \rangle$$

Por otra parte, supongamos que el  $\text{máx}\{\langle x, u \rangle, \langle y, u \rangle\} = x_0 < 1$ . Entonces,

$$t\langle x, u \rangle + (1 - t)\langle y, u \rangle \leq tx_0 + (1 - t)x_0 = x_0 < 1$$

Así,  $A_\circ$  es un conjunto convexo y por lo tanto conexo.

Ahora demostremos que  $A_\circ$  es una componente conexa. Como  $A_\circ$  es conexo existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $A_0 \subseteq A$ .

Sabemos que dada una cámara, existen  $k_u$  tal que:

$$A = \{z \in V \mid (\forall u \in \Phi^+)(k_u < \langle z, u \rangle < k_u + 1)\}$$

por lo tanto,  $k_u = 0$  para todo  $u \in \Phi^+$ , lo que demuestra la otra contención.

Así,  $A_\circ$  es una componente conexa de  $V^\circ$  □

*EJERCICIO 7. Las cámaras que forman los grupos de Weyl de tipo  $\widetilde{A}_2$  son triángulos equiláteros.*

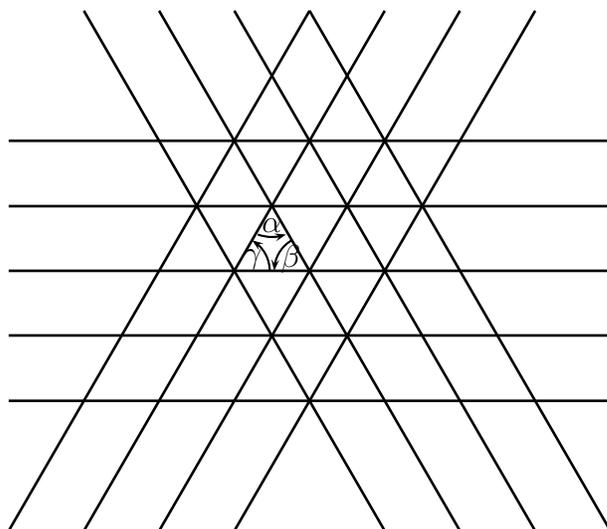
*SOLUCIÓN 7. El grupo  $A_2 = \langle\langle s_{v_1}, s_{v_2} \rangle\rangle$ , definido en el ejemplo 5, con  $n = 2$ , para este grupo tenemos que  $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$  y la raíz suprema es  $e_1 - e_3$ . Además, denotemos por  $v_i = e_i - e_{i+1}$  y  $v_3 = e_1 - e_3$ .*

*Notemos que*

$$\left| \frac{\langle v_i, v_j \rangle}{\|v_i\| \cdot \|v_j\|} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{con } i \neq j$$

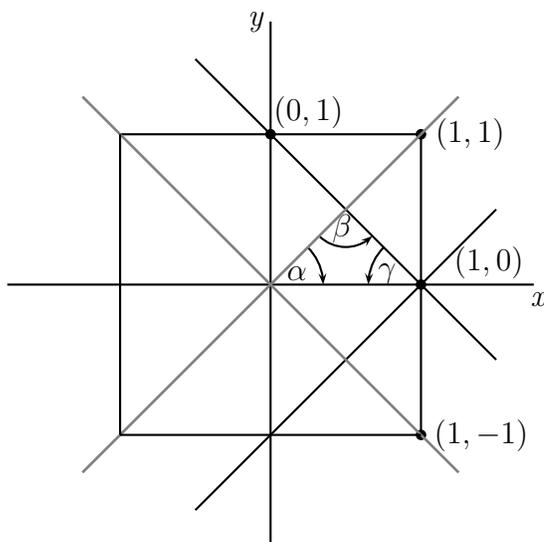
*luego los ángulos interiores de la cámara fundamental son  $\frac{\pi}{3}$ .*

*La cámara fundamental en el plano  $\langle v_1, v_2 \rangle$ , se representa de siguiente modo:*



EJERCICIO 8. Las cámaras asociadas con los grupos de Weyl de tipo  $\widetilde{B}_2$  son triángulos con ángulos  $\pi/2$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/4$ .

SOLUCIÓN 8. Con las mismas notaciones del ejemplo 1 obtenemos que las cámaras son de la siguiente forma:



Entonces,

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \beta = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \gamma = \frac{\pi}{4}$$

PROPOSICIÓN 32. Sea  $\tilde{v}$  la raíz suprema en términos de  $\Delta$ , entonces

$$A_o = \{z \in V \mid (\forall v \in \Delta)(\langle z, v \rangle > 0) \text{ y } \langle z, \tilde{v} \rangle < 1\}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos  $B_\circ$  de la siguiente manera,

$$B_\circ = \{z \in V \mid (\forall v \in \Delta)(\langle z, v \rangle > 0) \text{ y } \langle z, \tilde{v} \rangle < 1\}$$

Consideremos  $z \in A_\circ$ , claramente  $z \in B_\circ$ .

Para la otra contención. Sea  $z \in B_\circ$  y como todo elemento de  $\Phi^+$  se escribe en combinación lineal no negativa de elementos de  $\Delta$ ,

$$\langle z, u \rangle > 0, \forall u \in \Phi^+$$

Por otra parte, para todo  $u \in \Phi^+$ , se tiene que  $\tilde{v} - u$  es suma de raíces simples se tiene que,

$$\langle z, \tilde{v} - u \rangle \geq 0$$

$$\langle z, \tilde{v} \rangle - \langle z, u \rangle \geq 0$$

$$\langle z, u \rangle \leq \langle z, \tilde{v} \rangle$$

y sabemos que  $\langle z, \tilde{v} \rangle < 1$ , entonces  $z \in A_\circ$ .

Por lo tanto,  $A_\circ = B_\circ$ . □

OBSERVACIÓN 4. *Esto nos muestra que  $A_\circ$  es una intersección de semiespacios abiertos.*

DEFINICIÓN 43. *Las **paredes** de  $A_\circ$  son los hiperplanos  $H_v$ , con  $v \in \Delta$  y  $H_{\tilde{v},1}$ . Además definimos el conjunto de reflexiones asociados:*

$$S_a = \{s_v \mid v \in \Delta\} \cup \{s_{\tilde{v},1}\}$$

*También podemos definir paredes de  $wA_\circ$ , como las imágenes de estos hiperplanos bajo la acción de  $w$ ,  $\forall w \in W_a$ .*

PROPOSICIÓN 33. *El grupo  $W_a$  actúa sobre la colección  $\mathcal{A}$  de todas las cámaras transitivamente y es generado por el conjunto  $S_a$  de reflexiones asociado a las paredes de la cámara  $A_\circ$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $W'$  un subgrupo de  $W_a$  generado por  $S_a$ .

Como primera parte de la demostración probaremos que  $W'$  actúa sobre  $\mathcal{A}$  transitivamente. Para esto demostraremos que:

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\exists w \in W')(wA = A_\circ)$$

Fijemos dos elementos  $x \in A$  y  $y \in A_\circ$ .

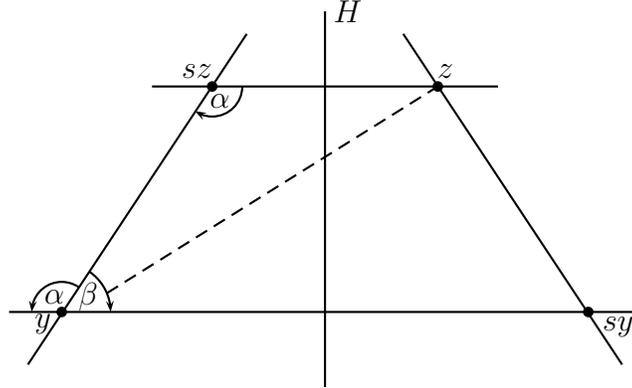
Como la órbita de  $x$  bajo el grupo de traslaciones de  $\check{\mathcal{R}}$  es un subconjunto discreto de  $V$  y  $W_a$  es una extensión del grupo finito  $W$  a través del producto semidirecto, la  $W_a$ -órbita y por supuesto la  $W'$ -órbita de  $x$  la cual denotaremos por:

$$O_x = \{wx \mid w \in W'\}$$

es un conjunto discreto en  $V$ , luego existe  $z \in O_x$  tal que:

$$d(z, y) = \min\{d(\delta, y) \mid \delta \in O_x\} \quad (2)$$

Supongamos que  $z \notin A_o$ . Entonces  $z$  e  $y$  se encuentran en diferentes semiespacios relativos a alguna pared  $H$  de  $A_o$ , y sea  $s$  la correspondiente reflexión que fija al hiperplano  $H$  ( $s \in S_a \subset W'$ ). Consideremos el trapecoide en  $V$  con vértices  $y, sy, z, sz$  que es dividido en dos partes por  $H$ . Usando la ley del coseno probaremos que el largo de una diagonal es mayor que el largo común de los dos lados no paralelos del trapecoide. Luego,



Sabemos que  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , es decir,  $\alpha = 180^\circ - \beta$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos(\pi - \beta) \\ &= \cos(\pi) \cos(\beta) + \sin(\pi) \sin(\beta) \\ &= -\cos(\beta) \end{aligned}$$

Por el teorema del coseno tenemos que,

$$\begin{aligned} \|y - z\|^2 &= \|sz - z\|^2 + \|sz - y\|^2 - 2\|sz - z\|\|sz - y\| \cos(\alpha) \\ &= \|sz - z\|^2 + \|sz - y\|^2 + 2\|sz - z\|\|sz - y\| \cos(\beta) \end{aligned}$$

Observemos que  $0 < \cos(\beta) < 1$ , pues  $\beta \in ]0, 1[$ . De esta forma, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}\|y - z\|^2 &> \|sz - z\|^2 + \|sz - y\|^2 \\ \|y - z\|^2 &> \|sz - y\|^2 \\ \|y - z\| &> \|sz - y\|\end{aligned}$$

Como  $sz$  esta en la  $W'$ -órbita de  $x$ , esto es una contradicción, pues  $z$  es la menor distancia a  $y$ . Luego,  $z \in A_o$ , entonces  $wA \cap A_o \neq \emptyset$  por lo tanto  $wA = A_o$ . De esta manera,  $W'$  actúa sobre  $\mathcal{A}$  transitivamente.

En la segunda parte nos falta demostrar que  $W_a \subseteq W'$ .

Sea  $s_{u,k}$  una reflexión afín y veremos que esta reflexión se encuentra en  $W'$ . Para ello consideremos  $A$  una cámara que tiene a  $H_{u,k}$  como una pared. Por lo demostrado anteriormente  $W'$  actúa transitivamente, luego existe  $w \in W'$  tal que  $wA = A_o$ .

Así,  $wH_{u,k}$  coincide con  $H$  una de las paredes de  $A_o$ , denotemos por  $s$  la reflexión que deja fija esta pared, luego  $s \in S_a \subseteq W'$ . Entonces por corolario 28.2 obtenemos lo siguiente:

$$ws_{u,k}w^{-1} = s$$

Lo cual implica que  $s_{u,k} \in W'$

Por lo tanto,  $W' = W_a$ . □

## 5. La Función Largo

Sea  $w \in W_a$ ,  $w$  se puede escribir como producto de  $r$  reflexiones, es decir,  $w = s_1s_2 \cdots s_r$ , donde  $s_i \in S_a$ .

DEFINICIÓN 44. Sea  $l_a$  la función largo de  $w$  dada por:

$$\begin{aligned}l_a &: W_a \longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto l_a(w) = r\end{aligned}$$

donde  $r$  es la menor cantidad de reflexiones  $s_i \in S_a$  tal que  $w = s_1s_2 \cdots s_r$ . Además,  $l_a(e) = 0$ .

**5.1. Geometría de la función largo.** En esta sección estudiaremos cuantos hiperplanos separan a dos cámaras en  $\mathcal{A}$ . Además, construiremos el conjunto y veremos como se relaciona con la función largo  $l_a$ .

DEFINICIÓN 45. Cada  $H_{u,k} \in \mathcal{H}$  divide a  $V$  en semiespacios positivos y negativos. Es decir,

$$\begin{aligned} H_{u,k}^+ &= \{z \in V \mid \langle u, z \rangle > k\} \\ H_{u,k}^- &= \{z \in V \mid \langle u, z \rangle < k\} \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 46. Sean  $H \in \mathcal{H}$  y  $A, B \in \mathcal{A}$ .

Se dice que  $H$  **separa** las cámaras  $A$  y  $B$ , si y sólo si estas cámaras se encuentran en diferentes semiespacios relativos a  $H$ .

OBSERVACIÓN 5. Notemos que no existe un hiperplano  $H_{u,k}$  que separa las cámaras  $A, B, C$  simultáneamente. Para ello, supongamos que  $H_{u,k}$  separa las cámaras  $A, B, C$ . Esto es,

- 1)  $H_{u,k}$  separa  $A$  y  $B$
- 2)  $H_{u,k}$  separa  $B$  y  $C$
- 3)  $H_{u,k}$  separa  $A$  y  $C$

Luego, por 1) y 2) tenemos que  $A$  y  $C$  se encuentran en el mismo semiespacio relativo a  $H_{u,k}$ . Por parte 3) esto es una contradicción.

Por lo tanto,  $H_{u,k}$  no separa las cámaras  $A, B, C$ .

PROPOSICIÓN 34. Si fijamos dos cámaras, entonces el número de hiperplanos que separa estas cámaras es finito.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $A$  y  $B$  dos cámaras distintas y  $u \in \Phi$ , recordemos que  $\Phi$  es finito.

Consideremos el siguiente conjunto:

$$S_{AB} = \{H \in \mathcal{H} \mid H \text{ separa } A \text{ y } B\}$$

Como estas cámaras son distintas, existe al menos un hiperplano  $H_{u,m}$  que separa  $A$  y  $B$  donde  $m \in \mathbb{Z}$ . Luego, existen finitos hiperplanos paralelos  $H_{u,m}$  con  $k_u < m < k'_u$ , donde  $k_u, k'_u \in \mathbb{Z}$  que separan  $A$  y  $B$ .

Entonces,

$$\bigcup_{l=k_u}^{k'_u} \{H_{u,l}\} \subseteq S_{AB}$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{u \in \Phi^+} \left( \bigcup_{l=k_u}^{k'_u} \{H_{u,l}\} \right) = S_{AB}$$

Así, existen finitos hiperplanos que separan dos cámaras distintas.  $\square$

DEFINICIÓN 47. Sea  $w \in \widehat{W}_a$ .

a) El conjunto de hiperplanos que separan  $A_o$  de  $wA_o$  se denota de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(w) = \{H \text{ separa } A_o \text{ de } wA_o\}$$

b) Se define la función,

$$\begin{aligned} n &: \widehat{W}_a \longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto n(w) = \#(\mathcal{L}(w)) \end{aligned}$$

Ahora nos enfocaremos en demostrar que la restricción de  $n$  a  $\widehat{W}_a$ , es la función largo  $l_a$ .

LEMA 35. Sea  $s \in S_a$ , entonces,

1.  $n(e) = 0$ .
2.  $n(s) = 1$ ;  $\mathcal{L}(s) = H_s$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $s \in S_a = \{s_v \mid v \in \Delta\} \cup \{s_{\bar{v},1}\}$ .

1. Es inmediato, pues si  $w = e$ , entonces no existen hiperplanos que separe la cámara  $A_o$  de si misma.
2. Debemos demostrar que el único hiperplano en  $\mathcal{L}(s)$  es  $H_s$ .

Como  $A_o$  es una cámara, entonces es una componente conexa de  $V^\circ$ , lo cual implica que se encuentra en uno de los semiespacios relativos a  $H_s$ . Al ser  $s$  la reflexión que fija el hiperplano  $H_s$ , envía un semiespacio en el otro. De esta forma, las cámaras  $A_o$  y  $sA_o$  se encuentran en distintos lados del hiperplano  $H_s$ . Por lo tanto,  $H_s \in \mathcal{L}(s)$ .

Para demostrar que es el único hiperplano.

i) Supongamos que  $s \in \{s_v \mid v \in \Delta\}$  y sabemos que,

$$A_o = \{z \in V \mid (\forall u \in \Phi^+)(0 < \langle z, u \rangle < 1)\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} sA_o &= \{sz \in V \mid (\forall u \in \Phi^+)(0 < \langle sz, su \rangle < 1)\} \\ &= \{y \in V \mid (\forall u \in \Phi^+)(0 < \langle y, su \rangle < 1)\} \end{aligned}$$

En el caso  $u \neq v$ , se tiene que,

$$0 < \langle y, u \rangle < 1, \forall u \in \Phi^+ \setminus \{v\}.$$

pues, recordemos que  $s_v(\Phi^+ \setminus \{v\}) = \Phi^+ \setminus \{v\}$ , para  $v \in \Delta$ .

Ahora, si  $u = v$ , entonces  $sv = -v$ . Con lo cual se obtienen las siguientes desigualdades,

$$\begin{aligned} 0 &< \langle y, -v \rangle < 1 \\ 0 &< -\langle y, v \rangle < 1 \\ 0 &> \langle y, v \rangle > -1 \end{aligned}$$

$$sA_o = \{y \in V \mid (\forall u \in \Phi^+ \setminus \{v\})(0 < \langle y, u \rangle < 1) \wedge (-1 < \langle y, v \rangle < 0)\}$$

ii) Consideremos  $s = s_{\tilde{v},1}$  y por proposición 32 tenemos que,

$$A_o = \{z \in V \mid (\forall v \in \Delta)(\langle z, v \rangle > 0) \text{ y } (\langle z, \tilde{v} \rangle < 1)\}$$

Debemos demostrar que,

$$sA_o = \{sz \in V \mid (\forall v \in \Delta)(\langle sz, v \rangle > 0) \text{ y } (1 < \langle sz, \tilde{v} \rangle < 2)\}$$

Primero probemos que  $\langle sz, v \rangle > 0$ , para todo  $v \in \Delta$ . Para esto, sean  $z \in A_o$  y  $v \in \Delta$ . Calculando obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle s_{\tilde{v},1}(z), v \rangle &= \langle z - (\langle z, \tilde{v} \rangle - 1)\check{\tilde{v}}, v \rangle \\ &= \langle z, v \rangle - (\langle z, \tilde{v} \rangle - 1)\check{\langle \tilde{v}, v \rangle} \\ &= \langle z, v \rangle - \frac{2(\langle z, \tilde{v} \rangle - 1)\langle \tilde{v}, v \rangle}{\langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle} \end{aligned}$$

En esta última igualdad, sabemos que  $\langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle > 0$  y  $\langle \tilde{v}, v \rangle \geq 0$ . Además, como  $z \in A_o$  entonces  $\langle z, v \rangle > 0$  y  $\langle z, \tilde{v} \rangle - 1 < 0$ . Esto implica que,

$$\langle s_{\tilde{v},1}(z), v \rangle > 0$$

Luego,  $\langle sz, v \rangle > 0$  para todo  $v \in \Delta$ .

Demostremos que  $1 < \langle sz, \tilde{v} \rangle < 2$ . Para ello, notemos que el punto medio del segmento que une  $z$  y  $sz$  se encuentra en el hiperplano  $H_{\tilde{v},1}$ . Es decir,

$$\frac{1}{2}(sz + z) \in H_{\tilde{v},1}$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}(sz + z), \tilde{v} \right\rangle &= 1 \\ \frac{1}{2}\langle sz + z, \tilde{v} \rangle &= 1 \\ \langle sz + z, \tilde{v} \rangle &= 2 \\ \langle sz, \tilde{v} \rangle &= 2 - \langle z, \tilde{v} \rangle \end{aligned}$$

Pero como  $z \in A_o$  tenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \langle z, \tilde{v} \rangle < 1 &\iff 0 < 1 - \langle z, \tilde{v} \rangle \iff 1 < 2 - \langle z, \tilde{v} \rangle \\ \langle z, \tilde{v} \rangle > 0 &\iff -\langle z, \tilde{v} \rangle < 0 \iff 2 - \langle z, \tilde{v} \rangle < 2 \end{aligned}$$

Así, obtenemos que  $1 < \langle sz, \tilde{v} \rangle < 2$

Por lo tanto, si  $s \in S_a$ , entonces  $H_s$  es el único hiperplano que separa las cámaras  $A_o$  y  $sA_o$ .

□

LEMA 36. Sean  $w \in \widehat{W}_a$  y  $s \in S_a$ .

1.  $n(w) = n(w^{-1}); \quad w^{-1}\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w^{-1})$
2.  $n(ws) = n(sw^{-1}); \quad sw^{-1}\mathcal{L}(ws) = \mathcal{L}(sw^{-1})$

DEMOSTRACIÓN.

1. Esto equivale a demostrar que:

$H$  separa  $A_o$  y  $wA_o$  si y sólo si  $w^{-1}H$  separa  $w^{-1}A_o$  y  $A_o$ . Es decir,

$$w^{-1}\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w^{-1})$$

Consideremos  $H \in \mathcal{L}(w)$ , por lo cual  $H$  separa  $A_o$  y  $wA_o$ , entonces  $w^{-1}H$  separa  $w^{-1}A_o$  y  $A_o$ . Por lo tanto,

$$w^{-1}\mathcal{L}(w) \subseteq \mathcal{L}(w^{-1}), \quad \forall w \in \widehat{W}_a$$

Haciendo un cambio de variable tenemos que:

$$w\mathcal{L}(w^{-1}) \subseteq \mathcal{L}(w), \quad \forall w \in \widehat{W}_a$$

Para concluir, sea  $H \in \mathcal{L}(w^{-1})$  esto implica que  $wH \in w\mathcal{L}(w^{-1})$  y en consecuencia  $wH \in \mathcal{L}(w)$ . Luego,

$$w^{-1}wH = H \in w^{-1}\mathcal{L}(w)$$

Entonces,

$$\mathcal{L}(w^{-1}) \subseteq w^{-1}\mathcal{L}(w)$$

Así,

$$w^{-1}\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(w^{-1}), \quad \forall w \in \widehat{W}_a.$$

Como  $w$  es una función biyectiva, se tiene que,

$$n(w) = n(w^{-1})$$

2. Es inmediato por la primera parte, pues si hacemos el cambio de variable  $w = xy$ , entonces

$$yx^{-1}\mathcal{L}(xy) = \mathcal{L}(yx^{-1})$$

□

OBSERVACIÓN 6. Si  $\mathcal{L}(w) \neq \emptyset$ , entonces este conjunto contiene al menos uno de los hiperplanos  $H_s$ , donde  $s \in S_a$ . De lo contrario  $wA_o$ ,  $A_o$  se encontrarían en el mismo semiespacio relativo a  $H_s$ , para todo  $s \in S_a$ . Pero  $A_o$  es la intersección de estos semiespacios, luego se obtendría que  $wA_o = A_o$ , lo cual es una contradicción.

PROPOSICIÓN 37. Sea  $w \in \widehat{W}_a$  y fijemos  $s \in S_a$ .

1.  $H_s$  se encuentra en exactamente uno de los conjuntos  $\mathcal{L}(w^{-1})$ ,  $\mathcal{L}(sw^{-1})$ .
2.  $s(\mathcal{L}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}) = \mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}$ .
3. Si  $H_s \in \mathcal{L}(w^{-1})$ , entonces  $n(ws) = n(w) - 1$ .
4. Si  $H_s \in \mathcal{L}(sw^{-1})$ , entonces  $n(ws) = n(w) + 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $w \in \widehat{W}_a$  y fijemos  $s \in S_a$ .

1. Supongamos que  $H_s$  se encuentra en ambos conjuntos. Luego,

Si  $H_s \in \mathcal{L}(w^{-1})$ , por lema 36 se tiene que  $wH_s$  separa  $A_o$  de  $wA_o$ .

Por otro lado, si  $H_s \in \mathcal{L}(sw^{-1})$ , entonces  $wH_s$  separa  $A_o$  y  $wsA_o$ .

Considerando la observación 5, el hiperplano  $wH_s$  no separa  $wA_o$  de  $wsA_o$ , y esto es una contradicción, pues  $H_s$  separa  $A_o$  y  $sA_o$ .

Por lo tanto,  $H_s$  no se encuentra simultáneamente en ambos conjuntos.

Suponemos ahora que  $H_s$  no se encuentra en ninguno de estos conjuntos.

Por argumentos análogos,

Si  $H_s \notin \mathcal{L}(w^{-1})$  y  $H_s \notin \mathcal{L}(sw^{-1})$  tenemos que  $wH_s$  no separa  $A_o$  de  $wA_o$ , tampoco separa  $A_o$  de  $wsA_o$ . De esto concluimos que  $wH_s$  no separa  $wA_o$  de  $wsA_o$ , por ende  $H_s$  no separa  $A_o$  de  $sA_o$ , lo que es una contradicción.

Por lo tanto,  $H_s$  se encuentra en uno de los conjuntos  $\mathcal{L}(w^{-1})$ ,  $\mathcal{L}(sw^{-1})$ .

2. Sea  $H \in \mathcal{L}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}$ . Demostremos que  $sH \in \mathcal{L}(sw^{-1})$ .

Para esto, suponemos que  $sH \notin \mathcal{L}(sw^{-1})$ , entonces, por observación 5  $wH$  no separa  $wsA_o$  de  $A_o$ .

Por hipótesis,  $H \in \mathcal{L}(w^{-1})$ , luego  $wH \in \mathcal{L}(w)$ . De esta manera obtenemos que  $wH$  separa las cámaras  $wA_o$  y  $wsA_o$ , es decir,  $H$  separa  $A_o$  de  $sA_o$ . Por lo tanto,

$$H \in \mathcal{L}(s) = \{H_s\}$$

Lo cual es una contradicción, pues  $H \neq H_s$ . Así,

$$sH \in \mathcal{L}(sw^{-1}).$$

Además, como  $s$  fija  $H_s$ , lo cual implica  $sH \neq H_s$ . Entonces,

$$sH \in \mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}.$$

En el otro sentido la demostración la haremos también por el absurdo,

$$s(\mathcal{L}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}) \supseteq \mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}$$

Sea  $H \in \mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}$  y suponemos que  $sH \notin \mathcal{L}(w^{-1})$ .

Luego  $wsH \in \mathcal{L}(ws)$ , además,  $sH$  no separa  $A_o$  y  $w^{-1}A_o$ , entonces de forma similar al anterior argumento, tenemos que  $H$  separa  $A_o$  de  $sA_o$ .

Es decir,

$$H \in \mathcal{L}(s) = \{H_s\}$$

Esto es claramente una contradicción. De esta manera,

$$sH \in \mathcal{L}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}.$$

Así,

$$s(\mathcal{L}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}) = \mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}$$

3. Sea  $H_s \in \mathcal{L}(w^{-1})$ , por lo anterior tenemos que  $H_s \notin \mathcal{L}(sw^{-1})$ ,

$$s(\mathcal{L}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}) = \mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}, \text{ entonces}$$

$$\#(\mathcal{L}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}) = \#(\mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}), \text{ pues } s \text{ es biyectiva}$$

Luego,

$$\#(\mathcal{L}(w^{-1})) = \#(\mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\}) + 1$$

$$\#(\mathcal{L}(w^{-1})) = \#(\mathcal{L}(sw^{-1})) + 1$$

De esta manera, se tienen las siguientes igualdades,

$$n(w^{-1}) = n(sw^{-1}) + 1$$

$$n(w) = n(ws) + 1$$

$$n(ws) = n(w) - 1$$

4. Sea  $H_s \in \mathcal{L}(sw^{-1})$ , por argumentos análogos, se tiene que,

$$\#(\mathcal{L}(w^{-1}) \setminus \{H_s\}) = \#(\mathcal{L}(sw^{-1}) \setminus \{H_s\})$$

Entonces,

$$\#(\mathcal{L}(sw^{-1})) = \#(\mathcal{L}(w^{-1})) + 1$$

Por lo tanto,

$$n(sw^{-1}) = n(w^{-1}) + 1$$

$$n(ws) = n(w) + 1$$

□

COROLARIO 38. *Para todo  $w \in W_a$ , tenemos que  $n(w) \leq l_a(w)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $w = s_1 s_2 \cdots s_r$  una expresión reducida de largo  $r$ , demostremos por inducción que  $n(w) \leq l_a(w) = r$ .

i) Si  $w = e$ , entonces  $n(e) = 0 = l_a(e)$ .

ii) Ahora probemos que para  $w = s_1 s_2 \cdots s_{r+1}$ , se tiene que  $n(w) \leq l_a(w)$ , donde  $l_a(w) = r + 1$ . Sea,

$$\begin{aligned} w' &= w s_{r+1} \\ &= (s_1 \cdots s_r s_{r+1}) s_{r+1} \\ &= s_1 \cdots s_r, \text{ entonces } l_a(w') = r \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción,  $n(w') \leq l_a(w')$ . Así, por proposición 37 tenemos que,

$$n(w' s_{r+1}) = n(w') \pm 1 \leq n(w') + 1$$

Luego,

$$n(w) = n(w' s_{r+1}) \leq n(w') + 1 = l_a(w') + 1 = l_a(w)$$

Por todo lo anterior tenemos,

$$n(w) \leq l_a(w) = r.$$

□

## 6. Transitividad Fiel

En esta sección explicitaremos la lista de hiperplanos que separan la cámara  $A_0$  de  $wA_0$ . Además, veremos como el grupo  $W_a$  actúa fielmente transitivo sobre  $\mathcal{A}$ .

LEMA 39. *Sea  $w \in W_a$  no trivial tal que  $w = s_1 \cdots s_r$  es una expresión reducida, donde  $s_i \in S_a$  y denotemos por  $H_i = H_{s_i}$  los hiperplanos fijos por  $s_i$ , entonces*

$$H_1, s_1 H_2, s_1 s_2 H_3, \dots, s_1 \cdots s_{r-1} H_r$$

*son todos distintos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no todos estos hiperplanos son distintos. Luego, existen índice  $p < q$ , tales que,

$$s_1 \cdots s_{p-1} H_p = s_1 \cdots s_{q-1} H_q$$

Despejando se obtiene,

$$\begin{aligned} H_p &= (s_{p-1} \cdots s_1)(s_1 \cdots s_{q-1})H_q \\ &= (s_p \cdots s_{q-1})H_q \end{aligned}$$

Por el corolario 28

$$s_p = (s_p \cdots s_{q-1})s_q(s_{q-1} \cdots s_p)$$

Entonces,

$$s_{p+1} \cdots s_{q-1} = s_p \cdots s_q$$

Lo cual se contradice con la afirmación que  $s_1 \cdots s_r$  era reducida.

Por lo tanto, todos los hiperplanos son distintos. □

TEOREMA 40.

1. *Sea  $w \in W_a$  no trivial, tal que  $w = s_1 \cdots s_r$  es una expresión reducida, y denotemos por  $H_i = H_{s_i}$ . Entonces tenemos que,*

$$\mathcal{L}(w) = \{H_1, s_1 H_2, s_1 s_2 H_3, \dots, s_1 \cdots s_{r-1} H_r\}$$

2. *La función  $n$  sobre  $W_a$  coincide con la función largo  $l$ .*
3. *El grupo  $W_a$  actúa fielmente transitivo sobre  $\mathcal{A}$ .*

DEMOSTRACIÓN. 1. Procederemos por inducción sobre  $l_a(w) = r$ .

i) Claramente si  $r = 1$ , entonces  $\mathcal{L}(s) = \{H_s\}$ , para todo  $s \in S_a$ .

ii) Cuando  $r > 1$ , sea  $w' = s_2 \cdots s_r$ . Por hipótesis de inducción tenemos que,

$$\mathcal{L}(s_2 \cdots s_r) = \{H_2, s_2 H_3, \dots, s_2 \cdots s_{r-1} H_r\}$$

Por el lema anterior, obtenemos que estos  $r - 1$  hiperplanos son todos distintos.

Supongamos que  $H_1 \in \mathcal{L}(s_2 \cdots s_r)$ , por lo tanto,

$$H_1 = s_1 H_1 \in s_1 \mathcal{L}(s_2 \cdots s_r) = \{s_1 H_2, s_1 s_2 H_3, \dots, s_1 \cdots s_{r-1} H_r\}$$

Lo que contradice el lema anterior. Así,  $H_1 \notin \mathcal{L}(w')$ .

Por la primera parte de la proposición 37, con  $s = s_1$  y  $w^{-1} = s_2 \cdots s_r$  se tiene que,

$$H_1 \in \mathcal{L}(s_1 w') = \mathcal{L}(w)$$

Luego, la segunda parte de la proposición 37, implica lo siguiente,:

$$\begin{aligned} s_1(\mathcal{L}(w') \setminus \{H_1\}) &= \mathcal{L}(s_1 w') \setminus \{H_1\} \\ s_1 \mathcal{L}(w') &= \mathcal{L}(s_1 w') \setminus \{H_1\} \\ s_1 \mathcal{L}(w') \cup \{H_1\} &= \mathcal{L}(s_1 w') \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{L}(w)$  es el conjunto de  $r$  hiperplanos que son todos distintos por el lema anterior.

2. Es inmediata, pues con las notaciones anteriores tenemos que,

$$l = \#\mathcal{L}(w) = r = n(w)$$

3. Ya sabemos, por la proposición 33 que  $W_a$  actúa transitivamente sobre  $\mathcal{A}$ , por ende  $\widehat{W}_a$  también. Para demostrar que la acción es fiel sea  $w \neq e$  tal que fija una cámara, sin pérdida de la generalidad podemos suponer que la cámara fijada por  $w$  es  $A_o$ , es decir,  $wA_o = A_o$ , lo cual implica que  $\mathcal{L}(w) = \emptyset$ , por lo tanto  $w = e$ , lo que es una contradicción.

□

$$\begin{aligned} l_a &: W_a \longrightarrow \mathbb{N} \\ w &\longmapsto l_a(w) = r \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 41. *La función largo  $l_a : W_a \longrightarrow \mathbb{N}$ , restringida al subgrupo  $W$ , coincide con la función largo  $l : W \longrightarrow \mathbb{N}$ , es decir*

$$l_a|_W = l$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $w \in W$ , tal que  $w = s_{v_1} \cdots s_{v_r}$  una expresión reducida en  $W$ , donde  $s_{v_i} \in S \subseteq S_a$ . Supongamos que  $l_a(w) = m$ , entonces se tiene que,

$$l_a(w) = m \leq r$$

Ahora consideremos  $w = s_1 \cdots s_m$  una expresión reducida en  $W_a$ , donde  $s_i \in S_a$ . Además, cada reflexión de  $S_a$  la podemos escribir de la siguiente manera,

$$s_i = s_{u_i, k_i} = t_{z_i} s_{u_i}$$

Como  $T(\check{\mathcal{R}})$  es normal en  $W$ , tenemos que:

$$t_{z_1} s_{u_1} t_{z_2} s_{u_2} = t_{z_1+z'_2} s_{u_1} s_{u_2}$$

que al usarlo reiteradamente se deduce,

$$w = t_{z_1} s_{u_1} \cdots t_{z_m} s_{u_m} = t_z s_{u_1} \cdots s_{u_m}$$

donde  $t_z = t_{z_1+z'_2+\dots+z'_m}$ . Es decir,

$$w = s_{v_1} \cdots s_{v_r} = t_z s_{u_1} \cdots s_{u_m}$$

Por lo tanto,  $t_z \in T(\check{\mathcal{R}}) \cap W$ , entonces,  $t_z = e$ .

Luego,

$$w = s_{u_1} \cdots s_{u_m}, \text{ con } s_{u_i} \in S \subseteq S_a.$$

De esta forma obtenemos que,

$$r \leq m = l_a(w)$$

Así se tiene que para todo  $w \in W$ ,

$$l(w) = l_a(w)$$

□

EJERCICIO 9. *Sean  $A, B$  dos cámaras, se define  $d(A, B)$  como el entero que se obtiene al sumar por cada hiperplano  $H$  que separa  $A$  con  $B$  un  $+1$  si  $B \subseteq H^+$  y  $-1$  en caso contrario.*

$$d(A, B) = \sum_{\substack{H \in S_{AB} \\ B \subseteq H^+}} (+1) + \sum_{\substack{H \in S_{AB} \\ B \subseteq H^-}} (-1)$$

Probar que para todo  $A, B, C \in \mathcal{A}$ , se tiene que,

$$d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = 0$$

SOLUCIÓN 9. Sabemos, por la observación 5, que no existe un hiperplano que separe tres cámaras simultáneamente.

Observemos además que dados  $A, B \in \mathcal{A}$  se tiene que,

$$d(A, B) = -d(B, A)$$

Supongamos que  $A = B$ , lo cual implica que  $d(A, B) = 0$ . Por lo anterior tenemos,

$$d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = 0$$

De esta manera, si dos cámaras son iguales la relación se cumple.

Ahora, para cada  $u \in \Phi^+$ , definamos  $d_u$  igual a la restricción de  $d$  referida a los hiperplanos afines ortogonales a  $u$ , donde para cada  $u \in \Phi^+$  se tiene que,

$$d_u(A, B) = -d_u(B, A)$$

Para la tercera etapa. Sean  $A, B, C \in \mathcal{A}$  y  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Luego, para cada  $u \in \Phi^+$  supongamos lo siguiente:

Existen  $m$  hiperplanos que separan  $A$  y  $B$ . De otra forma,

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\langle u, x \rangle < a_u + 1 \leq b_u < \langle u, y \rangle)$$

donde todos estos hiperplanos son ortogonales a  $u$ . Los cuales, por la segunda etapa, están denotados por:

$$d_u(A, B) = m$$

Análogamente, supongamos que existen  $n$  hiperplanos que separan  $B$  y  $C$ . En otras palabras,

$$(\forall y \in B)(\forall z \in C)(\langle u, y \rangle < b_u + 1 \leq c_u < \langle u, z \rangle)$$

Así,

$$d_u(B, C) = n$$

De esta manera tenemos que existen  $m + n$  hiperplanos ortogonales a  $u$  que separan  $A$  y  $C$ . Es decir,

$$d_u(A, C) = m + n$$

Por la primera etapa se tiene que:

$$d_u(C, A) = -(m + n)$$

Entonces,

$$d_u(A, B) + d_u(B, C) + d_u(C, A) = 0$$

Para otras configuraciones el argumento es similar. Por lo tanto, si consideramos todos los  $u \in \Phi^+$  obtenemos que,

$$d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = 0$$

## 7. Sistema de Representantes

En esta sección describiremos un sistema de representantes para la acción de  $W_a$  sobre  $V$ , este conjunto corresponde a la clausura topológica de  $A_0$ .

OBSERVACIÓN 7. La clausura topológica de  $A_0$ , se denota por  $\overline{A_0}$  y está dada por:

$$\overline{A_0} = \{z \in V \mid (\forall v \in \Delta)(\langle z, v \rangle \geq 0 \text{ y } \langle z, \tilde{v} \rangle \leq 1)\}$$

TEOREMA 42. La clausura de  $A_0$  es un sistema de representantes de la acción de  $W_a$  sobre  $V$ , es decir, que para cada  $y \in V$  existe un único  $x \in \overline{A_0}$  tal que  $y$  pertenece a la órbita de  $x$ .

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 33 sabemos que  $W_a$  actúa transitivamente sobre las cámaras y todo elemento de  $V$  se encuentra en la clausura de alguna cámara.

Ahora demostremos que dos elementos distintos  $x, y \in \overline{A_0}$  no se encuentran en la misma órbita de  $W_a$ . Supongamos lo contrario, es decir,

$$wy = x, \text{ para algún } w \in W_a,$$

Consideremos  $w \in W_a$  el elemento de menor largo que cumple esta condición, como  $x \neq y$ , entonces  $w \neq e$ , por lo tanto existe  $s \in S_a$  tal que  $l(ws) < l(w) = n(w)$  y por la tercera parte de la proposición 37 se tiene que  $H_s \in \mathcal{L}(w^{-1})$ , de esta manera  $H_s$  separa  $A_0$  de  $w^{-1}A_0$ .

Pero  $y = w^{-1}x \in w^{-1}\overline{A_0}$ , entonces,

$$y \in \overline{A_0} \cap w^{-1}\overline{A_0}$$

Analicemos los distintos casos para  $s \in S_a$ .

En el caso  $s = s_v$ , para  $v \in \Delta$ , tenemos que  $\langle y, v \rangle \leq 0$ , pero  $y \in \overline{A_0}$  entonces  $\langle y, v \rangle \geq 0$ , es decir,  $\langle y, v \rangle = 0$ , de lo cual se obtiene que  $y \in H_v$ , por lo tanto  $sy = y$ .

Ahora, si  $s = s_{\tilde{v},1}$ , se tiene que  $\langle y, \tilde{v} \rangle \geq 1$ , pero  $y \in \overline{A_0}$  con lo cual  $\langle y, \tilde{v} \rangle \leq 1$  concluyendo que  $\langle y, \tilde{v} \rangle = 1$ , de otra forma,  $y \in H_{\tilde{v},1}$  y  $sy = y$ .

En ambos casos  $sy = y$ , de esta manera  $wsy = x$ . Esto contradice la elección  $w$ , es decir, que  $l(w)$  es el más pequeño posible tal que  $wy = x$ .

Así, para cada  $y \in V$ , existe un único  $x \in \overline{A_0}$  tal que  $y \in O_x$ . □

## 8. Condición de Cambio

PROPOSICIÓN 43. *Sea  $w \in W_a$ , y  $w = s_1 \cdots s_r$  una expresión reducida, con  $s_i \in S_a$ . Si  $l(ws) < l(w)$ , entonces existe un índice  $1 \leq i \leq r$  para el cual*

$$ws = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r = s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_r.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la primera parte del teorema 40 tenemos que,

$$\mathcal{L}(w) = \{H_1, s_1 H_2, s_1 s_2 H_3, \dots, s_1 \cdots s_{r-1} H_r\}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}(w^{-1}) = w^{-1} \mathcal{L}(w) = \{s_r \cdots s_1 H_1, s_r \cdots s_2 H_2, \dots, s_r H_r\}$$

donde  $s_i H_i = H_i$  en cada caso. Como  $l(ws) < l(w)$ , por la tercera parte de la proposición 37, concluimos que  $H_s$  debe encontrarse en  $\mathcal{L}(w^{-1})$ , entonces tenemos que,

$$H_s = s_r \cdots s_{i+1} H_i, \text{ para } 1 \leq i \leq r.$$

Por corolario 28 obtenemos que:

$$(s_r \cdots s_{i+1}) s_i (s_{i+1} \cdots s_r) = s$$

Lo que se puede reescribir como:

$$s_i s_{i+1} \cdots s_r = s_{i+1} \cdots s_r s$$

De esta última igualdad obtenemos que:

$$\begin{aligned} ws &= s_1 \cdots s_r s \\ &= s_1 \cdots s_i (s_{i+1} \cdots s_r) s \\ &= s_1 \cdots s_i s_i \cdots s_r \\ &= s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_r \end{aligned}$$

□

TEOREMA 44. *El par  $(W_a, S_a)$  es un sistema de Coxeter.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que  $S_a$  es un conjunto generador de  $W_a$ . Además, la condición de cambio nos entrega que  $S_a$  es un conjunto generador minimal de  $W_a$ . De esta forma, existe  $S_a \subset W_a$  tal que:

$$W_a = \langle\langle s \in S_a \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 \rangle\rangle .$$

Donde  $m(s, s) = 1$  y  $m(s, s') \in \{2, 3, \dots\}$ .

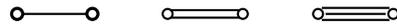
Por lo tanto,  $(W_a, S_a)$  es un sistema de Coxeter. □

### 9. Diagramas de Dynkin

En esta sección estudiaremos de qué manera se introduce un nuevo vértice  $s_{\tilde{v},1}$  en los grafos de Coxeter irreducible, estos nuevos grafos son los llamados diagramas de Dynkin. Para lo anterior necesitamos explicitar las relaciones  $s_v s_{\tilde{v},1}$ , para todo  $v \in \Delta$ , en los distintos tipos de grupos de Coxeter, en especial calcularemos los de tipos  $(\tilde{A}_n, n \geq 2)$  y  $(\tilde{B}_n, n \geq 3)$ .

En los diagramas de Dynkin denotaremos las relaciones de la siguiente manera:

- i) Un círculo sombreado (●) representa la ubicación del vértice asociado a la raíz suprema  $s_{\tilde{v},1}$ .
- ii) Para un diagrama de Dynkin tenemos que:



reemplazan las aristas etiquetadas con 3, 4 y 6 respectivamente.

Los grupos  $H_3$ ,  $H_4$  y  $G_2(5)$  no cumplen la condición cristalográfica, ya que

$$\cos^2 \left( \frac{\pi}{5} \right) \notin \mathbb{Z}$$

Por lo anterior, no existe diagrama de Dynkin cuya arista tenga etiqueta 5.

- iii) Finalmente, para aclarar la relación entre los largos de las raíces, agregamos una flecha apuntando en dirección a la raíz más corta, lo cual hacemos cuando se tienen dos o más aristas entre dos raíces. Es decir, si  $\| v \| > \| v_1 \|$ , entonces



A continuación, veremos en profundidad dos tipos de grupos de Weyl, para luego describir el diagrama de Dynkin de cada uno de estos tipos.

**9.1. Diagrama de Dynkin del grupo de Weyl de tipo  $(\tilde{A}_n, n \geq 2)$ .**

Consideremos el grupo  $S_{n+1}$  actuando en  $\mathbb{R}^{n+1}$  del siguiente modo, la transposición  $(i \ i+1)$  actúa por la reflexión  $s_{e_i - e_{i+1}}$ , para esta presentación del grupo de Coxeter tenemos que el sistema de raíces esta dado por:

$$\Phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j, 0 \leq i, j \leq n\}$$

Y su sistema de raíces simple es:

$$\Delta = \{e_1 - e_2, \dots, e_n - e_{n+1}\}$$

además, la raíz suprema  $\tilde{v} = e_1 - e_{n+1}$ .

Denotemos por  $s_i = s_{e_i - e_{i+1}}$ ;  $s_0 = s_{\tilde{v}}$ , con estas notaciones demostraremos que:

- 1)  $(s_i)^2 = Id$ , para  $0 \leq i < n$ .
- 2)  $m(s_i, s_{i+1}) = 3$ .
- 3)  $m(s_i, s_j) = 2$ , si  $|i - j| > 2$ .
- 4)  $m(s_0, s_i) = 2$ , para  $0 < i < n + 1$ , con  $i \neq 2$ .
- 5)  $m(s_0, s_1) = 3$ .
- 6)  $m(s_0, s_{n-1}) = 3$ .

Recordemos que en la sección grafos de Coxeter las tres primeras relaciones están demostradas. Para las otras relaciones consideremos  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

- 4) Explícitemos  $s_0$ ,

$$\begin{aligned} s_0(z) &= z - (\langle z, e_1 - e_{n+1} \rangle - 1)(e_1 - e_{n+1}) \\ &= (z_1, \dots, z_{n+1}) - (z_1 - z_{n+1} - 1)(e_1 - e_{n+1}) \\ &= (z_1, \dots, z_{n+1}) - (z_1 - z_{n+1} - 1, \dots, -z_1 + z_{n+1} + 1) \\ &= (1 + z_{n+1}, z_2, \dots, z_n, -1 + z_1) \end{aligned}$$

De esta manera,  $s_0$  al actuar sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  altera sólo la primera y la última coordenada, debido a esto se tiene que  $(s_0 s_i)^2 = Id$ , para  $0 < i < n$ .

- 5) Sean  $e_1 - e_{n+1} \in \Phi$  y  $e_1 - e_2 \in \Delta$ . Luego,

$$\begin{aligned} (s_0 s_1)(z) &= s_0(s_1(z)) \\ &= s_0(z_2, z_1, z_3, \dots, z_n, z_{n+1}) \\ &= (1 + z_{n+1}, z_1, z_3, \dots, z_n, z_2 - 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(s_0 s_1)^2(z) = (z_2, 1 + z_{n+1}, z_3, \dots, z_n, z_1 - 1)$$

$$(s_0 s_1)^3(z) = z$$

6) Sean  $e_1 - e_{n+1} \in \Phi$  y  $e_n - e_{n+1} \in \Delta$ . Calculando,

$$\begin{aligned} (s_0 s_{n-1})(z) &= s_0(s_{n-1}(z)) \\ &= s_0(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, z_n) \\ &= (1 + z_n, z_2, \dots, z_{n+1}, z_1 - 1) \end{aligned}$$

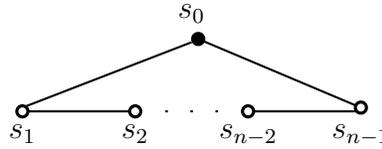
Luego,

$$(s_0 s_{n-1})^2(z) = (1 + z_{n+1}, z_2, \dots, z_1 - 1, z_n)$$

$$(s_0 s_{n-1})^3(z) = z$$

De esta manera, se satisfacen estas condiciones.

El diagrama de Dynkin asociado al grupo de Weyl afin, con los vértices  $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$  es del tipo  $\tilde{A}_{n-1}$  y está dado por:



**9.2. El grupo de Weyl afin de tipo  $\tilde{A}_{n-1}$  puede ser realizado como un subgrupo del grupo de permutaciones de  $\mathbb{Z}$ .** Con las notaciones de la subsección 9.1 y teniendo presente el diagrama de Dynkin, establecemos la siguiente correspondencia:

Asociamos a  $s_i$ , para  $0 < i < n$  la siguiente permutación de  $\mathbb{Z}$ :

$$\tilde{s}_i(t) = \begin{cases} t - 1 & , \text{si } t \equiv i + 1(\text{mod } n) \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv i(\text{mod } n) \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Y a la permutación  $s_0$  asociamos:

$$\tilde{s}_0(t) = \begin{cases} t + (n - 1) & , \text{si } t \equiv 1(\text{mod } n) \\ t - (n - 1) & , \text{si } t \equiv 0(\text{mod } n) \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Con estas correspondencias verificaremos que  $\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n-1}$  tienen el mismo diagrama de Dynkin, es decir, se deben cumplir las siguientes relaciones:

- 1)  $(\tilde{s}_i)^2 = Id$ , para  $0 \leq i < n$ .
- 2)  $m(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1}) = 3$ , para  $0 < i < n$ .
- 3)  $m(\tilde{s}_0, \tilde{s}_i) = 2$ , para  $1 < i < n - 1$ .
- 4)  $m(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1) = 3$ .
- 5)  $m(\tilde{s}_0, \tilde{s}_{n-1}) = 3$ .

Para demostrar estas relaciones sea  $t \in \mathbb{Z}$ .

- 1) Sea  $0 < i < n$  notemos que

Si  $t \equiv i + 1 \pmod{n}$  entonces  $t - 1 \equiv i \pmod{n}$ , luego

$$\tilde{s}_i(\tilde{s}_i(t)) = \tilde{s}_i(t - 1) = t$$

Por otro lado, si  $t \equiv i \pmod{n}$  se tiene que  $t + 1 \equiv i + 1 \pmod{n}$ , por lo cual

$$\tilde{s}_i(\tilde{s}_i(t)) = \tilde{s}_i(t + 1) = t$$

Para  $i = 0$ , observemos que

En el caso  $t \equiv 1 \pmod{n}$  obtenemos que  $t + (n - 1) \equiv 0 \pmod{n}$ , de esta manera

$$\tilde{s}_i(\tilde{s}_i(t)) = \tilde{s}_i(t + (n - 1)) = t$$

Si  $t \equiv 0 \pmod{n}$  entonces  $t - (n - 1) \equiv 1 \pmod{n}$ , o sea

$$\tilde{s}_i(\tilde{s}_i(t)) = \tilde{s}_i(t - (n - 1)) = t$$

Así concluimos que  $(\tilde{s}_i)^2 = Id$ , para  $0 \leq i < n$ .

- 2) Sea  $0 < i < n$ . Definimos la permutación  $\tilde{s}_{i+1}$  de la siguiente manera:

$$\tilde{s}_{i+1}(t) = \begin{cases} t - 1 & , \text{si } t \equiv i + 2 \pmod{n} \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv i + 1 \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Para calcular la compuesta lo haremos por casos.

- a) Si  $t \equiv i + 2 \pmod{n}$  entonces  $\tilde{s}_{i+1}(t) = t - 1$ , pero  $t - 1 \equiv i + 1 \pmod{n}$  por lo tanto,

$$\tilde{s}_i(\tilde{s}_{i+1}(t)) = \tilde{s}_i(t - 1) = t - 2$$

- b) En el caso  $t \equiv i + 1 \pmod{n}$  tenemos que  $\tilde{s}_{i+1}(t) = t + 1$  y  $\tilde{s}_i(t + 1) = t + 1$  o sea,

$$\tilde{s}_i(\tilde{s}_{i+1}(t)) = \tilde{s}_i(t + 1) = t + 1$$

- c) Ahora si  $t \equiv i \pmod{n}$  esto implica que  $\tilde{s}_{i+1}(t) = t$ , luego  $t \equiv i \pmod{n}$ , de esta forma

$$\tilde{s}_i(\tilde{s}_{i+1}(t)) = \tilde{s}_i(t) = t + 1$$

Luego, la compuesta de estas permutaciones está dada por:

$$\tilde{s}_i \tilde{s}_{i+1}(t) = \begin{cases} t - 2 & , \text{si } t \equiv i + 2 \pmod{n} \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv i + 1 \pmod{n} \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv i \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

A partir de lo anterior se obtiene fácilmente que  $(\tilde{s}_i \tilde{s}_{i+1})^3(t) = Id$ .

- 3) Como en  $\tilde{s}_0(t)$  sólo actúa sobre los elementos congruentes a 0 y 1 módulo  $n$  conmuta inmediatamente con todos los  $\tilde{s}_i(t)$ , con  $1 < i < n - 1$ .
- 4) Como ya conocemos  $\tilde{s}_0$ , nos falta determinar  $\tilde{s}_1$  la cual está definida por:

$$\tilde{s}_1(t) = \begin{cases} t - 1 & , \text{si } t \equiv 2 \pmod{n} \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv 1 \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Luego, siguiendo el procedimiento descrito en b) obtenemos:

$$\tilde{s}_0 \tilde{s}_1(t) = \begin{cases} t + (n - 2) & , \text{si } t \equiv 2 \pmod{n} \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv 1 \pmod{n} \\ t - (n - 1) & , \text{si } t \equiv 0 \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

De esta manera es claro que  $(\tilde{s}_0 \tilde{s}_1)^3(t) = Id$ .

- 5) Ya hemos descrito la permutación  $\tilde{s}_0$ , luego la permutación  $\tilde{s}_{n-1}$  está definida por:

$$\tilde{s}_{n-1}(t) = \begin{cases} t - 1 & , \text{si } t \equiv n \pmod{n} \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv n - 1 \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Continuando el procedimiento descrito en la parte b) se tiene que la compuesta de estas permutaciones está dada por:

$$\tilde{s}_0 \tilde{s}_{n-1}(t) = \begin{cases} t-1 & , \text{ si } t \equiv n \pmod{n} \\ t-(n-2) & , \text{ si } t \equiv n-1 \pmod{n} \\ t+(n-1) & , \text{ si } t \equiv 1 \pmod{n} \\ t & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

Además se obtiene que  $(\tilde{s}_0 \tilde{s}_{n-1})^3(t) = Id$ .

Con lo cual se satisfacen las condiciones del diagrama de Dynkin extendido.

### 9.3. El diagrama de Dynkin del grupo de Weyl de tipo $(\tilde{B}_n, n \geq 3)$ .

Consideremos el grupo  $\{1, -1\}^n \times S_n$  actuando en  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente manera,  $(t, \sigma)\Sigma\lambda_i e_i = \Sigma t_i \lambda_{\sigma(i)} e_i$ , luego para esta presentación del grupo de Coxeter tenemos que el sistema de raíces está determinado por:

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{\pm e_i\}$$

El sistema simple es:

$$\Delta = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n\}$$

por otra parte, la raíz suprema es  $\tilde{v} = e_1 + e_2$ .

Denotemos por  $s_i = s_{e_i - e_{i+1}}$ ;  $s_0 = s_{\tilde{v}, 1}$ ;  $s_n = s_{e_n}$ , con estas notaciones probaremos que:

- 1)  $(s_i)^2 = Id$ , para  $0 \leq i \leq n$ .
- 2)  $m(s_i, s_{i+1}) = 3$ .
- 3)  $m(s_i, s_j) = 2$ , si  $|i - j| > 2$ .
- 4)  $m(s_0, s_i) = 2$ , para  $0 < i < n$ , con  $i \neq 2$ .
- 5)  $m(s_0, s_2) = 3$ .
- 6)  $m(s_{n-1}, s_n) = 4$ .

En la sección grafos de Coxeter ya demostramos las primeras tres relaciones y la última. Para demostrar las otras dos relaciones consideremos  $z \in \mathbb{R}^n$ .

4) Notemos que  $s_0$  sólo actúa sobre la primera y segunda coordenada como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} s_0(z) &= z - (\langle z, e_1 + e_2 \rangle - 1)e_1 + e_2 \\ &= (z_1, \dots, z_n) - (z_1 + z_2 - 1)e_1 + e_2 \\ &= (z_1, \dots, z_n) - (z_1 + z_2 - 1, z_1 + z_2 - 1, \dots, 0) \\ &= (1 - z_2, 1 - z_1, z_3, \dots, z_n) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que ver que sucede con  $s_1$  ya que claramente conmuta con las otras reflexiones. Para esto, hacemos el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} (s_0 s_1)(z) &= s_0(s_1(z)) \\ &= s_0(z_2, z_1, z_3, \dots, z_n) \\ &= (1 - z_1, 1 - z_2, z_3, \dots, z_n) \end{aligned}$$

Con lo cual se observa claramente que  $(s_0 s_1)^2(z) = z$ .

5) Sean  $e_1 + e_2 \in \Phi$  y  $e_2 - e_3 \in \Delta$ . Entonces,

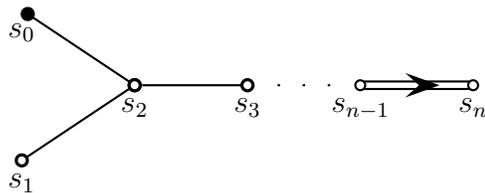
$$\begin{aligned} (s_0 s_2)(z) &= s_0(s_2(z)) \\ &= s_0(z_1, z_3, z_2, z_4, \dots, z_n) \\ &= (1 - z_3, 1 - z_1, z_2, z_4, \dots, z_n) \end{aligned}$$

De esta manera se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} (s_0 s_2)^2(z) &= (1 - z_2, z_3, 1 - z_1, z_4, \dots, z_n) \\ (s_0 s_2)^3(z) &= z \end{aligned}$$

Así, hemos demostrado las relaciones anteriormente dadas.

El diagrama de Dynkin extendido asociado al grupo de Weyl afín de tipo  $\widetilde{B}_n$ , con los vértices  $s_0, s_1, \dots, s_n$  esta determinado por:



**9.4. El grupo de Weyl afín de tipo  $(\widetilde{B}_n, n \geq 3)$  puede ser realizado como un subgrupo del grupo de permutaciones de  $\mathbb{Z}$ .** Con las notaciones de la subsección 9.3 y considerando el diagrama de Dynkin, establecemos la siguiente correspondencia:

Asociamos de la misma manera que en subsección 9.2 la siguiente permutación de  $\mathbb{Z}$ :

$$\tilde{s}_i(t) = \begin{cases} t-1 & , \text{si } t \equiv i+1 \pmod{n} \\ t+1 & , \text{si } t \equiv i \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Y las permutaciones de  $\mathbb{Z}$  relacionadas a  $s_0$  y  $s_n$  están dadas por:

$$\tilde{s}_0(t) = \begin{cases} -t+3 & , \text{si } t \equiv 2 \pmod{n} \\ -t+3 & , \text{si } t \equiv 1 \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\tilde{s}_n(t) = \begin{cases} -t & , \text{si } t \equiv n \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Debemos comprobar que estas asignaciones cumplen con las siguientes relaciones:

- 1)  $(\tilde{s}_i)^2 = Id$ , para  $0 \leq i \leq n$ .
- 2)  $m(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1}) = 3$ , para  $0 < i < n$ .
- 3)  $m(\tilde{s}_0, \tilde{s}_i) = 2$ , para  $0 < i < n$ , con  $i \neq 2$ .
- 4)  $m(\tilde{s}_0, \tilde{s}_2) = 3$ .
- 5)  $m(\tilde{s}_{n-1}, \tilde{s}_n) = 4$ .

Las primeras dos relaciones son inmediatas, por el ejercicio 4.

- 3) Como  $\tilde{s}_0$  solo actúa sobre los elementos congruentes a 1 y 2 módulo n, entonces solo tenemos que comprobar el hecho que  $m(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1) = 2$ . El elemento  $\tilde{s}_1$  está dado por:

$$\tilde{s}_1(t) = \begin{cases} t-1 & , \text{si } t \equiv 2 \pmod{n} \\ t+1 & , \text{si } t \equiv 1 \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

De esta manera la compuesta está dada por:

$$\tilde{s}_0\tilde{s}_1(t) = \begin{cases} -t+4 & , \text{si } t \equiv 2 \pmod{n} \\ -t+2 & , \text{si } t \equiv 1 \pmod{n} \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Con lo cual observamos que  $(\tilde{s}_0\tilde{s}_1)^2(t) = Id$ .

4) La permutación asociada a  $s_2$  se denota:

$$\tilde{s}_2(t) = \begin{cases} t - 1 & , \text{si } t \equiv 3(\text{mod } n) \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv 2(\text{mod } n) \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Entonces la compuesta se encuentra por:

$$\tilde{s}_0\tilde{s}_2(t) = \begin{cases} -t + 4 & , \text{si } t \equiv 3(\text{mod } n) \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv 2(\text{mod } n) \\ -t + 3 & , \text{si } t \equiv 1(\text{mod } n) \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

de donde se obtiene que  $(\tilde{s}_0\tilde{s}_2)^3(t) = Id$ .

5) Explicitamos  $\tilde{s}_{n-1}$  de la siguiente manera:

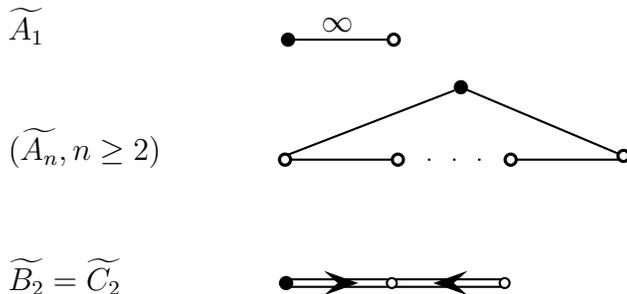
$$\tilde{s}_{n-1}(t) = \begin{cases} t - 1 & , \text{si } t \equiv n(\text{mod } n) \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv n - 1(\text{mod } n) \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

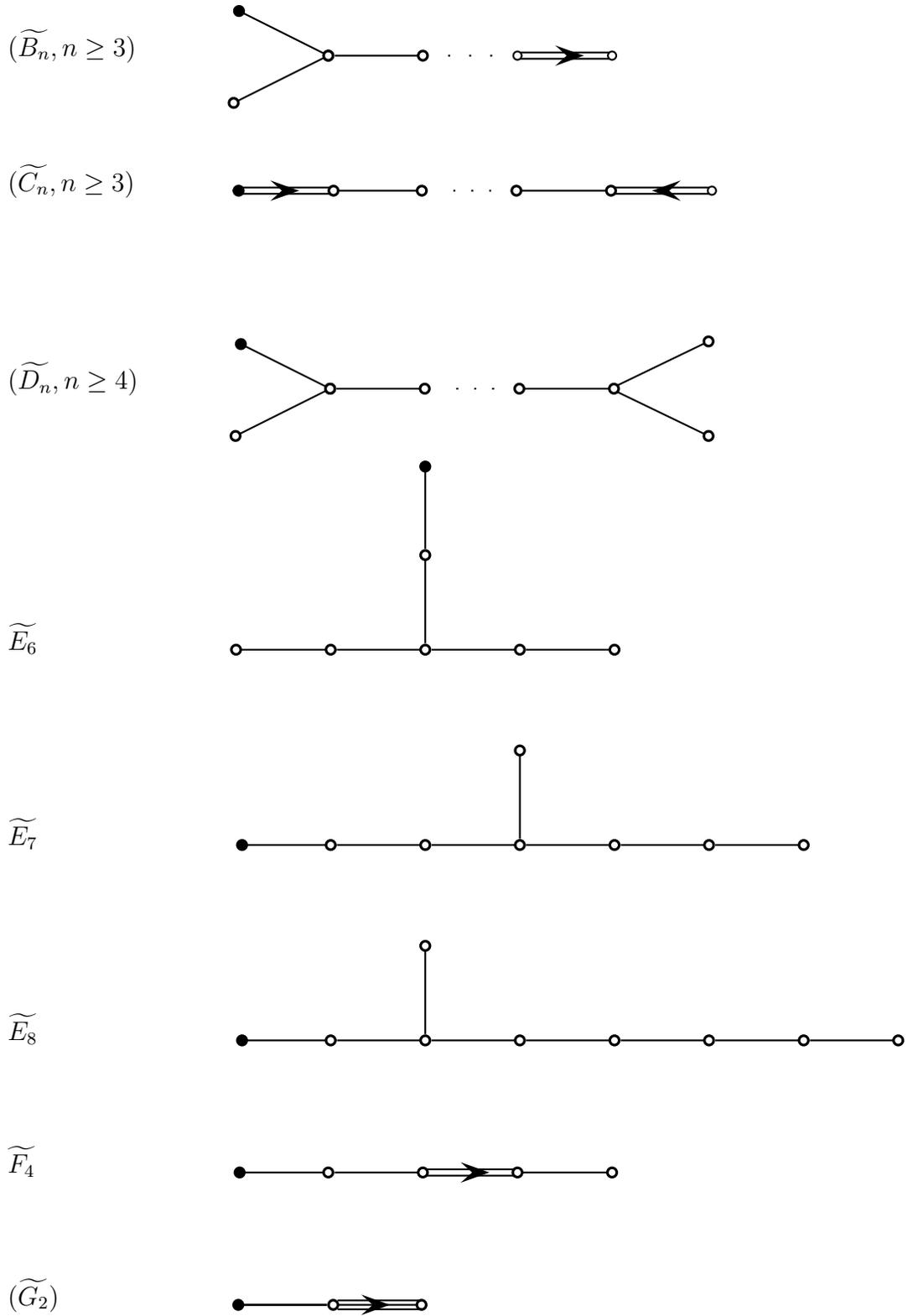
La compuesta está dada por:

$$\tilde{s}_{n-1}\tilde{s}_n(t) = \begin{cases} -t - 1 & , \text{si } t \equiv n(\text{mod } n) \\ t + 1 & , \text{si } t \equiv n - 1(\text{mod } n) \\ t & , \text{otro caso} \end{cases}$$

Es fácil verificar ahora que  $(\tilde{s}_{n-1}\tilde{s}_n)^4(t) = Id$ .

TEOREMA 45. Si  $(W_a, S_a)$  es un sistema de Coxeter irreducible, entonces su diagrama de Dynkin es alguno de los siguientes diagramas:





## El orden de un Grupo de Weyl

Sea  $(W_a, S_a)$  un sistema de Coxeter irreducible, en este capítulo nos dedicaremos a calcular el orden de este grupo según su tipo.

**Grupo de Weyl Afín:** Recordemos que  $W_a = T(\check{\mathcal{R}}) \rtimes W$ , donde  $W$  es un grupo de Weyl y  $\check{\mathcal{R}} \subset V$  es el reticulado de coraíces,  $T(\check{\mathcal{R}})$  el grupo de traslaciones sobre  $V$ . Todo elemento de  $W_a$  tiene como expresión única  $\lambda = t_z w$ , donde  $w \in W$  y  $t_z$  es la traslación inducida por  $z \in \check{\mathcal{R}}$ . La acción de  $W_a$  sobre  $V$  está dada por:

$$\lambda(x) = wx + z, \text{ con } x \in V$$

**Grupo de Weyl Afín Extendido:** El grupo de Weyl afín  $W_a$  puede ser extendido  $\widehat{W}_a$ , reemplazando el reticulado de coraíces  $\check{\mathcal{R}}$  con el copeso del reticulado  $\check{\mathcal{P}}$ .

Denotemos  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  la base dual asociada al sistema simple  $\Delta = \{v_1, \dots, v_n\}$ , es decir,  $\langle \bar{v}_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ , entonces por el lema 13 se tiene que,

$$\check{\mathcal{P}} = \mathbb{Z}\bar{v}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\bar{v}_n$$

Por la proposición 15 sabemos que  $\check{\mathcal{R}} \subset \check{\mathcal{P}}$ . De esta forma, definimos el grupo de Weyl afín extendido,

$$W_a \subset \widehat{W}_a = T(\check{\mathcal{P}}) \rtimes W$$

Además,  $W_a \trianglelefteq \widehat{W}_a$ .

**Estos grupos actúan sobre las cámaras:** La acción de  $W_a$  sobre  $V$ , también se puede extender a una acción de  $\widehat{W}_a$  sobre el mismo conjunto. Por proposición 33 tenemos que  $W_a$  actúa transitivamente sobre las cámaras contenidas en  $V$ . De igual manera la acción se extiende a  $\widehat{W}_a$  en las cámaras.

Recordemos que la cámara fundamental esta definida por:

$$\begin{aligned} A_o &= \{z \in V \mid (\forall u \in \Phi^+)(0 < \langle z, u \rangle < 1)\} \\ &= \{z \in V \mid (\forall v \in \Delta)(\langle z, v \rangle > 0) \text{ y } \langle z, \tilde{v} \rangle < 1\} \end{aligned}$$

donde  $\tilde{v}$  es la raíz suprema.

Sea  $\Gamma$  el estabilizador en  $\widehat{W}_a$  de la cámara fundamental, es decir,

$$\Gamma = \{\psi \in \widehat{W}_a \mid \psi A_0 = A_0\} \quad (3)$$

PROPOSICIÓN 46. *La acción de  $W_a$  sobre las cámaras verifica la siguiente igualdad,*

$$\widehat{W}_a = W_a \rtimes \Gamma.$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que tanto  $W_a$  como  $\Gamma$  son subgrupos de  $\widehat{W}_a$  y que  $W_a \cap \Gamma = \{e\}$ , pues como la acción de  $W_a$  sobre las cámaras es fiel, sólo la identidad fija cámaras en  $W_a$ .

Sea  $w \in \widehat{W}_a$ , luego  $wA_0 = B$ , donde  $B \in \mathcal{A}$  y como  $W_a$  actúa transitivamente sobre las cámaras, entonces existe  $w_1 \in W_a$  tal que  $w_1B = A_0$ . De esta manera obtenemos que,

$$w_1wA_0 = w_1B = A_0.$$

Esto implica que  $w_1w \in \Gamma$ . Luego,

$$w_1w = \psi, \text{ con } \psi \in \Gamma.$$

Así,

$$w = (w_1)^{-1}\psi \in W_a\Gamma.$$

Además,  $W_a \trianglelefteq \widehat{W}_a$ . Entonces,

$$\widehat{W}_a = W_a \rtimes \Gamma.$$

□

LEMA 47. *Sean  $\mathcal{R}$  el reticulado de raíces y  $\mathcal{P}$  el reticulado del peso, entonces,*

$$|\Gamma| = |\mathcal{P}/\mathcal{R}|.$$

DEMOSTRACIÓN. Esta demostración esta basada por la siguiente secuencia de identidades demostradas en el punto (1) del lema 27:

$$|\mathcal{P}/\mathcal{R}| = |\check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}}| = |\widehat{W}_a/W_a| = |\Gamma|$$

□

NOTACIÓN 4. *Denotemos por  $c_i$  los escalares que se obtienen al escribir la raíz suprema en combinación lineal de las raíces simples y  $|\Gamma| = f$ .*

Para las demostraciones de los dos siguientes lemas sea  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  base dual del sistema simple  $\Delta = \{v_1, \dots, v_n\}$ , es decir,  $\langle \bar{v}_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$  y consideremos el cubo dado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \left\{ \sum_i a_i \bar{v}_i \mid 0 \leq a_i \leq 1, \text{ con } i = 1, \dots, n \right\} \\ &= \{z \in V \mid 0 \leq \langle v_i, z \rangle \leq 1, \text{ con } i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Como  $\mathfrak{F}$  está limitado por los mismos hiperplanos que limitan las cámaras, cada cámara se encuentra al interior de  $\mathfrak{F}$  o es disjunta con el cubo. Para calcular el orden de los grupos de Weyl contaremos el número de cámaras al interior de  $\mathfrak{F}$  de dos diferentes maneras.

Para ello, consideremos un cubo más pequeño el cual denotaremos por  $\mathfrak{F}_o$  y se obtiene al reemplazar los vértices  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  por  $\left\{\frac{1}{c_1}\bar{v}_1, \dots, \frac{1}{c_n}\bar{v}_n\right\}$ , es decir,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_o &= \left\{ \sum_i \left(\frac{a_i}{c_i}\right) \bar{v}_i \mid 0 \leq a_i \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_i \lambda_i \bar{v}_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq \frac{1}{c_i} \right\} \end{aligned}$$

Denotemos por:

$$\mathfrak{F}_o^{k_1, \dots, k_n} = \left\{ \sum_i \lambda_i \bar{v}_i \mid \frac{k_i}{c_i} \leq \lambda_i \leq \frac{k_i + 1}{c_i} \right\}$$

LEMA 48. *Sea  $n$  el rango de  $W$ , entonces, el número de copias disjuntas en  $\mathfrak{F}$  de  $\mathfrak{F}_o$  es el número de cámaras en  $\mathfrak{F}_o$  por  $c_1 \cdots c_n$ .*

DEMOSTRACIÓN. De la definición de  $\mathfrak{F}_o$  se obtiene que  $\mathfrak{F}_o \subset \mathfrak{F}$ .

Entonces,  $\mathfrak{F}$  contiene  $\prod_{i=1}^n c_i$  copias disjuntas salvo fronteras de  $\mathfrak{F}_o$ , estas son  $\mathfrak{F}_o^{k_1, \dots, k_n}$ . Además, cada cámara en  $\mathfrak{F}$  se encuentra en una de estas copias de  $\mathfrak{F}_o$ , es decir,  $\mathfrak{F}_o^{k_1, \dots, k_n}$  y cada una contiene el mismo número de cámaras que  $\mathfrak{F}_o$ . De esta manera, tenemos que el número de cámaras en  $\mathfrak{F}$  es igual al número de cámaras en  $\mathfrak{F}_o$  por  $c_1 \cdots c_n$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 8. *Sea  $I = [0, 1]$  y  $I^r$  el  $r$ -cubo.*

*Un  $r$ -simplex se construye a partir de  $\{\mu_0, \dots, \mu_r\} \subset \mathbb{R}^n$  tal que*

$$[\mu_0, \dots, \mu_r] = \left\{ \sum_i x_i \mu_i \mid \sum_i x_i = 1 \right\}.$$

Probemos que el número de  $r$ -simplex disjuntos, salvo las paredes, contenidos en  $I^r$  es  $r!$ .

Es fácil verificar que en  $I^2$ , existen dos 2-simplex disjuntos, suponemos que hay  $r!$  simplex contenidos en  $I^r$ .

Notemos que,

$$\begin{aligned} I^{r+1} &= I^r \times I \\ &= \left( \bigcup_{j \in J} \Lambda_r^j \right) \times I \\ &= \bigcup_{j=1}^{r!} (\Lambda_r^j \times I) \end{aligned}$$

En cada uno de estos conjuntos  $\Lambda_r^j \times I$ , realizamos la siguiente descomposición.

Sea  $\Lambda_r = [\mu_0, \dots, \mu_r]$  un simplex en  $I^r$ , se definen,

$$C_0 = (\mu_0, 0); C_1 = (\mu_1, 0); \dots; C_r = (\mu_r, 0)$$

$$D_0 = (\mu_0, 1); D_1 = (\mu_1, 1); \dots; D_r = (\mu_r, 1)$$

y los

$$\Lambda_r^i = [C_0, C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, D_i, D_{i+1}, \dots, D_r] \quad (0 \leq i \leq r).$$

son las  $(r+1)$  copias en las cuales se descompone en  $(r+1)$ -simplex en conjunto  $\Lambda_r \times I$ .

De esta manera, el número de  $r$ -simplex disjuntos contenidos en  $I^r$  es  $r!$ .

LEMA 49. Sea  $n$  el rango de  $W$ , entonces, el número de cámaras en  $\mathfrak{F}_0$  es  $n!$ .

DEMOSTRACIÓN. Podemos identificar  $\mathfrak{F}_0$  con  $I^n$  y aplicando la descomposición anterior a  $\mathfrak{F}_0$ , tenemos que  $\left[0, \frac{1}{c_1}\bar{v}_1, \dots, \frac{1}{c_n}\bar{v}_n\right]$  lo identificamos con  $\overline{A_0}$ .

Por lo tanto,  $\mathfrak{F}_0$  es una unión de  $n!$  copias de  $\overline{A_0}$ , es decir, la unión de  $n!$  clausuras de cámaras.  $\square$

LEMA 50. Sea  $\mathcal{L}_1 = \{\psi \in \widehat{W}_a \mid \psi A_0 \subseteq \mathfrak{F}\}$ , entonces se tiene

$$\#W = \#\mathcal{L}_1$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $w \in W$ , demostraremos que existe un único  $u \in \check{\mathcal{P}}$  tal que  $\psi = t_u w$  envía  $A_0$  en  $\mathfrak{F}$ .

Para ello observemos que, dado  $z \in A_0$ ,  $w(z)$  está en una única cámara, luego por la proposición 29 existen  $k_i$  tales que,

$$k_i < \langle w(z), v_i \rangle < k_i + 1, \text{ donde } v_i \in \Delta.$$

Esto implica que,

$$0 < \langle w(z), v_i \rangle - k_i < 1$$

Sabemos que  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  es la base dual de  $\Delta$ . Entonces,

$$0 < \langle w(z), v_i \rangle - k_i \langle \bar{v}_i, v_i \rangle < 1$$

$$0 < \langle w(z), v_i \rangle - \sum_{j=1}^n k_j \langle \bar{v}_j, v_i \rangle < 1$$

$$0 < \langle w(z), v_i \rangle + \langle -\sum_{j=1}^n k_j \bar{v}_j, v_i \rangle < 1$$

De esta manera definimos  $u = -\sum_{j=1}^n k_j \bar{v}_j$  y obtenemos que,

$$0 < \langle w(z) + u, v_i \rangle < 1$$

$$0 < \langle t_u w(z), v_i \rangle < 1$$

Por lo tanto,  $t_u w(z) \in \mathfrak{F}$ .

Hemos demostrado que dado  $z$  en  $A_0$ , existe  $u \in \check{\mathcal{P}}$ , tal que  $t_u w(z) = \psi(z) \in \mathfrak{F}$ , luego  $\psi(A_0) \subseteq \mathfrak{F}$ , es decir,  $\psi \in \mathcal{L}_1$ .

Ahora probaremos que  $u \in \check{\mathcal{P}}$  está únicamente determinado por  $w$ .

Sean  $w \in W$ ,  $z \in A_0$ , luego tenemos las siguientes relaciones:

$$0 < \langle v, z \rangle < 1, \text{ si } v \in \Phi^+ \quad \text{y} \quad -1 < \langle v, z \rangle < 0, \text{ si } v \in \Phi^-$$

Estas inecuaciones y la identidad  $\langle wz, v \rangle = \langle z, w^{-1}v \rangle$  implican,

$$0 < \langle v, wz \rangle < 1, \text{ si } w^{-1}v > 0 \quad \text{y} \quad -1 < \langle v, wz \rangle < 0, \text{ si } w^{-1}v < 0 \quad (4)$$

Además, la condición  $\psi(z) \in \mathfrak{F}$  es equivalente a:

$$0 \leq \langle v, \psi(z) \rangle \leq 1, \quad \text{con } v \in \Delta.$$

Reemplazando  $\psi(z) = wz + u$ , en la inecuación anterior tenemos

$$0 \leq \langle v, wz \rangle + \langle v, u \rangle \leq 1, \quad \text{con } v \in \Delta. \quad (5)$$

Como  $\mathcal{R}$  y  $\check{\mathcal{P}}$  son reticulados duales, tenemos que  $\langle v, u \rangle \in \mathbb{Z}$ . Luego, el valor exacto de  $\langle v, u \rangle$  están forzados por las inecuaciones en (4) y (5). De esta manera, si  $w^{-1}v > 0$ , entonces  $\langle v, u \rangle = 0$  y cuando  $w^{-1}v < 0$ , entonces  $\langle v, u \rangle = 1$ . Así,  $u$  está únicamente determinado por  $w$ .

Por lo tanto,

$$\#W = \#\{\psi \in \widehat{W}_a \mid \psi A_0 \subseteq \mathfrak{F}\}$$

□

LEMA 51. *El número de cámaras en  $\mathfrak{F}$  es igual a  $|W| / |\Gamma|$ .*

DEMOSTRACIÓN. Con las notaciones dadas anteriormente, se define

$$\mathcal{L} = \{B \subseteq \mathfrak{F} \mid B \text{ es una cámara}\}$$

Debemos demostrar que  $\#\mathcal{L} = \#\mathcal{L}_1 / \#\Gamma$ .

Para ello, sea  $B \in \mathcal{L}$  y consideremos el conjunto:

$$\mathcal{L}_2(B) = \{\psi \in \mathcal{L}_1 \mid \psi A_0 = B\}$$

Observemos lo siguiente:

i) Si  $\psi_1 A_0 = \psi_2 A_0$ , entonces  $\psi_2^{-1} \psi_1 A_0 = A_0$ . De esta manera,

$$\psi_2^{-1} \psi_1 \in \Gamma$$

ii) Si  $\psi_2 A_0 = B$ , entonces  $(\psi_2 \circ \gamma) A_0 = B, \forall \gamma \in \Gamma$ .

Por i) y ii) tenemos que

$$\psi_2^{-1} \psi_1 \in \Gamma \Rightarrow \psi_1 = \psi_2 \circ \gamma, \text{ para algún } \gamma \in \Gamma.$$

Con lo cual se obtiene que,

$$\#\mathcal{L}_2(B) = \#\Gamma$$

Notemos que,

$$\mathcal{L}_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{L}} \mathcal{L}_2(B)$$

Esto implica que,

$$\begin{aligned} \#\mathcal{L}_1 &= \sum_{B \in \mathcal{L}} \#(\mathcal{L}_2(B)) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{L}} \#\Gamma \\ &= \#\mathcal{L} \#\Gamma \end{aligned}$$

Sabemos por el lema anterior que

$$\#W = \#\mathcal{L}_1$$

Entonces,

$$\#\mathcal{L} = \#W/\#\Gamma$$

□

TEOREMA 52. Si  $W$  es un grupo de Weyl irreducible de rango  $n$ , entonces,

$$|W| = n!c_1 \cdots c_n f.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inmediata por los lemas anteriores. Pues, por los lemas 48 y 49 junto con el lema anterior se tiene que:

$$|W| / |\Gamma| = n!c_1 \cdots c_n$$

Esto implica que,

$$|W| = n!c_1 \cdots c_n |\Gamma|$$

Luego, por el lema 47 se obtiene lo deseado:

$$|W| = n!c_1 \cdots c_n f$$

□

EJEMPLO 10. Determinemos el orden de los grupos de Weyl de tipo  $(A_n, n \geq 1)$ .

SOLUCIÓN 10. Recordemos que el sistema de raíces está dado por:

$$\Phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j, 0 \leq i, j \leq n+1\}$$

Un sistema simple para  $\Phi$  es:

$$\Delta = \{e_1 - e_2, \dots, e_n - e_{n+1}\}$$

donde  $\tilde{v} = e_1 - e_{n+1}$ . Observemos que  $\Phi = \check{\Phi}$  y  $\Delta = \check{\Delta}$ .

Primero determinemos los coeficientes  $c_1, \dots, c_n$ , los cuales se obtienen al escribir la raíz suprema en combinación lineal de  $\Delta$ , es decir,

$$\begin{aligned} (1)(e_1 - e_2) + (1)(e_2 - e_3) + \cdots + (1)(e_n - e_{n+1}) &= \sum_{i=1}^n (e_i - e_{i+1}) \\ &= e_1 - e_{n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $c_i = 1$ , para  $1 \leq i \leq n$ .

Ahora calcularemos el valor de  $f = |\mathcal{P}/\mathcal{R}|$ , que inicialmente haremos el caso particular  $n = 3$  para luego generalizar.

Para ello sea,

$$\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4\} = \check{\Delta}$$

Calculemos los pesos simples  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$  del sistema  $\Delta$ .

Sea  $\bar{v}_1 = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Luego,

$$\langle \bar{v}_1, e_1 - e_2 \rangle = 1 \quad ; \quad \langle \bar{v}_1, e_2 - e_3 \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \bar{v}_1, e_3 - e_4 \rangle = 0$$

De esto concluimos que,

$$a - b = 1 \quad ; \quad b - c = 0 \quad ; \quad c - d = 0.$$

Luego,

$$\bar{v}_1 = (b + 1, b, b, b)$$

Análogamente en  $\bar{v}_2 = (a, b, c, d)$ , tenemos que,

$$0 = \langle \bar{v}_2, e_1 - e_2 \rangle = a - b$$

$$1 = \langle \bar{v}_2, e_2 - e_3 \rangle = b - c$$

$$0 = \langle \bar{v}_2, e_3 - e_4 \rangle = c - d$$

Entonces,

$$\bar{v}_2 = (c + 1, c + 1, c, c)$$

De la misma manera, para  $\bar{v}_3 = (a, b, c, d)$  se tiene,

$$0 = \langle \bar{v}_3, e_1 - e_2 \rangle = a - b$$

$$0 = \langle \bar{v}_3, e_2 - e_3 \rangle = b - c$$

$$1 = \langle \bar{v}_3, e_3 - e_4 \rangle = c - d$$

Así obtenemos,

$$\bar{v}_3 = (d + 1, d + 1, d + 1, d)$$

Por lo tanto, los pesos simples están dados por:

$$\bar{v}_1 = (b + 1, b, b, b)$$

$$\bar{v}_2 = (c + 1, c + 1, c, c)$$

$$\bar{v}_3 = (d + 1, d + 1, d + 1, d)$$

Como las raíces simples se escriben en combinación lineal de los pesos se tiene que,

Para  $e_1 - e_2 = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \alpha_3 \bar{v}_3$

$$\langle e_1 - e_2, e_1 - e_2 \rangle = 2 = \alpha_1$$

$$\langle e_1 - e_2, e_2 - e_3 \rangle = -1 = \alpha_2$$

$$\langle e_1 - e_2, e_3 - e_4 \rangle = 0 = \alpha_3$$

Luego,

$$e_1 - e_2 = 2\bar{v}_1 - \bar{v}_2, \text{ desarrollando nos queda, } 2b - c = 0$$

En  $e_2 - e_3 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \bar{v}_i$ , se tiene que,

$$e_2 - e_3 = -\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 - \bar{v}_3, \text{ es decir, } 2c - b - d = 0$$

Por último, para  $e_3 - e_4 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \bar{v}_i$ , obtenemos,

$$e_3 - e_4 = -\bar{v}_2 + 2\bar{v}_3, \text{ entonces, } 2d - c = -1$$

De esta manera se obtiene el sistema,

$$\left. \begin{array}{l} 2b - c = 0 \\ 2c - b - d = 0 \\ 2d - c = -1 \end{array} \right\}$$

Cuyas soluciones son:  $b = -\frac{1}{4}$ ;  $c = -\frac{1}{2}$ ;  $d = -\frac{3}{4}$ .

Notemos que,

$$2b = c \quad y \quad 3b = d \tag{6}$$

Entonces los pesos simples están explícitados por:

$$\bar{v}_1 = \left( \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$$

$$\bar{v}_2 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\bar{v}_3 = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4} \right)$$

Ahora, observemos el cociente  $\mathcal{P}/\mathcal{R}$ , donde

$$\mathcal{P} = \mathbb{Z} \left( e_1 - \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \right) \oplus \mathbb{Z} \left( e_1 + e_2 - \frac{2}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \right) \oplus$$

$$\mathbb{Z} \left( e_1 + e_2 + e_3 - \frac{3}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \right)$$

$$\mathcal{R} = \mathbb{Z}(e_1 - e_2) \oplus \mathbb{Z}(e_2 - e_3) \oplus \mathbb{Z}(e_3 - e_4)$$

Además,

$$4\bar{v}_1 = (3, -1, -1, -1) \in \mathcal{R}$$

$$4\bar{v}_2 = (2, 2, -2, -2) \in \mathcal{R}$$

$$4\bar{v}_3 = (1, 1, 1, -3) \in \mathcal{R}$$

Luego,

$$e_1 - e_2 = 2\bar{v}_1 - \bar{v}_2 \iff 2\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \pmod{\mathcal{R}}$$

$$e_2 - e_3 = -\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 - \bar{v}_3 \iff 3\bar{v}_1 = \bar{v}_3 \pmod{\mathcal{R}},$$

donde,  $4\bar{v}_1 = 0 \pmod{\mathcal{R}}$ .

**En general**, sea  $\bar{v}_j = \sum_i x_i^j e_i \in \mathbb{R}^n$ , luego tenemos que,

$$\langle \bar{v}_j, e_i - e_{i+1} \rangle = x_i^j - x_{i+1}^j, \text{ con } j \text{ fijo,}$$

donde  $x_i^j - x_{i+1}^j = \delta_{ij}$ .

La solución de esta ecuación es:

$$\bar{v}_j = \alpha_j \sum_{i=1}^n e_i + \sum_{i=1}^j e_i$$

Además,

$$e_i - e_{i+1} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{v}_j$$

De esta manera, para  $1 < j < n - 1$  tenemos,

$$\begin{aligned} e_j - e_{j+1} &= -\bar{v}_{j-1} + 2\bar{v}_j - \bar{v}_{j+1} \\ &= (\alpha_{j-1} + 2\alpha_j - \alpha_{j+1}) \sum_{i=1}^n e_i + (e_j - e_{j+1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-\alpha_{j-1} + 2\alpha_j - \alpha_{j+1} = 0$$

Por (6) deducimos que  $\alpha_k = k\alpha_1$ , lo cual demostraremos por inducción.

Supongamos que  $\alpha_k = k\alpha_1$  y demostremos que  $\alpha_{k+1} = (k+1)\alpha_1$ . Para esto, sabemos que,

$$\begin{aligned} 0 &= -\alpha_{k-1} + 2\alpha_k - \alpha_{k+1} \\ &= -(k-1)\alpha_1 + 2k\alpha_1 - \alpha_{k+1} \\ &= (2k - k + 1)\alpha_1 - \alpha_{k+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\alpha_k = k\alpha_1$$

Además, para la última ecuación,  $-\alpha_{n-1} + 2\alpha_n = -1$ . Se tiene que,

$$\begin{aligned} -1 &= -\alpha_{n-1} + 2\alpha_n \\ &= -(n-1)\alpha_1 + 2n\alpha_1 \\ &= (n+1)\alpha_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{n+1}$$

Además,

$$\alpha_k = k\alpha_1 = -\frac{k}{n+1}$$

Así, los pesos simples están dados por,

$$\bar{v}_k = \sum_{j=1}^k e_j - \frac{k}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} e_j$$

Recordemos que,

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\bar{v}_i \quad \text{y} \quad \mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}(e_i - e_{i+1})$$

Análogamente a la inducción anterior tenemos que,

$$\bar{v}_k = k\bar{v}_1 \pmod{\mathcal{R}}$$

y

$$(n+1)\bar{v}_1 = \sum_{j=1}^n (n-j)(e_j - e_{j+1})$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{P}/\mathcal{R} \cong \mathbb{Z}_{n+1}$$

Entonces,

$$|\mathcal{P}/\mathcal{R}| = n+1$$

De lo anterior, obtenemos que,

$$\begin{aligned} \#W &= n!(1 \cdot \dots \cdot 1)(n+1) \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

EJEMPLO 11. Calcular el orden de los grupos de Weyl de tipo  $(B_n, n \geq 2)$ .

SOLUCIÓN 11. *Tenemos que el sistema de raíces esta dada por:*

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{\pm e_i\}$$

*Un sistema simple para  $\Phi$  es:*

$$\Delta = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n\},$$

*donde  $\tilde{v} = e_1 + e_2$ . Además observemos que,*

$$\check{\Phi} = \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{\pm 2e_i\}$$

$$\check{\Delta} = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, 2e_n\}$$

*Para calcular los coeficientes de  $\tilde{v}$  en  $\Delta$ , notemos que,*

$$\begin{aligned} (1)(e_1 - e_2) + (2)(e_2 - e_3) + \dots + (2)e_n &= (1)(e_1 - e_2) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} (e_i - e_{i+1}) + 2e_n \\ &= e_1 - e_2 + 2(e_2 - e_n) + 2e_n \\ &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

*Por lo cual,  $c_1 = 1$  y  $c_i = 2$ , para  $2 \leq i \leq n$ .*

*Ahora determinemos el valor de  $f = |\check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}}|$  para el caso  $n = 3$ .*

*Calculemos los duales del sistema simple  $\Delta$  que denotaremos por  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$  y cumplen con que  $\langle \bar{v}_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ , donde  $v_j \in \Delta$ , para ello*

*Sea  $\bar{v}_1 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , entonces,*

$$1 = \langle \bar{v}_1, e_1 - e_2 \rangle = a - b$$

$$0 = \langle \bar{v}_1, e_2 - e_3 \rangle = b - c$$

$$0 = \langle \bar{v}_1, e_3 \rangle = c$$

*Por lo cual,  $\bar{v}_1 = (1, 0, 0)$*

*De igual forma, en  $\bar{v}_2 = (a, b, c)$  tenemos,*

$$0 = \langle \bar{v}_2, e_1 - e_2 \rangle = a - b$$

$$1 = \langle \bar{v}_2, e_2 - e_3 \rangle = b - c$$

$$0 = \langle \bar{v}_2, e_3 \rangle = c$$

*Entonces,  $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$*

Para  $\bar{v}_3 = (a, b, c)$ , se tiene que,

$$0 = \langle \bar{v}_3, e_1 - e_2 \rangle = a - b$$

$$0 = \langle \bar{v}_3, e_2 - e_3 \rangle = b - c$$

$$1 = \langle \bar{v}_3, e_3 \rangle = c$$

Por lo tanto,

$$\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$$

Así,

$$\bar{v}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$$

$$\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$$

Además, los elementos en  $\check{\Delta}$  se escriben en combinación lineal de los duales del sistema simple  $\Delta$ , es decir,

$$e_1 - e_2 = 2\bar{v}_1 - \bar{v}_2$$

$$e_2 - e_3 = -\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 - \bar{v}_3$$

$$2e_3 = -2\bar{v}_2 + 2\bar{v}_3$$

Sabemos que,

$$\check{\mathcal{P}} = \bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}\bar{v}_i$$

Describamos  $\check{\mathcal{P}}$  y  $\check{\mathcal{R}}$  para luego estudiar el cociente  $\check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}}$ , entonces,

$$\check{\mathcal{P}} = \mathbb{Z}(e_1) \oplus \mathbb{Z}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3)$$

$$\check{\mathcal{R}} = \mathbb{Z}(e_1 - e_2) \oplus \mathbb{Z}(e_2 - e_3) \oplus \mathbb{Z}(2e_3)$$

Claramente se observa que,

$$2\bar{v}_1 = (2, 0, 0) \in \check{\mathcal{R}}$$

$$2\bar{v}_2 = (2, 2, 0) \in \check{\mathcal{R}}$$

$$2\bar{v}_3 = (1, 1, 1) \in \check{\mathcal{R}}$$

Luego,

$$e_1 - e_2 = 2\bar{v}_1 - \bar{v}_2 \iff 2\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \pmod{\mathcal{R}}$$

$$e_2 - e_3 = -\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 - \bar{v}_3 \iff 3\bar{v}_1 = \bar{v}_3 \pmod{\mathcal{R}},$$

donde,  $2\bar{v}_1 = 0(\text{mod } \mathcal{R})$ .

En general, los duales al sistema simple están dados por:

$$\bar{v}_k = e_1 + \dots + e_k, \text{ para } 1 \leq k \leq n.$$

Los cuales análogamente al ejemplo anterior satisfacen que,

$$\bar{v}_k = k\bar{v}_1 \in \check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}}$$

y

$$\begin{aligned} 2\bar{v}_1 &= 2(e_1 - e_2) + \dots + 2(e_{n-1} - e_n) + 2e_n \\ &= 2e_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}} \cong \mathbb{Z}_2$$

Entonces,

$$|\check{\mathcal{P}}/\check{\mathcal{R}}| = 2$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \#W &= n!(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)2 \\ &= n!2^n \end{aligned}$$

TEOREMA 53. *Sea  $W$  un grupo de Weyl irreducible, entonces la siguiente tabla resume las características y el cardinal de  $W$ , en efecto, la primera columna nos muestra el tipo de grupo, a continuación los coeficientes de la raíz suprema, en la tercera el orden del índice de conexión, y finalmente, la cuarta columna muestra el cardinal de  $W$ .*

Tipo	Coefficientes de $\tilde{\nu}$	$f$	$\#W$
$A_n$	$1, 1, \dots, 1$	$n + 1$	$(n + 1)!$
$B_n$	$1, 2, 2, \dots, 2$	2	$n! 2^n$
$C_n$	$2, 2, \dots, 2, 1$	2	$n! 2^n$
$D_n$	$1, 2, \dots, 2, 1, 1$	4	$n! 2^{n-1}$
$E_6$	$1, 2, 2, 3, 2, 1$	3	$n! 2^3 3^2$
$E_7$	$2, 2, 3, 4, 3, 2, 1$	2	$n! 2^6 3^2$
$E_8$	$2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 2$	1	$n! 2^6 3^2 30$
$F_4$	$2, 3, 4, 2$	1	$n! 2^4 3$
$G_2$	$3, 2$	1	$n! 6$

## Bibliografía

- [1] James E.Humphreys, *Reflectiongroups and Coxeter groups K*, Cambridge University Press.
- [2] Richard Kane, *Reflection Groups and Invariant Theory*, Springer, Canadian Mathematical Society.
- [3] Roberto Medina, *Grupos de Reflexiones Finitos*, Tesis de Licenciatura, Universidad de Valparaíso 2006.